REVISTA de ECONOMIA y EMPRESA

Anales de la Universidad de Alicante

Volumen 2 — Número 1

REVISTA de ECONOMIA y EMPRESA

Anales de la Universidad de Alicante

Volumen 2
Número 1

n.º 41

ALICANTE, 1984

Revista de Economía y Empresa
Anales de la Universidad de Alicante

SECRETARIADO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Depósito Legal: A - 377 - 1984
Fotocomposición: COMPOBELL, S.A. Patiño - MURCIA
Imprime: Gráficas CIUDAD, S.A. - San Juan de Ribera, 30- ALCOY

INDICE

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
REVISTA DE ECONOMIA Y EMPRESA, vol. 2, n.º 1, 1984, pp. 27-35.

SISTEMA DE PRECIOS Y SELECCION DE TECNICAS: ANALISIS MULTISECTORIAL

Takao Fujimoto*
Carmen Herrero**
Antonio Villar**

1. INTRODUCCION

Las propiedades de los vectores de precios asociados a diferentes tecnologías en el contexto de modelos lineales multisectoriales del tipo Sraffa-Leontief, se han discutido extensamente desde principios de los años 60. Recientemente, Herrero, Jiménez-Raneda & Villar (1980) (que será designado aquí abreviadamente HJRV), obtuvieron nuevos resultados. Posteriormente las proposiciones contenidas en HJRV (1980) han sido probadas de modo más simple por Fujimoto, Herrero & Villar (1983a), obteniendo resultados adicionales (que proporcionan un criterio de selección eficiente de procesos sin necesidad de conocer previamente los precios que prevalecerán después del cambio técnico).

Este artículo puede considerarse como una nueva versión del último trabajo mencionado, incorporando ciertas extensiones relacionadas con el análisis de sensibilidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales en los que intervienen M-matrices, algunos de los cuales se obtuvieron en Fujimoto, Herrero & Villar (1983b).

* Department of Economics. University of Kagawa. Japan.

** Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Alicante.

2. EL MODELO Y LOS SUPUESTOS

Utilizamos un modelo Sraffa-Leontief de capital circulante. Sea A una matriz $n \times n$ de coeficientes de inputs y L un n-vector fila de coeficientes de input de trabajo. La tasa uniforme de beneficio está dada por $\underline{r}$, y el vector de precios de equilibrio por $\bar{p}$ o bien por p (donde $p = 1/w\ \bar{p}$, siendo w la tasa de salario). Los vectores y matrices mencionados están fechados antes del cambio técnico. Para designar los símbolos correspondientes, después del cambio técnico, les colocaremos una estrella, es decir, A^*, L^*, $\bar{p}^*$ y p^*. A lo largo de todo el artículo supondremos que la tasa de beneficio está fijada en $\underline{r}$.

En lo que sigue, con frecuencia dividiremos A, L y p en dos partes. Los símbolos A_M y A_R indicarán, respectivamente, la matriz $n \times m$ formada por las $\underline{m}$ primeras columnas de A, y la matriz $n \times (n-m)$ formada por las restantes columnas de A. Los símbolos L_M, L_R, p_M y p_R se emplearán de modo análogo. Utilizaremos también M y R para designar los conjuntos de índices $\{1, 2, \ldots, m\}$ y $\{(m+1), \ldots, n\}$ respectivamente.

En equilibrio, se tienen las siguientes ecuaciones para los precios:

$$\bar{p} = (1 + r)(\bar{p}A + wL) \quad [1]$$

$$\bar{p}^* = (1 + r)(\bar{p}^*A^* + w^*L^*) \quad [2]$$

antes y después del cambio técnico, respectivamente. O bien, dividiendo la ecuación [1] por w, y la ecuación [2] por w*:

$$p = (1 + r)(pA + L) \quad [1']$$

$$p^* = (1 + r)(p^*A^* + L^*) \quad [2']$$

Consideramos los siguientes supuestos:

Supuesto S1: A es semipositiva, indescomponible y productiva (es decir, $\lambda(A) < 1$, siendo $\lambda(A)$ el autovalor de módulo máximo de la matriz A).

Supuesto S2: $L > 0$ (es necesario el empleo de trabajo en la producción de todas las mercancías).

(Respecto a la vinculación de los resultados a estos supuestos, ver las observaciones finales.)

Los supuestos S1 y S2 garantizan que el vector p es la única solución positiva del sistema [1'], para cada r tal que

$$0 \leqq r < \frac{1}{\lambda(A)} - 1$$

3. PROPOSICIONES

Los principales resultados que se derivan de la comparación de los vectores de precios asociados a diferentes tecnologías, pueden resumirse en las proposiciones siguientes:

Proposición 1. *Supongamos que (A, L) y (A*, L*) son dos tecnologías que se diferencian en los m primeros procesos (m < n). Sean M = = {1, 2,..., m}* y R = *{(m + 1),..., n} Dados los supuestos S1 y S2,* si $p_M > p^*_M$, entonces

(i) $p > p^*$

(ii) $\min_{i \varepsilon M} \frac{p^*_i}{p_i} < \frac{p^*_j}{p_j}$ *para todo j ε R.*

Demostración:

(i) sabemos que $p_R = (1 + r)(pA_R + L_R)$. Entonces, podemos escribir

$$p_R \geq (1 + r)((p_M^*, p_R) A_R + L_R)$$

(por el supuesto S1 y del hecho de que $p_M^* < p_M$ por hipótesis). Entonces, mediante iteración tal que

$$p^{(0)} = p_R$$
$$p^{(i+1)} = (1 + r)((p_M^*, p^{(i)}) A_R + L_R)$$

podemos obtener p_R^* que satisface

$$p_R^* = (1 + r)((p_M^*, p_R^*) A_R + L_R)$$

Resultado que se debe a que la sucesión $\{p^{(i)}\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente. Se tiene que $p_R \geq p_R^*$ ya que $p^{(0)} \geq p^{(1)}$ en la iteración. De este resultado, y de la indescomponibilidad de A, es fácil probar que $p > p^*$ (véanse las proposiciones 1 y 3 en Fujimoto (1981)).

(ii) Sea k tal que $k = \min_{i \varepsilon M} \frac{p_i^*}{p_i}$. Obviamente, se tiene que $0 < k < 1$, y $p_M^* > kp_M$. Podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
kp_R &= (1 + r)(kpA_R + kL_R) < (1 + r)(kpA_R + L_R) = \\
&= (1 + r)(kpA_R^* + L_R^*) = (1 + r)(k(p_M, p_R)A_R^* + L_R^*) \leq \\
&\leq (1 + r)((p_M^*, kp_R)A_R^* + L_R^*).
\end{aligned}
$$

Así, por iteración tal que:

$$
\begin{aligned}
p^{(0)} &= kp_R \\
p^{(i+1)} &= (1 + r)((p^*_M, p^{(i)})A^*_R + L^*_R)
\end{aligned}
$$

podemos obtener p_R^* que satisface

$$p_R^* = (1 + r)((p_M^*, p_R^*)A_R^* + L_R^*)$$

Resultado que se obtiene gracias a que la sucesión $\{p^{(i)}\}$ es monótona creciente y acotada superiormente por p_R, ya que $p^{(0)} < p_R$, y si $p < p_R$, entonces

$$
\begin{aligned}
p^{(i+1)} &= (1 + r)((p^*_M, p^{(i)})A_R + L_R) < \\
&< (1 + r)((p_M, p_R)A_R + L_R) = p_R
\end{aligned}
$$

Claramente, $kp_R < p^*_R$, que es el resultado deseado.

c.q.d.

Trivialmente, tenemos ahora:

Corolario. *Supongamos que (A, L) y (A*, L*) son dos tecnologías que se diferencian solamente en el primer método de producción. Dados los supuestos S1 y S2,* si $p_1 > p^*_1$, entonces

$$\frac{\bar{p}^*_1}{\bar{p}_1} < \frac{\bar{p}^*_j}{\bar{p}_j} \quad j \neq 1$$

La proposición 1, punto (i), es la proposición I en HJRV (1980), pero es interesante notar que en la prueba dada aquí, no se ha utilizado ninguna manipulación con determinantes. La proposición 1, punto (ii) es, en cierto sentido, un resultado nuevo, que generaliza la proposición II en HJRV (1980), proposición que aparece ahora justamente como un corolario (es interesante recordar que este resultado no puede generalizarse para $m > 1$).

El punto (ii) de la proposición 1 nos dice que el cambio en los precios de p a p* es tal que el cambio relativo mayor se presenta precisamente entre las mercancías afectadas por el cambio tecnológico en sus procesos de producción ($i = 1,\dots, m$). Este resultado puede mirarse también como una generalización parcial del teorema 6 de Morishima (1964, p. 17), relacionado con el Principio de Le Chatelier-Samuelson. En relación con el corolario, es interesante recordar que *en general,* dos técnicas adyacentes a punto de cambio, se diferencian únicamente en un proceso de producción.

Proposición 2. *Supongamos que (A, L) y (A*, L*) son dos tecnologías que se diferencian en los* m *primeros procesos (m < n). Dados los supuestos S1 y S2,* si $p_M \geq (1 + r)(pA^*_M + L^*_M)$, entonces,

$$(i) \quad p > p^*$$

$$(ii) \quad \min_{i \varepsilon M} \frac{p^*_i}{p_i} < \frac{p^*_j}{p_j} \quad \textit{para todo } j \ \varepsilon \ R$$

siendo $M = \{1,\dots,m\}$ *y* $R = \{(m+1),\dots,n\}$

Demostración:

(i) De $p_M \geq (1 + r)(pA^*_M + L^*_M)$ y de $p_R = (1 + r)(pA_R + L_R)$, se tiene que $p \geq (1 + r)(pA^* + L^*)$, ya que $A_R = A^*_R$ y $L_R = L^*_R$. Además, $p^* = (1 + r)(p^*A^* + L^*)$, y p* es la única solución positiva de esta última ecuación. Por otro lado, p* es el mínimo vector p tal que $p \geq 0$, $p \geq (1 + r)(pA^* + L^*)$, y por tanto no es posible encontrar ningún $i = 1,\dots,n$ tal que $p_i < p^*_i$ (véase Fujimoto (1980a), Lema 4).

$$\text{Sea} \quad Q = \{i = 1,\dots,n \ / \ p_i = p^*_i\}$$

podemos reordenar términos y escribir,

$$p^*_Q = (1 + r)(p^*_Q A^*_{11} + p^*_{n-Q} A^*_{21} + L^*_Q), \text{ y}$$
$$p_Q \geq (1 + r)(p_Q A^*_{11} + p_{n-Q} A^*_{21} + L^*_Q)$$

Como $p_Q = p^*_Q$ por hipótesis, las dos últimas ecuaciones implican,

$$p^*_{n-Q} A^*_{21} = p_{n-Q} A^*_{21}$$

y, por tanto, $A^*_{21} = 0$, lo que implica que la matriz A^*_Q (y por tanto la matriz A*) será descomponible, en contra del supuesto S1.

(ii) Es suficiente observar que (i) implica la hipótesis de la proposición 1, y, por tanto, se tiene (ii) de la proposición 1.

c.q.d.

Corolario. *Supongamos que (A, L) y (A*, L*) son dos tecnologías que se diferencian solamente en el primer proceso de producción. Dados los supuestos S1 y S2,* si $p_1 > (1 + r)(pA^*_1 + L^*_1)$ entonces,

$$\frac{\bar{p}^*_1}{\bar{p}_1} < \frac{\bar{p}^*_j}{\bar{p}_j} \quad \textit{para todo } j \neq 1$$

Demostración:

Si $p_1 > (1 + r)(pA^*_1 + L^*_1)$, entonces, por la proposición 2, $p_1 > p^*_1$. Por tanto, utilizando el corolario de la proposición 2, obtenemos el resultado deseado.

c.q.d.

La proposición 2 es un nuevo resultado que extiende de una forma particular los resultados de la proposición 1. El significado de la expresión «de una forma particular» indica que, mientras en la proposición 1 se requiere alguna información sobre p^*_M en la proposición 2 no se requiere esta información. Esto es interesante desde el punto de vista del análisis del comportamiento esperado de las industrias. En efecto, éstas no necesitan conocer los precios que prevalecerán después del cambio técnico. La condición requerida es, simplemente, que el costo de las *m* primeras industrias, en términos de los precios anteriores a la innovación, no se incremente con la adopción de los nuevos procesos, y que al menos una industria disfrute de un decrecimiento en su costo. El corolario de esta proposición 2 está íntimamente relacionado con el obtenido por Morishima (1973, ch. 3). Pero el teorema de Morishima se refiere a los efectos en los valores trabajo (o en los precios de equilibrio) del decrecimiento en el coeficiente L_1 o en el coeficiente a_{i1} *individual* y *separadamente;* nuestro corolario permite cambios de más amplio rango. Lo único que se requiere es la reducción de costes en la primera industria mediante la adopción de un nuevo proceso.

4. OBSERVACIONES FINALES

4.1. *Indescomponibilidad*

El punto (ii) de la proposición 1, así como los dos corolarios, son independientes de la hipótesis de indescomponibilidad de la matriz A. Para analizar lo que sucede con el punto (i) de la proposición 1 cuando A es descomponible, véase HJRV (1980, sección 5).

4.2. *Supuestos alternativos y más débiles que permiten obtener los mismos resultados*

Consideremos los siguientes supuestos:

Supuesto S'1: A es indescomponible y L es semipositivo.

Supuesto S''1: L es estrictamente positivo.

Supuesto S'2: Existe un vector $q > 0$ tal que

$$q \geq (1 + r)(qA + L)$$

Si definimos $F(p, c) = p - (1 + r)(pA + L)$, donde c es un vector de parámetros que incluye todos los coeficientes de A y L, entonces, dados los supuestos S'1 y S'2, esta aplicación F satisface todas las hipótesis requeridas en Fujimoto (1980a). Utilizando dichos resultados (en particular la existencia de una única solución positiva para la ecuación (1')), podemos probar el punto (i) de la proposición 1 y la proposición 2 (sin ningún cambio en la prueba, sólo utilizando estos supuestos en vez de los S1 y S2).

Además, utilizando los supuestos S'1 y S'2 (en lugar de S1 y S2) podemos probar el punto (ii) de la proposición 1. Para hacerlo, necesitamos garantizar la unicidad de la solución positiva de la ecuación (1'); esta cuestión puede resolverse empleando el teorema 1 de Fujimoto (1980b). El resto de la prueba permanece inalterado [1].

4.3. *El caso de una única tecnología y otras aplicaciones*

Los resultados obtenidos en este artículo pueden inmediatamente extenderse a la comparación entre precios (o entre cantidades) cuando alguno de los valores añadidos (o de las demandas finales) cambia, para una tecnología dada.

Estos resultados pueden, asimismo, facilitar la discusión de ciertos tópicos para los que una buena forma de tratarlos, puede ser el punto de vista de la selección de técnicas. En particular, este punto de vista se ha utilizado para explicar la estructura de mercado (véase Parrinello (1982)) y algunos aspectos del comercio internacional (véase Jiménez-Raneda (1983)). Si utilizamos modelos de Leontief no lineales, la estructura óptima de output también puede discutirse desde esta perspectiva.

---

[1] Véase, en este sentido, Fujimoto, Herrero & Villar (1983a).

Finalmente, como se observa en HJRV (1980), podemos utilizar capital fijo, cuando se supone que éste se deprecia a tasa constante (véase Fujimoto (1981)).

4.4. *Resultados relacionados en el sistema dual*

Desde el punto de vista formal, los resultados obtenidos pueden trasladarse al sistema de cantidades: $x = (1 + g) Ax + c$, cuando se permiten cambios en las filas de la matriz A. Una primera interpretación económica de tales cambios puede vincularse a la introducción de nuevos bienes, que sustituyen a las mercancías iniciales.

Por otra parte, podemos tomar una submatriz cuadrada A_{kk} (donde $k = \max (m, g)$ y $g = \max i$ tales que a_{ij} ha cambiado, $j = 1,\ldots,n$), y estudiar el efecto de tales cambios tecnológicos sobre precios y cantidades, simultáneamente.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

FUJIMOTO, T. (1980a), «Global Strong Le Chatelier-Samuelson Principle». *Econometrica* 48, pp. 1.667-74.

FUJIMOTO, T. (1980b), «Nonsubstitution Theorems and the Systems of Non-linear Equations». *Journal of Economic Theory* 23, pp. 410-415.

FUJIMOTO, T. (1981), «An Elementary Proof of Ok ishio's Theorem for Models with Fidex Capital and Heterogeneans Labour, *Metro-economica,* en prensa.

FUJIMOTO, T., HERRERO, C. & VILLAR, A. (1983a), «Technical Changes and their Effects on the Price Structure». *Metroeconomica,* en prensa.

FUJIMOTO, T., HERRERO, C. & VILLAR, A. (1983b), «A Sensitivity Analysis for linear Models Involving M-matrices and its Application to the Leontief Model». *Linear Algebra and its Applications*, en prensa.

HERRERO, C., JIMENEZ-RANEDA, I. & VILLAR, A. (1980), «The Selection of Techniques in Multisectoral Models of Simple Production: A Mathematical Revision». *Metroeconomica,* 32, pp. 155-171.

JIMENEZ-RANEDA, I. (1982), «La Especialización Internacional con Limitaciones a la Circulación Tecnológica entre los Países». *Cuadernos de Economía,* julio-agosto.

MORISHIMA, M. (1964), *Equilibrium, Stability and Growth.* Clarendon Press, Oxford.

MORISHIMA, M. (1973), *Marx's Economics.* Cambridge U. Press.

PARRINELLO, S. (1982), «Some Notes on Monopoly, Competition and the Choice of Techniques». *Manchester School of Economics and Social Sciences* 50, pp. 211-219.