XXX REUNIÓN BIENAL DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA

Y

15º ENCUENTRO IBÉRICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

LIBRO DE RESÚMENES

Edita:
Real Sociedad Española de Física

Coordinación editorial:
Enrique Carballo
Departamento de Física Aplicada
de la Facultad de Ciencias de Ourense

Imprime:
Imprenta Deputación Provincial de Ourense

ISBN: 84-689-3266-3
Depósito Legal: OU-121/05

Estudio del pandeo de una barra delgada empotrada en un extremo: Solución aproximada mediante balance armónico

T. Beléndez, C. Neipp, A. Márquez, M. L. Álvarez y A. Beléndez

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal, Universidad de Alicante, Apartado de correos 99, 03080 Alicante; e-mail: a.belendez@ua.es

I. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza el pandeo o flexión lateral de una barra delgada en posición vertical empotrada en su extremo inferior y sometida a una fuerza puntual vertical en su extremo libre. Se trata de un ejemplo de un sistema mecánico sencillo para el que no resulta complicado formular las ecuaciones que gobiernan su comportamiento[1] o estudiarlo experimentalmente en un laboratorio de mecánica a nivel universitario[2]. Sin embargo, y al igual que sucede con el péndulo simple, se obtiene una ecuación diferencial con un término no lineal y se dice que el problema presenta no linealidad geométrica. Se va a resolver esta ecuación diferencial de forma aproximada mediante el método de balance armónico[3], el cual, a diferencia de otros métodos como el de perturbaciones de Lindstedt-Poincaré[4], no sólo es aplicable para pendientes pequeñas de la barra, sino también para grandes.

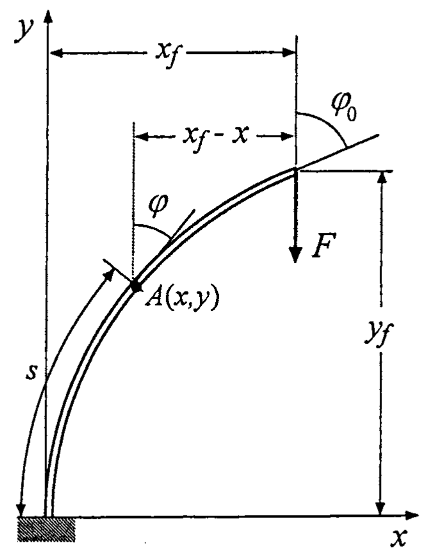

Figura 1. Pandeo de una barra delgada empotrada en un extremo.

II. TEORÍA

Sea una barra delgada de longitud L y sección rectangular constante, inicialmente en posición vertical, empotrada en su extremo inferior y sobre la que se aplica una fuerza vertical F en su extremo libre (Figura 1). La ecuación de Euler-Bernoulli[5] relaciona el momento flector de la fuerza F con el radio de curvatura de la barra, a través del módulo de Young E y el momento de inercia I de la sección transversal de la barra respecto al eje neutro:

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2} + \frac{F}{EI}\operatorname{sen}\varphi(s) = 0 \qquad [1]$$

con las condiciones de contorno $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(L) = 0$, y además $\varphi(L) = \varphi_0$. La solución de la ecuación [1] se expresa en términos de integrales elípticas[6]. La ecuación [1], aunque sencilla en apariencia, es difícil de resolver debido a la no-linealidad inherente del término senφ. El procedimiento alternativo habitual consiste en hallar soluciones aproximadas que representen de modo aceptable a la solución exacta desconocida, al menos, para un determinado intervalo de valores de φ_0. Como ya se ha señalado, en este trabajo se van a obtener soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico. Para ello se sustituye, en la ecuación [1], senφ por su desarrollo en serie y se supone que la solución aproximada es:

$$\varphi(s) = \varphi_0 \operatorname{sen}(\pi s / 2L) \qquad [2]$$

donde φ_0 es la incógnita, cuyo valor óptimo hay que calcular para que la solución periódica aproximada propuesta sea una buena representación de la solución periódica exacta desconocida. En este método el valor de φ_0 se determina exigiendo que la solución aproximada propuesta satisfaga la ecuación diferencial en sus armónicos más grandes que son los de menor orden. Sustituyendo la solución aproximada [2] en la ecuación diferencial, y teniendo en cuenta la fórmula general de las potencias impares de la función seno, queda:

$$\left[-\omega^2+\omega_0^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}\varphi_0^{2n}\right]\operatorname{sen}\omega s+(\text{armónicos de orden superior})=0 \qquad [3]$$

donde $\omega_0 = (F/EI)^{1/2}$ y $\omega = \pi/2L$. Para que el armónico de menor orden sea nulo, debe ser cero el coeficiente de senωs en la ecuación [3] y, teniendo en cuenta que el valor de la fuerza crítica de Euler para esta barra $F_{cr} = \pi^2EI/4L^2$, esto implica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}\varphi_0^{2n}=\frac{F_{cr}}{F} \qquad [4]$$

que permite calcular el ángulo φ_0 en función de F y F_{cr}. Es posible obtener distintas soluciones truncando la serie anterior. El caso $n = 0$ implica que debe ser $F = F_{cr}$, que es la mínima fuerza necesaria para que la barra flexione, mientras que para $n = 1$, $n = 2$ y $n = \infty$, la pendiente φ_0 en el extremo libre de la barra se calcula, respectivamente, mediante:

$$\varphi_0=\sqrt{8-8\frac{F_{cr}}{F}} \qquad \varphi_0=\sqrt{12-\sqrt{192\frac{F_{cr}}{F}-48}} \qquad J_1(\varphi_0)-\frac{F_{cr}}{F}\frac{\varphi_0}{2}=0 \qquad [5]$$

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

En la Tabla 1 se muestran los valores de φ_0 en función de F/F_{cr} para las aproximaciones $n = 1$, $n = 2$ y el caso general $n = \infty$, junto con los valores exactos que se obtienen con las integrales elípticas[1]. Para $n = \infty$ los errores relativos de φ_0 son pequeños para $\varphi_0 < 140°$. Por ejemplo, para $F/F_{cr} = 2.54226$ el valor exacto de φ_0 es 140°, mientras que el calculado de forma aproximada es 143.93°, por lo que el error relativo es 2.8%.

Tabla 1: Valores de φ_0 exactos y aproximados calculados mediante balance armónico.

F/F_{cr}	φ_0 exacto	φ_0 aprox. ($n = 1$)	φ_0 aprox. ($n = 2$)	φ_0 aprox. ($n = \infty$)
1.00000	0°	0.00°	0.00°	0.00°
1.01540	20°	19.96°	19.96°	20.01°
1.06366	40°	39.65°	40.06°	40.05°
1.15172	60°	58.82°	60.22°	60.19°
1.29389	80°	77.23°	80.63°	80.47°
1.51839	100°	94.67°	101.57°	101.02°
1.88480	120°	111.03°	123.69°	122.03°
2.54226	140°	126.22°	148.90°	143.93°

Referencias

[1] T. Beléndez, C. Neipp y A. Beléndez, Rev. Esp. Fis. **18** (3), 41 (2004).
[2] T. Beléndez, C. Neipp y A. Beléndez, Int. J. Mech. Engng. Educ. **32**, 78 (2004).
[3] R. E. Mickens, Oscillations in Planar Dynamic Systems (World Scientific,Singapur,1996).
[4] T. Beléndez, C. Neipp y A. Beléndez, XIXX Reunión Bienal de Física,Vol. 1, 134 (2003).
[5] A. Valiente, Am. J. Phys. **72**, 1008 (2004).
[6] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, Curso de Física Teórica, Vol. 7: Elasticidad (Reverté, Barcelona, 1986).