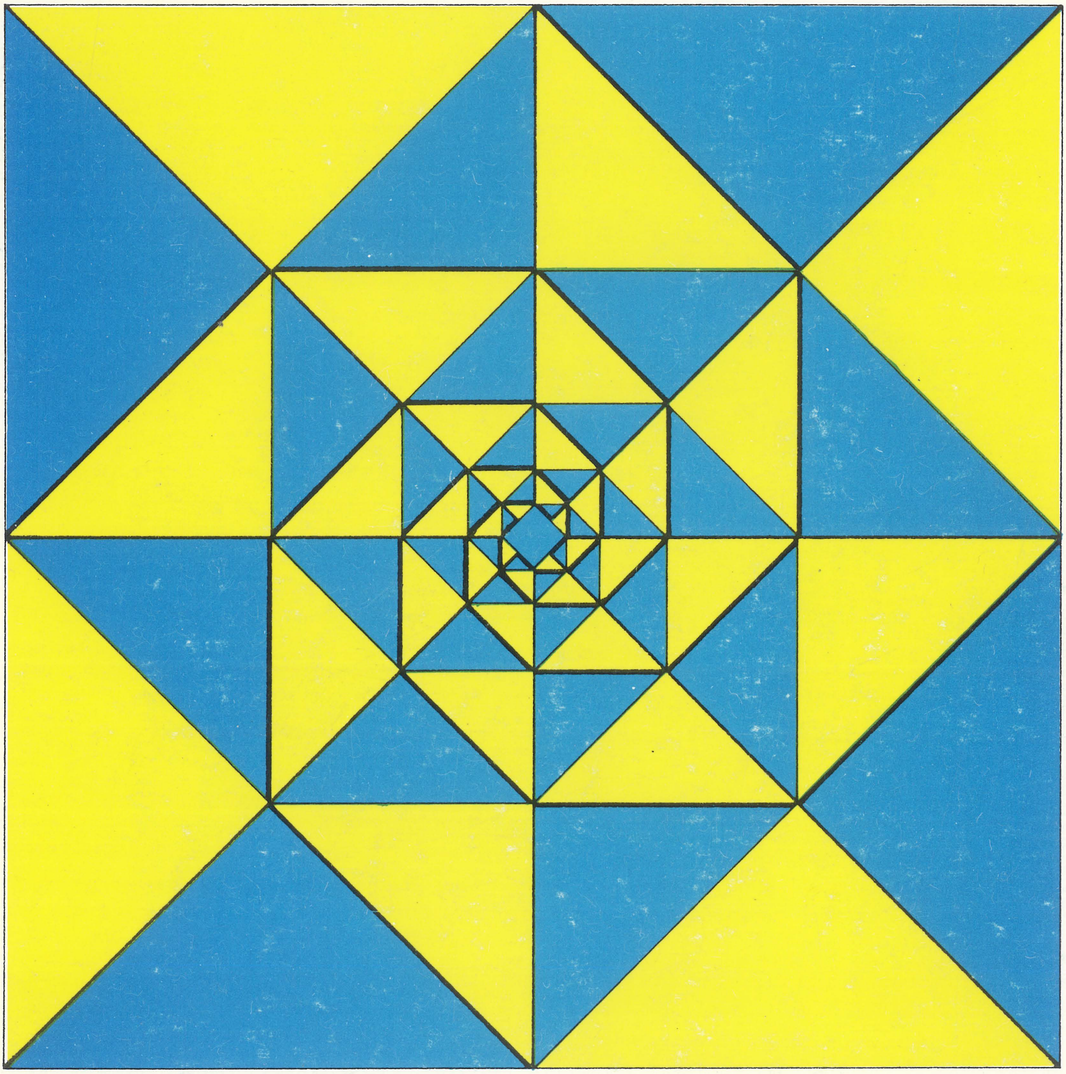
ANALES

DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE



ESCUELA de MAGISTERIO

N.º 3 1986

ANALES

DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

ESCUELA de MAGISTERIO

Nº 3 1986

Depósito Legal: A - 477 - 1984

Imprime: Imprenta de la Universidad de Alicante

INDICE

ADMISIBILIDAD DE LA ESTIMACION EQUIVARIANTE

M.ª Dolores Díez García - Sergio Quesada Rettschlag
Escuela universitaria del Profesorado

RESUMEN

En este trabajo se plantea el problema de la admisibilidad, resaltando algunos de los principales resultados teóricos sobre la admisibilidad cuando la función de pérdida es cuadrática, y recogiendo los resultados de Katz en espacios truncados bajo pérdida cuadrática. A continuación nos fijamos en dos tipos particulares de estimadores: los Equivariantes y el de Pitman, para terminar discutiendo su admisibilidad.

Palabras clave: Admisibilidad, Estimadores, Pérdida Cuadrática, Espacios Truncados.

SUMMARY

In this paper we raise the problem of admisibility emphasizing some of the most outstanding theoretical results on admisibility when the loss function is quadratic, according to Katz's results on truncated spaces under quadratic loss. Next we foms our attention in two specific types of estimators: Equivariants and Pitman, to end up discussing their admisibility.

Key words: Admisibility, Estimators, Quadratic Loss, Truncated Spaces.

0. INTRODUCCION

La noción de admisibilidad de las funciones de decisión en el contexto de la teoría del juego fue introducida por Newman y Morgenstern. Wald discute esta noción en términos de la teoría de la decisión estadística.

En las últimas décadas existen muchos trabajos que ocupan la parte central de la teoría de la Inferencia Estadística, algunos de los cuales vamos a resaltar por la importancia de sus resultados.

Comenzamos dando la estructura básica de la admisibilidad. Partimos del concepto de estimador admisible y nos ocupamos de aquellos estimadores que son admisibles, discutiendo los procedimientos de estimación calificados de admisibles.

La dificultad aparece al generalizar la clase de todos los estimadores para un problema de estimación dado, ya que es complicado el caracterizar a todos los estimadores admisibles. Algunas veces es difícil determinar si un estimador es admisible o no.

Damos el concepto de clase completa, puesto que todo estimador admisible pertenece a la menor clase completa. Ahora bien, la determinación de una clase completa no caracteriza a los estimadores admisibles, ya que a menudo existen estimadores inadmisibles en ella.

Terminamos este espígrafe de conceptos generales con el concepto de semi-separabilidad débil, debido a Wald, en el caso de un espacio paramétrico infinito.

A continuación estudiamos la admisibilidad cuando la función de pérdida es cuadrática, recogiendo finalmente, los resultados de Katz sobre la admisibilidad en espacios truncados bajo pérdida cuadrática.

Por último, estudiamos dos tipos de estimadores: los Equivariantes y el de Pitman, para pasar a discutir su admisibilidad.

1. CONCEPTOS GENERALES

Sea (χ, B) el espacio de medida de una variable aleatoria (v.a.) X y sea $P = \{P_\sigma;\ \sigma \in \theta\}$ la familia de medida de probabilidad en el espacio de medida (χ, B), siendo θ un intervalo en un espacio k-Euclidiano.

Suponemos que queremos estimar un parámetro σ considerando la función de pérdida $L(\sigma, d)$. Sea D la clase de los estimadores de un cierto parámetro σ y sea $R(\sigma, d)$ la función de riesgo correspondiente a $L(\sigma, d)$, $\sigma \in \theta$, $d \in D$.

Se dota a la clase D de un orden, lo que exige conocer las nociones de dominancia.

1.1. *Definición*

Un estimador d_1 en D es «al menos tan bueno» como d_2 en D si se cumple que

$$R(\sigma, d_1) \leq R(\sigma, d_2), \quad \forall \sigma \in \theta.$$

1.2. *Definición*

Un estimador d_1 es «mejor» que d_2 (d_1 domina estrictamente a d_2) si

$$R(\sigma, d_1) \leq R(\sigma, d_2), \ \forall \sigma \in \theta,$$

siendo $<$ para al menos un punto σ_0 de θ.

1.3. *Definición*

Si $R(\sigma, d_1) = R(\sigma, d_2)$, $\forall \sigma \in \theta$, d_1 es «equivalente» a d_2.

La noción de admisibilidad impone un orden parcial en la clase de todos los estimadores relativos a una función de riesgo particular, ya que ciertos estimadores no son comparables.

Un estimador d_1 estrictamente dominado por otro d_2, es llamado inadmisible. Nos ocuparemos de aquellos estimadores que no son dominados por ningún otro, que son llamados «admisibles» según Wald (14), y de los procedimientos calificados como admisibles.

Se demuestra que la clase de los estimadores «no dominados o admisibles» es no vacía.

Blyth (1) demuestra que si la función de riesgo $R(\sigma, d)$ es continua en σ para cada d y si $\xi(\sigma)$ es la distribución a priori sobre σ, cuyo portador es θ, entonces el estimador de Bayes respecto a ξ, $d\xi$ es admisible.

Esto tiene un valor práctico importante, ya que proporciona un método para generar una subclase de estimadores que son admisibles.

A partir del concepto de ξ - estimador de Bayes, Stein (13) obtiene una condición suficiente para la admisibilidad de un estimador que tiene una función de pérdida general.

Entre los estimadores admisibles encontramos algunos con una propiedad fuerte llamada admisibilidad estricta.

1.4. *Definición*

Un estimador d_0 es estrictamente admisible si para cada $\varepsilon > 0$ y $\sigma_0 \in \theta$ $\exists \delta > 0$ y un $\sigma_1 \in \theta$ tal que

$$R(\sigma_1, d) - R(\sigma_1, d_0) \geq \delta, \ \forall d \in D_\varepsilon(\sigma_0)$$

Los estimadores estrictamente admisibles son admisibles, pero no viceversa.

Introducimos ahora la noción de compacidad débil.

1.5. *Definición*

La clase D de los estimadores es llamada compacta débil, en sentido de Wald, respecto a $R(\sigma, d)$ si para cada sucesión $\{d_i\} \subset D$ existe un $d^* \in D$ tal que

$$\underline{\lim}_{i \to \infty} R(\sigma, d_i) \geq R(\sigma, d^*) \quad \forall \sigma \in \theta$$

A partir de ambas nociones Stein (13) demuestra que si un estimador d es admisible y la clase D es débilmente compacta en el sentido de Wald, entonces d es estrictamente admisible.

Algunas veces es difícil determinar si un estimador es admisible o no. Se intenta hallar una subclase de estimadores tal que cada estimador no perteneciente a ella esté dominado estrictamente por otro estimador de dicha subclase.

A tal clase, si existe, se le llama Completa. Una subclase C^* será completa minimal si ninguna subclase propia de C^* es completa.

En el caso de los Espacios paramétricos finitos

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k\},\ k < \infty,\ \text{con } R = \{R(\sigma_1, d) \ldots R(\sigma_k, d)\},\ d \in D$$

conjunto de todos los riesgos puntuales y siendo R^* su frontera convexa, si está cerrada por abajo (cierto ya que $R(\sigma_i, d) \geq 0 \ \ \forall d \in D\ i = 1, 2 \ldots$), todos los estimadores admisibles son de Bayes y es completa la subclase de los estimadores B de Bayes.

En el caso de un Espacio paramétrico infinito θ, Wald (14) introduce la noción de semiseparabilidad débil para probar la completitud.

1.6. *Definición*

θ es llamado débilmente semiseparable en el sentido de Wald cuando exista una sucesión de parámetros puntuales $\{\sigma_i\} \subset \theta$ tal que

$$\overline{\lim}_{y \to \infty} R(\sigma_i, d) \geq R(\sigma, d), \quad \forall (\sigma, d)$$

Basada en la noción de semiseparabilidad débil Wald demuestra que siendo $L(\sigma, d)$ limitada en σ para cada $d \in D$, si D es débilmente compacta y θ débilmente semiseparable, la clase A de los estimadores admisibles es Completa y la subclase de los estimadores propios y generalizados de Bayes es esencialmente completa.

2. ADMISIBILIDAD BAJO PERDIDA CUADRATICA

Cuando la función de pérdida es cuadrática los resultados más conocidos son debidos a Hodges y Lehman (7), Girshick y Savage (6) y a Karlin (9).

Suponemos conocidas las condiciones de regularidad de Cramer-Rao, la cota inferior de Cramer-Rao y la cantidad de información de Fisher.

Hodges y Lehman (7) establecen una condición suficiente para la admisibilidad cuando el estimador alcanza la cota Cramer-Rao, es decir son eficientes en sentido clásico.

2.1. *Teorema*

Supongamos que el error cuadrático medio de un estimador $d_0 \in D$ alcanza la cota inferior de Cramer-Rao $\forall\sigma \in \theta$. Si para algún estimador $d_1 \in D$ la relación

$$C_{d_1}(\sigma) \leq C_{d_0}(\sigma) \ , \quad \forall\sigma \in \theta$$

implica

$$B_{d_1}(\sigma) = B_{d_0}(\sigma) \ , \quad \forall\sigma \in \theta$$

donde $B_d(\sigma)$ es la función de sesgo de θ, entonces d_0 es admisible respecto de la pérdida de error cuadrático.

Estos resultados han sido extendidos a familias más amplias por E. Moreno.

En esta misma línea Girshick y Savage (6) demuestran que, bajo ciertas condiciones, un estimador U con una distribución de tipo exponencial 1-paramétrica, es admisible minimax.

2.2. *Teorema*

Sea U una v.a. que tiene una función de distribución de la familia exponencial 1-paramétrica, es decir

$$F(du) = B(\tau)\, e^{\mu\tau}\Psi(du), \qquad -\infty < \mu < \infty, \ \tau \in \Omega.$$

Sea

$$\sigma(\tau) = E_\tau\{U\}, \quad \sigma^2(\tau) = Var_\tau\{U\}$$

Si $\Omega \equiv R$ entonces U es un estimador admisible Minimax de $\sigma(\tau)$ con respecto a la función de pérdida

$$L(\sigma, d) = \frac{(d - \sigma(\tau))^2}{\sigma^2(\tau)}$$

Estos resultados pueden aplicarse para demostrar la admisibilidad y la minimaxibilidad bajo pérdida cuadrática de la media muestral con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v.a. que son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

Karlin (9) extiende los resultados de Girshick y Savage para la familia exponencial e investiga la admisibilidad en la familia de distribuciones cuya función de densidad es de la forma

$$f(x,\sigma) = \begin{cases} q(\sigma)\ r(x) & 0 \leq x \leq \sigma \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y $\mu(dx) = dx$. Esta densidad es llamada densidad extrema ya que para

$$q(\sigma) = \sigma^{-n} \qquad r(x) = x^{n-1}$$

$f(x, \sigma)$ es la densidad del máximo de n variables aleatorias i.i.d. de una distribución rectangular sobre $[0, \sigma]$.

Los trabajos de Karlin contienen resultados relacionados con la admisibilidad de los estimadores de localización paramétrica, cuya

$$f(x, \sigma) = p(x - \sigma).$$

La primera extensión de los resultados de Karlin, concerniente a la familia exponencial 1-paramétrica, es que todos los estimadores

$$dy(U) = y \cdot U \qquad \text{con } 0 < y < 1 \quad ,$$

son admisibles, demostrando que Ω es todo R.

El teorema de Girshick y Savage se refiere solamente al caso en que $y = 1$, en el cual se demuestra la admisibilidad. Si $\Omega \neq R$ el resultado no es válido.

En el caso de un espacio paramétrico restringido Karlin da el siguiente teorema.

2.3. *Teorema*

Sea

$$F_\tau\, d(x) = B(\tau)\, e^{x\tau}\, \Psi(dx) \qquad \text{con } \tau \in \Omega;\ \Omega = (\underline{w}, \overline{w})$$

es el intervalo de todos los valores de τ para los cuales se verifica

$$B^{-\lambda}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\tau}\, \Psi(dx) < \infty$$

Sea $\underline{w} < c < \overline{w}$. Si

$$\lim_{b \to \overline{w}} \int_c^b B^{-\lambda}(\tau) d\tau = +\infty$$

y

$$\lim_{b \to \underline{w}} \int_a^c B^{-\lambda}(\tau) d\tau = +\infty$$

entonces

$\frac{x}{\lambda+1}$ es un estimador casi admisible de $\sigma(\tau) = E_\tau\{X\}$ que tiene una pérdida de error cuadrática.

3. ADMISIBILIDAD EN LOS ESPACIOS TRUNCADOS BAJO PERDIDA DE ERROR CUADRATICA

Algunas veces el único estimador admisible de σ resulta inadmisible cuando el espacio paramétrico es truncado.

Katz (10) extiende los resultados de la admisibilidad en familias exponenciales y bajo pérdida cuadrática en los casos de espacios paramétricos truncados.

Considera la familia exponencial de funciones de densidad

$$f(x, \sigma) = B(\sigma)\, e^{\sigma x}, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad \sigma \in \theta$$

respecto de una medida δ-finita $\mu(dx)$.

El espacio paramétrico natural es

$$\Omega = \{\sigma; \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x}\, \mu(dx) < \infty\},$$

siendo θ un subintervalo de Ω.

$$\theta = \{\sigma; \sigma \geq \sigma_0 \ , \ \sigma \in \Omega\}.$$

Se quiere estimar la esperanza de x

$$g(\sigma) = -\frac{B'(\sigma)}{B(\sigma)}$$

bajo pérdida cuadrática, siendo la varianza de x

$$g'(\sigma) = E\,(g(\sigma))^2 > 0, \ \forall\sigma$$

Entonces, $g'(\sigma) > 0 \ \forall\sigma$, y, sin embargo, $g(\sigma)$ es monótona creciente en σ.

Se define, para cada $x \in R$, la función convexa no decreciente

$$H(x) = \int_0^{\infty} B(\sigma)\, e^{x\sigma} d\sigma$$

que puede tomar el valor infinito.

En el caso general cuando $\sigma_0 \neq 0$, se verifica que

$$H(x) = \int_{\sigma_0}^{\infty} B(\sigma)\, e^{x\sigma} d\sigma$$

y tenemos el siguiente teorema.

3.1. *Teorema. Katz (10)*

Si $\theta = \{\sigma;\ \sigma \geq \sigma_0\}$, entonces un estimador admisible de $g(\sigma)$ es

$$g(x) = x + \frac{B(\sigma_0)\, e^{\sigma_0 x}}{\int_{\sigma_0}^{\infty} B(\tau)\, e^{\tau x}\, d\tau}$$

Bajo estas condiciones Katz extiende el teorema de Karlin 2.3 en el caso de muestras de espacios truncados.

3.2. *Teorema. Katz (10)*

Sea $f(x, \sigma)$ la función de densidad respecto a $\mu(dx)$. Sea θ el intervalo $[a, \bar{\sigma}]$ y $\hat{\sigma}$ un estimador de $g(\sigma)$ respecto a una función de riesgo limitada. Sea $Q(\sigma)$ una función medible positiva en θ que satisface

$$\infty > \int_a^b \frac{1}{Q(\sigma)} d\sigma \rightarrow \infty \quad \text{cuando } b \rightarrow \bar{\sigma}$$

Si existe $k > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b [\hat{\sigma}(x) - g(\sigma)]\, Q(\sigma)\, f(x, \sigma)\, dx \right| \leq k\, Q(b)\, f(x, b)$$

$\forall b \in (a, \bar{\sigma})$ y $\forall x$, entonces $\hat{\sigma}$ *es casi admisible.*

En resumen, los resultados más importantes en el campo de la Admisibilidad bajo Pérdida Cuadrática, se refieren a estimadores eficientes o bien a estimadores paramétricos del parámetro λ de ciertas distribuciones algo más generales.

4. ESTIMADORES EQUIVARIANTES Y DE PITMAN

De entre todos los posibles estimadores seleccionados, por su importancia, dos tipos: los Equivariantes y los de Pitman.

Comenzamos estudiando las propiedades de los procedimientos de estimación equivariante, los cuales están basados en los estadísticos suficientes invariantes.

La importancia de los estimadores equivariantes radica en que poseen funciones de riesgo que corresponden a propiedades definidas en funciones de pérdida invariante, con valores constantes en las órbitas del grupo inducido $\bar{G}$. Estas propiedades tienen implicaciones en la Teoría de Estimación Equivariante de Riesgo Mínimo y en la Teoría Minimal.

Empezamos con la discusión de la estructura general de los estimadores equivariantes para grupos específicos de transformaciones y funciones de pérdida invariante. Vemos, a continuación, los estimadores equivariantes de localización paramétrica para las familias de funciones de distribución dependiendo de un parámetro de localización del tipo de la traslación. Con esto llegamos al estimador de Pitman. Este estimador mantiene el estimador equivariante de riesgo mínimo de localización paramétrica respecto al grupo de las traslaciones cuando la función de pérdida tiene un error cuadrático.

Girshick y Savage (6) prueban que el estimador de Pitman no es solamente equivariante de riesgo mínimo para la pérdida del error cuadrático, sino también que es un estimador minimal.

4.1. *Estimadores equivariantes*

Sea (X, B, P) un espacio de probabilidad; el espacio muestral X es un conjunto abierto en un espacio Euclídeo finito dimensional, B es el σ-campo de Borel en X, y P es la familia de probabilidad de medida en (X, B): $P = \{P_\sigma;\ \sigma \in \theta\}$. θ es el espacio paramétrico que consideraremos un intervalo en un K-espacio euclídeo.

Sea G el grupo de las transformaciones uno en uno (1:1) de X, es decir:

$$gX = X \qquad \forall g \in G \text{ y } g\bar{B} = \bar{B}.$$

Sea $\bar{G}$ el grupo de las transformaciones inducido en θ, definido por:

$$P_\sigma(B) = P_{\bar{g}\sigma}(g\bar{B}) \qquad \forall \bar{B} \in B \text{ y cada } g \in G.$$

Suponemos que $\bar{G}$ es 1:1 y $\bar{g}\theta = \theta \qquad \forall \bar{g} \in \bar{G}$.

De forma general, para todo conjunto de Borel $\bar{B} \in B$, si $g\bar{B}$ es el conjunto de los puntos imágenes de x en $\bar{B}$, es decir

$$g\bar{B} = \{y;\ y = gx \text{ con } x \in \bar{B}\},$$

tenemos que

$$P(x \in \bar{B}) = \bar{g}\, P(x \in g\bar{B}).$$

4.1.1. Definición

Un estadístico invariante en (X,B), f, es una función B-medible en X tal que

$$f(x) = f(gx) \qquad \forall x \in X, \quad \forall g \in G$$

4.1.2. Definición

Un estadístico casi invariante en (X, B), es una función f, B-medible en X, tal que

$$f(x) = f(gx) \text{ a.s. } \forall p \in P \text{ y } \forall g \in G.$$

El grupo de las tranformaciones de G induce una partición, en órbitas, en X, en la cual la órbita x_0, $x_0 \in X$, relativa a G, es el conjunto

$$G(x_0) = \{x;\ g(x_0) = x,\ g \in G\}.$$

De las definiciones de estadístico invariante y de órbita se deduce inmediatamente que un estadístico invariante, f, toma el mismo valor $\forall x$ perteneciente a la misma órbita. Si f es constante en X, es una función invariante que toma el mismo valor en todas las órbitas de G.

Si un estadístico invariante toma valores distintos en cada órbita, se le llama Maximal Invariante. Es decir, U(x) es maximal invariante cuando y sólo cuando si $U(x_1) = U(x_2)$ se verifica $x_2 = gx_1$ $\forall g \in G$. El estadístico maximal invariante no es único. Cada estadístico invariante es una función del estadístico invariante maximal.

Supongamos ahora que queremos estimar el parámetro σ de una distribución Z cuya función de pérdida es $L(\sigma, d)$. Un estimador (no aleatorio) d(Z) de σ conserva la estructura del problema de la estimación cuando y sólo cuando

$$d(gZ) = \bar{g}\ d(Z) \qquad \forall g \in G \tag{4.1}$$

4.1.3. Definición

Todos aquellos estimadores que satisfacen (4.1), para todo z, se llaman estimadores equivariantes. Aquellos que satisfacen la condición (4.1) para casi todo z, son llamados esencialmente equivariantes.

La clase de los esencialmente equivariantes contiene a los equivariantes. Es importante asumir el hecho de que la función de pérdida queda invariante bajo el grupo G, es decir.

$$L(\sigma, d) = L(\bar{g}\sigma, \bar{g}d) \ \ \forall g \in \bar{G},\ \ \forall \sigma \in \theta \text{ y para casi todo z.}$$

4.1.4. Teorema

Sea G un grupo de transformación 1:1 en X y sea $\bar{G}$ el correspondiente grupo de transformaciones en θ. Sea $L(\sigma, d)$ la función de pérdida invariante respecto a G. Sea $\Omega = \{\Omega(s),\ s \in S\}$ las órbitas de $\bar{G}$ en θ, donde S es cierto conjunto indexado. Entonces, para cada estimador equivariante σ y para cada $s \in S$,

$$R(\sigma, \hat{\sigma}) = R_s(\hat{\sigma}) \qquad \forall \sigma \in \Omega(s).$$

El significado del término equivariante radica en la propiedad de tener igual riesgo en las órbitas de $\bar{G}$. Los estimadores no aleatorios que satisfacen (4.1) no son invariantes bajo G, sus valores pueden cambiar en una transformación de $X \to gX$. El término equivariante es más apropiado que el de invariante.

4.1.5. Estimadores invariantes aleatorios

Sea $\pi(\sigma/Z = z)$ una función de distribución en θ, en la que dado $Z = z$ estimamos σ según $\pi(\sigma/Z)$; $\pi(\sigma/Z)$ es un estimador aleatorio.

Suponemos que

$$\int_x \{ \int_\theta L(\sigma, \hat\sigma)\ \pi(d\hat\sigma/Z = z) \} f(z, \sigma)\ \mu(dz) < \infty, \ \forall\sigma$$

4.1.5.1. Definición

Un estimador aleatorio $\pi(\sigma/Z)$ es llamado invariante bajo el grupo G de transformaciones, cuando y sólo cuando

$$\pi(\bar g\sigma/gz) = \pi(\sigma/z), \ \forall g \in G, \ \forall z \in Z, \tag{4.2}$$

Si esta igualdad se mantiene para casi todo $z(\mu)$, entonces $\pi(\sigma/z)$ es un estimador aleatorio casi invariante.

Una generalización del teorema anterior en el caso de estimadores aleatorios es la siguiente:

Sea $\bar g\pi(\sigma/z) = \pi(\bar g\sigma/gz)$. Según (4.2), si $\pi(\sigma/z)$ es casi invariante se verifica

$$\bar g\pi(\sigma/z) = \pi(\sigma/z) \text{ a.s. } (\mu)$$

Además, para cada $g \in G$ y como $\bar g\ \hat\sigma = \sigma'$

$$\begin{aligned} R(\sigma,\bar g\pi) &= \int dP_\sigma(Z \leq z) \int L(\sigma, \hat\sigma)\bar g\pi(d\hat\sigma/z) = \\ &= \int dP_\sigma(Z \leq z) \int L(\bar g\sigma, \bar g\hat\sigma)\pi(d\bar g\hat\sigma/z) = \\ &= \int dP_{\bar g\sigma}(Z \leq y) \int L(\bar g\sigma, \sigma')\pi(d\sigma'/y) = R(\bar g\sigma, \pi) \end{aligned}$$

De aquí que si $\pi(\sigma/z)$ es casi invariante,

$$R(\sigma, \bar g\pi) = (R\bar g\sigma, \pi) = R(\sigma, \pi), \ \forall\bar g \in \bar G$$

Los estimadores aleatorios casi invariantes tienen una función de riesgo que toma valores constantes en las órbitas de $\bar G$. Kiefer (11) demostró que si G es un grupo transitivo, se puede restringir la atención a los estimadores no aleatorios.

4.2. *Estimadores equivariantes de localización paramétrica*

Empezaremos dando unos conceptos que nos llevarán al estimador de Pitman de localización paramétrica.

4.2.1. Conceptos generales

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v.a. i.i.d. que tienen una función de densidad común $f(x-\sigma)$ con

$$-\infty < \sigma < \infty / \ E_\sigma\{X^2\} < \infty, \ \forall\sigma.$$

Sea $G = \{g/gX_i = X_i + g, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n, \ -\infty < g < \infty\}$

el grupo de las traslaciones reales, y sea $\hat{\sigma}(X)$ un estimador equivariante respecto a G. La función de pérdida es del tipo de pérdida de error cuadrático $L(\sigma, \hat{\sigma}) = (\hat{\sigma}-\sigma)^2$ y $L(\sigma, \hat{\sigma})$ es invariante respecto a $\bar{G}$.

Consideremos un intervalo n-dimensional

$$A = \{X / -\infty < X_1 \leq a_1, -\infty < X_2 \leq a_2, \ldots, -\infty < X_n \leq a_n\}.$$

La probabilidad de A bajo σ es:

$$P_\sigma(A) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\sigma) \ \mu(dx_i)$$

Sea $y_i = x_i + g, -\infty < g < \infty$ y gA el conjunto

$$g(A) = \{x / -\infty < x_i \leq a_i + g, \ i = 1, 2, \ldots n\},$$

entonces,

$$P_\sigma(A) = \int_{-\infty}^{a_1+g} \cdots \int_{-\infty}^{a_n+g} \pi[f(y_i - (\sigma+g))] \ \mu(dy_i) = P_{\bar{g}\sigma} \ (gA)$$

El problema de estimar un parámetro de localización σ con pérdida de error cuadrática es invariante bajo el grupo de las traslaciones reales G.

La función de riesgo de un estimador equivariante (no aleatorio) es:

$$R(\sigma, \hat{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) - \sigma]^2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\sigma)\mu dx_i.$$

Un estadístico maximal invariante respecto a G basado en el estadístico suficiente

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)} \text{ es}$$

$$U(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) = (x_{(2)} - x_{(1)}, x_{(3)} - x_{(1)}, \ldots, x_{(n)} - x_{(1)}).$$

Consideremos la transformación

$$y_{(1)} = x_{(1)}, \ y_{(2)} = x_{(2)} - x_{(1)}, \ \ldots, \ y_{(n)} = x_{(n)} - x_{(1)}$$

y consideremos solamente los estimadores equivariantes que dependen de x_1, x_2, ..., x_n a través del orden estadístico $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$. Entonces, la función de riesgo de tales estimadores es

$$R(\sigma, \hat{\sigma}) = n! \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{i=2}^{n} \mu(dy_i) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(dy_1)[\hat{\sigma}(y_1, y_2 + y_1, \ldots, y_n + y_1) - \sigma]^2 f(y_1 - \sigma) \prod_{i=2}^{n} f(y_1 + y_i - \sigma)$$

Sea $z = y_1 - \sigma$, según la propiedad equivariante de σ

$$R(\sigma, \hat{\sigma}) = n! \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mu(dy_i) \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\sigma}(Z, Z+y_2, \ldots, Z+y_n)]^2 f(Z) \prod_{i=2}^{n} (y_i + Z)\, \mu(dz)$$

Además $\hat{\sigma}(z, y_2 + z, \ldots, y_n + z) = z + \Psi(y_2, \ldots, y_n)$ $\forall z$, debido a la equivarianza de $\hat{\sigma}$. Notemos también que la función de distribución conjunta del estadístico maximal invariante $U = (y_2, \ldots, y_n)$ no depende de σ. Entonces, el mínimo estimador de media cuadrática de localización paramétrica es

$$\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n) = x_{(1)} + \Psi_0(x_{(2)} - x_{(1)}, \ldots, x_{(n)} - x_{(1)}), \tag{4.3}$$

donde $\Psi_0(y_2, \ldots, y_n)$ minimiza casi seguramente la función de riesgo condicional:

$$R(y_2, \ldots, y_n, \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} [Z + \Psi(y_2, \ldots, y_n)]^2 f(Z) \prod_{i=2}^{n} f(z + y_i)\, \mu(dz)$$

Se obtiene de aquí que:

$$\Psi_0(y_2, \ldots, y_n) = \frac{-\int_{-\infty}^{\infty} z f(z) \prod_{i=2}^{n} f(z+y_i)\mu(dz)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \prod_{i=2}^{n} f(z+y_i)\mu(dz)}$$

que sustituido en (4.3) nos da el estimador de Pitman:

$$\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n) = x_{(1)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z f(z) \prod_{i=2}^{n} f(z+y_i)\mu(dz)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \prod_{i=2}^{n} f(z+y_i)\mu(dz)}$$

La hipótesis de la independencia de x_1, x_2, ..., x_n, no es necesaria.

Consideremos cada familia de densidad conjunta

$$f(x_1 - \sigma, x_2 - \sigma, \ldots, x_n - \sigma) \text{ tal que } E_\sigma\{x_i^2 < \infty\}, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

y expresemos el estimador de Pitman en la forma:

$$\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n) = x_{(1)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z f(z, y_2+z, \ldots, y_n+z)\mu(dz)}{f(z, y_2+z, \ldots, y_n+z)\mu(dz)}$$

Observemos que:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} z f(z, y_2+z, \ldots, y_n+z)\mu(dz)}{f(z, y_2+z, \ldots, y_n+z)\mu(dz)} = E(x_{(1)}/x_{(2)}-x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}-x_{(1)})$$

Puesto que el estimador de Pitman $\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n)$ es equivariante, es un estimador insesgado de σ. En efecto,

$$\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n) - \sigma = \hat{\sigma}_0(x_1-\sigma, \ldots, x_n-\sigma) \quad \forall\sigma, \text{ con } -\infty<\sigma<\infty.$$

De aquí:

$$E_\sigma\{\hat{\sigma}_0(x_1, \ldots, x_n) - \sigma\} = E_\sigma\{x_{(1)}-\sigma - E(x_{(2)}-x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}-x_{(1)}\} = 0.$$

Esto prueba que el estimador de Pitman es insesgado para σ. Se demuestra también que es un estimador minimax.

5. ADMISIBILIDAD DE LOS ESTIMADORES ESTUDIADOS

Discutimos, por último, la admisibilidad de los estimadores que acabamos de estudiar. Comenzamos estudiando la admisibilidad del estimador equivariante de localización del parámetro σ. Farrel (3) demuestra que si dentro de las clases de las traslaciones de los estimadores equivariantes hay dos estimadores minimal que no son equivalentes, entonces todos los estimadores equivariantes de localización paramétrica son inadmisibles. Así mismo, Farrel demuestra que bajo cinco condiciones el estimador generalizado de Bayes es casi admisible, llegando a extender los resultados de Stein (13) concernientes a la admisibilidad de los estimadores equivariantes óptimos de un simple parámetro de localización bajo pérdida cuadrática, y demostrando que el estimador generalizado de Bayes es admisible.

Finalmente, tratamos la admisibilidad del estimador de Pitman para un simple parámetro de localización. Stein (13) prueba la admisibilidad bajo ciertas condiciones en el caso de un simple parámetro de localización, demostrando primero que es casi admisible para después deducir la admisibilidad con la condición de que la distribución condicionada de $X - \sigma$, dada Y, sea absolutamente continua.

Perng (12) demuestra que pueden debilitarse las condiciones del teorema de Stein, sólo en casos especiales. Fox y Rubin (5) estiman el único parámetro de localización cuando la función de pérdida es bilineal y convexa y prueban cuando un estimador de Pitman es admisible.

5.1. *Admisibilidad de los estimadores equivariantes de un único parámetro de localización*

Los resultados vistos en 4. han sido generalizados por Farrel (3) para los casos de distribuciones de parámetros de localización cuando la distribución condicional de $X - \sigma$, dado Y, es absolutamente continua. Trataremos el problema, sin embargo, con un sistema de procedimientos de muestra fija.

Sabemos que $p(x/Y)$ es la función de densidad de $X-\sigma$, dado Y, y que $Q(dy)$ es la probabilidad de medida en el espacio Y. La función de pérdida se expresa de la forma:

$$L(\sigma, d) = W(d-\sigma)$$

Suponemos que:

$$\text{si } t_1 \geq t_2 \geq 0, \text{ entonces } W(t_1) \geq W(t_2)$$

y

$$\text{si } 0 \geq t_2 \geq t_1, \text{ entonces } W(t_1) \geq W(t_2)$$

así mismo:

$$W(0) = 0 \text{ y } W(t) \geq 0 \quad \forall t, -\infty < t < \infty.$$

Sea $\lambda(d\sigma)$ una medida sigma-finita en (θ, τ) siendo θ todo R y τ los conjuntos de Borel sigma-finitos en R.

5.1.1. Definición

Un estimador $\hat{\sigma}_\lambda(X, Y)$ se llama generalizado de Bayes frente a λ, con respecto a la función de pérdida $W(t)$, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(d\sigma)\, W[\hat{\sigma}_\lambda(X,Y)-\sigma]\, p(X-\sigma/Y) = \operatorname*{Inf}_{d} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(d\sigma)\, W(d-\sigma)\, p(X-\sigma/Y) \qquad \text{a.s. } (\mu)$$

La generalización del estimador de Bayes $\hat{\sigma}_\lambda$ (X,Y) definida de esta forma no es necesariamente única.

Farrel define el máximo estimador generalizado de Bayes como el mayor valor real d^0 que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(d\sigma)\, W(d^0-\sigma)\, p(X-\sigma/Y) = \operatorname*{Inf}_{d} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(d\sigma)\, W(d-\sigma)\, p(X-\sigma/Y)$$

Análogamente, al mínimo valor real d' que satisface la igualdad anterior se le llama mínimo estimador generalizado de Bayes.

El Lema que vemos a continuación da una condición suficiente para la existencia de estos estimadores.

5.1.1. Lema

Si W(t) tiene la propiedad monótona expresada anteriormente y existe un conjunto nulo $N \in R^{(1)} \times R^{(n-1)}$ tal que si $(X,Y) \notin N$ entonces,

$$\operatorname*{Inf}_{d} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(d\sigma)\ W(d-\sigma)\ p(X-\sigma/Y) < \infty$$

y si se cumple cada una de las siguientes condiciones:

i) W(t) es continua

ii) $\lambda(d\sigma)$ es una medida σ-finita monótona,

entonces, existe un máximo y un mínimo estimador generalizado de Bayes.

Además,si W(t) es convexo y $\lim\limits_{|t|\to\infty} W(t) = \infty$, entonces cada estimador generalizado de Bayes satisface:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W'(\hat{\sigma}_\lambda(X,Y)-\sigma)\ p(X-\sigma/Y)\ \lambda(d\sigma) = 0$$

Lo que nos interesa es la admisibilidad del estimador equivariante de localización del parámetro σ.

Dado (X, Y), cada estimador equivariante de σ respecto al grupo de las traslaciones reales es $\phi(X,Y) = X + \Psi(Y)$. La función de riesgo del estimador equivariante es:

$$R(\sigma, \Psi) = \int Q(dy) \int W(X+\Psi(y)-\sigma)\ p(X-\sigma/Y)dx =$$

$$= \int Q(dy) \int W(X+\Psi(y)\ p(X/Y)dx = R(0, \Psi), \qquad \forall\sigma$$

Se sigue que un estimador equivariante $X + \Psi^0(Y)$ es minimal en la clase de los estimadores equivariantes con respecto a la función de pérdida W(t), si es un estimador generalizado de Bayes para la medida lineal de $\lambda(d\sigma) = d\sigma$. Esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\sigma+\Psi^0(y))\ p(\sigma/y) = \operatorname*{Inf}_{\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\sigma+\Psi(y)\ p(\sigma/y)d\sigma$$

El estimador de Pitman es un estimador de este tipo para la función de pérdida de error cuadrático $W(t) = t^2$. En este caso $\Psi^0(Y)$ es único y, estableciéndolo previamente, el estimador de Pitman es en general minimal y admisible.

5.1.2. Teorema. Farrel (3)

Sea D_1 la clase de los estimadores de localización del parámetro σ, que es una traslación equivariante. Sea, ahora, la función de pérdida $L(\sigma, d) = W(d-\sigma)$ satisfaciendo la condición $W(t_2) > W(t_1)$. Supongamos que:

$$d_1(X, Y) = X + \Psi_1(Y) \qquad d_2(X, Y) = X + \Psi_2(Y)$$

son dos estimadores minimax no equivalentes para D_1. Entonces, todo estimador equivariante en D_1 es inadmisible.

Los teoremas concernientes a la admisibilidad de varias traslaciones equivariantes para un simple parámetro de localización han sido generalizados por Farrel bajo las condiciones siguientes:

i) Para todo número real c

$$\int Q(dy) \int_{-\infty}^{\infty} W(X+c)p(X/Y)dx < \infty$$

ii) Excepto en un conjunto N de una Q medida cero

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(X+c)\ p(X/Y)dx$$

tiene un mínimo en el único punto $\Psi_0(Y)$.

iii) Si la función W(t) está limitada, o es uniformemente continua o convexa, o satisface $\operatorname{Sup}_{x \leq 0} W(x) < \infty$, W(x) es convexa en $x>0$.

iv) Debe existir un número real p, $1<p\leq 2$, tal que:

$$\int Q(dy) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p\ W(X)\ p(X/Y)dx < \infty$$

Si W(x) es convexa, entonces:

$$\int Q(dy) \int_{-\infty}^{\infty} |W'(d+x)|\ |x|^p\ p(X/Y)\ dx < \infty, \quad \forall d \in R$$

Si W(x) es en parte limitada y en parte convexa

$$\int Q(dy) \int_{0}^{\infty} |W'(d+x)|\ |x|^p\ p(X/Y)dx < \infty, \quad \forall d \geq 0$$

v) Existe una función $\lambda(\sigma)$, $0 < \lambda(\sigma) \leq k < \infty$, tal que $\alpha = \lim_{\sigma \to -\infty} \lambda(\sigma) > 0$ $\beta = \lim_{\sigma \to \infty} \lambda(\sigma) > 0$. Además, excepto en un conjunto de Q medida cero

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(c-x+\sigma)\ p(\sigma/y)\ d(x-\sigma)d\sigma$$

toma el mínimo valor para un único punto finito $\hat{\sigma}(X, Y)$.

5.1.3. Teorema. Farrel (3)

Bajo las condiciones i)-v), si W(t) está limitada, entonces $\hat{\sigma}(X,Y)$ es casi admisible. Si Q(Y) es una distribución degenerada (toda concentrada en un punto simple), $\hat{\sigma}(X,Y)$ es casi admisible. Si W(t) no está limitada y el soporte de Q(Y) contiene más de un punto, entonces, si $p(X/Y)$ no existe fuera del conjunto compacto, $\hat{\sigma}(X,Y)$ es casi admisible.

Farrel extiende los resultados de Stein concernientes a la admisibilidad de los estimadores equivariantes óptimos de un simple parámetro de localización bajo pérdida de error cuadrático y prueba el siguiente teorema.

5.1.4. Teorema. Farrel (3)

Supongamos que $\lambda(\sigma)$ es una función medible de Borel, no negativa, que satisface para las constantes c_1, c_2, α: $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $0<\alpha<1$ y $\forall\sigma, -\infty<\sigma<\infty$

$$\lambda(\sigma) = c_1 + c_2 |\sigma|^\alpha$$

Supongamos que existe un valor β, $1+\alpha<\beta \leq 2$ para el cual:

$$\int Q(dy) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\alpha+\beta} p(X/Y)\, dx < \infty$$

Sea:

$$\Omega = \{\sigma |\ \forall\varepsilon>0, \int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} \lambda(\sigma) d\sigma > 0\}$$

entonces, si $\hat{\sigma}_\lambda(X,Y)$ es un estimador generalizado de Bayes respecto a $\lambda(\sigma)$ y $W(t) = t^2$, $\hat{\sigma}_\lambda(X,Y)$ es admisible $\forall\sigma\in\Omega$.

5.2. *Admisibilidad del estimador de Pitman para un simple parámetro de localización*

Vamos a ver si el estimador de Pitman es admisible para la pérdida cuadrática. Los resultados son algo sorprendentes. Si la distribución de X depende a lo sumo de dos parámetros de localización (donde σ es un vector real de dos dimensiones), el estimador de Pitman es admisible. Si la dimensionalidad del vector observado X es al menos 3, el estimador de Pitman es generalmente inadmisible. Se prueba la admisibilidad bajo condiciones benignas en el caso de un simple parámetro de localización.

Remitimos a Stein (8) y a los artículos de James (8) para la demostración de la admisibilidad de los estimadores de Pitman en dos dimensiones. Notemos también que Karlin (9) suministra otra demostración de la admisibilidad del estimador de Pitman en el caso de un simple parámetro de localización.

Sean $x_1,\dots, x_n$ v.a. i.i.d. teniendo una distribución común $F(x-\sigma)$ donde σ es un parámetro real de localización. Asumimos que θ es toda la recta real. Sea $f(x-\sigma)$ la función de densidad de $F(x-\sigma)$, con respecto a una medida sigma-finita $\mu(dx)$ en (X,B). Se demuestra que entre todos los estimadores que son invariantes por traslación, el estimador de Pitman.

$$\hat{\sigma}(x_1, ..., x_n) = x_{(1)} - E\{x_1/x_2-x_1, ..., x_n-x_1\},$$

minimiza la función de riesgo para la pérdida de error cuadrático uniforme en σ. Construimos la transformación

$$x = x_1 - E\{x_1/y_1,...,y_{n-1}\},\ y_i = x_{i+1}-x_1.$$

La distribución condicional de X dado $Y = (y_1, ..., y_{n-1})$ se supone que es absolutamente continua, de función de densidad

$$p(x-\sigma/y) = \frac{1}{q(y)} f(x+e(y)-\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} f(y_i+e(y)+x-\sigma)$$

siendo

$$q(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1-\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} f(y_i+x_1-\sigma)dx_1$$

Entonces, si (X,Y) es un vector de v.a. tal que la distribución condicionada de $X-\sigma$, dado Y, es $p(X/Y)$, $E_\sigma\{X\} = \sigma$, $\forall\sigma$; X es un estimador de Pitman y

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x/y)dx = 1 \quad \text{a.s.} \quad y \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x/y)\, dx = 0 \quad \text{a.s.} \qquad (5.1)$$

5.2.1. Teorema. Stein (13)

Si la distribución condicionada de $X-\sigma$, dado Y, satisface (5.1) y si además

$$\int q(y)\, \nu\, (dy)\, [\int x^2 p(X/Y)dx]^{3/2} < \infty \qquad (5.2)$$

entonces X es un estimador admisible de σ para la pérdida de error cuadrático.

Surge una cuestión importante concerniente a (5.2). Puede asegurarse la admisibilidad si se exige una condición más débil que (5.2)? ¿Puede garantizarse la admisibilidad de X cuando (5.1) se satisface pero en cambio de (5.2) se requiere que $E\{|x|^{3-\alpha}\}<\alpha$ para algún $0<\alpha<1$? La respuesta es negativa; (5.2) puede justificarse débilmente para algunas familias de distribución, pero no para todas las familias que satisfacen (5.1.). Esto ha sido demostrado por Perng.

5.2.2. Teorema. Perng (12)

En el caso de muestra de tamaño fijo, si la función de pérdida es $L(\sigma,d) = |\sigma-d|^k$, $k \geq 1$, entonces para cada α, $0\leq\alpha\leq 1$, existe una familia de funciones de distribución para las cuales:

$$E_\sigma\{|X|^\alpha|X-\sigma|^k\}<\infty, \quad \forall\sigma,$$

pero el estimador equivariante óptimo X es inadmisible.

La familia de distribución para la cual este teorema se mantiene, es, para una muestra de tamaño n=2, aquella para la que:

$$Q(dy) = \begin{cases} c(y^{k-2-\eta})\,dy & \text{si} \quad y>1 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

$$p(X-\sigma/Y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2by} & \text{si} \left| \dfrac{x-\sigma}{y} \right| \leq b \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Los parámetros η, b y c son todos mayores que cero. Perng demuestra que dado un α en (0,1) debe existir una distribución en esta familia para la cual $E_0|X|^{k+\alpha}<\infty$ pero X es inadmisible.

Brown (2) prueba que si la muestra consiste en una observación, la condición débil

$$\int x^2 p(x)\,dx<\alpha$$

es suficiente para la admisibilidad de X bajo pérdida de error cuadrático.

Fox y Rubin (5) consideran el problema de estimar un único parámetro de localización cuando la función de pérdida es una función bilineal convexa,

$$L(\sigma,d) = \begin{cases} a\,(\sigma - d) & \text{si} \quad d\leq 0 \quad 0<a \\ b\,(d - \sigma) & \text{si} \quad d\geq 0 \quad b<\infty \end{cases}$$

Se demuestra que, dado σ, si X tiene una distribución $F_\sigma(X)$ el valor de d que minimiza $E_\sigma\{L(\sigma,d)\}$ es $\dfrac{b}{a+b}$.

5.2.3. Teorema. Fox y Rubin (5)

Sea p(X/Y) la densidad condicionada de $X-\sigma$, dado Y, que satisface las dos siguientes condiciones:

i) La fracción de p(X/Y), $\dfrac{a}{a+b}$, es cero para cada Y.

ii)

$$\int Q(dy) \int x^2 p(X/Y)\,dx<\infty$$

entonces, X es un estimador admisible.

Notemos que si no asumimos que la distribución condicional de $X-\sigma$, dado Y, es absolutamente continua, o tiene puntos de crecimiento en un retículo fijo $\forall Y$, entonces podemos únicamente probar que X es casi admisible.

BIBLIOGRAFIA

(1) BLYTH, C. R.: On minimax statistical decision procedures and their admissibility. Ann. Math. Statist., 22: 22-42, 1951.

(2) BROWN, L. D.: On the admissibility on invariant estimators of one or more location parameters. Ann. Math. Statist., 37: 1.087-1.136, 1966.

(3) FARREL, R. H.: Estimators of a location parameter in the absolutely continous case. Ann. Math. Statist., 35: 949-998, 1964.

(4) FERGUSON, T. S.: Mathematical statistics: a decisión theoretic approach. Academic Press. New York, 1967.

(5) FOX, M., RUBIN, H.: Admissibility of quantile estimates of a single location parameter. Ann. Math. Statist., 35: 1.009-1.031, 1964.

(6) GIRSHICK, M. A., SAVAGE, L. G.: Bayes and minimax estimates for quadratic loss function. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1: 53-74, 1961.

(7) HODGES, J. L., LEHMANN: Some aplications of the Cramer-Rao inequality. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1: 13-22, 1951.

(8) JAMES, W., STEIN, C.: Estimation with quadratic loss. Berkeley Symp. Statis. 1, Prob. 2: 361-379 (1968).

(9) KARLIN, S.: Admissibility for estimation with quadratic loss. Ann. Math. Statist., 29: 406-436, 1958.

(10) KATZ, M. V.: Admisible and minimax estimates of parameters in truncated spaces. Ann. Math. Statist., 32: 136-142, 1961.

(11) KIEFER, J.: Sequential minimax estimation for the rectangular distribution with known range. Ann. Math. Statist., 23: 586-593, 1954.

(12) PERNG, S. H.: Inadmissibility of varius good statistical procedures which are translation invariant. Tech. Rep. No. 16, Dept. of Statist. Michigan University, 1967.

(13) STEIN, C.: The admissibility of the Pitmans estimator for a single localtion parameter. Ann. Math. Statist. 30:877-880, 1959.

(14) WALD, A.: Statistical decisión functions. John Wiley, N. Y. 1950.

(15) ZACKS, S.: The Theory of Statistical Inference. Wiley, New York. 1971.