

1 Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje

Salvador Llinares (sllinares@ua.es)
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante, España

***Resumen.** La relación entre las teorías sobre el aprendizaje del profesor y el diseño de entornos de aprendizaje se explicita mediante un ejemplo centrado en la relación entre lo matemático y lo didáctico. Se usan las perspectivas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y sobre la práctica de enseñar matemáticas para introducir la noción de “instrumento de la práctica”. Desde estas referencias previas, el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas se ve como el uso paulatino de “instrumentos de la práctica” y la integración gradual en “comunidades de práctica”.*

Formar profesores de matemáticas: Un dominio de práctica y de investigación

Las respuestas a las cuestiones sobre lo que es necesario saber para enseñar Matemáticas tienen un reflejo visible en la forma en la que una determinada sociedad toma las decisiones sobre como capacitar a los futuros profesores de matemáticas (tanto en la enseñanza Primaria como Secundaria) . Los continuos cambios en la forma en la que se estructura la capacitación administrativa para enseñar matemáticas (¿dónde se forman los profesores de matemáticas?) es reflejo de una comprensión insuficiente del conocimiento necesario para enseñar Matemáticas y de la forma en la que se genera. Para superar esta situación, desde hace algunos años, se ha estado desarrollando un esfuerzo investigador dirigido a aumentar nuestra comprensión del conocimiento necesario para enseñar matemáticas, sobre la práctica de enseñar matemáticas y sobre el proceso de aprendizaje del profesor (Giménez et al. 1996; Llinares, 1998-c; 2003). El uso de las TICs permite, en estos momentos, aportar nuevos medios a los formadores de profesores en sus intentos de maximizar la relación entre las teorías sobre el aprendizaje del profesor y el diseño de entornos de aprendizaje.

1 Conferencia invitada presentada en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática- CIBEM, Oporto, Portugal. Julio, 2005

Perspectivas sobre el conocimiento profesional, la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje del profesor

** Sobre el conocimiento: componentes y uso*

La descripción del conocimiento del profesor vinculado a las diferentes “tareas profesionales” que definen la práctica de enseñar matemáticas se ha realizado desde hace algún tiempo a partir de las investigaciones sobre las cogniciones de los profesores. Desde estas componentes del conocimiento profesional los programas de formación deberían considerar el conocimiento teórico (saberes de referencia) y las características del conocimiento generado en la práctica (Llinares, 1998-c). En alguna medida los programas de formación de profesores deben considerar la integración del conocimiento científico y el conocimiento práctico. En este sentido el conocimiento práctico del profesor, considerado desde una perspectiva profesional generado en y desde la práctica ha sido caracterizado como conocimiento en acción, apoyado en la experiencia, reflexión sobre la experiencia y conocimiento teórico (Ponte, 1994). Desde una «perspectiva profesional» aparecen cuestiones relativas al conocimiento generado en la acción profesional (la tarea de enseñar matemáticas), y el conocimiento que apoya y justifica las decisiones y las acciones en el contexto de trabajo de la enseñanza de las matemáticas (conocimiento profesional) (Azcarate, 2000; Llinares, 1998-a;).

Por otra parte, el análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas durante la práctica de enseñar matemáticas (Escudero & Sánchez, 1999; Escudero, 2003) ha permitido identificar algunas de sus características, como su carácter integrado, el estar conectado a la práctica – es decir, el conocimiento se genera a través de la experiencia práctica vinculada a problemas concretos - y ser detallado, específico y concreto (García, 1997). En este sentido, el rasgo que caracteriza el conocimiento del profesor no está sólo en lo que conoce (componentes del conocimiento) sino en lo que hace con lo que conoce (uso del conocimiento). De ahí la importancia de la noción de instrumento de la práctica (para subrayar la idea de la colaboración entre los profesores como un medio de hacer público, compartido y criticable el conocimiento acumulado desde la práctica de enseñar).

* *Sobre enseñar matemáticas: El significado de “instrumento de la práctica”.*

Desde las nuevas perspectivas socioculturales sobre la idea de “práctica” se enfatiza la relación entre el conocimiento y las situaciones en las que este conocimiento se usa y se adquiere. La gestión del profesor del proceso de enseñanza- aprendizaje viene articulada a través de la realización de unas “tareas profesionales” mediante el uso de unos instrumentos (Llinares, 2002-a). En este sentido, el término "práctica profesional del profesor" indica todo lo que el profesor hace, las tareas profesionales y los instrumentos que utiliza. Tareas profesionales como

- diseñar, modificar o elegir tareas, actividades, problemas;
- organizar y secuenciar el contenido matemático en las lecciones;
- interactuar con sus alumnos y gestionar el contenido matemático durante las interacciones;
- analizar y dotar de sentido a las producciones matemáticas de los alumnos,
- etc.

y también la comprensión de los **instrumentos** que el profesor utiliza y del propósito de su uso.

El significado del término *instrumento* como “cualquier medio, cosa o persona, de que alguien se sirve para un fin” (Diccionario de uso del Español de María Moliner), “(fig.) lo que sirve de medio para hacer una cosa o conseguir un fin./ Aquello de lo que nos servimos para hacer una cosa” (Diccionario de la Lengua Española, RAE, Espasa Calpe) conlleva la idea de un objeto diseñado y empleado para ampliar el poder de las acciones del individuo. Las perspectivas situadas de la cognición amplían el significado dado al término instrumento como un objeto físico para incluir también conceptos, formas de razonar, formas de generar un discurso, entre otras, que condicionan y permiten las interacciones dentro de las comunidades de práctica. Así en el dominio semántico del término “instrumento” podemos considerar,

- *instrumentos técnicos* necesarios para realizar la “práctica” (conseguir el aprendizaje matemático de los alumnos), como por ejemplo materiales didácticos –geoplanos -, software didáctico – como el Cabri-Geomètre, Logo -, matrices para la evaluación de los procesos de resolución de problemas y técnicas para gestionar los debates y puestas en común de los procedimientos y respuestas a diferentes problemas, e

- *instrumentos conceptuales*, como por ejemplo conocer tipos de problemas y diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en los problemas de proporcionalidad (estructura multiplicativa), la modelización del aprendizaje matemático desde una perspectiva neopiagetiana como APOs, etc. Es decir, conceptos y construcciones teóricas que se han generado desde las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas que permiten comprender y tratar la realidad (situaciones en las que se enseña y aprenden matemáticas).

** El proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas: El aprendizaje del profesor*

Desde la caracterización anterior del conocimiento del profesor de matemáticas, y de la actividad de enseñar matemáticas, el proceso de aprender a enseñar matemáticas ha empezado a ser concebido como un proceso de enculturación (Llinares, 2002-b) Considerando los saberes de referencia, la naturaleza del conocimiento profesional y las características del uso del conocimiento en la práctica, el desafío a los programas de formación procede del carácter integrado del conocimiento (por ejemplo la relación entre el lo matemático y lo didáctico) y cómo el profesor define su participación en la “práctica” de enseñar matemáticas, considerando la noción de práctica como:

- * realizar unas “tareas” para lograr un fin,
- * hacer uso de unos “instrumentos”, y
- * justificar su uso.

Al considerar la “enseñanza de las matemáticas” como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida podemos identificar algunas actividades que la articulan y algunas habilidades profesionales que permiten realizarlas, como por ejemplo

- Observar
 - diagnosticar - dotar de significado a las producciones de los alumnos-,
 - planificar –determinar planes de acción-,
 - evaluar – tomar decisiones sobre cómo, dónde, y qué hacer con la información-,
- gestionar debates – formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo, subrayar y valorar las diferentes aportaciones matemáticas de los alumnos-.

Se deriva una prioridad para los programas de formación de profesores: su necesaria articulación a través de tareas que permitan la integración y transformación del conocimiento de manera coherente y sistemática.

Desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor puede ser entendido como cambios en cómo participar en las prácticas matemáticas que se generan en el aula y cómo esta es comprendida por el profesor.

Por lo tanto, llegar a ser un profesor de matemáticas significa llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas y aprender a realizar las tareas y usar y justificar los instrumentos que la articulan en un contexto institucional. El conocimiento de “la práctica de enseñar matemáticas”, visto desde esta perspectiva, supone

- poseer los “instrumentos” considerados como elementos técnicos y conceptuales que permiten desarrollarla, y
- tener la capacidad de construir nuevo conocimiento desde la práctica (Flores, 1998). En este sentido, los instrumentos conceptuales y técnicos desempeñan diferentes papeles en la caracterización de las tareas que definen la práctica de enseñar matemáticas.

Mientras los instrumentos conceptuales permiten poseer unas referencias para interpretar las situaciones de la práctica, condicionando lo que se ve y cómo se ve; los instrumentos técnicos permiten tener los medios para hacer “determinadas cosas” en la práctica. En conjunto, el uso y la generación de los instrumentos condiciona las interacciones en el desarrollo de la práctica y, por tanto, la propia práctica.

Los dos aspectos considerados en la forma de concebir el conocimiento necesario para enseñar; es decir, conocer la práctica y ser capaz de generar conocimiento desde la práctica son indisolubles, y plantean cuestiones sobre la relación teoría-práctica en la articulación de los procesos de formación de profesores. Los entornos virtuales de interacción definen nuevos roles para los estudiantes para profesor y para los formadores de profesores que no se consiguen de manera inmediata. En este sentido los estudios que analizan las características de la integración del conocimiento teórico en los procesos de razonamiento pedagógico de los estudiantes para profesor vinculados a la resolución de problemas prácticos muestran la dificultad de la relación teoría y práctica (Llinares, 1994-b; 2002-b; Sánchez y Llinares, 2003).

Diseño de entornos para aprender a enseñar matemáticas en la Universidad.

Desde el planteamiento anterior se deriva la necesidad de diseñar en los programas de formación “oportunidades” para que los estudiantes para profesores de matemáticas aprendan de y sobre la práctica a través de “actividades auténticas” (García, 2000, 2001; Llinares, 1998-b, Sánchez, 2003). El diseño de estas “oportunidades” vistas como entornos de aprendizaje se apoya en el supuesto de que aprender a enseñar matemáticas para los estudiantes para profesor consiste en la generación y uso de una serie de instrumentos técnicos y conceptuales en las diferentes tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las Matemáticas, concretándose en

- aprender el conocimiento procedente de la Didáctica de las Matemáticas como dominio científico (instrumentos conceptuales y técnicos) relativos a los diferentes dimensiones de la práctica de enseñar matemáticas -,
- desarrollar métodos de análisis e interpretación que permitan argumentar iniciativas pedagógicas con fundamentos (razonamiento pedagógico), y
- adoptar posiciones críticas sobre la relación entre sus creencias y conocimiento y la perspectivas de acción y práctica generadas.

El desafío planteado a los formadores de profesores es el de diseñar entornos de aprendizaje que permitan a los estudiantes para profesor construir conocimiento y desarrollar al mismo tiempo formas de generarlo. Además, hay que tener en cuenta que los estudiantes para profesor deben tener acceso a lo que ya es conocido, asumido y usado. Es decir, ideas y nociones destiladas desde la Didáctica de la Matemática como dominio científico. Esta aproximación a la formación de profesores de matemáticas no deja de lado el hecho de que los procesos de dotar de significado generados por los estudiantes para profesor están determinados por lo que ellos ya conocen y creen sobre la enseñanza-aprendizaje. El que “Uno ve lo que puede ver” está determinado por las referencias previas de los individuos. En el proceso de aprender a enseñar matemáticas esta característica del proceso de aprendizaje se aborda potenciando la capacidad de los estudiantes para profesor de llegar a problematizar las situaciones para que lleguen a cuestionarse lo que inicialmente puede ser asumido como evidente, o “lo que tiene que ser”, tanto en la resolución de problemas de matemáticas como problemas profesionales de la enseñanza de las matemáticas. Una hipótesis que subyace a la cuestión de

“problematizar lo evidente” se apoya en el papel que pueden desempeñar los diferentes instrumentos conceptuales usados para analizar la evidencia procedente de la práctica. Estas referencias generales plantean sin embargo cuestiones sobre cómo deben ser los materiales - es decir, los elementos técnicos - usados en el programa de formación y qué y cómo se aprende con ellos.

Las hipótesis que subyacen a este planteamiento es que el conocimiento necesario para enseñar no solo se adquiere en situaciones de enseñanza reales. Este punto de vista centra parte de su interés en subrayar la importancia de la tareas-actividades que los estudiantes para profesor deben realizar en los programas de formación, introduciendo el término “actividades auténticas” como las “prácticas ordinarias de una cultura” (la cultura de ser un profesor) en el sentido de que las tareas-actividad deben ayudar a desarrollar una forma de pensar y de ser análoga a la de un profesor de matemáticas. De esta manera, la conjunción de las tareas diseñadas por el formador de profesores y la concepción de una determinada manera de usarlas (incluyendo el papel del formador de profesores y la introducción de documentos informativos adicionales) es lo que hemos denominamos “entornos de aprendizaje” para los estudiantes para profesor.

La relación entre lo matemático y lo didáctico en aprender a enseñar

Tres son los ámbitos sobre los que podría articularse esta manera de concebir la formación de profesores y desde los que identificar “situaciones” para ser usadas por el formador de profesores para que los estudiantes para profesor desarrollen procesos como “ver, interpretar, escuchar, diseñar” vinculados a la práctica de enseñar matemáticas:

- problematizar los contenidos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje mediante investigaciones *matemáticas*, considerados como entornos de aprendizaje matemático a través de la resolución de problemas de matemáticas;

- problematizar las situaciones de enseñanza y la gestión que el profesor hace de los contenidos matemáticos y de las interacciones con sus alumnos mediante investigaciones sobre *cómo los alumnos aprenden las matemáticas* (Llinares & Sánchez, 1998) y *cómo el profesor gestiona las interacciones y el contenido matemático en el aula* (investigaciones sobre *la práctica de enseñar matemáticas a los alumnos*) (Llinares, 1998; 2004); y

- problematizar las diferentes organizaciones del contenido matemático y el tipo de actividades propuestas a los alumnos mediante el análisis de secuencias y organizaciones del contenido

En el diseño de estas oportunidades para aprender a enseñar matemáticas, las TICs proporcionan los medios, en estos momentos, para favorecer el que los estudiantes para profesor generen las prácticas sociales características de la práctica de enseñar matemáticas. Se describe a continuación un ejemplo de entorno de aprendizaje centrado en la relación entre lo matemático y lo didáctico, que permite mostrar el papel que desempeñan los “foros virtuales” y el uso de la web en el proceso por el cual los estudiantes para profesor van de las actividad de resolver problemas de matemáticas al planteamiento y resolución de cuestiones profesionales. Estos entornos exigen la generación de nuevos papeles en la interacción virtual entre los estudiantes para profesor y los formadores de profesores, así como en el uso de los instrumentos de la práctica (Penalva et al., 2003; Valls, et al. 2003).

De las investigaciones matemáticas a cuestiones profesionales de la enseñanza de las matemáticas

La necesidad de que los estudiantes para profesor investiguen el potencial de las “situaciones matemáticas” –problemas, actividades, ejercicios – viéndolos como instrumentos de aprendizaje matemático implica considerar en qué medida las situaciones planteadas tiene el potencial de generar procesos matemáticos (procesos que configuran la idea de actividad matemática – como

- Construir
- Buscar regularidades
- conjeturar / formular
- probar
- generalizar
- proponer problemas
- clasificar / definir

Parece claro que el potencial de las situaciones matemáticas como instrumentos de aprendizaje matemático está en relación de los objetivos pretendidos. Esta relación entre la situación y los objetivos define el potencial matemático de la situación y genera la relación entre lo matemático y lo didáctico que debe centrar el análisis y reflexiones de los estudiantes para profesor.

Considerar la relación entre lo matemático y lo didáctico en las situaciones en las que se aprenden “instrumentos de la práctica de enseñar” se explicita cuando las “situaciones matemáticas” (problemas, actividades, ejercicios) llegan a verse por los estudiantes para profesor no sólo como situaciones matemáticas sino también como instrumentos para el aprendizaje del contenido matemático. Si los estudiantes para profesor deben pensar en los problemas de matemáticas como instrumentos de aprendizaje de las matemáticas (entendidas en su doble dimensión de hechos y conceptos y procesos que configuran la actividad matemática) deben involucrarse en situaciones que les permitan a ellos mismos

- diseñar estrategias,
- generalizar resultados,
- establecer relaciones entre conceptos y diferentes partes de las matemáticas,
- sistematizar ideas y resultados, y
- sumergirse en situaciones que les permita realizar un trabajo matemático creativo.

El ejemplo siguiente es una actividad a realizar por los estudiantes para profesores de matemáticas y que tiene como objetivo crear el espacio de reflexión y análisis para ver los problemas de matemáticas como instrumentos de aprendizaje al permitirles

- identificar e iniciar su propia investigación matemática
- desarrollar procesos de conjeturar y probar,
- comunicar sus procesos de resolución, y
- presentar sus ideas a las críticas de otros.

Ejemplo 1.

Desde la realización de conjeturas, los razonamientos deductivos informales (probar conjeturas) y las pruebas informales hasta la demostración formal deductiva
Construir <ul style="list-style-type: none"> - Construye un trapecio no isósceles - Etiqueta con A, B, C, D los vértices (con AB la base mayor y CD la base menor) - Construye las diagonales, y etiqueta con G el punto de corte

<ul style="list-style-type: none"> - Trazar una paralela a AB que pase por G. Etiqueta F el punto de corte con BC y E el punto de corte con AD <p>Conjeturar</p> <ul style="list-style-type: none"> - con la ayuda de la opción arrastrar genera una conjetura sobre la relación de las áreas de los triángulos EGD y GCF <p>Probar</p> <ul style="list-style-type: none"> - Intenta probar tu conjetura. - Identifica los elementos geométricos (relaciones, definiciones, propiedades, ...) sobre los que te apoyas - Intenta describir tus aproximaciones que te han llevado a un "atasco". - Busca una prueba alternativa - compara las pruebas realizadas teniendo en cuenta los elementos geométricos utilizados y la manera en la que has podido utilizar el dibujo para generar la prueba <p>Comunicar / convencer</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comunica tu prueba a tu compañero e intenta convencerle de los pasos dados. - Comparar las pruebas realizadas e indicar si alguna os parece mejor que la otra y por qué.
--

Esta clase de actividades introduce a los estudiantes para profesor en el doble análisis matemático-didáctico de las situaciones matemáticas consideradas como instrumentos de aprendizaje de las matemáticas. El análisis de los problemas matemáticos desde la doble perspectiva de lo didáctico y de lo matemático es en sí misma una situación investigativa para el estudiante para profesor en su proceso de llegar a ser un profesor. Estas situaciones no sólo le implican resolver el problema diseñando estrategias, conjeturando relaciones que deben ser probadas, o generalizando mediante la modificación de la presentación del problema, sino también pensar en el problema como un instrumento con el cual es posible generar aprendizaje matemático. La práctica con este tipo de actividades muestra que a los estudiantes para profesores de matemáticas les resulta complicado ver las situaciones matemáticas más allá de la simple plasmación de determinados contenidos matemáticos (Sánchez & Llinares, 2002; 2003). La introducción de "lo didáctico" en el análisis de las situaciones matemáticas como un medio de verlas como instrumentos de aprendizaje matemático se convierte en sí mismo en un objetivo didáctico para el formador de profesores. La realización de la ficha (actividad con software dinámico, por ejemplo CABRI) permite a los estudiantes para profesor poder llegar a cuestionar

- el uso operativo de las definiciones de las nociones matemáticas, como la definición de altura en situaciones donde hay que conjeturar algún tipo de relación, probar y comunicar.
- La diferencia que existe entre el uso de entornos interactivos y dinámicos y el uso de las nociones matemáticas en otros entornos,

- El significado de la actividad de “probar”,
- El significado de lo que significa comunicar algo en matemáticas

En esta fase, las Tecnologías de la Comunicación permiten desarrollar ámbitos en los que los estudiantes para profesor puedan participar en prácticas sociales como

- escribir para comunicar
- intercambiar opiniones (la interacción como ámbito de reflexión)
- colaborar

Este tipo de prácticas pueden ser desarrolladas a través de foros virtuales en los que los web les permite mantener el contacto, así como ampliar la posibilidad de obtener recursos diferentes. Por ejemplo, ante un problema de probar un resultado clásico en geometría euclídea “En un triángulo cualquiera el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercero”, la discusión de los estudiantes para profesor derivó hacia el significado de la idea de probar en matemáticas “la diferencia entre comprobar y demostrar” y el papel de la demostración matemática en la enseñanza secundaria. Esto permitió, al formador de profesores, abrir un foro virtual para que los estudiantes para profesor negociaran significados y aportar nuevos argumentos, independientemente del espacio físico temporal en el que se estaba realizando la actividad de resolución de problemas.

Tema del mensaje: INICIO

Autor: LL- S

Debate: sobre la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje

[\[Ver mensajes\]](#)

[\[Mensaje desplegado\]](#)

en la sesión del 17/3/04 en la que teníamos el problema "en un triángulo cualquiera el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercer lado", pudimos hablar sobre el proceso de resolución:

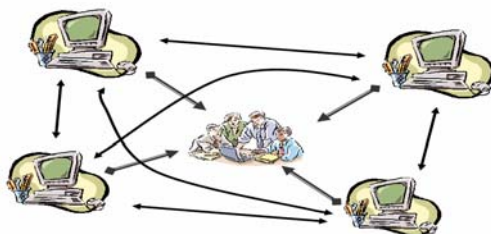
- relación entre la identificación de una sub-configuración y un resultado matemático,
- el papel de la visualización en el proceso de resolución, y
- los dominios matemáticos vinculados a un problema.

En esta sesión, Mario B. y Mari Carmen M. iniciaron una discusión / intercambio de opiniones sobre "lo que era una prueba y su relación con la idea de comprobar".

Este debate se plantea como un espacio en el cual durante 10 días podamos intercambiar opiniones y reflexiones sobre este tema.

El inicio del debate virtual crea una oportunidad a los estudiantes para profesor para compartir significados, usarlos para definir nuevos argumentos, interactuar. Desde este punto de vista la participación en los foros virtuales permite que los estudiantes

para profesor tengan la oportunidad de participar en prácticas sociales en términos de las tareas de compartir, crear nuevas perspectivas, ...



La necesidad de escribir las propias ideas para poder presentarlas a los compañeros, así como para rebatir las otras ideas presentadas se convierte de esta manera en un ámbito de reflexión necesario en el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas. Un ejemplo de este tipo de participación es la siguiente intervención de una estudiante para profesor en el entorno de aprendizaje diseñado

Tema del mensaje: **DIFERENCIA ENTRE PROBAR Y COMPROBAR (SEGUN LA DELEGADA)**

Autora: **G-C, CL-M**(Alumna)

Debate: **sobre la prueba como objeto de enseñanza-aprendizaje**

[\[Ver mensajes\]](#)

[\[Mensaje desplegado\]](#)

Una comprobación es el proceso por el cual tu asumes y/o entiendes que un resultado se cumple o el porqué un resultado se cumple, es decir, dado un resultado, que tiene una prueba rigurosa (entendemos por prueba la demostración de que este resultado se cumple independientemente de casos particulares) podemos ver que efectivamente se cumple en un caso particular, podemos comprobar. Esto nos permitirá corroborar el resultado, entender lo que quiere decir y, en algunos casos, seguir el proceso de demostración.

Por todo esto, el proceso dado por Mario para los ángulos es, según mi punto de vista, una comprobación, que solo se puede hacer con dos ángulos particulares.

Además, hay tener en cuenta que podemos comprobar un resultado que no sea cierto con algún caso particular, pero no podremos probarlo (al menos con una prueba correcta...)

Por otro lado, estoy de acuerdo con la opinión de Luis y Oscar.

No se si me he explicado....

El foco de atención en el ámbito de interacción, es en un primer momento la resolución de un problema de probar, pero el intercambio entre los estudiantes para profesor deriva con posterioridad a cuestiones profesionales de la enseñanza de las matemáticas. Para poder generar y compartir significados vinculados a la “noción de prueba como objeto de enseñanza- aprendizaje en enseñanza secundaria” , los entornos de aprendizaje virtuales permiten focalizar la discusión en cuestiones profesionales. Por ejemplo, la discusión sobre el papel de la demostración en al enseñanza de las matemáticas en la

Educación secundaria permitió a los estudiantes para profesor a focalizar el intercambio de opiniones, negociar significados alternativos afianzando concepciones sobre la enseñanza de la demostración en secundaria mediante actividades como la que se adjunta a continuación.

Actividad para el Debate Virtual
El proceso de probar en Educación Secundaria Obligatoria y las TIC
El teorema de Pitágoras

Introducción:

El teorema de Pitágoras es una igualdad que suele introducirse en el primer ciclo de la ESO. Las TIC permiten un tratamiento diferente de esta igualdad en el contexto de favorecer los procesos de probar en los alumnos de la ESO al poder hacer uso de figuras interactivas. El uso de las TIC en este contexto tiene consecuencias en el diseño de las actividades/tareas que pueden presentarse a los alumnos.

Material:

- Fotocopia de la pag. 184 de Matemáticas 1º de ESO. Orbita 2000 (Edt. Santillana) Este texto presenta una versión estática de una demostración del teorema de Pitágoras, con la particularización al caso del triángulo rectángulo isósceles.
- [Link1 standards.nctm.org/document/chapter6/Geom.htm](http://standards.nctm.org/document/chapter6/Geom.htm); entrar en el E-example 6.5: *Exploring the Pythagorean Relationship*, [Based on an idea provided by Colette Laborde, EIAH, Laboratoire Leibniz-IMAG, at the 1999 ENC-NCTM Conference and Workshop: The Role of Technology and Examples in The Principles and Standards Document]. Este applet presenta una versión dinámica de una demostración del teorema de Pitágoras.
- [Link2 www.ies.co.jp/java/samples/pytha2.html](http://www.ies.co.jp/java/samples/pytha2.html); Explorar el applet que presenta el teorema de Pitágoras desde la perspectiva de la descomposición/recomposición de figuras planas.

cuestiones

- i) Identifica diferentes características de las tres maneras de presentar la prueba del Teorema. ¿sobre qué aspectos/elementos/propiedades geométricas se apoya cada una de las dos tipos de prueba?
- ii) ¿cómo la figura interactiva “prueba” la igualdad del teorema de Pitágoras? [Considera las dos variables que utiliza el applet del link 1:
 - la modificación de la figura conservando el área para un triángulo dado, y
 - la modificación de triángulo rectángulo
- iii) idem para el applet del link 2
- iv) ¿cómo la versión estática “prueba” la igualdad del teorema? Considera
 - los aspectos geométricos sobre los que se apoya y
 - el papel desempeñado por el caso particular del triángulo rectángulo isósceles ¿cómo se puede generalizar desde el caso particular?
- v) contesta las preguntas planteadas en el link 1:
 - Cómo la transformación dinámica del cuadrado en paralelogramo y luego en rectángulo afecta al área?
 - ¿cómo la modificación dinámica del triángulo rectángulo apoya la generalización?
- vi) Realiza una lista (y sus relaciones) de aspectos geométricos sobre los que se apoyan cada tipo de prueba.
- vii) ¿de qué manera la versión estática y la versión dinámica de la prueba pueden ayudar a los alumnos a analizar y explicar esta igualdad de manera diferente?

El itinerario de aprendizaje descrito en este ejemplo transcurre desde la resolución de problemas de matemáticas a la identificación de una cuestión profesional en el proceso de desarrollar la identidad de ser un profesor de matemáticas en el que se ha vinculado la manera en la que se entiende el proceso de aprender a enseñar matemáticas con las características del diseño de las oportunidades para aprender a enseñar matemáticas. Las

características de este entorno de aprendizaje es la consideración de “actividades auténticas”, junto con la creación de espacios de interacción que permiten relacionar lo matemático y lo didáctico en el proceso de desarrollar la identidad de ser un profesor de matemáticas.

Algunas observaciones finales: La formación de profesores de matemáticas como una actividad institucionalizada.

En esta conferencia se ha intentado describir las implicaciones que sobre el diseño de entornos de aprendizaje tiene una determinada manera de contemplar la práctica de enseñar matemáticas y el proceso de aprendizaje. Aprender a enseñar matemáticas, desde una perspectiva sociocultural está relacionado a cómo los estudiantes para profesor se apropian de “instrumentos” para pensar y actuar en la comunidad de práctica de ser profesor de matemáticas. Dos ideas son importantes en este punto de vista. La primera, que el “conocimiento” se ve como el uso de instrumentos tanto físicos como conceptuales. La segunda, que el aprender se ve como la transformación de la persona mediante la participación creciente en “prácticas sociales” en función de la naturaleza de las tareas y actividades que resuelven. Una implicación de esta manera de entender el aprendizaje es el papel desempeñado por lo social en la construcción del conocimiento. Esta perspectiva del aprendizaje tiene implicaciones sobre el diseño de

- *materiales* para el programa de formación (por ejemplo, las actividades propuestas en el entorno que se ha descrito), y
- los *espacios de interacción* que tienen como objetivo el que los estudiantes para profesor construyan conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

Concebir el proceso de llegar a ser un profesor como un proceso de enculturación en una comunidad de práctica, sin embargo, plantea todavía muchos interrogantes sobre las decisiones que hay que tomar al pensar en cómo diseñar las oportunidades para “aprender una práctica”. En las secciones anteriores se ha presentado un ejemplo en el que se integran las actividades que articulan la práctica de enseñar matemáticas (observar, escribir, compartir, debatir, intercambiar, ...) (la práctica de la comunidad), y el desarrollo de *espacios de interacción social*.

Sin embargo, al ser la actividad de formar profesores una actividad institucionalizada hace que no sea fácil tomar decisiones únicamente considerando lo que los análisis teóricos nos dicen. Muchas veces las limitaciones de los contextos en los que los formadores de profesores deben desarrollar su actividad hace que sea difícil implementar algunas de las iniciativas. De todas maneras, en estos momentos los adelantos tecnológicos permiten ir incorporando a la formación de profesores medios materiales que son pertinentes desde puntos de vista teóricos.

Al ver el aprendizaje como un proceso por el cual las personas se apropian en un contexto social de instrumentos para “pensar” y “actuar” en una comunidad de práctica genera implicaciones sobre las características de los espacios de interacción necesarios para apoyar esta construcción social del conocimiento. En estos momentos el uso de entornos interactivos en la web permiten suponer que ciertos aspectos de lo que significa la construcción social del conocimiento necesario para enseñar pueden ser apoyados.

De todas maneras, lo que parece que es relevante en estos momentos es la necesidad de definir la formación de profesores de matemáticas haciendo explícito los principios teóricos sobre el aprendizaje del profesor que son considerados y tomando como referente el hecho de que es la “práctica de enseñar matemáticas” lo que debe ser aprendido y comprendido y por tanto que deben ser los “sistemas de actividad” vinculados a la práctica de enseñar matemáticas los que deben ser los referentes en la toma de decisiones curriculares en los programas de formación de profesores de matemáticas.

Referencias

- Azcarate, P. (2000) El conocimiento profesional, naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8 (12), 111-138
- Carrillo, J. (2000) Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción del conocimiento profesional. *Quadrante*, nº 9, 27-54
- Contreras, L.C. & Blanco, L. (Coor) (2002) *Aportaciones a la formación inicial de Maestros en el Área de matemáticas. Una mirada a la práctica docente*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres, España
- Escudero, I. & Sánchez, V. (1999) Una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la práctica: la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. *Quadrante*, 8, 85-110
- Escudero, I. (2003) *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Sevilla. España

- Flores, P. (1998) Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 17, pp. 37-48.
- García, M. (1997) *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: Kronos-GIEM Universidad de Sevilla.
- García, M. (2000) El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición. Implicaciones para la formación inicial de maestros (55-79). En C. Corral & E. Zurbano (eds.) *Propuestas metodológicas y de evaluación en la formación Inicial de los profesores desde el área de Didáctica de la Matemática*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo: Oviedo
- García, M. (2001) La formación inicial de profesores de matemáticas. Fundamentos para la definición de un currículum. En D. Fiorentini (Ed.) *A formação de professores de matemática. Estudos e contribuições teórico-metodológicas de Brasil Espanha e Portugal*. Brasil: UNICAMP.
- Giménez, J.; Llinares, S. & Sánchez, V. (Eds.) (1996) *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación matemática*. Comares. Granada.
- Llinares, S. (1994-a) El estudio de casos como una aproximación metodológica al proceso de aprender a enseñar matemáticas. (pp. 252-278). En L. Blanco & L. Casas (coord.) *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*. Sociedad Extremeña de Educación matemática: Badajoz.
- Llinares, S. (1994-b) The development of prospective elementary teachers' pedagogical knowledge and reasoning. The school mathematical culture as reference. En N. Malara & L. Rico (eds.) *Proceedings of the I Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*. Modena, Università di Modena: Italia, pp. 165-172
- Llinares, S. (1998-a) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, nº 17, 51-64
- Llinares, S. (1998-b) Aprender a enseñar Matemáticas en la enseñanza Secundaria. Relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista interuniversitaria de Formación del profesorado*, nº 32, Mayo/Agosto, pp.117-127
- Llinares, S. (1998-c) La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *AULA. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, vol. 10, 153-179.
- Llinares, S. (2002-a) La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria*, nº 19, 11-124
- Llinares, S. (2002-b) Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs (pp. 195-209). En G.C. Leder; E. Pehkonen, & G. Torner (eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht
- Llinares, S. (2002-c) Arrivare as essere insegnante di matematica: "casi" e "dibattiti elettronici". *La matematica e la sua didattica*, nº 3, 258-277
- Llinares, S. (2003) Contexto y Práctica de formar profesores de matemáticas. Una mirada al caso de España (pp. 115-140). En Fandiño, M (ed.) (2003) *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: a rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora; Italia
- Llinares, S. (2004) *Building virtual learning communities and the learning of mathematics student teachers*. Regular Lecture en ICME04
- Llinares, S. & Sánchez, V. (1998) Aprender a enseñar matemáticas: los videos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 13, 29-44

Penalva, C.; Rey, C. & Llinares, S. (2003) *Virtual learning environments and pre-service primary teachers' conceptions*. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003). Badajoz, España.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En Ponte, J.P.; Matos, J.F. (Eds.), *Proceedings of the 18th PME Conference, 1*, 195-210

Sánchez, V. & Llinares, S. (2002) Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación (MEC)* n° 329, 443-461

Sánchez, V. & Llinares, S. (2003) Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 5-25

Sánchez, V. (2003) An approach to collaboration in elementary pre-service Teacher Education (pp. 57-68). En A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, Ch. Breen & A. Begg (eds.) *Collaboration in Teacher Education. Examples from the Context of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Valls, J.; Cos, A. & Llinares, S. (2003) *Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education*. Comunicación en el Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003), Badajoz, España.