

# ESTÁTICA DE HILOS SOMETIDOS A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTOALES: ESTUDIOS EXPERIMENTAL, GRÁFICO Y ANALÍTICO

T. Beléndez<sup>1,#</sup>, C. Neipp<sup>2</sup> y A. Beléndez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciencia y Tecnología de los Materiales  
Universidad Miguel Hernández. Avda. del Ferrocarril, s/n. 03202 ELCHE (Alicante)

<sup>2</sup>Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal  
Universidad de Alicante. Apartado 99. 03080 ALICANTE

#t.belendez@umh.es

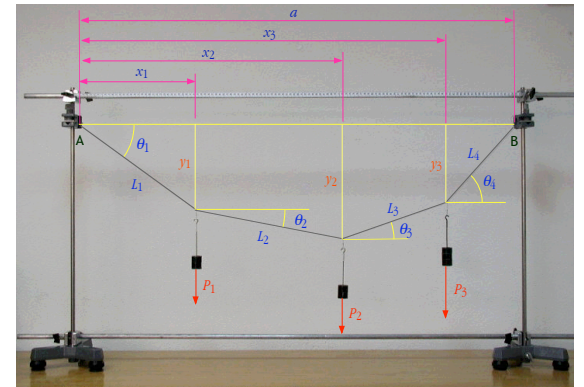
XXVIII REUNIÓN BIENAL DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA Y 11º ENCUENTRO IBERICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA  
Sevilla, 24 - 27 de septiembre de 2001

## INTRODUCCIÓN

- El estudio de la estática de hilos y cables puede encontrarse en textos de Mecánica y en la mayoría de los programas de las asignaturas de Mecánica para ingenieros. Sin embargo, por aparecer al final de los programas y porque se le suele dar menos importancia que a otros elementos estructurales de uso más común como son armaduras o vigas, los temas dedicados a la estática de cables suelen no abordarse cuando la falta de tiempo no permite impartir el programa completo de la asignatura.
- Por su combinación única de resistencia, poco peso y flexibilidad, los hilos o cables se utilizan a menudo para soportar cargas y transmitir fuerzas en estructuras de la construcción (puentes, tirantes, etc.) o para la transmisión de potencias en máquinas y vehículos (cadenas, correas, etc.). También se utilizan en las redes de tendido eléctrico o en las redes de telefonía (la forma que adopta el cable en estos casos se denomina catenaria).
- La estática de cables presenta ciertas ventajas didácticas frente a los otros elementos estructurales mencionados. Además de abordar -como en las armaduras y las vigas- conceptos como fuerzas concentradas y distribuidas, momentos, reacciones en los apoyos o esfuerzos internos, tienen la ventaja didáctica de poder visualizarse fácilmente en un laboratorio mediante experiencias de fácil montaje realizadas con un material sencillo y de bajo coste.

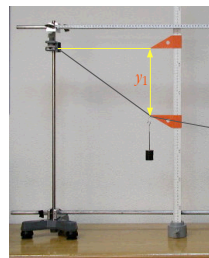
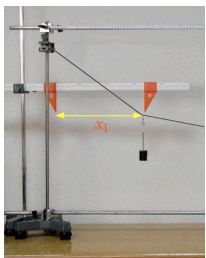
## DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

- En este trabajo se va a considerar el estudio de un cable homogéneo, flexible e inextensible sometido a una serie de cargas concentradas. Las relaciones existentes entre su longitud, cuerda, flecha, tensión del cable y cargas aplicadas pueden determinarse utilizando las ecuaciones de equilibrio: ( $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ )
- La figura muestra un esquema correspondiente al cable analizado. Para llevar a cabo el montaje experimental se utiliza un hilo de longitud  $L$  de los que se pueden encontrar en cualquier laboratorio de Física, que se fija por sus extremos  $A$  y  $B$  a dos barras verticales y a continuación se cuelgan un conjunto de pesas  $P_1, P_2$  y  $P_3$  en distintas posiciones del hilo.
- Los datos del problema serán las cargas aplicadas,  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , la cuerda  $a$  y las longitudes individuales  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$  de los segmentos del cable. La forma que adopta el cable en equilibrio sujeto por sus extremos y sometido en diferentes puntos intermedios a un conjunto de cargas puntuales se denomina "polígono funicular", y el segmento que une los puntos  $A$  y  $B$  recibe el nombre de "línea de cierre". Del dispositivo experimental se puede fácilmente obtener el polígono funicular, pues con ayuda de una regla horizontal se miden las distancias  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , y con una regla vertical las distancias  $y_1, y_2$  e  $y_3$ . Con estos datos se determinan los ángulos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  y  $\theta_4$ .



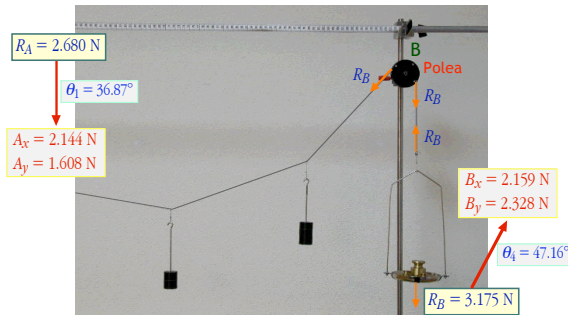
### Determinación de los parámetros experimentales

**DATOS:**  $P_1 = 1.176 \text{ N}, P_2 = 1.176 \text{ N}, P_3 = 1.568 \text{ N}, a = 120 \text{ cm}$   
 $L = 140 \text{ cm}, L_1 = 40 \text{ cm}, L_2 = 40 \text{ cm}, L_3 = 30 \text{ cm}, L_4 = 30$



$x_1 = 32.0 \text{ cm}$   
 $x_2 = 71.2 \text{ cm}$   
 $x_3 = 99.6 \text{ cm}$   
 $y_1 = 24.0 \text{ cm}$   
 $y_2 = 32.0 \text{ cm}$   
 $y_3 = 22.0 \text{ cm}$   
 $\theta_1 = 36.87^\circ$   
 $\theta_2 = 11.53^\circ$   
 $\theta_3 = 19.40^\circ$   
 $\theta_4 = 47.16^\circ$

### Determinación experimental de las reacciones en los apoyos



### Cálculo de las tensiones en los distintos segmentos del hilo

Con los datos de que se dispone es posible determinar las tensiones  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$  en los distintos segmentos del hilo. Para ello basta considerar el diagrama de sólido libre para cada pesa y para los extremos  $A$  y  $B$ , aplicando la ecuación:

$$\sum F_i = 0$$

Empezando, por ejemplo, por el punto  $A$  teniendo en cuenta que se ha medido experimentalmente  $R_A$  ( $A_x, A_y$ ):

$$A_x = T_1 \cos \theta_1$$

$$A_y = T_1 \sin \theta_1$$

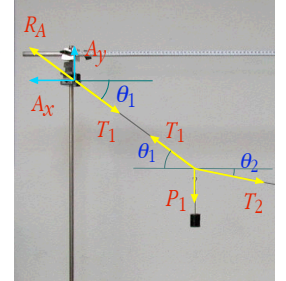
Para la pesa  $P_1$ :

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2$$

$$T_1 \sin \theta_1 = P_1 + T_2 \sin \theta_2$$

Y así sucesivamente. Es fácil ver que se cumple:

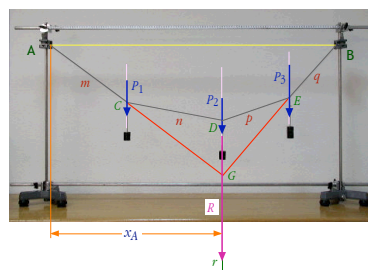
$$A_x = T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = T_3 \cos \theta_3 = T_4 \cos \theta_4 = B_x$$



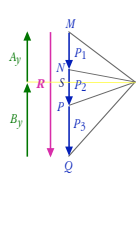
### Obtención gráfica de la resultante y las reacciones en los apoyos

- Experimentalmente se ha obtenido el polígono funicular. Considerando este polígono, puede estudiarse el cable en equilibrio se realiza gráficamente utilizando las técnicas de la Estática Gráfica para obtener las reacciones en los apoyos, la resultante del sistema, la posición del eje central y las tensiones en los distintos segmentos del hilo. De este modo el alumno, haciendo uso de medidas experimentales, obtiene gráficamente toda la información sobre el equilibrio del sistema.
- Partiendo del polígono funicular  $ACDEB$ , dibujamos los pesos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  a escala así como el polígono de fuerzas  $MNPQ$  (en este caso una línea). Por un punto  $O$  cercano al polígono de fuerzas y denominado polo trazamos los segmentos  $OM, ON, OP$  y  $OQ$  (llamados radios polares) paralelos a los segmentos  $AC, CD, DE$  y  $EB$ , respectivamente, del polígono funicular. El vector  $MO$  es la resultante  $R$  del sistema de fuerzas y, por tanto, determina la dirección del eje central. La situación del eje central se obtiene prolongando los segmentos  $AC$  y  $EB$  del polígono funicular que se cortan en un punto  $G$ . La recta  $r$  paralela a la resultante  $R$  (segmento  $MO$ ) trazada por el punto  $G$  es el eje central del sistema de fuerzas.
- Para encontrar las componentes verticales de las reacciones en los apoyos,  $A_y$  y  $B_y$ , basta con equilibrar el sistema de fuerzas mediante dos fuerzas paralelas a la resultante y que pasen por los puntos dados  $A$  y  $B$ . Para ello se traza la línea que une los puntos  $A$  y  $B$  del polígono funicular (línea horizontal  $AB$ ).

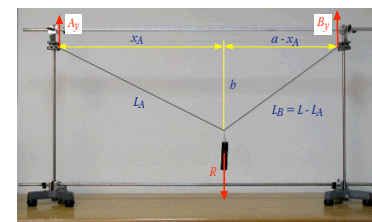
- En el polígono de fuerzas se traza desde el polo  $O$  una recta paralela a la línea  $AB$ , que divide a la resultante en dos segmentos  $SM$  y  $QS$ , que corresponden a los módulos de las dos fuerzas  $A_y$  y  $B_y$  buscadas.



### Polígono de fuerzas



- Conocida la resultante del sistema y su línea de acción, pueden sustituirse las cargas puntuales por la carga resultante en el dispositivo experimental.



### Cálculo de $L_A$ y $L_B$

$$a = 120 \text{ cm} \quad L = 140 \text{ cm} \quad x_A = 71 \text{ cm}$$

$$L_A^2 - x_A^2 = (L - L_A)^2 - (a - x_A)^2$$

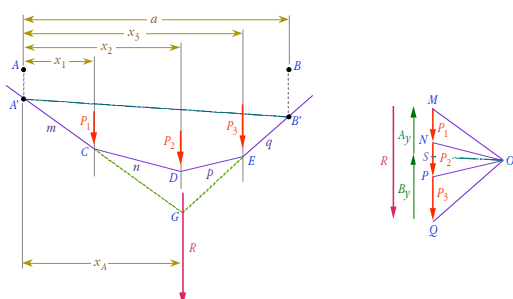
$$L_A^2 - x_A^2 = L^2 + L_A^2 - 2LL_A - a^2 - x_A^2 + 2ax_A$$

$$2LL_A = L^2 - a^2 + 2ax_A$$

$$L_A = \frac{L^2 - a^2 + 2ax_A}{2L} = 79.4 \text{ cm}$$

$$L_B = L - L_A = 60.6 \text{ cm}$$

## ESTUDIO MEDIANTE ESTÁTICA GRÁFICA



## ESTUDIO ANALÍTICO

- El siguiente estudio que se puede realizar combina medidas experimentales con resolución analítica. Utilizando los valores medidos experimentalmente de las distancias  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio ( $\sum F = 0, \sum M = 0$ ) y utilizar el diagrama de sólido libre para calcular las reacciones en los apoyos y las tensiones  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$  en los distintos segmentos del hilo.
- También podemos determinar la resultante del sistema  $R$  y la distancia  $x_A$  de su línea de acción, por ejemplo, al punto  $A$ . Se tiene:  
$$R = P_1 + P_2 + P_3 = 3.92 \text{ N}$$
  
Además, tomando momentos respecto al punto  $A$ :  
$$\sum M_A = 0 \rightarrow R x_A - B_y a = 0 \rightarrow x_A = \frac{B_y a}{R} \rightarrow x_A = 0.71 \text{ m}$$
- Por último, un problema más complejo que se puede plantear a los alumnos es la resolución completamente analítica del sistema, tomando como datos  $L_1, L_2, L_3, L_4, a, P_1, P_2$  y  $P_3$ . La solución resulta muy engorrosa si se realizan los cálculos a mano, por lo que para resolver el problema del cable mediante esta formulación es recomendable utilizar un ordenador.

## BIBLIOGRAFÍA

- A. Bedford y W. Fowler, "Mecánica para Ingeniería: Estática" (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996), Cap. 9.
- A. Beléndez, T. Beléndez y C. Neipp, "Estudio estático de un cable homogéneo bajo la acción de su propio peso: Catenaria", Revista Española de Física, Vol. 15, XXX (2001) -en prensa-
- F. Belmar, A. Garmendia y J. Linares, "Curso de Física Aplicada: Estática" (Universidad Politécnica de Valencia, 1987), Cap. 9.
- W. F. Riley y L. D. Sturges, "Ingeniería Mecánica: Estática" (Reverté, Barcelona, 1995), Cap. 8.
- D. J. McGill y W. W. King, "Engineering Mechanics: Statics" (PWS Publishing Company, Boston, 1994), Cap. 5.