



# El concepto de fracción

Actividades para desarrollar el significado de la relación parte-todo

**Angela Buforn**

Universidad de Alicante

Dividir un todo en partes congruentes y usar las fracciones unitarias como unidades iterativas son clave para comprender la relación parte-todo del concepto de *fracción*. La coordinación de estas dos ideas constituye el razonamiento *up and down*, entendido como una forma de razonar cuando se pide representar una parte fraccionaria cuando el todo está dado de manera implícita.



PALABRAS CLAVE

- MATEMÁTICAS
- RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
- ARITMÉTICA
- FRACCIÓN
- RAZONAMIENTO UP AND DOWN

La comprensión de las fracciones es un objetivo relevante en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria y secundaria. Uno de los procesos clave en la comprensión de las fracciones es dividir un todo en partes congruentes y el uso de las fracciones unitarias ( $1/n$ ) como unidades iterativas para desarrollar la idea de fracción como una unidad múltiple ( $3/4$  visto como 3 veces  $1/4$ ) (McCloskey y Norton, 2009; Steffe y Olive, 2010). La coordinación de estas ideas se manifiesta en actividades cuya resolución implica el razonamiento *up and down*, que conlleva reconstruir el todo dada una fracción y representar, posteriormente, otra fracción (propia o impropia) (Lamon, 2007).

Para desarrollar esta coordinación, McCloskey y Norton (2009) identifican cinco operaciones (acciones mentales) abstraídas desde la experiencia:

- 1 **Unitizing (unitizar)**. Tratar un objeto o colección de objetos como una unidad o todo. Por ejemplo, tratar tres rectángulos como un todo.
- 2 **Partitioning (dividir)**. Dividir/separar una unidad o todo en partes congruentes. Por ejemplo, repartir una tarta de manera equitativa entre 5 personas.
- 3 **Disembedding (separar)**. De manera imaginaria, identi-

## Uno de los procesos clave en la comprensión de las fracciones es dividir un todo en partes congruentes

car/separar una fracción del todo, manteniendo el todo intacto y sin alteraciones. Por ejemplo, imaginar lo que podrían ser las tres quintas partes de la tarta.

- 4 **Iterating (iterar)**. Repetir una parte para producir copias idénticas de ella. Por ejemplo, utilizar un-cuarto ( $1/4$ ) de una barra para identificar tres-cuartos de la barra.
- 5 **Splitting (dividir-iterar)**. Composición simultánea de las operaciones de *partitioning* e *iterating*. Por ejemplo, si se dice «Esta barra es cuatro veces más larga que otra. Dibuja la otra barra».

Estas operaciones (acciones mentales) generan siete esquemas cog-

nitivos (cuadro 1). Un esquema es un constructo que describe las estructuras cognitivas de los estudiantes.

A continuación, mostraremos ejemplos de actividades de aula que pueden ayudar a los estudiantes a comprender el significado parte-todo de las fracciones.

### SIMULTANEOUS PARTITIONING SCHEME

Las operaciones de unitizar y dividir son las operaciones clave de este esquema. El estudiante identifica mentalmente un conjunto de objetos como un todo que se puede dividir de manera equitativa. Un ejemplo de actividad en la que se examina tanto la idea de unitizar como la de dividir en partes congruentes, en un contexto continuo, sería la que recoge la imagen 1 (modificada de McCloskey y Norton, 2009).

En la resolución de esta tarea, un estudiante debe identificar las dos tabletas como el todo (unitizar) y dividirlo en cuatro partes congruentes (dividir) (imagen 2).

Comparte de manera equitativa estas tabletas de chocolate entre tú y tus amigos.

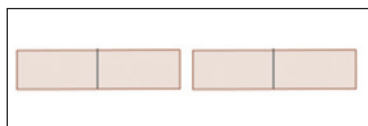


Imagen 1. Ejemplo de actividad con *simultaneous partitioning scheme*

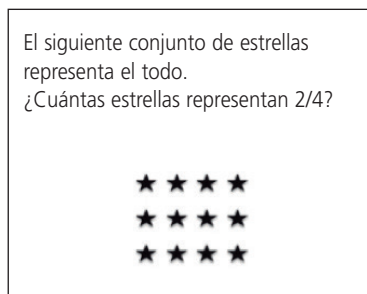


Esquema	Operaciones
<i>Simultaneous partitioning scheme</i>	Identificar un conjunto de objetos como un todo (unitizar), y usar este todo como <i>un objeto que se puede dividir</i> .
<i>Part-whole scheme</i>	Unitizar, dividir el todo en partes congruentes, y separar una parte del todo dividido.
<i>Equi-partitioning scheme</i>	Unitizar, dividir, e iterar una parte para determinar su fracción unitaria con respecto a las otras partes.
<i>Partitive unit fractional scheme</i>	Iterar una fracción unitaria dada para producir un todo y considerar que el número de iteraciones determina la medida de la fracción con relación al todo. Consiste en utilizar las fracciones unitarias como una unidad de medida del todo.
<i>Partitive fractional scheme</i>	Este esquema es una generalización del esquema fraccional unitario partitivo que responde a la instrucción genérica de medir una cantidad tomando como unidad otra cantidad ( <i>¿Qué es el rectángulo azul del marrón? o ¿Qué es el rectángulo marrón del azul?</i> ). Esto implica la coordinación de unidades en dos niveles.
<i>Reversible partitive fractional scheme</i>	Ante la representación de una fracción propia, dividirla para identificar la fracción unitaria e iterarla para reconstruir el todo ( <i>splitting</i> ).
<i>Iterative fractional scheme</i>	Ante una representación de una fracción impropia, dividirla para identificar la fracción unitaria e iterarla para reconstruir el todo ( <i>splitting</i> ).

**Cuadro 1.** Esquemas propuestos por McCloskey y Norton (2009)



**Imagen 2.** Resolución de la actividad con *simultaneous partitioning scheme*



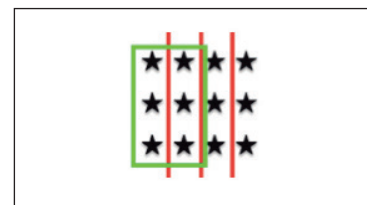
**Imagen 3.** Ejemplo de actividad con *part-whole scheme*

### **PART-WHOLE SCHEME**

Este esquema se basa en las operaciones de unitizar, dividir el todo en partes congruentes, y separar una parte del todo dividido para considerarlo en relación con el todo. Un ejemplo de actividad, en un contexto discreto, correspondería a la imagen 3.

■  
El estudiante identifica un conjunto de objetos como un todo que se puede dividir equitativamente

En la resolución de esta actividad, el estudiante debe considerar, en primer lugar, que el conjunto de 12 estrellas representa el todo (unitizar); luego, identificar cuatro grupos con la misma cantidad de estrellas (dividir), y, finalmente, separar dos grupos del todo dividido (separar) (imagen 4).



**Imagen 4.** Resolución de la actividad con *part-whole scheme*

## EQUI-PARTITIONING SCHEME

Considerando el esquema de identificar el todo y dividir en partes iguales (*simultaneous partitioning scheme*), si además el estudiante entiende que las partes son idénticas (congruentes), de modo que cualquiera de ellas puede ser iterada suficientes veces para reproducir el todo, entonces se dice que el estudiante tiene el *esquema de equi-partición* (Norton y McCloskey, 2008). Un ejemplo de actividad en un contexto continuo es la que recoge la imagen 5 (modificada de McCloskey y Norton, 2009).

Si se tienen que compartir las tabletas (identificación de las dos tabletas como el todo: unitizar)

entre cuatro amigos y todos comen lo mismo, habría que dividir el todo en 4 partes iguales (dividir). Para mostrar una parte (en este caso la fracción unitaria:  $1/4$ ), se tiene que identificar que cualquier parte es idéntica (congruente) y que podría ser iterada para reconstruir el todo (imagen 6).

## PARTITIVE UNIT FRACTIONAL SCHEME

Este esquema se basa en considerar que la fracción unitaria puede iterarse tantas veces para reproducir el todo y que este número de iteraciones determina el tamaño del todo en relación con la fracción unitaria. Para desarrollar este esquema, se pueden utilizar

actividades como la que recoge la imagen 7 (modificada de Norton y McCloskey, 2008).

Para determinar la fracción que representa el cuadrado verde en relación con el rectángulo marrón, iteramos el cuadrado tantas veces hasta completar todo el rectángulo (considerado como todo). Como se puede iterar 5 veces, la fracción unitaria que representa el cuadrado verde en relación con el rectángulo marrón es  $1/5$  (imagen 8), y que el número de iteraciones (5 en este ejemplo) es el tamaño del todo en relación con la fracción unitaria ( $1/5$ ).

## PARTITIVE FRACTIONAL SCHEME

Este esquema es una generalización del esquema fraccional unitario partitivo que responde a la instrucción genérica de medir una cantidad tomando como unidad otra cantidad. Esto implica la coordinación de unidades en dos niveles. Por una parte, el estudiante debe entender  $3/5$  como tres iteraciones de la frac-

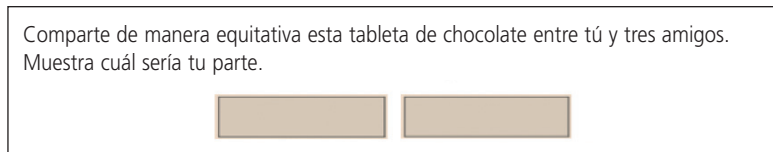


Imagen 5. Ejemplo de actividad con *equi-partitioning scheme*

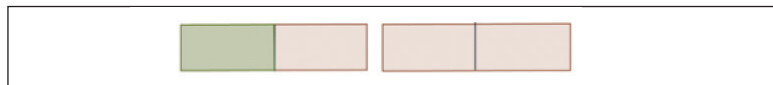


Imagen 6. Resolución de la actividad con *equi-partitioning scheme*

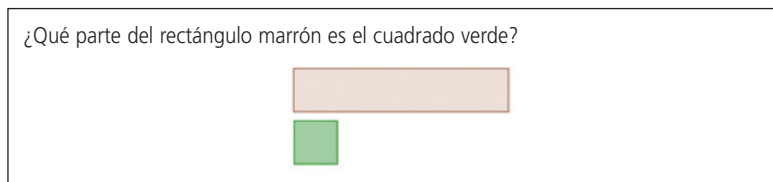


Imagen 7. Ejemplo de actividad con *partitive unit fractional scheme*

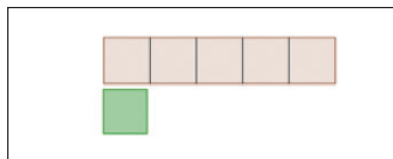


Imagen 8. Resolución de la actividad con *partitive unit fractional scheme*



ción unitaria  $1/5$  (3 veces  $1/5$  es  $3/5$ ); por otra parte, debe entender el todo como la unidad formada por la iteración de cinco veces la fracción unitaria ( $1/5$ ). La imagen 9 muestra un ejemplo de actividad para desarrollar este esquema (modificado de Norton y McCloskey, 2008).

Para determinar la fracción que representa el rectángulo azul en relación con el rectángulo marrón, hay que dividir el rectángulo azul (la parte: fracción propia) en partes congruentes que permitan *medir* cada uno de los rectángulos iterando un número entero de veces. Este proceso permite identificar la fracción unitaria (como la parte que permite reconstruir los dos rectángulos mediante iteración) e iterar

dicha parte (la fracción unitaria, en este ejemplo  $1/4$ ) para reconstruir la fracción propia ( $3/4$ ) y el todo ( $4/4$ ) (el rectángulo marrón) (imagen 10). De esta manera, se tienen que coordinar las unidades en dos niveles: iteración del  $1/4$  para construir la fracción propia ( $3/4$ , el rectángulo azul) e iteración del  $1/4$  para construir el todo ( $4/4$ , el rectángulo marrón), para poder determinar el tamaño de la fracción propia en relación con el todo ( $3/4$ ).

### REVERSIBLE PARTITIVE FRACTIONAL SCHEME

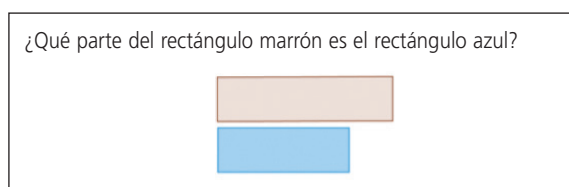
Este esquema permite reconstruir el todo desde una fracción propia mediante la operación *splitting* (dividir e iterar). Por ejemplo, en un contexto discre-

to, actividades como la que aparece en la imagen 11.

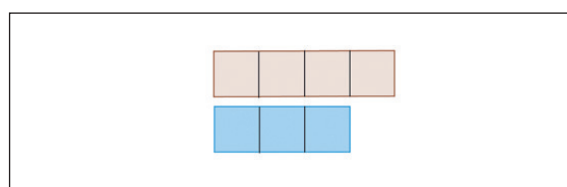
Si el conjunto representa  $2/3$  del todo, esto quiere decir que representa 2 veces  $1/3$ . Por lo tanto, debemos considerar el conjunto formado por dos grupos del mismo tamaño (dividir) (cada uno de los grupos de 4 bolitas serán  $1/3$ ), e iterar esta fracción tres veces ( $1/3+1/3+1/3$ ) para reconstruir el todo (que estaría formado por 12 bolitas, imagen 12) (iterar).

### ITERATIVE FRACTIONAL SCHEME

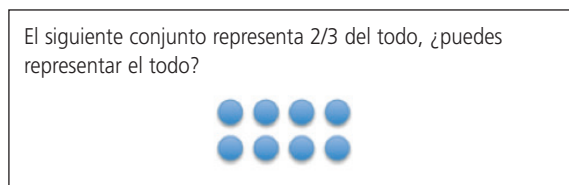
Este esquema es como el anterior, pero se manifiesta en las actividades de reconstruir el todo desde una fracción impropia. Es decir,



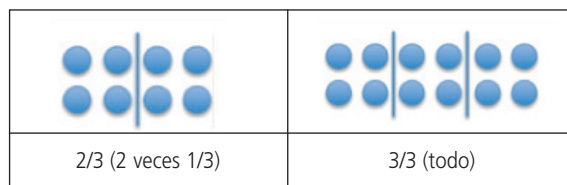
**Imagen 9.** Ejemplo de actividad con *partitive fractional scheme*



**Imagen 10.** Resolución de la actividad con *partitive fractional scheme*



**Imagen 11.** Ejemplo de actividad con *reversible partitive fractional scheme*



**Imagen 12.** Resolución de la actividad con *reversible partitive fractional scheme*

## El razonamiento *up and down* requiere la coordinación del esquema fraccional y el esquema parte-todo



ante una representación de una fracción impropia, dividirla para identificar la fracción unitaria e iterarla para reconstruir el todo (*splitting*). Por ejemplo, en un contexto continuo, actividades como la de la imagen 13.

Si la figura representa  $5/3$  (5 veces  $1/3$ ), dividiremos la figura en 5 partes congruentes (imagen 14 izquierda) (dividir), obteniendo de este modo una representación de la fracción unitaria  $1/3$ . Posteriormente, iteraremos

3 veces esta fracción unitaria ( $1/3+1/3+1/3 = 3$  veces  $1/3$ ) para reconstruir el todo, es decir,  $3/3$  (iterar) (imagen 14 derecha).

### EJEMPLOS DE ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO UP AND DOWN

El razonamiento *up and down* requiere la coordinación de dos esquemas: el esquema fraccional partitivo reversible (*reversible partitive fractional scheme*) o el esque-

ma fraccional iterativo (*iterative fractional scheme*), por un lado, y el esquema parte-todo (*part-whole scheme*), por otro lado. Las actividades dirigidas a desarrollar el razonamiento *up and down* tienen que exigir al alumnado coordinar las acciones de dividir e iterar para la reconstrucción del todo del esquema fraccional iterativo (*iterative fractional scheme* o *reversible partitive fractional scheme*, según utilicemos representaciones de fracciones propias o impropias como datos del problema que pide representar el todo) y las operaciones de dividir y unitizar que configuran el esquema parte-todo.

A continuación, se muestran dos actividades dirigidas a desarrollar el razonamiento *up and down*. Para resolver estas actividades, los

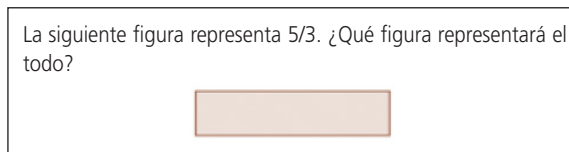


Imagen 13. Ejemplo de actividad con *iterative fractional scheme*

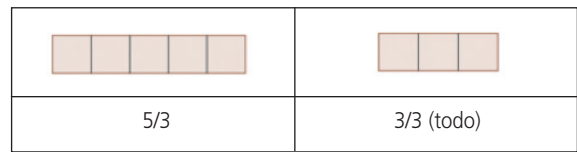


Imagen 14. Resolución de la actividad con *iterative fractional scheme*

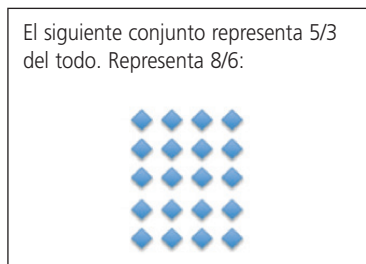


Imagen 15. Actividades para desarrollar el razonamiento *up and down*

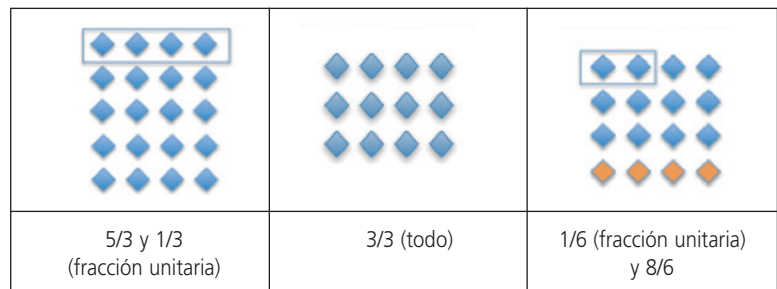


Imagen 16. Razonamiento *up and down* en un contexto discreto



niños y niñas deben identificar las fracciones unitarias a partir de la representación de una fracción propia o impropia ( $a/b$  es a veces  $1/b$ ), reconstruir el todo (mediante un proceso de iteración), y, posteriormente, representar otra fracción (propia o impropia). En el contexto discreto y con fracciones impropias (imagen 15).

Si el conjunto representa  $5/3$ , para reconstruir el todo hay que reagrupar el conjunto en cinco grupos del mismo tamaño (5 veces  $1/3$ , imagen 16 izquierda) (dividir), e iterar esta fracción ( $1/3$ , 4 cuadrados) tres veces ( $1/3+1/3+1/3$ ) para reconstruir el todo (que estaría formado por 12 cuadrados, imagen 16 centro) (iterar).

Una vez reconstruido el todo, para representar la fracción  $8/6$  hay que reagrupar el todo en 6 grupos del mismo tamaño (dividir) (el todo visto como 6 veces  $1/6$ ), e iterar esta fracción ( $1/6$ ) ocho veces ( $1/6+1/6+1/6+1/6+1/6+1/6+1/6+1/6$ ) para representar la fracción  $8/6$  (iterar) (imagen 16 derecha).

## REFLEXIÓN FINAL

Identificar un todo formado por varios objetos y dividirlo en partes congruentes, y usar las fracciones unitarias como unidades iterativas, son clave para comprender la relación parte-todo del concepto

de fracción. Apoyar el desarrollo de estas ideas se puede hacer mediante las actividades descritas, que comportan tener presente el esquema parte-todo en un contexto de medida que implica considerar qué mide una cantidad respecto a otra, y la coordinación mediante el razonamiento *up and down* de la idea de dividir un todo en partes congruentes y usar la fracción unitaria como unidad iterativa cuando se pide representar una parte fraccionaria cuando el todo está dado de manera implícita.

Además, que los docentes conozcan el papel que pueden desempeñar los diferentes modos de representación (contexto discreto y contexto continuo) en la coordinación de diferentes tipos de unidades para representar fracciones constituye un elemento del conocimiento de las matemáticas que es relevante para la enseñanza. ◀

### Nota

- \* AGRADECIMIENTOS: Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del MINECO, España, y de la Ayuda para Contratos Predoctorales para la Formación de Doctores BES-2015-074424.

### Referencias bibliográficas

- LAMON, S.J. (2007): «Rational numbers and proportional rea-

soning: Toward a theoretical framework», en LESTER, F.K (ed.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC. NCTM-Information Age Publishing, pp. 629-668.

NORTON, A.; McCLOSKEY, A. (2008): «Modeling Students' Mathematics Using Steffe's Fraction Schemes». *Teaching Children Mathematics*, núm 15, pp. 48-54.

McCLOSKEY, A.; NORTON, A. (2009): «Using Steffe's Fraction advanced schemes». *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 15(1), pp. 44-50.

STEFFE, L.; OLIVE, J. (2010): *Children's fractional knowledge*. Nueva York. Springer.

### Dirección de contacto

Àngela Buforn

Universidad de Alicante  
angela.buforn@ua.es

Este artículo fue recibido en UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en noviembre de 2017 y aceptado en diciembre de 2017 para su publicación.