



REDES DE  
INVESTIGACIÓN  
E INNOVACIÓN  
EN DOCENCIA  
UNIVERSITARIA

VOLUMEN  
**2019**

XARXES D'INVESTIGACIÓ I  
INNOVACIÓ EN DOCÈNCIA  
UNIVERSITÀRIA

**VOLUM 2019**

Roig Vila, R. (Coord.)  
Lledó Carreres, A.  
Antolí Martínez, J.M.  
Pellín Buades, N. (Eds.)

# Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria. Volumen 2019

ROSABEL ROIG-VILA (COORD.),  
JORDI M. ANTOLÍ MARTÍNEZ, ASUNCIÓN LLEDÓ CARRERES & NEUS PELLÍN BUADES  
(EDS.)

*Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria. Volumen 2019*

*Edició / Edición: Rosabel Roig-Vila (Coord.), Jordi M. Antolí Martínez, Asunción Lledó Carreres & Neus Pellín Buades (Eds.)*

*Comité editorial internacional:*

*Prof. Dr. Julio Cabero Almenara, Universidad de Sevilla*

*Prof. Dr. Antonio Cortijo Ocaña, University of California at Santa Barbara*

*Prof. Dr. Ricardo Da Costa, Universidade Federal Espiritu Santo, Brasil*

*Prof. Manuel León Urrutia, University of Southampton*

*Prof. Dr. Enric Mallorquí-Ruscalleda, Indiana University-Purdue University, Indianapolis*

*Prof. Dr. Santiago Mengual Andrés, Universitat de València*

*Prof. Dr. Fabrizio Manuel Sirignano, Università degli Studi Suor Orsola Benincasa di Napoli*

*Prof. Dr. Alexander López Padrón, Universidad Técnica de Manabí, Ecuador*

*Revisió i maquetació: ICE de la Universitat d'Alacant/ Revisión y maquetación: ICE de la Universidad de Alicante*

*Revisora tècnica/ Revisora técnica: Neus Pellín Buades*

*Primera edició: novembre 2019*

*© De l'edició/ De la edición: Rosabel Roig-Vila, Jordi M. Antolí Martínez, Asunción Lledó Carreres & Neus Pellín Buades*

*© Del text: les autores i autors / Del texto: las autoras y autores*

*© D'aquesta edició: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / De esta edición: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante*

*ice@ua.es*

*ISBN: 978-84-09-07186-9*

*Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només pot ser realitzada amb l'autorització dels seus titulars, llevat de les excepcions previstes per la llei. Adreceu-vos a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra. / Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, [www.cedro.org](http://www.cedro.org)) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.*

*Producció: Institut de Ciències de l'Educació (ICE) de la Universitat d'Alacant / Producción: Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la Universidad de Alicante*

*EDITORIAL: Les opinions i continguts dels textos publicats en aquesta obra són de responsabilitat exclusiva dels autors. / Las opiniones y contenidos de los textos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de los autores.*

## 10. Recursos computacionales algebraicos en el Grado en Matemáticas

Ortiz Sotomayor, Víctor Manuel<sup>1</sup>; Soler Escrivà, Xaro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Universitat Politècnica de València, vicorso@doctor.upv.es*

<sup>2</sup>*Universitat d'Alacant, xaro.soler@ua.es*

### RESUMEN

Las asignaturas de álgebra del Grado en Matemáticas de la Universidad de Alicante están orientadas a mostrar contenidos teóricos, esenciales en el avance del conocimiento de la matemática pura, y también contenidos prácticos. Esta componente práctica resulta crucial a la hora de entender la parte teórica, ya que los ejemplos reflejan los conceptos y resultados estudiados previamente. Sin embargo, debido a la limitación en horas de clases presenciales, los cálculos necesarios para presentar completamente los ejemplos en el aula se omiten con frecuencia, o directamente se opta por no exponerlos. Dentro de este contexto, surge de manera natural la utilización de técnicas computacionales que permitan facilitar y mejorar la impartición de contenidos prácticos algebraicos en el aula. Nuestro objetivo general ha sido paliar este déficit mediante la implantación del programa informático GAP (Groups, Algorithms and Programming) en algunas asignaturas optativas de álgebra. En el presente trabajo exponemos las acciones desarrolladas con el programa en el aula, las cuales han sido evaluadas positivamente por parte del alumnado mediante encuestas anónimas realizadas. En general, podemos concluir que los estudiantes han comprendido mejor los conceptos teóricos y han estado motivados por la materia, independientemente de su abstracción matemática.

**PALABRAS CLAVE:** álgebra computacional, estructuras algebraicas, GAP, innovación educativa

## 1.INTRODUCCIÓN

Dentro del plan de estudios del Grado en Matemáticas de la Universidad de Alicante, las diversas asignaturas de álgebra suman un total de 42 créditos ECTS. En dichas asignaturas se tiene un doble objetivo: por un lado, formar a los estudiantes en el conocimiento de las principales estructuras algebraicas abstractas (grupos, semigrupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc.); y, por otro lado, mostrarles aplicaciones prácticas de dichas estructuras abstractas en diferentes ámbitos. En particular, la creación de ejemplos concretos donde se vean reflejadas las nociones teóricas estudiadas en clase resulta fundamental para los estudiantes, tanto por el interés que despiertan estos ejemplos por sí mismos, como para la mejor comprensión de dichos contenidos conceptuales, que requieren un alto grado de abstracción.

Sin embargo, un hándicap importante a considerar durante las exposiciones de las construcciones ejemplificadoras es el largo tiempo que conlleva realizar dichos cálculos a mano. En muchas ocasiones, ante la escasez de tiempo en el aula, estos ejemplos se presentan ya contruidos directamente al alumnado; otras veces se opta directamente por omitirlos. Generalmente, este problema es uno de los más manifestados por parte del alumnado en las asignaturas de matemáticas: el pequeño número de ejemplos mostrados en clase. En este contexto, aparece de manera natural la utilización de instrumentos computacionales que ayuden a solventar esta situación. De hecho, esta estrategia es utilizada por una gran cantidad de profesionales docentes, incluso en otras ramas científicas distintas de las matemáticas, tal y como se puede ver en la abundante bibliografía al respecto (a modo de ejemplo, véase Furlan, Giménez, Monsoriu, y Pons, 2010 o Nalon, Barbosa, y Nascimento, 2018). Cabe destacar que este tipo de herramientas docentes convierten, además, el proceso de enseñanza-aprendizaje en algo dinámico y participativo para los estudiantes, que pueden investigar y consolidar los conocimientos teóricos aprendidos o desarrollar nuevas ideas que les puedan surgir. Por otra parte, no debemos dejar de lado la importancia de la tecnología en la formación del alumnado, que desarrolla así sus conocimientos informáticos y sus habilidades en el manejo de dispositivos digitales, propiedades fundamentales actualmente para su futuro personal y profesional.

En nuestra red docente, con referencia 17865, nuestro principal objetivo ha sido la implantación preliminar de un software algebraico computacional en dos asignaturas optativas del último curso académico del Grado de Matemáticas: Teoría de Códigos y Teoría de Grupos. La elección de dichas asignaturas responde principalmente al número relativamente reducido de estudiantes, lo cual permite una interacción más cercana y directa entre el alumnado y el profesorado, facilitando tanto la implementación como la evaluación de la experiencia. En cuanto al instrumento elegido, entre la gran cantidad de softwares disponibles hemos optado por el programa GAP (véase la referencia The GAP Group), principalmente por su manejo sencillo e intuitivo y por ser de distribución libre, imprescindible para que los alumnos puedan trabajar también en sus hogares. Además, en la web están disponibles multitud de manuales gratuitos que combinan el álgebra abstracta y el software GAP, lo

cual era idóneo para que los estudiantes pudiesen trabajar de manera autónoma en sus hogares. A modo de ejemplo, véase el manual Rainbolt y Gallian, 2003.

En la presente comunicación mostramos las experiencias desarrolladas en el aula con GAP en ambas asignaturas con el fin de paliar los problemas descritos anteriormente. Hemos de mencionar que es la primera vez que se aborda el uso de algún programa informático en asignaturas de álgebra del Grado de Matemáticas, a diferencia de otras asignaturas más aplicadas del plan de estudios como el Cálculo Numérico.

## 2. OBJETIVOS

Como hemos comentado anteriormente, el objetivo general de la red docente ha sido la implantación preliminar del software de álgebra discreta GAP en algunas asignaturas de álgebra del Grado en Matemáticas con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula. Concretamente, se ha optado por las asignaturas Teoría de Códigos y Teoría de Grupos, ya que son dos asignaturas optativas con poco alumnado, lo cual ha facilitado enormemente la experiencia. Por otro lado, los caracteres de ambas asignaturas son completamente distintos: la primera es principalmente aplicada mientras que la segunda es eminentemente teórica.

Los conceptos algebraicos principales que aparecen como base en las asignaturas anteriores – grupos, cuerpos y subespacios vectoriales – (las definiciones se pueden encontrar en Hungerford, 1974 o Isaacs, 2009) es teórica y abstracta, incluso en el universo finito, y frecuentemente los estudiantes encuentran difícil su comprensión. A la hora de mostrar los primeros ejemplos de estas estructuras, aparecen diversos cálculos (matriciales, vectoriales, polinomiales, etc.) que consumen un gran tiempo en el aula; a veces incluso resultan inviables a la hora de aumentar ligeramente el grado de dificultad de los mismos, donde aparecen las primeras propiedades teóricas más interesantes. Consecuentemente, pretendíamos ayudarnos de la tecnología informática disponible a nuestro alcance para profundizar en dichas estructuras y analizar sus propiedades. Además, de esta forma, el proceso de enseñanza-aprendizaje se transforma de la usual clase-magistral a una actividad donde el alumno cobra mucho más protagonismo pues interactúa directamente con los contenidos.

Así pues, los objetivos específicos del equipo docente en esta experiencia se podrían resumir en los siguientes apartados:

1. Mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las estructuras algebraicas abstractas.
2. Aumentar la motivación del alumnado en las asignaturas de álgebra.
3. Crear una mayor participación del alumnado en el aula.
4. Mejorar la interacción del alumnado con los conceptos algebraicos teóricos.

5. Ampliar el número de construcciones ejemplificadoras de las estructuras teóricas estudiadas en clase.

### 3. DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Las asignaturas Teoría de Códigos y Teoría de Grupos del Grado en Matemáticas constan de 6 créditos ECTS cada una y se imparten en el primer y segundo cuatrimestre del último curso académico, respectivamente. En las primeras sesiones de clase se ha optado por introducir de manera teórica en el aula convencional los conceptos mencionados en la sección anterior. Una vez avanzado el curso unas semanas, se ha procedido a realizar algunas prácticas en aulas informáticas, donde los alumnos disponían de ordenadores para poder experimentar con el programa a la vez que el profesorado.

La primera clase en el aula de informática de cada asignatura se ha dedicado a introducir el software GAP, desconocido hasta el momento para el alumnado. El objetivo de esta primera clase ha sido que el alumnado se familiarice con el lenguaje de programación, los paquetes y las amplias librerías de GAP. Especialmente, se puso énfasis en la ayuda online disponible del programa y en el abundante material complementario existente en la web.

En las sesiones prácticas posteriores, se seleccionaron algunos ejercicios de una lista de problemas prácticos que debían resolver. Por ejemplo, en la asignatura Teoría de Códigos, los alumnos utilizaron la capacidad computacional de GAP para comprobar rápidamente si un determinado conjunto de palabras código formaban un código lineal o no y, en caso afirmativo, hallar sus parámetros. Además, cuando se les proporcionaba un código lineal mediante una matriz generadora, calcularon con GAP todas sus palabras código de manera inmediata, incluso cuando el cuerpo finito involucrado no era el canónico de dos elementos; los alumnos podían calcular las multiplicaciones en dicho cuerpo finito sin necesidad de recurrir a la tabla correspondiente, tal y como se hace a mano. Otra actividad importante donde se vislumbró las ventajas computacionales de GAP es el análisis de la sistematicidad de un código lineal, ya que esto conlleva una reducción matricial de tipo Gauss a la matriz generadora con entradas en un cuerpo finito, cálculos siempre tediosos de realizar a mano. Finalmente, las tablas de síndromes y líderes se calcularon de forma inmediata con el comando correspondiente en GAP. También se plantearon durante la clase práctica diversas modificaciones en los datos de los enunciados para ver su impacto en los parámetros del código. La idea era que los estudiantes analizaran e investigaran diversas construcciones de códigos lineales y sus parámetros más importantes. Las soluciones de los ejercicios propuestos se compartían de manera oral y se discutían entre todos, fomentando así de manera paralela competencias transversales como puedan ser la comunicación efectiva o el trabajo en equipo. Esta línea de trabajo en las prácticas también se siguió en Teoría de Grupos, donde los alumnos pudieron construir grupos de orden relativamente grande, como los grupos simétricos o alternados. Se realizaron diversas construcciones de productos directos y semidirectos, y los cálculos de los elementos de un grupo concreto, de todos sus subgrupos o sus clases de conjugación se realizaron de manera inmediata gracias a GAP. De nuevo, estas

operaciones resultarían inabarcables en el aula convencional. Por otra parte, se utilizó también el programa con el objetivo de contrastar posibles conjeturas teóricas. Así, por ejemplo, en el estudio de grupos cíclicos, se planteó la siguiente pregunta: ¿cuál es el menor grupo que contiene dos elementos dados? El objetivo era que ellos mismos fuesen capaces de formular una conjetura plausible, basada en la comprobación en ejemplos concretos. Esto se hizo de manera muy satisfactoria con el programa GAP y después, ya en el aula convencional, se abordó la demostración teórica de dicha conjetura.

Señalamos que la experiencia desarrollada ha sido muy positiva y los estudiantes han mostrado un gran ambiente de trabajo y compañerismo, incluso ayudándose unos a otros ante las dudas que iban surgiendo durante el proceso. El alumnado se ha mostrado motivado durante las sesiones prácticas, manifestando una mejor comprensión de las estructuras involucradas, sintiéndose más protagonistas del proceso de aprendizaje. Es por todo ello que se pretende seguir ampliando y mejorando en cursos posteriores las acciones desarrolladas durante el presente curso académico, incluso en otras asignaturas de álgebra distintas de las tratadas.

#### **4. RESULTADOS**

A final de calendario de cada asignatura se les ha realizado a los alumnos una encuesta de satisfacción de las acciones desarrolladas con GAP en las prácticas de laboratorio. Los estudiantes han contestado a las mismas de manera anónima, pudiendo obtener de esta manera resultados objetivos con el fin de valorarlos y planificar ampliaciones y mejoras para cursos posteriores. La asignatura Teoría de Grupos está actualmente en proceso y, por tanto, pretendemos conseguir los resultados de las encuestas a final de curso para que los alumnos puedan realizar una valoración global del proceso. Consecuentemente, en esta sección analizamos los datos obtenidos en la asignatura Teoría de Códigos.

El número total de alumnos matriculados este año en la asignatura de Teoría de Códigos ha sido de 9, los cuales han contestado a las siguientes 5 preguntas que hemos elegido convenientemente. Los niveles de valoración son: TED – Totalmente En Desacuerdo, MBD – Más Bien en Desacuerdo, IND – Indeciso, MBA – Más Bien de Acuerdo, TDA – Totalmente De Acuerdo. A continuación, ilustramos en unos histogramas los resultados obtenidos.



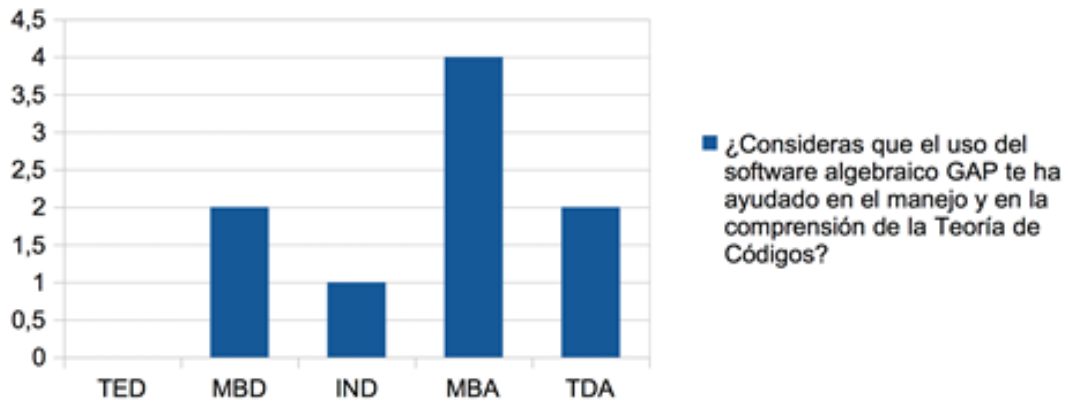


Figura 1. ¿Consideras que el uso del software algebraico GAP te ha ayudado en el manejo y en la comprensión de la Teoría de Códigos?

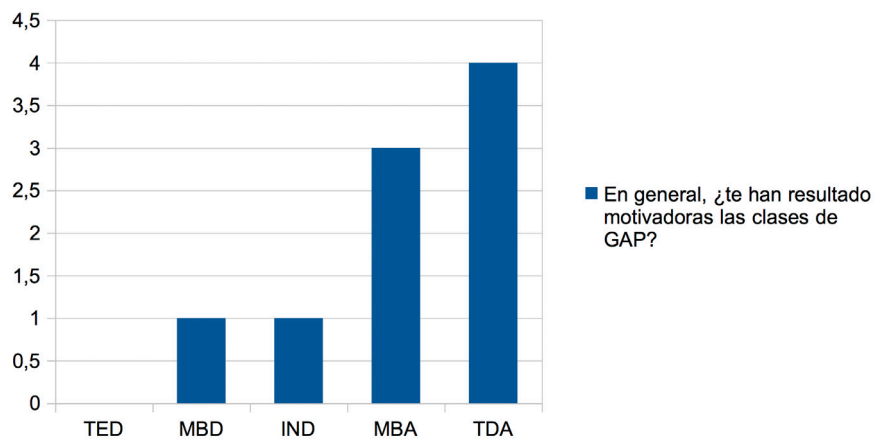


Figura 2. En general, ¿te han resultado motivadoras las clases de GAP?

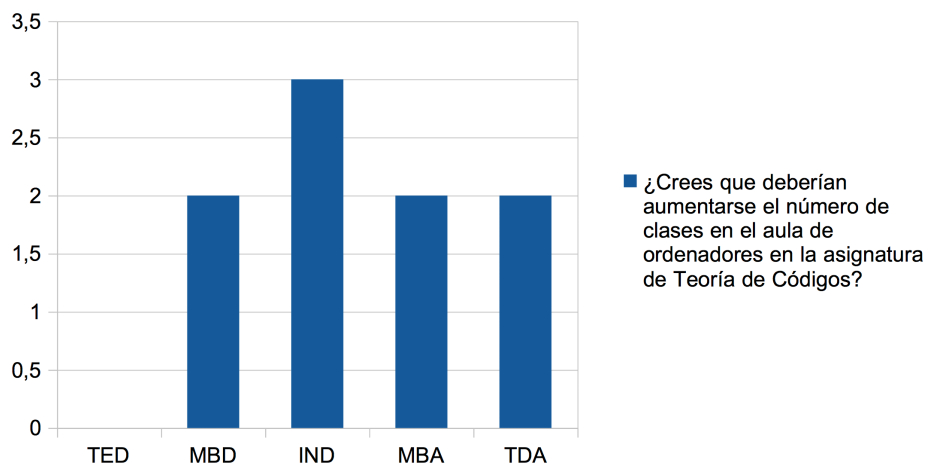


Figura 3. ¿Crees que deberían aumentarse el número de clases en el aula de ordenadores en la asignatura de Teoría de Códigos?

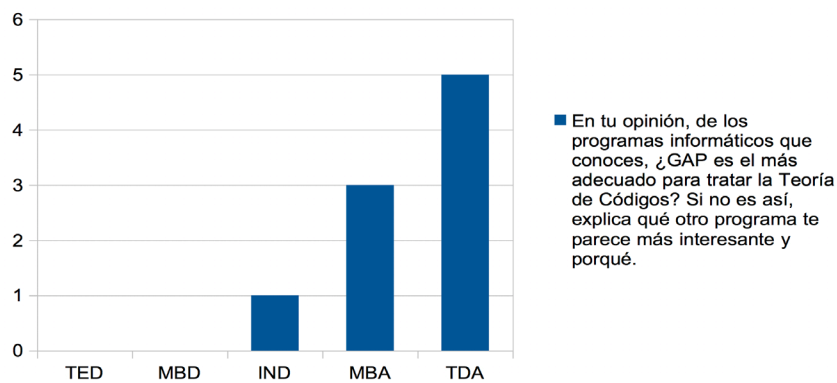


Figura 4. En tu opinión, de los programas informáticos que conoces, ¿GAP es el más adecuado para tratar la Teoría de Códigos? Si no es así, explica qué otro programa te parece más interesante y por qué.

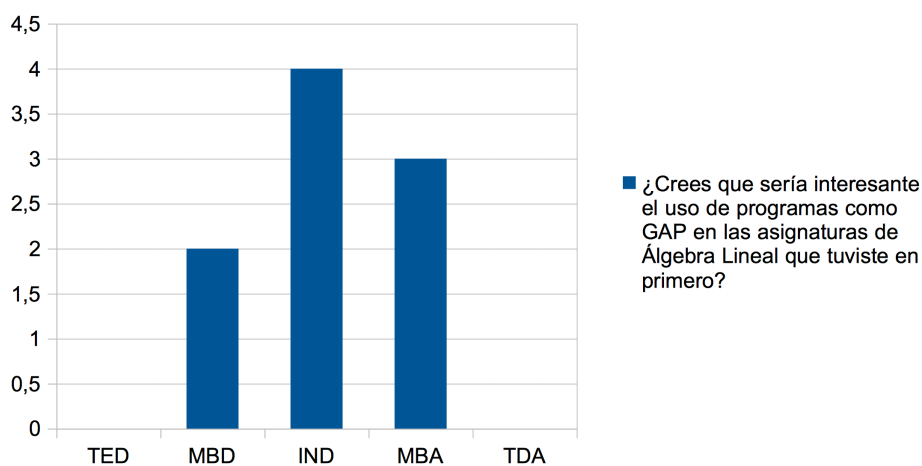


Figura 5. ¿Crees que sería interesante el uso de programas como GAP en asignaturas de Álgebra Lineal que tuviste en primero?

A la vista de los histogramas anteriores, podemos sacar las siguientes conclusiones. Con la Figura 1 podemos afirmar que la implementación del software computacional GAP ha ayudado mayoritariamente al alumnado en la comprensión de las estructuras abstractas involucradas. Por tanto, podemos ya afirmar que el principal objetivo de la red ha sido cumplido exitosamente.

Destacamos también los resultados de la Figura 2 donde se muestra la significativa motivación por parte de los estudiantes durante las clases prácticas con GAP, lo cual sin duda influye en el aprendizaje. Uno de los principales motivos que fomentan este aumento de motivación, es la interacción directa entre el alumnado y el contenido teórico a través del software, lo cual contrasta con la manera tradicional de la clase magistral, consiguiendo que ellos mismos participen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Podemos afirmar a través de la Figura 3 que el número de horas utilizado para las prácticas de laboratorio ha sido acertado ya que, de media, el alumnado se muestra indeciso o a ligeramente a favor a la hora de aumentar este número de horas.

De la Figura 4 concluimos que el software GAP es el más adecuado para el temario tratado también desde el punto de vista del alumno, seguramente por su manejo sencillo, por sus amplias librerías sobre estas estructuras y por sus innumerables manuales al respecto disponibles.

Finalmente, y a pesar de que en la Figura 5 no aparece una conclusión clara por parte del alumnado sobre la posible inclusión de GAP en otras asignaturas de Álgebra del Grado en Matemáticas, destacamos la siguiente opinión manifestada en el apartado de libre expresión al final de las encuestas:

– Valoración del estudiante en la pregunta: MBA. *“Puede ayudar a visualizar ciertos conceptos como la diagonalización de matrices o las matrices de Jordan”*

– Valoración del estudiante en la pregunta: IND. *“Si quitáramos asignaturas como Química sí me parecería bien. Pero con el poco tiempo que hay para desarrollar el pensamiento técnico, meter GAP quitaría aún más tiempo”*

Otras manifestaciones libres han sido las siguientes:

– *“Como ayuda a los cálculos a mano está bien, como cualquier otro con el mismo objetivo”*

– *“Las guías online son muy útiles”*

– *“Que las clases de teoría y de ordenador estén más coordinadas para que se puedan ver ejemplos que ayuden a comprender la teoría”*

– *“Integrar las clases de GAP en la asignatura desde el principio, así da tiempo a manejar con más soltura el programa y ver más ejemplos y aplicaciones del programa”*

A la vista de estas dos últimas opiniones libres, podemos obtener un aspecto a mejorar para próximos cursos: el aumento del número de horas de prácticas de laboratorio con GAP y la mejor coordinación de estas con las clases teóricas. Cabe destacar que ambos alumnos puntuaron la pregunta correspondiente a la Figura 3 como TDA.

## 5. CONCLUSIONES

Con las actividades desarrolladas dentro de esta red de docencia, se ha puesto de manifiesto nuevamente que las herramientas informáticas disponibles en nuestro entorno, no solo ofrecen una ventaja computacional a la hora de realizar ciertos cálculos tediosos, sino que además permiten comprender más profundamente los diferentes conceptos teóricos que intervienen en ellos. De esta manera, los alumnos desarrollan además su capacidad de lógica y pensamiento crítico, permitiendo ampliar su capacidad de abstracción, característica fundamental en los actuales egresados en matemáticas y muy demandada por parte del sector laboral actualmente. Cabe destacar de manera especial el uso innovador que hemos realizado de software matemático en asignaturas de álgebra, ya que no se había tratado este enfoque con anterioridad en el Grado en Matemáticas de la Universidad de Alicante. Los alumnos han aumentado su motivación e interés y, por tanto, ha mejorado su aprendizaje de las nociones algebraicas explicadas en clase.

Por otra parte, tras esta primera experiencia y el análisis de los resultados de las encuestas de los alumnos, así como de nuestras propias reflexiones en el seno de la red docente, de cara a próximos cursos, creemos interesante mejorar algunos aspectos de esta práctica. Por un lado, a la vista de lo vivido este curso, nos planteamos la posibilidad de proponer algunos ejercicios *menos dirigidos*, que permitan al alumnado explorar en primera persona tanto las capacidades del programa GAP como los contenidos teóricos que se pretenden alcanzar. Por otra parte, también pensamos que la programación de las sesiones en aula de ordenadores se puede planificar mejor para que la coordinación con los contenidos teóricos vistos en el aula convencional sea más adecuada.

A la vista de los resultados obtenidos, podemos calificar la actividad desarrollada como muy satisfactoria. Tenemos intención de continuarla en los próximos cursos, introduciendo algunos cambios que la puedan mejorar. Además, estamos animados a abordar su ampliación, en un futuro próximo, a otras asignaturas de Álgebra existentes en el plan de estudios del Grado en Matemáticas.

## 6. REFERENCIAS

- Furlan, W. D., Giménez, F., Monsoriu, J. A. & Pons, A. (2010). A virtual laboratory designed for teaching diffractive lenses. *Modelling in Science, Education and Learning*, 3(3), 29–37. Retrieved from [https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3108/3201]
- Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag.
- Isaacs, I. M. (2009). *Algebra: a graduate course*. EE.UU.: American Mathematical Society.
- Nalon, G. H., Barbosa, P. S. A. & Nascimento, W. D. (2018). Recurso digital educativo para el análisis de datos en un laboratorio de Mecánica de Suelo. *Modelling in Science, Education and Learning*, 11(1), 43–54. Obtenido de

[<http://dx.doi.org/10.4995/mse1.2018.9140>]

Rainbolt J. G. & Gallian J. A. (2003). *Abstract Algebra with GAP*. Retrieved from [[https://college.cengage.com/mathematics/gallian/abstract\\_algebra/5e/shared/gap/gap\\_manual.pdf](https://college.cengage.com/mathematics/gallian/abstract_algebra/5e/shared/gap/gap_manual.pdf)]

The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*. Versión 4.8.10.

Obtenido de [<http://www.gap-system.org>]