# *Aplicaciones de la variable compleja a la resolución de ecuaciones funcionales. Densificación*

Juan Matías Sepulcre Martínez
Director: Gaspar Mora Martínez

5 *de Julio de* 06

# Índice

# Índice

# Índice

# Índice

# Introducción

## Definición

*En un sentido amplio, una ecuación funcional puede ser considerada como una ecuación que involucra variables independientes, funciones conocidas, funciones desconocidas y constantes. Nuestras incógnitas serán las funciones desconocidas, en general definidas en cualquier espacio.*

# Introducción

## Definición

*En un sentido amplio, una ecuación funcional puede ser considerada como una ecuación que involucra variables independientes, funciones conocidas, funciones desconocidas y constantes. Nuestras incógnitas serán las funciones desconocidas, en general definidas en cualquier espacio.*

## Nota

*Nos centraremos en las ecuaciones funcionales de varias variables.*

# Introducción

## Definición

*En un sentido amplio, una ecuación funcional puede ser considerada como una ecuación que involucra variables independientes, funciones conocidas, funciones desconocidas y constantes. Nuestras incógnitas serán las funciones desconocidas, en general definidas en cualquier espacio.*

## Nota

*Nos centraremos en las ecuaciones funcionales de varias variables.*

## Nota

*El conjunto de todos los valores de las variables involucradas en la ecuación se llama el dominio de la ecuación funcional.*

## Ejemplo

- *Ecuación aditiva de Cauchy:*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

## Ejemplo

- *Ecuación aditiva de Cauchy:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

- *Ecuación de Pexider:*

$$f(x+y) = g(x) + h(y),\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

## Ejemplo

- *Ecuación aditiva de Cauchy:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

- *Ecuación de Pexider:*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

- *Ecuación homogénea:*

$$f(zx, zy) = z^n f(x, y), \ x, y \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}_{++}.$$

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

Multitud de aplicaciones en diferentes campos:

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

Multitud de aplicaciones en diferentes campos:

- Geometría

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

Multitud de aplicaciones en diferentes campos:

- Geometría
- Ingeniería

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

Multitud de aplicaciones en diferentes campos:

- Geometría
- Ingeniería
- Economía

- Área relativamente desconocida y reciente de las Matemáticas (de 1960 en adelante).
- Fue ya considerada por matemáticos de la talla de Euler en el siglo XVIII, y Cauchy en el siglo XIX.

Multitud de aplicaciones en diferentes campos:

- Geometría
- Ingeniería
- Economía
- Probabilidad y Estadística
- ...

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.
5. Tratamiento de algunas variables como constantes.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.
5. Tratamiento de algunas variables como constantes.
6. Métodos inductivos.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.
5. Tratamiento de algunas variables como constantes.
6. Métodos inductivos.
7. Métodos iterativos.

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.
5. Tratamiento de algunas variables como constantes.
6. Métodos inductivos.
7. Métodos iterativos.
8. Técnicas analíticas (integración, diferenciación,...).

La resolución de una ecuación funcional no es para nada mecánica, conlleva muchas técnicas de tipo heurístico.

Algunas de estas técnicas son:

1. Sustitución de variables por valores.
2. Transformación de una o varias variables.
3. Transformación de una o varias funciones.
4. Utilización de una ecuación más general.
5. Tratamiento de algunas variables como constantes.
6. Métodos inductivos.
7. Métodos iterativos.
8. Técnicas analíticas (integración, diferenciación,...).
9. Métodos mixtos.

# Índice

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

**Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$**

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $y = 0 \Longrightarrow$

$$f(x) = f(x) + f(0), \quad \text{o sea que } f(0) = 0.$$

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $y = 0 \Longrightarrow$

$$f(x) = f(x) + f(0), \quad \text{o sea que } f(0) = 0.$$

Para $y = -x \Longrightarrow$

$$0 = f(x) + f(-x), \quad \text{o sea que } f(-x) = -f(x).$$

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $y = 0 \Longrightarrow$

$$f(x) = f(x) + f(0), \quad \text{o sea que } f(0) = 0.$$

Para $y = -x \Longrightarrow$

$$0 = f(x) + f(-x), \quad \text{o sea que } f(-x) = -f(x).$$

Para $y = x \Longrightarrow f(2x) = 2f(x),$

# Ecuación aditiva de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $y = 0 \implies$

$$f(x) = f(x) + f(0), \quad \text{o sea que } f(0) = 0.$$

Para $y = -x \implies$

$$0 = f(x) + f(-x), \quad \text{o sea que } f(-x) = -f(x).$$

Para $y = x \implies f(2x) = 2f(x)$, y por inducción:

$$f(nx) = nf(x), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$,

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

$\Longrightarrow$Añadimos <u>propiedades adicionales</u>

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

$\Longrightarrow$Añadimos propiedades adicionales

- Supóngase que $f$ es continua:

Para $x = \frac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

$\Longrightarrow$Añadimos propiedades adicionales

- Supóngase que $f$ es continua:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y elegimos $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

$\Longrightarrow$Añadimos propiedades adicionales

- Supóngase que $f$ es continua:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y elegimos $\{x_n\} \subset \mathbb{Q} \longrightarrow x$, como $f$ es continua:

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} cx_n = cx.$$

Para $x = \dfrac{m}{n}$ $(n \cdot x = m \cdot 1)$, obtenemos que: $f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$, $\Longrightarrow$ $nf(x) = mf(1)$, y se tiene que:

$$f(x) = \frac{m}{n} f(1).$$

Si $c := f(1)$, llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

$\Longrightarrow$Añadimos propiedades adicionales

- Supóngase que $f$ es continua:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , y elegimos $\{x_n\} \subset \mathbb{Q} \longrightarrow x$, como $f$ es continua:

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} cx_n = cx.$$

Entonces llegamos a:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$.

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$. Entonces:

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$. Entonces:

$$c \cdot r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c \cdot R_n.$$

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$. Entonces:

$$c \cdot r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c \cdot R_n.$$

Si $n \to \infty$ , tanto $c \cdot r_n$ como $c \cdot R_n$ convergen a $c \cdot x$. Por consiguiente:

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$. Entonces:

$$c \cdot r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c \cdot R_n.$$

Si $n \to \infty$ , tanto $c \cdot r_n$ como $c \cdot R_n$ convergen a $c \cdot x$. Por consiguiente:

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Supóngase que $f$ es monótona creciente:

si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos elegir $\{r_n\}\uparrow$ y $\{R_n\}\downarrow \subset \mathbb{Q}$, convergentes hacia $x$. Entonces:

$$c \cdot r_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = c \cdot R_n.$$

Si $n \to \infty$ , tanto $c \cdot r_n$ como $c \cdot R_n$ convergen a $c \cdot x$. Por consiguiente:

$$f(x) = cx, \quad \forall$$

Caracterización de las soluciones de la ecuación de Cauchy:

Caracterización de las soluciones de la ecuación de Cauchy:

- "Para una solución de la ecuación de Cauchy que no sea de la forma $f(x) = cx$, la imagen de cualquier $]a, b[$ $(a < b)$ es densa en $\mathbb{R}$".

Caracterización de las soluciones de la ecuación de Cauchy:

- "Para una solución de la ecuación de Cauchy que no sea de la forma $f(x) = cx$, la imagen de cualquier $]a, b[$ $(a < b)$ es densa en $\mathbb{R}$".
- "Si una función $f$ satisface la ecuación de Cauchy y es continua en un punto, o monótona, o acotada superior o inferiormente en un intervalo de longitud positiva, entonces existe una constante $c$ tal que

$$f(x) = cx \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ ''}.$$

Caracterización de las soluciones de la ecuación de Cauchy:

- "Para una solución de la ecuación de Cauchy que no sea de la forma $f(x) = cx$, la imagen de cualquier $]a, b[$ $(a < b)$ es densa en $\mathbb{R}$".
- "Si una función $f$ satisface la ecuación de Cauchy y es continua en un punto, o monótona, o acotada superior o inferiormente en un intervalo de longitud positiva, entonces existe una constante $c$ tal que

$$f(x) = cx \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ ''}.$$

- "Existe una constante $c$ tal que

$$f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si y solo si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Cauchy y es acotada superior (o inferiormente) en un conjunto de medida positiva".

Caracterización de las soluciones de la ecuación de Cauchy:

- "Para una solución de la ecuación de Cauchy que no sea de la forma $f(x) = cx$, la imagen de cualquier $]a, b[$ $(a < b)$ es densa en $\mathbb{R}$".
- "Si una función $f$ satisface la ecuación de Cauchy y es continua en un punto, o monótona, o acotada superior o inferiormente en un intervalo de longitud positiva, entonces existe una constante $c$ tal que
$$f(x) = cx \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ ''}.$$
- "Existe una constante $c$ tal que
$$f(x) = cx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
si y solo si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Cauchy y es acotada superior (o inferiormente) en un conjunto de medida positiva".
- "La solución general $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada con la ayuda de la base de Hamel, eligiendo los valores de $f$ en H arbitrariamente y definiendo
$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} r_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(h_k), \text{ donde } r_k \in H, \text{ y } r_k \in \mathbb{Q} \text{ ''}.$$

# Generalización y extensión al plano complejo

# Generalización y extensión al plano complejo

La ecuación de Cauchy análoga para funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_1, \ldots, y_n), \quad (1)$$

donde $x_k, y_k \in \mathbb{R}; \; k = 1, 2, \ldots, n$.

## Generalización y extensión al plano complejo

La ecuación de Cauchy análoga para funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_1, \ldots, y_n), \quad (1)$$

donde $x_k, y_k \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

$\Longrightarrow$La solución de (1) bajo la condición de continuidad (y otras más débiles) está dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k.$$

# Generalización y extensión al plano complejo

La ecuación de Cauchy análoga para funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

donde $x_k, y_k \in \mathbb{R};\ \ k = 1, 2, \dots, n.$
$\Longrightarrow$La solución de (1) bajo la condición de continuidad (y otras más débiles) está dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k.$$

La ecuación de Cauchy para funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ \ (x, y \in \mathbb{R}^n) \quad (2)$$

# Generalización y extensión al plano complejo

La ecuación de Cauchy análoga para funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_1, \ldots, y_n), \quad (1)$$

donde $x_k, y_k \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

$\Longrightarrow$La solución de (1) bajo la condición de continuidad (y otras más débiles) está dada por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k.$$

La ecuación de Cauchy para funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \qquad (2)$$

$\Longrightarrow$La solución de (2) en la clase de funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es:

$$f(x) = C * x \quad (x \in \mathbb{R}^n), \qquad (3)$$

donde $C \in \mathbb{M}_{mxn}$ y '$*$' denota la multiplicación de una matriz por un vector.

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

y para la ecuación:

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

y para la ecuación:

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \ \ (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

usando (3), bajo la condición de continuidad, las soluciones son:

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y),$$

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

y para la ecuación:

$$f(z + w) = f(z) + f(w) \;\; (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

usando (3), bajo la condición de continuidad, las soluciones son:

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y),$$

así que teniendo en cuenta que $\bar{z} = x - iy$, resulta:

$$f(z) = (c_{11} + ic_{21})\frac{z + \bar{z}}{2} + (c_{22} - ic_{12})\frac{z - \bar{z}}{2} = az + b\bar{z}.$$

Si $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

y para la ecuación:

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \;\; (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

usando (3), bajo la condición de continuidad, las soluciones son:

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y),$$

así que teniendo en cuenta que $\bar{z} = x - iy$, resulta:

$$f(z) = (c_{11} + ic_{21})\frac{z+\bar{z}}{2} + (c_{22} - ic_{12})\frac{z-\bar{z}}{2} = az + b\bar{z}.$$

$\Longrightarrow$ La solución de (4) está dada por:

Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (es decir, m=n=2), entonces:

$$z = x + iy, \quad f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

y para la ecuación:

$$f(z+w) = f(z) + f(w) \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

usando (3), bajo la condición de continuidad, las soluciones son:

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y),$$

así que teniendo en cuenta que $\bar{z} = x - iy$, resulta:

$$f(z) = (c_{11} + ic_{21})\frac{z + \bar{z}}{2} + (c_{22} - ic_{12})\frac{z - \bar{z}}{2} = az + b\bar{z}.$$

$\Longrightarrow$ La solución de (4) está dada por:

$$f(z) = az + b\bar{z} \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $x = y = \dfrac{t}{2} \Longrightarrow f(t) = f^2\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0,$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $x = y = \dfrac{t}{2} \Longrightarrow f(t) = f^2\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0$,
$\Rightarrow$podemos tomar logaritmos en la ecuación dada:

$$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y).$$

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $x = y = \dfrac{t}{2} \implies f(t) = f^2\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0$,
$\Rightarrow$podemos tomar logaritmos en la ecuación dada:

$$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y).$$

Sea $g := \ln \circ f$, entonces:

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $x = y = \dfrac{t}{2} \Longrightarrow f(t) = f^2\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0$,
$\Rightarrow$podemos tomar logaritmos en la ecuación dada:

$$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y).$$

Sea $g := \ln \circ f$, entonces:

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

con las mismas hipótesis adicionales (como continuidad, monotonía, acotación) las soluciones son: $g(x) = cx$,

# La ecuación exponencial de Cauchy

$$\boxed{f(x+y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Si hacemos $x = y = \dfrac{t}{2} \implies f(t) = f^2\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0$,
$\Rightarrow$podemos tomar logaritmos en la ecuación dada:

$$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y).$$

Sea $g := \ln \circ f$, entonces:

$$g(x+y) = g(x) + g(y),$$

con las mismas hipótesis adicionales (como continuidad, monotonía, acotación) las soluciones son: $g(x) = cx$, y entonces las soluciones son:

$$f(x) = e^{cx} \quad \text{y} \quad f \equiv 0.$$

Caso Complejo: $f(z+w) = f(z) \cdot f(w) \quad z, w \in \mathbb{C}$.

## Caso Complejo: $f(z+w) = f(z) \cdot f(w) \quad z, w \in \mathbb{C}$.

Realizando la apropiada extensión se llega al siguiente resultado:

## Caso Complejo: $f(z+w) = f(z) \cdot f(w) \quad z, w \in \mathbb{C}$.

Realizando la apropiada extensión se llega al siguiente resultado:

“Las soluciones genéricas medibles $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ están dadas por:

## Caso Complejo: $f(z+w) = f(z) \cdot f(w) \quad z, w \in \mathbb{C}$.

Realizando la apropiada extensión se llega al siguiente resultado:

"Las soluciones genéricas medibles $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ están dadas por:

$$f(z) = 0 \;\text{ y } f(z) = f(x+iy) = \exp(\gamma x + \delta y) = \exp(\alpha z + \beta \bar{z}),$$

donde $\alpha$ y $\beta$ (y $\gamma$, $\delta$) son constantes complejas arbitrarias".

# La ecuación potencial de Cauchy

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

# La ecuación potencial de Cauchy

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Mediante transformaciones, se obtienen como soluciones continuas:

# La ecuación potencial de Cauchy

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Mediante transformaciones, se obtienen como soluciones continuas:

$$\text{a)} \quad f(x) = |x|^c, \quad \text{b)} \quad f(x) = \text{signo}(x) \cdot |x|^c, \quad \text{c)} \quad f(x) = 0,$$

siendo $c$ una constante real arbitraria.

# La ecuación potencial de Cauchy

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Mediante transformaciones, se obtienen como soluciones continuas:

$$\text{a)}\;\; f(x) = |x|^c, \quad \text{b)}\;\; f(x) = \text{signo}(x) \cdot |x|^c, \quad \text{c)}\;\; f(x) = 0,$$

siendo $c$ una constante real arbitraria.

## Caso Complejo: $f(zw) = f(z)f(w) \;\; z, w \in \mathbb{C}.$

# La ecuación potencial de Cauchy

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

## Caso real: $x, y \in \mathbb{R}$

Mediante transformaciones, se obtienen como soluciones continuas:

$$\text{a)} \;\; f(x) = |x|^c, \quad \text{b)} \;\; f(x) = \text{signo}(x) \cdot |x|^c, \quad \text{c)} \;\; f(x) = 0,$$

siendo $c$ una constante real arbitraria.

## Caso Complejo: $f(zw) = f(z)f(w) \;\; z, w \in \mathbb{C}.$

Realizando la apropiada generalización las soluciones analíticas son:

$$f(z) \equiv 0 \text{ y } \; f(z) = z^c, \; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

# Índice

1. Ecuaciones funcionales
   - Introducción
   - Ecuaciones de Cauchy
     - Ecuación aditiva de Cauchy
     - La ecuación exponencial de Cauchy
     - La ecuación potencial de Cauchy
   - Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja
2. Densificación
   - Preliminares
   - Densificación

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.
- Resultan ser generalmente falsos en la variable real.

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.
- Resultan ser generalmente falsos en la variable real.
- Como aplicación podremos aprovecharnos de sus consecuencias para trabajar con las ecuaciones funcionales, y sacar sus soluciones analíticas a partir de ellos.

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.
- Resultan ser generalmente falsos en la variable real.
- Como aplicación podremos aprovecharnos de sus consecuencias para trabajar con las ecuaciones funcionales, y sacar sus soluciones analíticas a partir de ellos.

## Definición (función analítica)

*Tomaremos como definición de función analítica la propiedad de función holomorfa, es decir, derivable en sentido complejo:*
*Sea* $\Omega$ *un abierto,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $f$ *es derivable en* $z_0$ *si existe el siguiente límite:*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.
- Resultan ser generalmente falsos en la variable real.
- Como aplicación podremos aprovecharnos de sus consecuencias para trabajar con las ecuaciones funcionales, y sacar sus soluciones analíticas a partir de ellos.

**Teorema (de caracterización de funciones analíticas)**

*(a) Si $f$ es analítica en $z_0$ (es decir, en un cierto disco $D(z_0, r)$), entonces $f$ puede representarse mediante una serie $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, para $z \in D(z_0, r)$.*

*(b) Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0, r)$, entonces $f$ es analítica en $z_0$.*

*(c) Ademas los coeficientes de la serie son únicos, es decir, si*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ con } z \in D(z_0, r), \text{ entonces } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ \forall n \geq 0.$$

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

- Resultados de gran importancia acerca de funciones analíticas.
- Resultan ser generalmente falsos en la variable real.
- Como aplicación podremos aprovecharnos de sus consecuencias para trabajar con las ecuaciones funcionales, y sacar sus soluciones analíticas a partir de ellos.

**Teorema**

*Si $f$ es analítica en un abierto $U$, entonces es indefinidamente derivable (tiene derivadas de todos los órdenes), y en particular, si $f$ tiene primitiva entonces es analítica.*

- *Aplicación $\Rightarrow$ Si suponemos que $f$ es analítica, sus derivadas también lo serán, y podremos derivar en las ecuaciones indefinidamente.*

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

# Resolución de ecuaciones utilizando la variable compleja

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:**(Primera alternativa)**

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:**(Primera alternativa)**
Hacemos $w = 1$ en la ecuación:

$$f(z+1) + f(z)f(1) = f(z) + 2z + 1,$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \; \forall \; z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba: **(Primera alternativa)**

Hacemos $w = 1$ en la ecuación:

$$f(z+1) + f(z)f(1) = f(z) + 2z + 1,$$

$$\Longrightarrow f(z+1) = a \cdot f(z) + 2z + 1, \; \text{con} \;\; a = 1 - f(1). \tag{1}$$

### Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:**(Primera alternativa)**
Hacemos $w = 1$ en la ecuación:

$$f(z+1) + f(z)f(1) = f(z) + 2z + 1,$$

$$\Longrightarrow f(z+1) = a \cdot f(z) + 2z + 1, \text{ con } \ a = 1 - f(1). \tag{1}$$

Cambiando $w$ por $w+1$:

$$f(z+w+1) + f(z)f(w+1) = f(z(w+1)) + 2z(w+1) + 1,$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z+w) + f(z)f(w) = f(zw) + 2zw + 1 \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba: **(Primera alternativa)**
Hacemos $w = 1$ en la ecuación:

$$f(z+1) + f(z)f(1) = f(z) + 2z + 1,$$

$$\Longrightarrow f(z+1) = a \cdot f(z) + 2z + 1, \text{ con } \ a = 1 - f(1). \qquad (1)$$

Cambiando $w$ por $w+1$:

$$f(z+w+1) + f(z)f(w+1) = f(z(w+1)) + 2z(w+1) + 1,$$

y utilizando (1) para desarrollar $f(z+w+1)$ y $f(w+1)$, nos queda:

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

Tomando $z=2t$ y $w=-1/2$:

$$a[f(-t)-2t+1]=f(t)-2t+1, \tag{2}$$

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

Tomando $z=2t$ y $w=-1/2$:

$$a[f(-t)-2t+1]=f(t)-2t+1, \tag{2}$$

y cambiando $t$ por $-t$:

$$a[f(t)+2t+1]=f(-t)+2t+1. \tag{3}$$

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

Tomando $z=2t$ y $w=-1/2$:

$$a[f(-t)-2t+1]=f(t)-2t+1, \tag{2}$$

y cambiando $t$ por $-t$:

$$a[f(t)+2t+1]=f(-t)+2t+1. \tag{3}$$

Eliminando $f(-t)$ de (2) y (3) $\Longrightarrow$

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

Tomando $z=2t$ y $w=-1/2$:

$$a[f(-t)-2t+1]=f(t)-2t+1, \tag{2}$$

y cambiando $t$ por $-t$:

$$a[f(t)+2t+1]=f(-t)+2t+1. \tag{3}$$

Eliminando $f(-t)$ de (2) y (3) $\Longrightarrow$

$$(1-a^2)f(t)=2(1-a)^2t+a^2-1.$$

$$a[f(z+w)+f(z)f(w)]+(2w+1)(1+f(z))=f(z(w+1))+2zw+1.$$

Tomando $z=2t$ y $w=-1/2$:

$$a[f(-t)-2t+1]=f(t)-2t+1, \tag{2}$$

y cambiando $t$ por $-t$:

$$a[f(t)+2t+1]=f(-t)+2t+1. \tag{3}$$

Eliminando $f(-t)$ de (2) y (3) $\Longrightarrow$

$$(1-a^2)f(t)=2(1-a)^2t+a^2-1.$$

Analizaremos los distintos casos en función de $a$:

Caso 1: $a \neq \pm 1$:

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \ \text{ y } \ f(z) = -z - 1.}$$

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right) t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \;\; \text{y} \;\; f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \ \text{ y } \ f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:
Si $a = -1$,

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right) t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \ \text{ y } \ f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:
Si $a = -1$, sustituyendo en la ecuación:

$$8t = 0 \ \forall t$$

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \;\text{ y }\; f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:
Si $a = -1$, sustituyendo en la ecuación:

$$8t = 0 \;\forall t \Longrightarrow \text{falso}.$$

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \ \text{ y } \ f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:
Si $a = -1$, sustituyendo en la ecuación:

$$8t = 0 \ \forall t \Longrightarrow \text{falso}.$$

Por tanto nos centramos en $a = 1$:

Caso 1: $a \neq \pm 1$:
Se tiene que:

$$f(t) = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t - 1.$$

Como $f(1) = 1 - a$, tomando $t = 1$, se llega a que $a = 0$ ó $a = 3 \Longrightarrow$ 2 soluciones:

$$\boxed{f(z) = 2z - 1 \ \text{ y } \ f(z) = -z - 1.}$$

Caso 2: $a = \pm 1$:
Si $a = -1$, sustituyendo en la ecuación:

$$8t = 0 \ \forall t \Longrightarrow \text{falso}.$$

Por tanto nos centramos en $a = 1$:
Por la ecuación (2), tenemos que $f(t) = f(-t) \ \forall t \in \mathbb{C}$.

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

$$f(2z) + f(z)^2 = f(z^2) + 2z^2$$

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

$$f(2z) + f(z)^2 = f(z^2) + 2z^2 + 1 \quad \text{y}$$

$$f(0) + f(z)^2 = f(z^2) - 2z^2 + 1.$$

Restando ambas ecuaciones:

$$f(2z) = 4z^2 + f(0).$$

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

$$f(2z) + f(z)^2 = f(z^2) + 2z^2 + 1 \quad \text{y}$$

$$f(0) + f(z)^2 = f(z^2) - 2z^2 + 1.$$

Restando ambas ecuaciones:

$$f(2z) = 4z^2 + f(0).$$

Y como estamos en el caso en que $a = 1$, es decir $f(1) = 0$, haciendo $z = 0$ en la ecuación (1), resulta: $f(1) = af(0) + 1$, y por lo tanto,

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

$$f(2z) + f(z)^2 = f(z^2) + 2z^2 + 1 \quad \text{y}$$

$$f(0) + f(z)^2 = f(z^2) - 2z^2 + 1.$$

Restando ambas ecuaciones:

$$f(2z) = 4z^2 + f(0).$$

Y como estamos en el caso en que $a = 1$, es decir $f(1) = 0$, haciendo $z = 0$ en la ecuación (1), resulta: $f(1) = af(0) + 1$, y por lo tanto, $f(1) = f(0) + 1 \Longrightarrow f(0) = -1$. Así que $f(2z) = 4z^2 - 1$, es decir, la tercera solución resultante es:

En la ecuación original hacemos $w = z$ y $w = -z$, y obtenemos respectivamente:

$$f(2z) + f(z)^2 = f(z^2) + 2z^2 + 1 \text{ y}$$

$$f(0) + f(z)^2 = f(z^2) - 2z^2 + 1.$$

Restando ambas ecuaciones:

$$f(2z) = 4z^2 + f(0).$$

Y como estamos en el caso en que $a = 1$, es decir $f(1) = 0$, haciendo $z = 0$ en la ecuación (1), resulta: $f(1) = af(0) + 1$, y por lo tanto, $f(1) = f(0) + 1 \implies f(0) = -1$. Así que $f(2z) = 4z^2 - 1$, es decir, la tercera solución resultante es:

$$\boxed{f(z) = z^2 - 1.}$$

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$
Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z &= \dfrac{t}{t-1} \\ w &= t \end{cases}$$

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z & = \dfrac{t}{t-1} \\ w & = t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z+w=\dfrac{t}{t-1}+t=\dfrac{t+t^2-t}{t-1}=\dfrac{t^2}{t-1}=z\cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z &= \dfrac{t}{t-1} \\ w &= t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z+w=\dfrac{t}{t-1}+t=\dfrac{t+t^2-t}{t-1}=\dfrac{t^2}{t-1}=z\cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w)=2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right)f(t)=2\frac{t^2}{t-1}+1.$$

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z &= \dfrac{t}{t-1} \\ w &= t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z+w = \dfrac{t}{t-1} + t = \dfrac{t+t^2-t}{t-1} = \dfrac{t^2}{t-1} = z \cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w) = 2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right)f(t) = 2\frac{t^2}{t-1}+1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & \dfrac{t}{t-1} \\ w & = & t \end{array} \right.$$

Entonces resulta que $z+w=\dfrac{t}{t-1}+t=\dfrac{t+t^2-t}{t-1}=\dfrac{t^2}{t-1}=z\cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w)=2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right)f(t)=2\frac{t^2}{t-1}+1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:
el término de la derecha tiende a infinito,

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z &= \dfrac{t}{t-1} \\ w &= t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z+w=\dfrac{t}{t-1}+t=\dfrac{t+t^2-t}{t-1}=\dfrac{t^2}{t-1}=z\cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w)=2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right)f(t)=2\frac{t^2}{t-1}+1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:

el término de la derecha tiende a infinito, mientras que el de la izquierda tiende a $f(1)\cdot \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)$,

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z &= \dfrac{t}{t-1} \\ w &= t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z+w=\dfrac{t}{t-1}+t=\dfrac{t+t^2-t}{t-1}=\dfrac{t^2}{t-1}=z\cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w)=2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right)f(t)=2\frac{t^2}{t-1}+1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:

el término de la derecha tiende a infinito, mientras que el de la izquierda tiende a $f(1)\cdot \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)$, es decir: $f(1)\cdot \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=\infty$,

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & \dfrac{t}{t-1} \\ w & = & t \end{array} \right.$$

Entonces resulta que $z+w = \dfrac{t}{t-1} + t = \dfrac{t+t^2-t}{t-1} = \dfrac{t^2}{t-1} = z \cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w) = 2zw+1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right) f(t) = 2\frac{t^2}{t-1} + 1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:

el término de la derecha tiende a infinito, mientras que el de la izquierda tiende a $f(1) \cdot \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)$, es decir: $f(1) \cdot \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = \infty$, y por tanto:

**Segunda alternativa:** $(f(z+w)+f(z)f(w)=f(zw)+2zw+1)$

Realizaremos el siguiente cambio paramétrico (con $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 1$):

$$\begin{cases} z & = \dfrac{t}{t-1} \\ w & = t \end{cases}$$

Entonces resulta que $z + w = \dfrac{t}{t-1} + t = \dfrac{t + t^2 - t}{t-1} = \dfrac{t^2}{t-1} = z \cdot w$, y sustituyendo en la ecuación original nos queda:

$$f(z)f(w) = 2zw + 1, \text{ y en consecuencia: } f\left(\frac{t}{t-1}\right) f(t) = 2\frac{t^2}{t-1} + 1.$$

Hacemos $|t| \to \infty$:

el término de la derecha tiende a infinito, mientras que el de la izquierda tiende a $f(1) \cdot \lim_{|t|\to\infty} f(t)$, es decir: $f(1) \cdot \lim_{|t|\to\infty} f(t) = \infty$, y por tanto:

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty.$$

Entonces, concluimos que $f(z)$ ha de ser un polinomio por aplicación directa del teorema de Cauchy:

**Teorema (Cauchy, 1849)**

*Sea $f(z)$ entera no constante, entonces:* $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ *sii* $f(z)$ *es un polinomio.*

Ninguna función constante es solución $\Longrightarrow$ el teorema está bien aplicado.

Ninguna función constante es solución $\Longrightarrow$ el teorema está bien aplicado.

Falta comprobar que los únicos polinomios que satisfacen la ecuación dada son: $f(z) = z^2 - 1$, $f(z) = 2z - 1$ y $f(z) = -z - 1$ (las soluciones obtenidas en la primera alternativa).

Ninguna función constante es solución $\Longrightarrow$ el teorema está bien aplicado.

Falta comprobar que los únicos polinomios que satisfacen la ecuación dada son: $f(z) = z^2 - 1$, $f(z) = 2z - 1$ y $f(z) = -z - 1$ (las soluciones obtenidas en la primera alternativa).

Se sustituye $f(z)$ por un polinomio,
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Ninguna función constante es solución $\Longrightarrow$ el teorema está bien aplicado.

Falta comprobar que los únicos polinomios que satisfacen la ecuación dada son: $f(z) = z^2 - 1$, $f(z) = 2z - 1$ y $f(z) = -z - 1$ (las soluciones obtenidas en la primera alternativa).

Se sustituye $f(z)$ por un polinomio,
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.
Se comprueba primero que $f(0) = -1$, y por lo tanto $a_0 = -1$.

Ninguna función constante es solución $\Longrightarrow$ el teorema está bien aplicado.

Falta comprobar que los únicos polinomios que satisfacen la ecuación dada son: $f(z) = z^2 - 1$, $f(z) = 2z - 1$ y $f(z) = -z - 1$ (las soluciones obtenidas en la primera alternativa).

Se sustituye $f(z)$ por un polinomio,
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.
Se comprueba primero que $f(0) = -1$, y por lo tanto $a_0 = -1$.
Y sustituyendo el polinomio en la ecuación original se calculan el resto de coeficientes.

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w)\ \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$.

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$. Derivando la ecuación original respecto de $z$:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$. Derivando la ecuación original respecto de $z$:

$$f(z)f(w) + (z+w)f'(z)f(w) = wf(z+w) + zwf'(z+w),$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$. Derivando la ecuación original respecto de $z$:

$$f(z)f(w) + (z+w)f'(z)f(w) = wf(z+w) + zwf'(z+w),$$

y si sustituimos $z = 0$, nos queda:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$. Derivando la ecuación original respecto de $z$:

$$f(z)f(w) + (z+w)f'(z)f(w) = wf(z+w) + zwf'(z+w),$$

y si sustituimos $z = 0$, nos queda:

$$f(0)f(w) + wf'(0)f(w) = wf(w) \Rightarrow wf'(0)f(w) = wf(w) \ \forall w \in \mathbb{C},$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$(z+w)f(z)f(w) = zwf(z+w) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Si tomamos $w = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$zf(z)f(0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C},$$

si $f(0) \neq 0$, resulta $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Para buscar otras soluciones, suponemos $f(0) = 0$. Derivando la ecuación original respecto de $z$:

$$f(z)f(w) + (z+w)f'(z)f(w) = wf(z+w) + zwf'(z+w),$$

y si sustituimos $z = 0$, nos queda:

$$f(0)f(w) + wf'(0)f(w) = wf(w) \Rightarrow wf'(0)f(w) = wf(w) \ \forall w \in \mathbb{C},$$

entonces necesariamente $f'(0) = 1$.

Esto nos indica que el orden del cero en $z = 0$ es $k = 1$ para otras soluciones distintas de $f(z) = 0$.

### Definición (cero de orden m)

*Sea $f(z)$ analítica en $z_0$, diremos que tiene un* cero en $z_0$ de orden $m \geq 1$ *si* $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ *con* $a_n = 0 \ \forall n < m$ *y* $a_m \neq 0$.

### Teorema

*Si $f(z)$ es analítica y tiene un cero de orden $m$ en $z_0$, entonces* $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$*, siendo $g(z)$ analítica en $z_0$ y $g(z_0) \neq 0$.*

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \; \forall z, w \in \mathbb{C},$$

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z + w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z + w) \cdot g(z + w), \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$g(z + w) = g(z)g(w), \ \forall\ z, w \in \mathbb{C},$$

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$g(z+w) = g(z)g(w), \ \forall \ z, w \in \mathbb{C},$$

obteniendo así la ecuación exponencial de Cauchy en el caso complejo,

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$g(z+w) = g(z)g(w), \ \forall \ z, w \in \mathbb{C},$$

obteniendo así la ecuación exponencial de Cauchy en el caso complejo, cuyas soluciones analíticas son:

$$g(z) = \exp(\alpha z).$$

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \; \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$g(z+w) = g(z)g(w), \; \forall \; z, w \in \mathbb{C},$$

obteniendo así la ecuación exponencial de Cauchy en el caso complejo, cuyas soluciones analíticas son:

$$g(z) = \exp(\alpha z).$$

$\Longrightarrow$ las soluciones de la ecuación funcional resultan ser:

$$\Longrightarrow f(z) = z \cdot g(z), \text{ con } g(z) \text{ analítica y } g(0) \neq 0.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación original:

$$(z+w) \cdot zw \cdot g(z)g(w) = zw \cdot (z+w) \cdot g(z+w), \ \forall z, w \in \mathbb{C},$$

y en consecuencia:

$$g(z+w) = g(z)g(w), \ \forall\ z, w \in \mathbb{C},$$

obteniendo así la ecuación exponencial de Cauchy en el caso complejo, cuyas soluciones analíticas son:

$$g(z) = \exp(\alpha z).$$

$\Longrightarrow$ las soluciones de la ecuación funcional resultan ser:

$$\boxed{f(z) = 0, \text{ y } f(z) = z \cdot \exp(\alpha z), \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}.}$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando en la ecuación $z = w = 0$, y definiendo $c := f(0)$:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando en la ecuación $z = w = 0$, y definiendo $c := f(0)$:

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

y resulta que $c \neq 0$, de lo contrario obtenemos una contradicción.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando en la ecuación $z = w = 0$, y definiendo $c := f(0)$:

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

y resulta que $c \neq 0$, de lo contrario obtenemos una contradicción.

Ahora, si sustituimos $z = f(w)$, se tiene que:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando en la ecuación $z = w = 0$, y definiendo $c := f(0)$:

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

y resulta que $c \neq 0$, de lo contrario obtenemos una contradicción.

Ahora, si sustituimos $z = f(w)$, se tiene que:

$$c = f(z) + z^2 + f(z) - 1,$$

es decir:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z - f(w)) = f(f(w)) + zf(w) + f(z) - 1 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando en la ecuación $z = w = 0$, y definiendo $c := f(0)$:

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

y resulta que $c \neq 0$, de lo contrario obtenemos una contradicción.

Ahora, si sustituimos $z = f(w)$, se tiene que:

$$c = f(z) + z^2 + f(z) - 1,$$

es decir:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathrm{Im}(f). \tag{4}$$

**Teorema (Teorema de la Aplicación Abierta)**

*Sea $g$ analítica en un abierto $U$ y no identicamente constante en ninguna componente conexa de $U$. Si $V$ es un abierto de $U$, entonces $g(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.*

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

**Teorema (Principio de Identidad de las funciones analíticas)**

*Sean $f$ y $g$ analíticas en $U$, un conjunto abierto y conexo. Entonces si $f = g$ en $S \subset U$, donde $S$ es un conjunto con un punto límite, entonces $f = g$ en el abierto $U$.*

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto).

No hay soluciones de la forma $f(z) = cte \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

Im(f ) contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\mathrm{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

**Teorema (Picard)**

*Si $f$ es una función entera y si existen dos números complejos distintos $\alpha$, $\beta$ que no están en el recorrido de $f$, entonces $f$ es constante.*

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

No hay soluciones constantes $\Longrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{C}$ o $\text{Im}(f) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, obteniendo la misma conclusión.

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

No hay soluciones constantes $\Longrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{C}$ o $\text{Im}(f) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, obteniendo la misma conclusión.

Ya sólo nos resta hallar la constante $c$, como $f(0) = c$ sustituyendo:

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

No hay soluciones constantes $\Longrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{C}$ o $\text{Im}(f) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, obteniendo la misma conclusión.

Ya sólo nos resta hallar la constante $c$, como $f(0) = c$ sustituyendo:

$$\frac{c+1}{2} = c \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

No hay soluciones de la forma $f(z) = \text{cte} \Longrightarrow$ podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta y afirmar que $f(\mathbb{C})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

$\text{Im}(f)$ contiene un punto límite (es abierto). Así pues, también podemos aplicar el Principio de Identidad de las funciones analíticas y afirmar que:

$$f(z) = \frac{c+1}{2} - \frac{z^2}{2}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

A esto mismo también se puede llegar utilizando el teorema de Picard:

No hay soluciones constantes $\Longrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{C}$ o $\text{Im}(f) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, obteniendo la misma conclusión.

Ya sólo nos resta hallar la constante $c$, como $f(0) = c$ sustituyendo:

$$\frac{c+1}{2} = c \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

$$\boxed{\Longrightarrow f(z) = 1 - \frac{z^2}{2} \ \ \forall z \in \mathbb{C},}$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \;\forall\; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \ \forall\ z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \ \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \ \forall \ z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \; \forall \; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve $\Longrightarrow$ necesariamente $f(0) = 2$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \; \forall \; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve $\Longrightarrow$ necesariamente $f(0) = 2$.
Si hacemos ahora $z = w$ queda:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \; \forall \; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$*.*

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve $\Longrightarrow$ necesariamente $f(0) = 2$.
Si hacemos ahora $z = w$ queda:

$$f(z)^2 = 2f[z(1 + f(z))], \tag{5}$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \; \forall \; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que* $f(x) > 0$ *si* $x > 0$.

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve $\Longrightarrow$ necesariamente $f(0) = 2$.
Si hacemos ahora $z = w$ queda:

$$f(z)^2 = 2f[z(1 + f(z))], \tag{5}$$

entonces $f(z) \neq -1 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$,

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z)f(w) = 2f(z + wf(z)) \;\forall\; z, w \in \mathbb{C},$$

*con la condición de que $f(x) > 0$ si $x > 0$.*

Prueba:

Haciendo $w = 0$:

$$f(z)f(0) = 2f(z), \text{ o equivalentemente: } f(z)[2 - f(0)] = 0,$$

$f(z) \equiv 0$ no sirve $\Longrightarrow$ necesariamente $f(0) = 2$.
Si hacemos ahora $z = w$ queda:

$$f(z)^2 = 2f[z(1 + f(z))], \tag{5}$$

entonces $f(z) \neq -1 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$, ya que si $f(z_0) = -1$ para algún $z_0 \Longrightarrow$ $1 = 2f(0) \Longrightarrow$ absurdo (ya que $f(0) = 2$).

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \ w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \ w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \ z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists\; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \; z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$,

Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \;\; z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{A}$.

Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \;\; z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{A}$. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists\; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \;\; z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{A}$. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, en particular $g'(0) = 1$ ya que $f'(0) = 0$.

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \ w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \ z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{A}$. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, en particular $g'(0) = 1$ ya que $f'(0) = 0$.

**Teorema**

*Sea $f$ analítica en $z_0$. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe un entorno de $z_0$ donde $f$ es inyectiva. Si $f'(z_0) = 0$, entonces $f$ no es inyectiva en ningún entorno de $z_0$.*

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \ w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \ z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{A}$. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, en particular $g'(0) = 1$ ya que $f'(0) = 0$.

Como $g'(0) \neq 0$

Veamos también que $f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists\ w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\text{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \ z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y Img $\subset$ A. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, en particular $g'(0) = 1$ ya que $f'(0) = 0$.

Como $g'(0) \neq 0 \Longrightarrow g$ es inyectiva en un entorno de 0,

Veamos también que $f(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$. Si $\exists \; w_0$ tal que $f(w_0) = 0$ ($w_0 \neq 0$ ya que $f(0) = 2$), haciendo $w = w_0$ se tendría que:

$$0 = 2f(z + w_0 f(z)) \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

es decir, el conjunto

$$\mathrm{A} := \{t = z + w_0 f(z) : \;\; z \in \mathbb{C}\} \subset Z_f,$$

donde $Z_f$ es el conjunto de los ceros de $f$.

Sea $g(z) = z + w_0 f(z)$, entonces $g(z)$ es analítica y $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{A}$. Ahora bien, $g'(z) = 1 + w_0 f'(z)$, en particular $g'(0) = 1$ ya que $f'(0) = 0$.

Como $g'(0) \neq 0 \Longrightarrow g$ es inyectiva en un entorno de 0, sea $B(0, r)$ ese entorno abierto.

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$).

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, como $f(z) \equiv 0$ no es una solución válida,

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, como $f(z) \equiv 0$ no es una solución válida, $f(z)$ tampoco toma el valor $f(z) = 0$.

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, como $f(z) \equiv 0$ no es una solución válida, $f(z)$ tampoco toma el valor $f(z) = 0$.

Aplicando el teorema de Picard,

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, como $f(z) \equiv 0$ no es una solución válida, $f(z)$ tampoco toma el valor $f(z) = 0$.

Aplicando el teorema de Picard, $f(z)$ es constante,

Entonces $g(B(0,r)) = V(g(0)) = V(2w_0)$, siendo $V(2w_0)$ un entorno abierto de $2w_0$, por el teorema de la aplicación abierta (restringido a $B(0,r)$). Luego,

$$V(2w_0) \subset \mathrm{A} \subset Z_f.$$

Por el principio de identidad, como $V(2w_0)$ es un conjunto con un punto límite, se tiene que:

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, como $f(z) \equiv 0$ no es una solución válida, $f(z)$ tampoco toma el valor $f(z) = 0$.

Aplicando el teorema de Picard, $f(z)$ es constante, $f(z) = k$, sustituyendo en la ecuación original $\Longrightarrow$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor 0 $\Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor 0 $\Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

y necesariamente $f(0) = 0$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor 0 $\Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

y necesariamente $f(0) = 0$.
Y si sustituimos $w$ por $z$, se obtiene que:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor 0 $\Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

y necesariamente $f(0) = 0$.

Y si sustituimos $w$ por $z$, se obtiene que:

$$4f(z)^2 = [f(2z) - 2f(z)]^2 \Rightarrow f(2z)^2 - 4f(z)f(2z) = 0$$

$$\Rightarrow f(2z)[f(2z) - 4f(z)] = 0,$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor $0 \Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

y necesariamente $f(0) = 0$.

Y si sustituimos $w$ por $z$, se obtiene que:

$$4f(z)^2 = [f(2z) - 2f(z)]^2 \Rightarrow f(2z)^2 - 4f(z)f(2z) = 0$$

$$\Rightarrow f(2z)[f(2z) - 4f(z)] = 0,$$

descartando la solución $f(z) \equiv 0$, se tiene que:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$4f(z)f(w) = [f(z+w) - f(z) - f(w)]^2 \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

La única solución constante es $f(z) \equiv 0$.

Por otra parte, si a $w$ le damos el valor 0 $\Longrightarrow$

$$4f(z)f(0) = [f(0)]^2,$$

y necesariamente $f(0) = 0$.

Y si sustituimos $w$ por $z$, se obtiene que:

$$4f(z)^2 = [f(2z) - 2f(z)]^2 \Rightarrow f(2z)^2 - 4f(z)f(2z) = 0$$
$$\Rightarrow f(2z)[f(2z) - 4f(z)] = 0,$$

descartando la solución $f(z) \equiv 0$, se tiene que:

$$f(2z) = 4f(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$.

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\ldots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\ldots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite ya que por (6)
$[f(2z) = 4f(z)] \Longrightarrow$

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\ldots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite ya que por (6) $[f(2z) = 4f(z)] \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} 0 = f(z_0) = 4f\left(\frac{z_0}{2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 0, \\ 0 = f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 = f\left(\frac{z_0}{2^{n-1}}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z=0$. Si $\exists\, z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0)=0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\ldots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite ya que por (6) $[f(2z)=4f(z)]\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl}
0 = f(z_0) = 4f\left(\frac{z_0}{2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 0, \\
0 = f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
0 = f\left(\frac{z_0}{2^{n-1}}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

**Observación (Consecuencia del Principio de Identidad)**

*Sea $f$ analítica en un abierto conexo $U$. Supongamos que existe una sucesión de ceros $z_n \to z_0$ (en $U$) con $z_n \neq z_0$. Entonces $f \equiv 0$ en $U$.*

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\ldots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite ya que por (6)
$[f(2z) = 4f(z)] \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} 0 = f(z_0) = 4f\left(\frac{z_0}{2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 0, \\ 0 = f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 = f\left(\frac{z_0}{2^{n-1}}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Por tanto, llegamos a que $f \equiv 0$ obteniendo una contradicción con que $f$ no es constante,

Veamos que el único cero de $f(z)$ es $z = 0$. Si $\exists\ z_0 \neq 0$ tal que $f(z_0) = 0$

$$\Longrightarrow z_n := \left(\frac{z_0}{2^n}\right)_{n=0,1,2,\dots}$$

sería una sucesión de ceros con un punto límite ya que por (6)
$[f(2z) = 4f(z)] \Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl}
0 = f(z_0) = 4f\left(\frac{z_0}{2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 0, \\
0 = f\left(\frac{z_0}{2}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^2}\right) = 0, \\
\dots & \dots & \dots \\
0 = f\left(\frac{z_0}{2^{n-1}}\right) = 4f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) & \Rightarrow & f\left(\frac{z_0}{2^n}\right) = 0, \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Por tanto, llegamos a que $f \equiv 0$ obteniendo una contradicción con que $f$ no es constante, en consecuencia el único cero de $f$ es $z = 0$.

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \;/\; 1 < |z| < 2\}.$$

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}.$$

Sea $m_0 = \min_{z \in \overline{U}} |f(z)|$,

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}.$$

Sea $m_0 = \min_{z \in \overline{U}} |f(z)|$, por lo de antes sabemos que $m_0 > 0$.

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}.$$

Sea $m_0 = \text{mín}_{z\in\overline{U}} |f(z)|$, por lo de antes sabemos que $m_0 > 0$.

## Teorema (Principio del Mínimo)

*Sea $f(z)$ analítica en un abierto conexo $U$, no identicamente constante, y que no se anula en ningún punto. Entonces:*

*a) Si $z_0 \in U$ y $D(z_0, r) \subset U$, existe $z_1 \in D(z_0, r)$ tal que $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

*b) Si $\lambda = \inf\limits_{z\in U} |f(z)|$, entonces $\lambda$ no se alcanza en $U$, es decir*

$$|f(z)| > \lambda \ \forall z \in U.$$

*c) Si $U$ está acotado y $\partial U$ es su frontera, sea $m = \liminf\limits_{z\in\partial U} |f(z)|$, entonces $|f(z)| > m \ \forall z \in U$.*

*d) Si $U$ está acotado y $f$ es continua en $\overline{U}$, si $m_0 = \min\limits_{z\in\partial U} |f(z)|$, entonces $|f(z)| > m_0 \ \forall z \in U$.*

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \;/\; 1 < |z| < 2\}.$$

Sea $m_0 = \text{mín}_{z \in \overline{z}}$ *z.23Td(j)TJF11.Tf3.3Td,2*

Sea $U$ el siguiente conjunto abierto conexo:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| < 2\}.$$

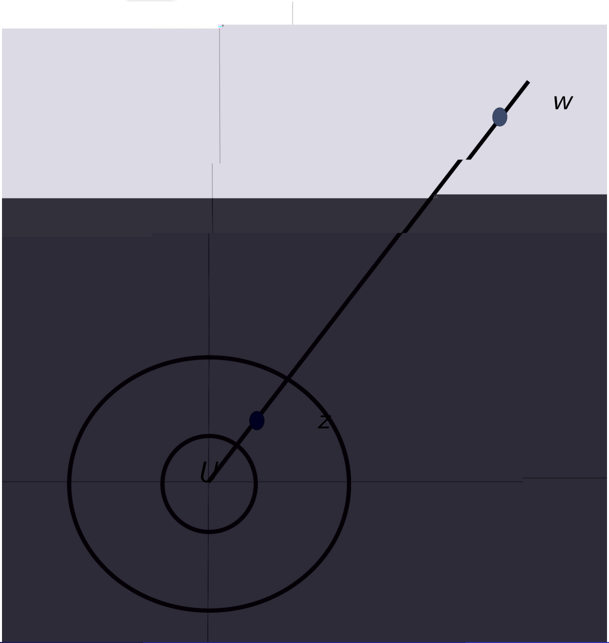
Sea $m_0 = \text{mín}_{z \in \overline{U}} |f(z)|$, por lo de antes sabemos que $m_0 > 0$.

Aplicando el principio del mínimo:

$$|f(z)| > m_0 \ \forall z \in U.$$

Si $|w| \to \infty$ existe $n \in \mathbb{N}$ (para cada $w$) tal que $w = 2^n z$ con $1 \leq z < 2$.

Si $|w| \to \infty$ existe $n \in \mathbb{N}$ (para cada $w$) tal que $w = 2^n z$ con $1 \leq z < 2$.



Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2 z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^n z),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Aplicando (6) [$f(2z) = 4f(z)$] queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Haciendo $w = -z$ en la ecuación original, queda que $f(z) = f(-z)$,

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Haciendo $w = -z$ en la ecuación original, queda que $f(z) = f(-z)$, entonces $f$ es un polinomio par:

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4} f(2z) = \frac{1}{4^2} f(2^2 z) = \cdots = \frac{1}{4^n} f(2^n z),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n |f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w| \to \infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Haciendo $w = -z$ en la ecuación original, queda que $f(z) = f(-z)$, entonces $f$ es un polinomio par:

$$f(z) = c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots + c_{2p} \, z^{2p},$$

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^nz),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Haciendo $w = -z$ en la ecuación original, queda que $f(z) = f(-z)$, entonces $f$ es un polinomio par:

$$f(z) = c_2z^2 + c_4z^4 + \cdots + c_{2p}\, z^{2p},$$

y trivialmente, el único polinomio par que satisface (6) es:

Aplicando (6) $[f(2z) = 4f(z)]$ queda:

$$f(z) = \frac{1}{4}f(2z) = \frac{1}{4^2}f(2^2 z) = \cdots = \frac{1}{4^n}f(2^n z),$$

así que,

$$|f(w)| = 4^n|f(z)| \geq 4^n m_0,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{|w|\to\infty} f(w) = \infty.$$

Por tanto, aplicando el teorema de Cauchy, $f$ es un polinomio.

Haciendo $w = -z$ en la ecuación original, queda que $f(z) = f(-z)$, entonces $f$ es un polinomio par:

$$f(z) = c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots + c_{2p}\, z^{2p},$$

y trivialmente, el único polinomio par que satisface (6) es:

$$\boxed{f(z) = az^2 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \text{ y } a \in \mathbb{C},}$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$. Además si $f$ es constante entonces $f \equiv -1$.

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$. Además si $f$ es constante entonces $f \equiv -1$.

Supongamos $f \neq$ cte,

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z)+z] = (1+z)f(z)+z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$. Además si $f$ es constante entonces $f \equiv -1$.

Supongamos $f \neq$ cte, entonces de (7) se deduce que $f$ coincide con la identidad en:

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$. Además si $f$ es constante entonces $f \equiv -1$.

Supongamos $f \neq$ cte, entonces de (7) se deduce que $f$ coincide con la identidad en:

$$A := \{u = (1+z)f(z) + z : z \in \mathbb{C}\}.$$

## Ecuación

*Determinar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(z + f(w) + zf(w)) = w + f(z) + wf(z) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Tomando $w = z$:

$$f[(1+z)f(z) + z] = (1+z)f(z) + z, \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ para $z = -1$ se tiene que $f(-1) = -1$. Además si $f$ es constante entonces $f \equiv -1$.

Supongamos $f \neq$ cte, entonces de (7) se deduce que $f$ coincide con la identidad en:

$$A := \{u = (1+z)f(z) + z : z \in \mathbb{C}\}.$$

Si $A$ tuviese algún punto límite $\Longrightarrow$ $f$ sería la identidad (Principio de identidad).

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \ \ z \in \mathbb{C}$$

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z)+z,\ \ z\in\mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$,

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$,

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists \; z_0 \; / \; g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \; D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$,

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists\ z_0 \ / \ g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists\ D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$, y por el teorema de la aplicación abierta, $g(D(z_0, r)) = U$, siendo $U$ un abierto de $\mathbb{C}$.

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z,\ \ z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists\ z_0\ /\ g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists\ D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$, y por el teorema de la aplicación abierta, $g(D(z_0, r)) = U$, siendo $U$ un abierto de $\mathbb{C}$.

Como $g(\mathbb{C}) = A$,

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \ z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists \ z_0 \ / \ g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \ D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$, y por el teorema de la aplicación abierta, $g(D(z_0, r)) = U$, siendo $U$ un abierto de $\mathbb{C}$.

Como $g(\mathbb{C}) = A$, y puesto que $g(D(z_0, r)) = U \subset g(\mathbb{C})$,

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists\ z_0 \ / \ g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists\ D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$, y por el teorema de la aplicación abierta, $g(D(z_0, r)) = U$, siendo $U$ un abierto de $\mathbb{C}$.

Como $g(\mathbb{C}) = A$, y puesto que $g(D(z_0, r)) = U \subset g(\mathbb{C})$, $\Longrightarrow A$ contiene un abierto $U$, y es pues un conjunto con punto límite

Para ello definimos la función:

$$g(z) := (1+z)f(z) + z, \; z \in \mathbb{C}$$

$\Longrightarrow g(z) \neq$ cte ya que de serlo se tendría que $g(-1) = -1$, es decir, $g(z) \equiv -1$, y en consecuencia $f(z) \equiv -1$, (absurdo ya que $f \neq$ cte).

Por tanto, $\exists \; z_0 \; / \; g'(z_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists \; D(z_0, r)$ tal que $g$ es inyectiva en $D(z_0, r)$, y por el teorema de la aplicación abierta, $g(D(z_0, r)) = U$, siendo $U$ un abierto de $\mathbb{C}$.

Como $g(\mathbb{C}) = A$, y puesto que $g(D(z_0, r)) = U \subset g(\mathbb{C})$, $\Longrightarrow A$ contiene un abierto $U$, y es pues un conjunto con punto límite$\Longrightarrow f \equiv \mathrm{Id}$.

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

por lo tanto $f(0)$ puede tomar tres posibles valores:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt)+f(z)+f(w)+f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

por lo tanto $f(0)$ puede tomar tres posibles valores:

$$f(0) = 0,\ \ f(0) = +2,\ \ f(0) = -2.$$

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

por lo tanto $f(0)$ puede tomar tres posibles valores:

$$f(0) = 0, \;\; f(0) = +2, \;\; f(0) = -2.$$

Si $f(0) = 0$,

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

f

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt) + f(z) + f(w) + f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z, w, t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

por lo tanto $f(0)$ puede tomar tres posibles valores:

$$f(0) = 0,\ \ f(0) = +2,\ \ f(0) = -2.$$

Si $f(0) = 0$, cambiando $z = 0$ en la ecuación planteada $\Longrightarrow$

$$f(w) + f(t) = 0,$$

haciendo $w = t$, se tiene que:

## Ecuación

*Hallar todas las funciones analíticas* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tales que:*

$$f(zwt)+f(z)+f(w)+f(t) = f\left(\sqrt{zw}\right) f\left(\sqrt{wt}\right) f\left(\sqrt{zt}\right) \quad \forall\, z,w,t \in \mathbb{C}.$$

Prueba:

Sustituyendo $z = w = t = 0$ en la ecuación:

$$4f(0) = f(0)^3 \Rightarrow f(0)(4 - f(0)^2) = 0,$$

por lo tanto $f(0)$ puede tomar tres posibles valores:

$$f(0) = 0,\ \ f(0) = +2,\ \ f(0) = -2.$$

Si $f(0) = 0$, cambiando $z = 0$ en la ecuación planteada $\Longrightarrow$

$$f(w) + f(t) = 0,$$

haciendo $w = t$, se tiene que:

$$f(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = 2$,

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \ \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$,

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$, haciendo $z = 0$:

$$-4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \;\; \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$, haciendo $z = 0$:

$$-4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

por lo tanto, sustituyendo $w = t$:

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \ \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$, haciendo $z = 0$:

$$-4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

por lo tanto, sustituyendo $w = t$:

$$f(t) = -2 \ \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$, haciendo $z = 0$:

$$-4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

por lo tanto, sustituyendo $w = t$:

$$f(t) = -2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

$\Longrightarrow$ Las soluciones definidas en $z = 0$ que se obtienen son:

Si $f(0) = 2$, haciendo $z = 0$ en la ecuación $\Longrightarrow$

$$4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

y tomando $w = t$:

$$f(t) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Si $f(0) = -2$, haciendo $z = 0$:

$$-4 + f(w) + f(t) = 4f\left(\sqrt{wt}\right),$$

por lo tanto, sustituyendo $w = t$:

$$f(t) = -2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

$\Longrightarrow$ Las soluciones definidas en $z = 0$ que se obtienen son:

$$\boxed{f(z) = 0, \quad f(z) = 2 \ \text{ y } f(z) = -2 \quad \forall z \in \mathbb{C}.}$$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$.

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada)

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

$$\begin{cases} z &= u \\ w &= u \\ t &= \dfrac{1}{u}, \end{cases}$$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & u \\ w & = & u \\ & & \end{array} \right.$$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z=0$:

Tomando $z=w=t=1$ en la ecuación original resulta $4f(1)=f(1)^3 \Rightarrow f(1)=0$ o $f(1)=2$. Si $f(1)=0$ tomando $w=t=1$ en la ecuación se tiene que $f(z)\equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1)=2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & u \\ w & = & u \\ t & = & \dfrac{1}{u}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & u^2 \\ w & = & 1 \\ t & = & 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & \dfrac{u}{v} \\ w & = & \dfrac{v}{u} \\ t & = & uv, \end{array}\right.$$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \Rightarrow f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & u \\ w & = & u \\ t & = & \dfrac{1}{u}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & u^2 \\ w & = & 1 \\ t & = & 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & \dfrac{u}{v} \\ w & = & \dfrac{v}{u} \\ t & = & uv, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & u^2 \\ w & = & \dfrac{1}{u^2} \\ t & = & v^2, \end{array}\right.$$

Veamos más soluciones analíticas no definidas en $z = 0$:

Tomando $z = w = t = 1$ en la ecuación original resulta $4f(1) = f(1)^3 \;\Rightarrow$ $f(1) = 0$ o $f(1) = 2$. Si $f(1) = 0$ tomando $w = t = 1$ en la ecuación se tiene que $f(z) \equiv 0$ (solución ya analizada) $\Longrightarrow f(1) = 2$.

Realizaremos algunos cambios paramétricos:

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & u \\ w & = & u \\ t & = & \dfrac{1}{u}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & u^2 \\ w & = & 1 \\ t & = & 1, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & \dfrac{u}{v} \\ w & = & \dfrac{v}{u} \\ t & = & uv, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} z & = & u^2 \\ w & = & \dfrac{1}{u^2} \\ t & = & v^2, \end{array}\right.$$

y simplificando nos queda respectivamente:

$$f(u) = f\left(\frac{1}{u}\right).$$

$$f(u^2) = f(u)^2 - 2.$$

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)f(v). \tag{8}$$

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)^2 + f(v)^2 - 4. \tag{9}$$

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)f(v). \tag{8}$$

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)^2 + f(v)^2 - 4. \tag{9}$$

Realizaremos ahora el siguiente cambio para la función $f$:

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)f(v). \tag{8}$$

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)^2 + f(v)^2 - 4. \tag{9}$$

Realizaremos ahora el siguiente cambio para la función $f$:

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{g(z)},$$

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)f(v). \tag{8}$$

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)^2 + f(v)^2 - 4. \tag{9}$$

Realizaremos ahora el siguiente cambio para la función $f$:

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{g(z)},$$

Si este cambio fuese válido (si $g(z)$ no fuese cero para ningún punto) $\Longrightarrow$ $g$ satisface la ecuación potencial de Cauchy: $g(uv) = g(u)g(v)$.

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)f(v). \tag{8}$$

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u)^2 + f(v)^2 - 4. \tag{9}$$

Realizaremos ahora el siguiente cambio para la función $f$:

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{g(z)},$$

Si este cambio fuese válido (si $g(z)$ no fuese cero para ningún punto) $\Longrightarrow$ $g$ satisface la ecuación potencial de Cauchy: $g(uv) = g(u)g(v)$.

En efecto, por una parte:

$$f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) \overset{(8)}{=} f(u)f(v) = \left[g(u) + \frac{1}{g(u)}\right]\left[g(v) + \frac{1}{g(v)}\right] =$$

$$= g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)} + \frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)},$$

$$\Rightarrow \ f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right) + \left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (10)$$

$$\Rightarrow \; f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right) + \left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (10)$$

Por otra parte,

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) \overset{(9)}{=} f(u)^2 + f(v)^2 - 4 = \left[g(u) + \frac{1}{g(u)}\right]^2 + \left[g(v) + \frac{1}{g(v)}\right]^2 - 4 =$$

$$= \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right),$$

$$\Rightarrow \; f(uv) + f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right) + \left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (10)$$

Por otra parte,

$$f(uv)f\left(\frac{v}{u}\right) \stackrel{(9)}{=} f(u)^2 + f(v)^2 - 4 = \left[g(u) + \frac{1}{g(u)}\right]^2 + \left[g(v) + \frac{1}{g(v)}\right]^2 - 4 =$$

$$= \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right),$$

esta última igualdad es fruto de la identidad:

$$\left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4.$$

Así que:

$$\Rightarrow \; f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \qquad (11)$$

Así que:

$$\Rightarrow \; f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (11)$$

Por (10) y por (11) llegamos a que:

Así que:

$$\Rightarrow \; f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \qquad (11)$$

Por (10) y por (11) llegamos a que:

$$f(uv) = g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}, \quad \text{o bien,} \quad f(uv) = \frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}.$$

Así que:

$$\Rightarrow \; f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v)+\frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)}+\frac{g(v)}{g(u)}\right). \qquad (11)$$

Por (10) y por (11) llegamos a que:

$$f(uv) = g(u)g(v)+\frac{1}{g(u)g(v)}, \quad \text{o bien,} \quad f(uv)=\frac{g(u)}{g(v)}+\frac{g(v)}{g(u)}.$$

La segunda expresión para $f(uv)$ no puede darse pues identificando $u$ y $v$ llegaríamos a $f(u^2)=2$ (solución constante ya analizada).

Así que:

$$\Rightarrow \; f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right) = \left(g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (11)$$

Por (10) y por (11) llegamos a que:

$$f(uv) = g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}, \quad \text{o bien,} \quad f(uv) = \frac{g(u)}{g(v)} + \frac{g(v)}{g(u)}.$$

La segunda expresión para $f(uv)$ no puede darse pues identificando $u$ y $v$ llegaríamos a $f(u^2) = 2$ (solución constante ya analizada). Así que:

$$f(uv) = g(u)g(v) + \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Así que:

$$\Rightarrow \ f(uv)\cdot f\left(\frac{v}{u}\right)=\left(g(u)g(v)+\frac{1}{g(u)g(v)}\right)\cdot\left(\frac{g(u)}{g(v)}+\frac{g(v)}{g(u)}\right). \quad (11)$$

Por (10) y por (11) llegamos a que:

$$f(uv)=g(u)g(v)+\frac{1}{g(u)g(v)}, \quad \text{o bien,} \quad f(uv)=\frac{g(u)}{g(v)}+\frac{g(v)}{g(u)}.$$

La segunda expresión para $f(uv)$ no puede darse pues identificando $u$ y $v$ llegaríamos a $f(u^2)=2$ (solución constante ya analizada). Así que:

$$f(uv)=g(u)g(v)+\frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como por definición resulta que:

$$f(uv)=g(uv)+\frac{1}{g(uv)},$$

entonces necesariamente se tiene que:

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1$

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta pues tomando $v = 1$ resultaría $g(u) = \dfrac{1}{g(u)}$, y por lo tanto $g(u)^2 = 1$ (solución constante).

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta pues tomando $v = 1$ resultaría $g(u) = \frac{1}{g(u)}$, y por lo tanto $g(u)^2 = 1$ (solución constante). Por lo tanto llegamos a la ecuación potencial de Cauchy:

$$g(uv) = g(u)g(v),$$

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta pues tomando $v = 1$ resultaría $g(u) = \frac{1}{g(u)}$, y por lo tanto $g(u)^2 = 1$ (solución constante). Por lo tanto llegamos a la ecuación potencial de Cauchy:

$$g(uv) = g(u)g(v),$$

cuyas soluciones analíticas son de la forma

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta pues tomando $v = 1$ resultaría $g(u) = \dfrac{1}{g(u)}$, y por lo tanto $g(u)^2 = 1$ (solución constante). Por lo tanto llegamos a la ecuación potencial de Cauchy:

$$g(uv) = g(u)g(v),$$

cuyas soluciones analíticas son de la forma $g(u) = u^{\alpha}$,

entonces necesariamente se tiene que:

$$g(uv) = g(u)g(v), \quad \text{o bien, } g(uv) = \frac{1}{g(u)g(v)}.$$

Y como resulta que $f(1) = 2$, entonces $g(1) = 1 \implies$ la segunda expresión para $g(uv)$ no es cierta pues tomando $v = 1$ resultaría $g(u) = \frac{1}{g(u)}$, y por lo tanto $g(u)^2 = 1$ (solución constante). Por lo tanto llegamos a la ecuación potencial de Cauchy:

$$g(uv) = g(u)g(v),$$

cuyas soluciones analíticas son de la forma $g(u) = u^\alpha$, y por lo tanto

$$f(z) = z^\alpha + \frac{1}{z^\alpha}, \; \alpha \in \mathbb{C},$$

son las soluciones analíticas no definidas en el origen para la ecuación planteada si el cambio anteriormente planteado fuese lícito.

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Calcularemos las soluciones analíticas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Calcularemos las soluciones analíticas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y tomaremos la determinación de la rama principal del logaritmo, por lo tanto
$\text{Arg } z \in (-\pi, \pi)$.

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Calcularemos las soluciones analíticas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y tomaremos la determinación de la rama principal del logaritmo, por lo tanto Arg $z \in (-\pi, \pi)$. Si Arg $z = \theta$, en cuanto a $\sqrt{z}$ eligiremos como su argumento la mitad: $\theta/2$.

Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Calcularemos las soluciones analíticas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y tomaremos la determinación de la rama principal del logaritmo, por lo tanto $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi)$. Si $\text{Arg } z = \theta$, en cuanto a $\sqrt{z}$ eligiremos como su argumento la mitad: $\theta/2$.

Por otra parte, también sabemos que:

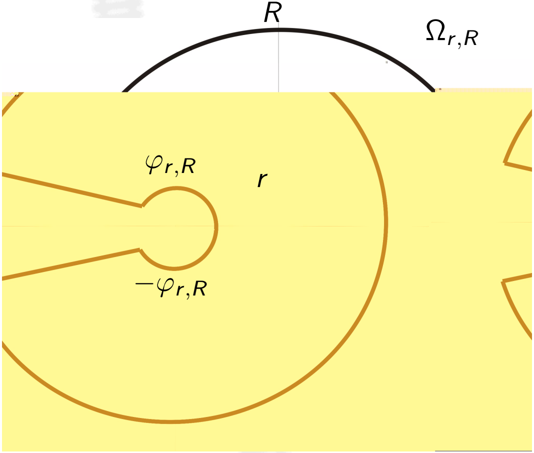
Alternativa: (Utilización de la variable compleja)
Solventaremos el problema que nos ha surgido con anterioridad.

Calcularemos las soluciones analíticas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y tomaremos la determinación de la rama principal del logaritmo, por lo tanto $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$. Si $\operatorname{Arg} z = \theta$, en cuanto a $\sqrt{z}$ eligiremos como su argumento la mitad: $\theta/2$.

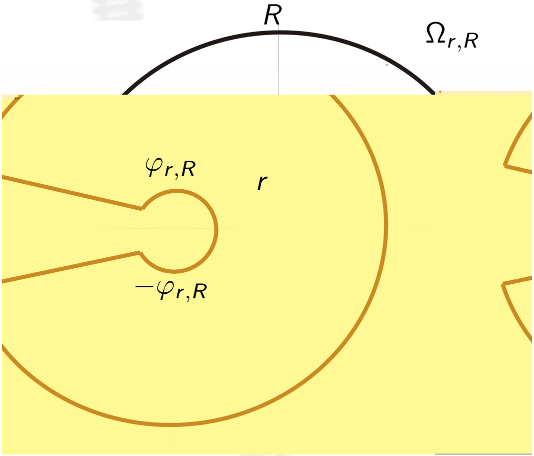
Por otra parte, también sabemos que:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \ \forall z \in \Omega. \tag{12}$$

Consideremos la región $\Omega_{r,R}$, tomando $r < \frac{1}{R}$ y $R > 1$ (ver Figura).



Consideremos la región $\Omega_{r,R}$, tomando $r < \frac{1}{R}$ y $R > 1$ (ver Figura).




Observamos que cuando $r \to 0$ y $R \to \infty$ obtenemos la región $\Omega$.

## Teorema (Principio del Máximo)

*Sea $f(z)$ analítica en un abierto conexo $U$, no identicamente constante. Entonces:*

*a) Si $D(z_0, r) \subset U$, existe $z_1 \in D(z_0, r)$ tal que $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.*

*b) Si $\lambda = \sup_{z \in U} |f(z)|$, entonces $\lambda$ no se alcanza en $U$, es decir*

$$|f(z)| < \lambda \; \forall z \in U.$$

*c) Si $U$ está acotado y $\partial U$ es su frontera, sea $M = \limsup_{z \in \partial U} |f(z)|$, entonces $|f(z)| < M \; \forall z \in U$.*

*d) Si $U$ está acotado y $f$ es continua en $\overline{U}$, si $M_0 = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$, entonces $|f(z)| < M_0 \; \forall z \in U$.*

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera.

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Sea $z_0 \in \text{Front}\{\Omega_{r,R}\}$ tal que:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}_{r,R}} |f(z)|,$$

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Sea $z_0 \in \text{Front}\{\Omega_{r,R}\}$ tal que:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}_{r,R}} |f(z)|,$$

si $z_0 \notin \varphi_{r,R} \cup (-\varphi_{r,R})$, entonces $\frac{1}{z_0} \in \Omega_{r,R}$ (conjunto abierto):

$$\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z_0|} = \frac{1}{R} > r, \quad \text{y además,} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -\text{Arg}(z_0),$$

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Sea $z_0 \in \text{Front}\{\Omega_{r,R}\}$ tal que:

$$|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}_{r,R}} |f(z)|,$$

si $z_0 \notin \varphi_{r,R} \cup (-\varphi_{r,R})$, entonces $\frac{1}{z_0} \in \Omega_{r,R}$ (conjunto abierto):

$$\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z_0|} = \frac{1}{R} > r, \quad \text{y además,} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -\text{Arg}(z_0),$$

y como $f(z_0) = f\left(\frac{1}{z_0}\right)$, llegamos a un absurdo con el principio del máximo,

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Sea $z_0 \in \text{Front}\{\Omega_{r,R}\}$ tal que:

$$|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}_{r,R}} |f(z)|,$$

si $z_0 \notin \varphi_{r,R} \cup (-\varphi_{r,R})$, entonces $\frac{1}{z_0} \in \Omega_{r,R}$ (conjunto abierto):

$$\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z_0|} = \frac{1}{R} > r, \quad \text{y además,} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -\text{Arg}(z_0),$$

y como $f(z_0) = f\left(\frac{1}{z_0}\right)$, llegamos a un absurdo con el principio del máximo, pues hemos encontrado un punto que no es de la frontera de $\Omega_{r,R}$ que también alcanza el máximo.

Si aplicamos el principio del Máximo a cualquier solución de (12) $\Longrightarrow$ el máximo en $\Omega_{r,R}$ siempre se alcanza en su frontera. Concretamente probaremos que se alcanza exclusivamente en los rayos $\varphi_{r,R}$ o $-\varphi_{r,R}$:

Sea $z_0 \in \text{Front}\{\Omega_{r,R}\}$ tal que:

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}_{r,R}} |f(z)|,$$

si $z_0 \notin \varphi_{r,R} \cup (-\varphi_{r,R})$, entonces $\frac{1}{z_0} \in \Omega_{r,R}$ (conjunto abierto):

$$\left|\frac{1}{z_0}\right| = \frac{1}{|z_0|} = \frac{1}{R} > r, \quad \text{y además,} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z_0}\right) = -\text{Arg}(z_0),$$

y como $f(z_0) = f\left(\frac{1}{z_0}\right)$, llegamos a un absurdo con el principio del máximo, pues hemos encontrado un punto que no es de la frontera de $\Omega_{r,R}$ que también alcanza el máximo.

Y este argumento es válido $\forall r \to 0$ y $\forall R \to \infty$.

## Definición (Aplicación conforme)

*Consideraremos que una función* $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *es una* *aplicación conforme* *de* $\Omega_1$ *en* $\Omega_2$ *si es holomorfa en* $\Omega_1$ *y además es biyectiva.*

A continuación consideremos la siguiente aplicación conforme entre $\Omega$ y la banda $B_\pi = \{u \in \mathbb{C} \ / \ -\pi < \text{Im } u < \pi\}$:

A continuación consideremos la siguiente aplicación conforme entre $\Omega$ y la banda $B_\pi = \{u \in \mathbb{C} \ / \ -\pi < \text{Im } u < \pi\}$:

$$\begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & B_\pi \\ z & \mapsto & u := \log z = \ln|z| + i\text{Arg } z. \end{array}$$

A continuación consideremos la siguiente aplicación conforme entre $\Omega$ y la banda $B_\pi = \{u \in \mathbb{C} \ / \ -\pi < \text{Im } u < \pi\}$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & B_\pi \\ z & \mapsto & u := \log z = \ln|z| + i\text{Arg } z. \end{array}$$

Con esta aplicación, (12) se transforma en:

$$f(e^u) = f(e^{-u}). \tag{13}$$

A continuación consideremos la siguiente aplicación conforme entre $\Omega$ y la banda $B_\pi = \{u \in \mathbb{C} \;/\; -\pi < \text{Im } u < \pi\}$:

$$\begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & B_\pi \\ z & \mapsto & u := \log z = \ln |z| + i\text{Arg } z. \end{array}$$

Con esta aplicación, (12) se transforma en:

$$f(e^u) = f(e^{-u}). \tag{13}$$

Definiremos en $B_\pi$ la función:

$$F(u) := f(e^u),$$

A continuación consideremos la siguiente aplicación conforme entre $\Omega$ y la banda $B_\pi = \{u \in \mathbb{C} \ / \ -\pi < \text{Im } u < \pi\}$:

$$\begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & B_\pi \\ z & \mapsto & u := \log z = \ln|z| + i\text{Arg } z. \end{array}$$

Con esta aplicación, (12) se transforma en:

$$f(e^u) = f(e^{-u}). \tag{13}$$

Definiremos en $B_\pi$ la función:

$$F(u) := f(e^u),$$

entonces la ecuación (13) se transforma en:

$$F(u) = F(-u).$$

$\Longrightarrow$ La solución de (12) está contenida entre las funciones analíticas pares de la banda $B_\pi$ que tienden a $\infty$ cuando Im $u \rightarrow \pm\pi$ y Re $u \rightarrow \pm\infty$, que se corresponden a $\varphi_{r,R}$ y $-\varphi_{r,R}$ respectivamente cuando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

$\Longrightarrow$ La solución de (12) está contenida entre las funciones analíticas pares de la banda $B_\pi$ que tienden a $\infty$ cuando Im $u \rightarrow \pm\pi$ y Re $u \rightarrow \pm\infty$, que se corresponden a $\varphi_{r,R}$ y $-\varphi_{r,R}$ respectivamente cuando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

Entre ellas, podemos encontrar las funciones del tipo:

$$f(z) = z^\alpha + \frac{1}{z^\alpha},$$

que habíamos obtenido anteriormente.

# Índice

# Índice

# Densificación

## Definición

*Sea* $(E, T)$ *un espacio topológico, toda aplicación continua* $\gamma : [a, b] \longrightarrow E$ *es, por definición, una curva. Si* $\gamma$ *es inyectiva diremos que la curva es de Jordan y si tiene longitud finita diremos que es rectificable.*

# Densificación

## Definición

*Sea $(E, T)$ un espacio topológico, toda aplicación continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow E$ es, por definición, una curva. Si $\gamma$ es inyectiva diremos que la curva es de Jordan y si tiene longitud finita diremos que es rectificable.*

## Definición

*Sea $K$ un compacto en un espacio métrico $(E, d)$ y $\alpha \geq 0$, una curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$ diremos que es $\alpha$-densa en $K$ (o que densifica k con densidad $\alpha$) si:*

- *1.* $\gamma([0, 1]) \subset K$.
- *2. Para cada $x \in K$, $d(x, \gamma^*) \leq \alpha$, donde $\gamma^*$ denota la imagen $\gamma([0, 1])$.*

## Definición

*Sea $X$ un subconjunto de un espacio métrico $(E, d)$. Se dice que $X$ es un conjunto densificable si, y solo si, $\forall \alpha > 0$ existe una curva $\alpha$-densa en $X$.*

### Definición

*Sea $X$ un subconjunto de un espacio métrico $(E, d)$. Se dice que $X$ es un* conjunto densificable *si, y solo si, $\forall \alpha > 0$ existe una curva $\alpha$-densa en $X$.*

### Teorema (H. Hahn y S. Mazurkiewicz, 1913)

*Un conjunto es la imagen continua del intervalo unidad si, y solo si, es compacto, conexo y localmente conexo.*

### Definición

*Sea $X$ un subconjunto de un espacio métrico $(E, d)$. Se dice que $X$ es un conjunto densificable si, y solo si, $\forall \alpha > 0$ existe una curva $\alpha$-densa en $X$.*

### Teorema (H. Hahn y S. Mazurkiewicz, 1913)

*Un conjunto es la imagen continua del intervalo unidad si, y solo si, es compacto, conexo y localmente conexo.*

### Definición

*A los conjuntos que son imagen continua del intervalo unidad se les denomina continuos de Peano.*

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0,1]$.

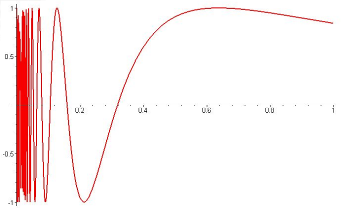



Figura: Curva seno del topólogo: $\left\{\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) : t \in ]0,1]\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0,1]$.

Hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

**Teorema**

*Sea $(X,d)$ un espacio métrico densificable, entonces $X$ es conexo y precompacto.*

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0,1]$.

Hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

**Teorema**

*Sea $(X,d)$ un espacio métrico densificable, entonces $X$ es conexo y precompacto.*

Estas condiciones no son suficientes:

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0,1]$.

Hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

**Teorema**

*Sea $(X,d)$ un espacio métrico densificable, entonces $X$ es conexo y precompacto.*

Estas condiciones no son suficientes:

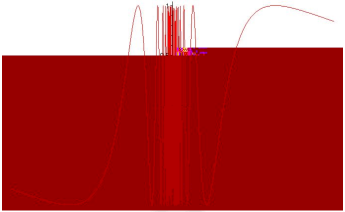


Figura: $\left\{\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) : t \in [-1,1] \setminus \{0\}\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Los continuos de Peano son claramente densificables. En cambio, hay conjuntos densificables que no son imagen continua del intervalo $[0, 1]$.

Hay condiciones que sí que son necesarias para que un conjunto sea densificable:

**Teorema**

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico densificable, entonces $X$ es conexo y precompacto.*

Estas condiciones no son suficientes:

$\Longrightarrow$ Se abordará un caso particular de un problema más general (abierto) de si dado un compacto con interior no vacío cuyo borde sea un lazo existe una ecuación funcional cuyas soluciones lo densifiquen.

# Densificación. Preliminares

Consideremos la ecuación funcional:

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

# Densificación. Preliminares

Consideremos la ecuación funcional:

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbf{C}. \qquad (1)$$

Considerando un homomorfismo continuo no trivial $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ para la estructura multiplicativa de $\mathbf{C}$, entonces $\varphi(z) = z^{\alpha}$,

# Densificación. Preliminares

Consideremos la ecuación funcional:

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Considerando un homomorfismo continuo no trivial $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para la estructura multiplicativa de $\mathbb{C}$, entonces $\varphi(z) = z^\alpha$, y ahora (1) es equivalente a resolver:

$$z^\alpha + 2^\alpha z^\alpha + 3^\alpha z^\alpha + \cdots + n^\alpha z^\alpha = 0 \Longleftrightarrow z^\alpha[1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha] = 0$$
$$\Longleftrightarrow G_n(z) = 0, \text{ siendo } G_n(z) = 1 + 2^z + 3^z + \cdots + n^z. \tag{2}$$

# Densificación. Preliminares

Consideremos la ecuación funcional:

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Considerando un homomorfismo continuo no trivial $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para la estructura multiplicativa de $\mathbb{C}$, entonces $\varphi(z) = z^\alpha$, y ahora (1) es equivalente a resolver:

$$z^\alpha + 2^\alpha z^\alpha + 3^\alpha z^\alpha + \cdots + n^\alpha z^\alpha = 0 \Longleftrightarrow z^\alpha[1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha] = 0$$
$$\Longleftrightarrow G_n(z) = 0, \text{ siendo } G_n(z) = 1 + 2^z + 3^z + \cdots + n^z. \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Las soluciones continuas de (1) son de la forma:

# Densificación. Preliminares

Consideremos la ecuación funcional:

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \cdots + f(nz) = 0, \text{ con } z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Considerando un homomorfismo continuo no trivial $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para la estructura multiplicativa de $\mathbb{C}$, entonces $\varphi(z) = z^\alpha$, y ahora (1) es equivalente a resolver:

$$\begin{gathered} z^\alpha + 2^\alpha z^\alpha + 3^\alpha z^\alpha + \cdots + n^\alpha z^\alpha = 0 \iff z^\alpha[1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha] = 0 \\ \iff G_n(z) = 0, \text{ siendo } G_n(z) = 1 + 2^z + 3^z + \cdots + n^z. \end{gathered} \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Las soluciones continuas de (1) son de la forma:

$$f_{n,j}(z) = z^{\alpha_n^{(j)}}, \text{ con } \alpha_n^{(j)} \text{ satisfaciendo } G_n(z) = 0.$$

Si $F$ es una solución de (1), para $z = x$ se tiene que $f(x) := F(x)$ es una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Si $F$ es una solución de (1), para $z = x$ se tiene que $f(x) := F(x)$ es una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\Rightarrow g(x) = \mathrm{Re}(F(x))$, $h(x) = \mathrm{Im}(F(x))$ serían soluciones reales de (3).

Si $F$ es una solución de (1), para $z = x$ se tiene que $f(x) := F(x)$ es una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\Rightarrow g(x) = \mathrm{Re}(F(x))$, $h(x) = \mathrm{Im}(F(x))$ serían soluciones reales de (3).

Para $z = x \in \mathbb{R}$, una solución de (3) viene dada por $f_{n,j}(x) = x^{\alpha_n^{(j)}}$, siendo $\alpha_n^{(j)}$ una solución de (2). Por lo tanto, si $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)} \Longrightarrow$

$$f_{n,j}(x) = x^{a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}} = x^{a_n^{(j)}} e^{ib_n^{(j)} \log(x)},$$

Si $F$ es una solución de (1), para $z = x$ se tiene que $f(x) := F(x)$ es una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\Rightarrow g(x) = \mathrm{Re}(F(x)),\ h(x) = \mathrm{Im}(F(x))$ serían soluciones reales de (3).

Para $z = x \in \mathbb{R}$, una solución de (3) viene dada por $f_{n,j}(x) = x^{\alpha_n^{(j)}}$, siendo $\alpha_n^{(j)}$ una solución de (2). Por lo tanto, si $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)} \Longrightarrow$

$$f_{n,j}(x) = x^{a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}} = x^{a_n^{(j)}} e^{ib_n^{(j)} \log(x)},$$

y separando la parte real e imaginaria:

Si $F$ es una solución de (1), para $z = x$ se tiene que $f(x) := F(x)$ es una solución de la siguiente ecuación:

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(nx) = 0, \text{ con } x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

$\Rightarrow g(x) = \mathrm{Re}(F(x))$, $h(x) = \mathrm{Im}(F(x))$ serían soluciones reales de (3).

Para $z = x \in \mathbb{R}$, una solución de (3) viene dada por $f_{n,j}(x) = x^{\alpha_n^{(j)}}$, siendo $\alpha_n^{(j)}$ una solución de (2). Por lo tanto, si $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)} \Longrightarrow$

$$f_{n,j}(x) = x^{a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}} = x^{a_n^{(j)}} e^{ib_n^{(j)} \log(x)},$$

y separando la parte real e imaginaria:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x)),$$

$$f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)).$$

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)}$

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA:

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$)

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$) $\Rightarrow$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $b_n^{(j)} \geq 0$.

<u>PROPIEDADES</u> de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$) $\Rightarrow$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $b_n^{(j)} \geq 0$.
2. $G_n(z)$ es una función entera de orden 1, $\forall n \geq 2$.

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$) $\Rightarrow$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $b_n^{(j)} \geq 0$.
2. $G_n(z)$ es una función entera de orden 1, $\forall n \geq 2$.
3. $G_n(z)$ tiene infinitos ceros $\forall n \geq 2$.

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$) $\Rightarrow$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $b_n^{(j)} \geq 0$.
2. $G_n(z)$ es una función entera de orden 1, $\forall n \geq 2$.
3. $G_n(z)$ tiene infinitos ceros $\forall n \geq 2$.
4. Existen dos números reales $r < s$ tales que todos los ceros de $G_n(z)$ están en la banda $\{z \in \mathbb{C} : r \leq \mathrm{Re} z \leq s\}$.

PROPIEDADES de la función $G_n(z)$ [Mora, G., Cherruault, Y., Ziadi, A.]:

1. $G_n(\overline{z}) = \overline{G_n(z)} \Longrightarrow$ CONSECUENCIA: si $\alpha_n^{(j)} := a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ es solución de (2) ($b_n^{(j)} \neq 0$) $\Rightarrow$ podemos tomar sin pérdida de generalidad $b_n^{(j)} \geq 0$.
2. $G_n(z)$ es una función entera de orden 1, $\forall n \geq 2$.
3. $G_n(z)$ tiene infinitos ceros $\forall n \geq 2$.
4. Existen dos números reales $r < s$ tales que todos los ceros de $G_n(z)$ están en la banda $\{z \in \mathbb{C} : r \leq \mathrm{Re} z \leq s\}$.
5. Excepto para $n = 2$, los ceros de $G_n(z)$ no son todos imaginarios puros.

# Índice

- Ordenación de los ceros de $G_n(z)$:

- Ordenación de los ceros de $G_n(z)$:
  dados $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ y $\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + ib_n^{(k)}$, entonces $j < k$ si $b_n^{(j)} < b_n^{(k)}$

- Ordenación de los ceros de $G_n(z)$:
  dados $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ y $\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + ib_n^{(k)}$, entonces $j < k$ si $b_n^{(j)} < b_n^{(k)}$
  $\Longrightarrow \left| b_n^{(j)} \right| \to \infty$ si $j \to \infty$,

- Ordenación de los ceros de $G_n(z)$:
dados $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ y $\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + ib_n^{(k)}$, entonces $j < k$ si $b_n^{(j)} < b_n^{(k)}$
$\Longrightarrow \left|b_n^{(j)}\right| \to \infty$ si $j \to \infty$, ya que $G_n(z)$ es analítica y si estuviesen acotados sus ceros, existiría una subsucesión de ceros convergente, y por el principio de Identidad $\Rightarrow G_n(z) \equiv 0$.

- Ordenación de los ceros de $G_n(z)$:
  dados $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$ y $\alpha_n^{(k)} = a_n^{(k)} + ib_n^{(k)}$, entonces $j < k$ si $b_n^{(j)} < b_n^{(k)}$
  $\Longrightarrow \left| b_n^{(j)} \right| \to \infty$ si $j \to \infty$, ya que $G_n(z)$ es analítica y si estuviesen acotados sus ceros, existiría una subsucesión de ceros convergente, y por el principio de Identidad $\Rightarrow G_n(z) \equiv 0$.
- Denotaremos por $V_n$ al subespacio vectorial formado por las soluciones continuas reales de (3).

## Teorema

*"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en $V_n$,*

## Teorema

*"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en $V_n$, de tal forma que dado $\alpha > 0$ arbitrario,*

## Teorema

*"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en $V_n$, de tal forma que dado $\alpha > 0$ arbitrario, se puede encontrar una solución de (2), $\alpha_n = a_n + ib_n$,*

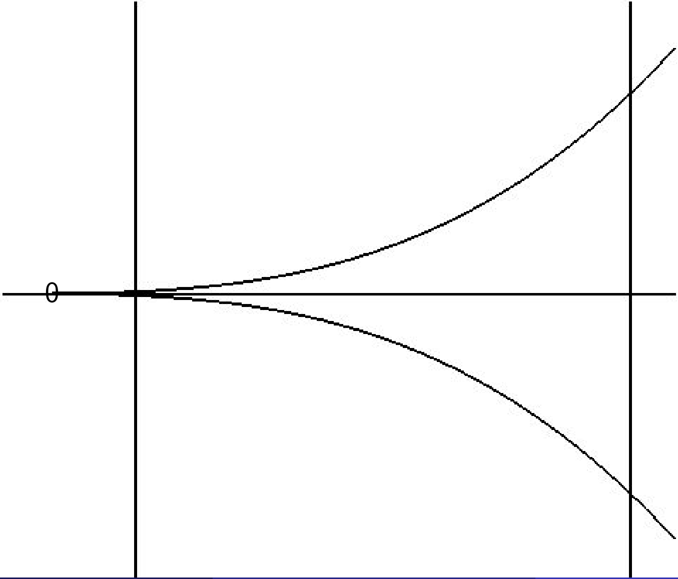
## Teorema

*"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en $V_n$, de tal forma que dado $\alpha > 0$ arbitrario, se puede encontrar una solución de (2), $\alpha_n = a_n + ib_n$, y considerando las soluciones de (3) asociadas a ella, $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n}\cos(b_n \log(x))$ y $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n}\operatorname{sen}(b_n \log(x))$,*

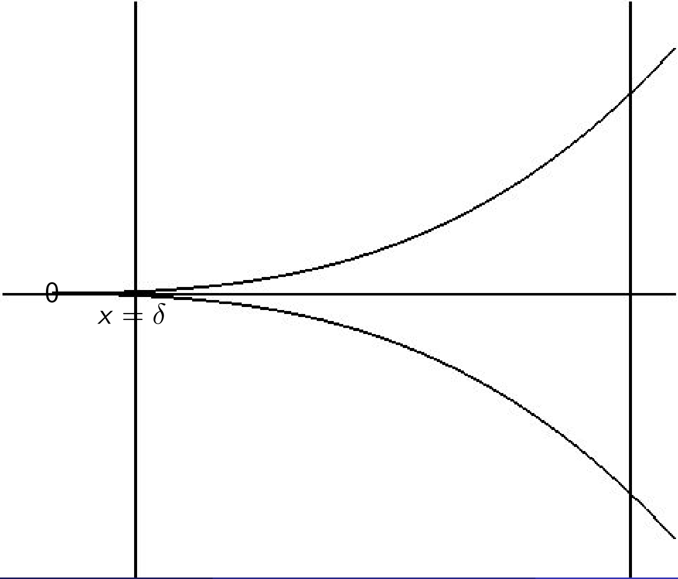
## Teorema

*"$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existe un conjunto infinito de funciones linealmente independientes en $V_n$, de tal forma que dado $\alpha > 0$ arbitrario, se puede encontrar una solución de (2), $\alpha_n = a_n + ib_n$, y considerando las soluciones de (3) asociadas a ella, $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n}\cos(b_n \log(x))$ y $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n}\operatorname{sen}(b_n \log(x))$, éstas tienen densidad $\alpha$ en la región compacta determinada por $y = x^{a_n}$, $y = -x^{a_n}$, y por las rectas $x = \delta$, $x = \Delta$, con $\Delta > \delta > 0$."*

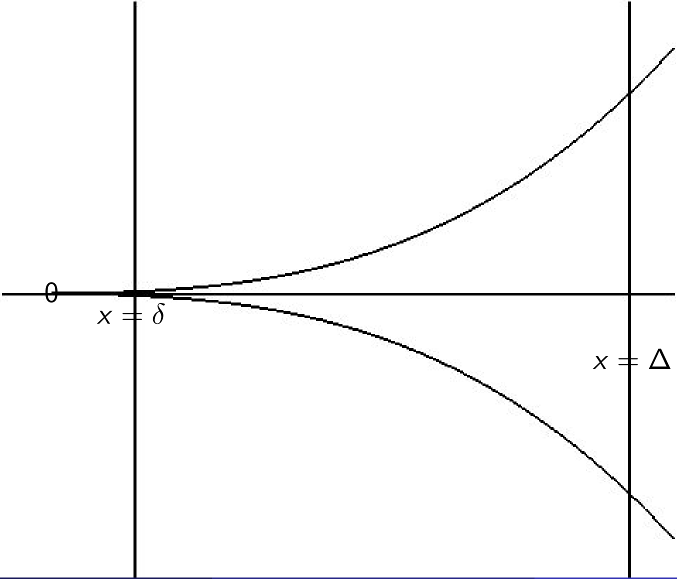
# Ejemplo



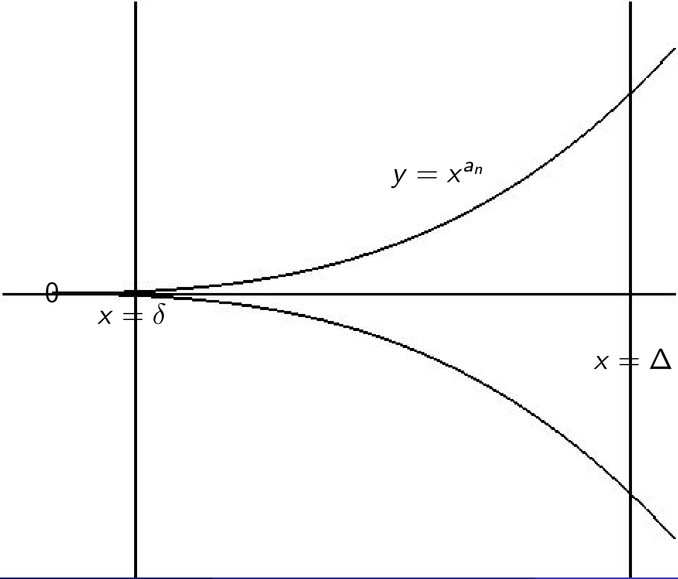
# Ejemplo



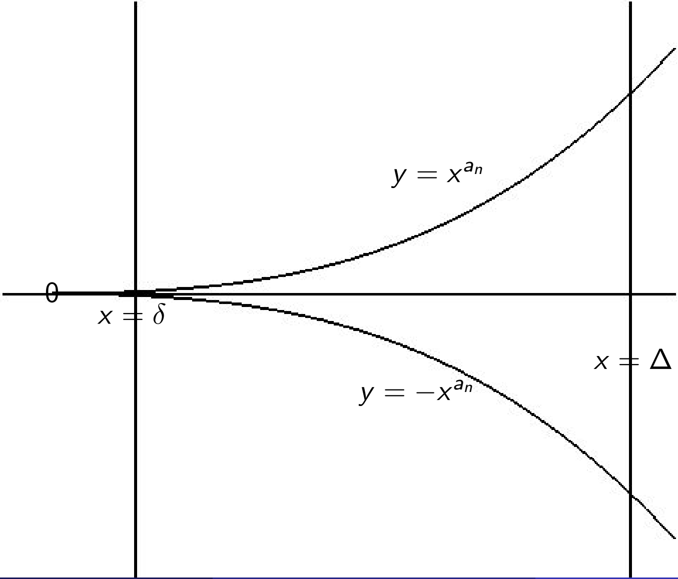
# Ejemplo



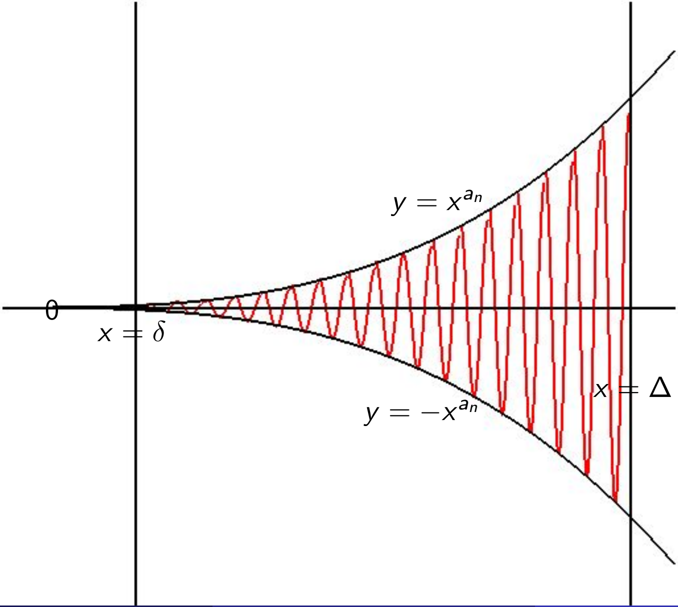
# Ejemplo



# Ejemplo



# Ejemplo



Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}}\cos(b_n^{(j)}\log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}}\cos\left(b_n^{(j)}\log(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi})\right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}}\cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos\left( b_n^{(j)} \log(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}) \right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

$\Longrightarrow f_{n,j}^{(1)}(x)$ alcanza los valores extremos en $y_{n,k}^{(j)}$.

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos\left(b_n^{(j)} \log(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi})\right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

$\Longrightarrow f_{n,j}^{(1)}(x)$ alcanza los valores extremos en $y_{n,k}^{(j)}$.

Para $f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)) \Longrightarrow$

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos\left( b_n^{(j)} \log(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}) \right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

$\Longrightarrow f_{n,j}^{(1)}(x)$ alcanza los valores extremos en $y_{n,k}^{(j)}$.

Para $f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)) \Longrightarrow$ sus ceros son los $y_{n,k}^{(j)}$

Prueba:

Dada $\alpha_n^{(j)} = a_n^{(j)} + ib_n^{(j)}$, le asociamos $f_{n,j}^{(1)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \cos(b_n^{(j)} \log(x))$, solución de (3), sus ceros son:

$$f_{n,j}^{(1)}(x) = 0 \longleftrightarrow \log(x) = \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow x = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}.$$

$$\Longrightarrow x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, los valores $y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}$ satisfacen que:

$$f_{n,j}^{(1)}(y_{n,k}^{(j)}) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos\left(b_n^{(j)} \log(e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi})\right) = y_{n,k}^{a_n^{(j)}} \cos k\pi = \pm y_{n,k}^{a_n^{(j)}},$$

$\Longrightarrow f_{n,j}^{(1)}(x)$ alcanza los valores extremos en $y_{n,k}^{(j)}$.

Para $f_{n,j}^{(2)}(x) = x^{a_n^{(j)}} \operatorname{sen}(b_n^{(j)} \log(x)) \Longrightarrow$ sus ceros son los $y_{n,k}^{(j)}$ y sus valores extremos los $x_{n,k}^{(j)}$.

También sabemos que $\left(x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}\right)$:

También sabemos que $\left(x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}\right)$:

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } k \to +\infty$$

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow\ 0, \qquad \text{cuando } k \to -\infty.$$

También sabemos que $\left(x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}\right)$:

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } k \to +\infty$$

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } k \to -\infty.$$

Válido para cualquier $\alpha_n^{(j)}$ solución de (2).

También sabemos que $\left( x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi} \right)$:

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } k \to +\infty$$

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } k \to -\infty.$$

Válido para cualquier $\alpha_n^{(j)}$ solución de (2).

$\Longrightarrow$ Para encontrar $a_n$ (parte real de una solución de (2)) y densificar el compacto definido a través de él, es suficiente encontrar $\alpha_n$, solución de (2), con la propiedad de que el conjunto $\{x_{n,k}, y_{n,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$ sea denso en $[\delta, \Delta]$.

También sabemos que $\left( x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi} \right)$:

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } k \to +\infty$$

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow \ 0, \quad \text{cuando } k \to -\infty.$$

Válido para cualquier $\alpha_n^{(j)}$ solución de (2).

$\Longrightarrow$ Para encontrar $a_n$ (parte real de una solución de (2)) y densificar el compacto definido a través de él, es suficiente encontrar $\alpha_n$, solución de (2), con la propiedad de que el conjunto $\{x_{n,k}, y_{n,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$ sea denso en $[\delta, \Delta]$.

Probaremos en primer lugar que:

$$y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}.$$

También sabemos que $\left(x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi},\ y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi}\right)$:

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } k \to +\infty$$

$$x_{n,k}^{(j)},\ y_{n,k}^{(j)} \longrightarrow\ 0, \quad \text{cuando } k \to -\infty.$$

Válido para cualquier $\alpha_n^{(j)}$ solución de (2).

$\Longrightarrow$ Para encontrar $a_n$ (parte real de una solución de (2)) y densificar el compacto definido a través de él, es suficiente encontrar $\alpha_n$, solución de (2), con la propiedad de que el conjunto $\{x_{n,k}, y_{n,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$ sea denso en $[\delta, \Delta]$.

Probaremos en primer lugar que:

$$y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}.$$

Comenzaremos por $y_{n,k}^{(j)} < x_{n,k}^{(j)}$:

$$e^{\frac{k}{b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} \longleftrightarrow \frac{k}{b_n^{(j)}}\pi < \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow \frac{k}{b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} \Longrightarrow \text{OK}.$$

Falta probar que $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$:

Falta probar que $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$:

$$x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)} \longleftrightarrow e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi} \longleftrightarrow \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi < \frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow$$

$$\frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{b_n^{(j)}} \longleftrightarrow \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{1}{b_n^{(j)}} \Longrightarrow \text{ OK.}$$

Falta probar que $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$:

$$x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)} \longleftrightarrow e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi} \longleftrightarrow \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi < \frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow$$

$$\frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{b_n^{(j)}} \longleftrightarrow \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{1}{b_n^{(j)}} \Longrightarrow \text{ OK.}$$

Sea ahora $\alpha_{n,l}^{(j)} := \max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)};\ y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} \ : \ |k| \leq l\}$, para $l \in \mathbb{N}$.

Falta probar que $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$:

$$x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)} \longleftrightarrow e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi} \longleftrightarrow \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi < \frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow$$

$$\frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{b_n^{(j)}} \longleftrightarrow \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{1}{b_n^{(j)}} \Longrightarrow \text{ OK.}$$

Sea ahora $\alpha_{n,l}^{(j)} := \max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)};\ y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)}\ :\ |k| \leq l\}$, para $l \in \mathbb{N}$.
Sabemos que:

$$x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{2\pi}{b_n^{(j)}}} - 1\right], \quad y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right],$$

Falta probar que $x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)}$:

$$x_{n,k}^{(j)} < y_{n,k+1}^{(j)} \longleftrightarrow e^{\frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi} < e^{\frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi} \longleftrightarrow \frac{2k+1}{2b_n^{(j)}}\pi < \frac{k+1}{b_n^{(j)}}\pi \longleftrightarrow$$

$$\frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{k}{b_n^{(j)}} + \frac{1}{b_n^{(j)}} \longleftrightarrow \frac{1}{2b_n^{(j)}} < \frac{1}{b_n^{(j)}} \Longrightarrow \text{ OK.}$$

Sea ahora $\alpha_{n,l}^{(j)} := \max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)};\ y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} \ : \ |k| \leq l\}$, para $l \in \mathbb{N}$.
Sabemos que:

$$x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{2\pi}{b_n^{(j)}}} - 1 \right], \quad y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} = e^{\frac{k\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right],$$

así que:

$$\max\{x_{n,k}^{(j)} - y_{n,k}^{(j)} \ : \ |k| \leq l\} = x_{n,l}^{(j)} - y_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right],$$

$$\max\{y_{n,k+1}^{(j)} - x_{n,k}^{(j)} \ : \ |k| \leq l\} = y_{n,l+1}^{(j)} - x_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right].$$

$$\Rightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = \max\left\{ e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1\right], e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right]\right\},$$

$$\Rightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = \max \left\{ e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right], e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right] \right\},$$

y como resulta que:

$$e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \right] > e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}} \left[ e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1 \right],$$

$$\Rightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = \max\left\{ e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1\right], e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right]\right\},$$

y como resulta que:

$$e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right] > e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1\right],$$

$$\Longrightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right].$$

Dado $\alpha > 0$, determino una solución de (2), $\alpha_n = a_n + ib_n$, con parte imaginaria $b_n$ suficientemente grande tal que:

$$e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} < \alpha e^{\frac{-l\pi}{b_n}}.$$

$$\Rightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = \max\left\{ e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1\right], e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right]\right\},$$

y como resulta que:

$$e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right] > e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} - 1\right],$$

$$\Longrightarrow \alpha_{n,l}^{(j)} = e^{\frac{l\pi}{b_n^{(j)}}}\left[e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}}\right].$$

Dado $\alpha > 0$, determino una solución de (2), $\alpha_n = a_n + ib_n$, con parte imaginaria $b_n$ suficientemente grande tal que:

$$e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} < \alpha e^{\frac{-l\pi}{b_n}}.$$

(Se puede hacer ya que si $b_n^{(j)} \to \infty \Longrightarrow e^{\frac{\pi}{b_n^{(j)}}} - e^{\frac{\pi}{2b_n^{(j)}}} \to 0$, y $\alpha e^{\frac{-l\pi}{b_n^{(j)}}} \to \alpha$)

Asociada a esta solución de (2), tenemos ahora que:

Asociada a esta solución de (2), tenemos ahora que:

$$\alpha_{n,l} = e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} \right] < e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ \alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n}} \right] = \alpha,$$

Asociada a esta solución de (2), tenemos ahora que:

$$\alpha_{n,l} = e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} \right] < e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ \alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n}} \right] = \alpha,$$

$\Longrightarrow$ eligiendo $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande ($y_{n,-l} < \delta$ y $y_{n,l+1} > \Delta$), las funciones $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$, y $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n} \operatorname{sen}(b_n \log(x))$ tienen densidad $\alpha$ en $[\delta, \Delta]$, y a posteriori en el compacto considerado.

Asociada a esta solución de (2), tenemos ahora que:

$$\alpha_{n,l} = e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ e^{\frac{\pi}{b_n}} - e^{\frac{\pi}{2b_n}} \right] < e^{\frac{l\pi}{b_n}} \left[ \alpha e^{-\frac{l\pi}{b_n}} \right] = \alpha,$$

$\Longrightarrow$ eligiendo $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande ($y_{n,-l} < \delta$ y $y_{n,l+1} > \Delta$), las funciones $f_n^{(1)}(x) = x^{a_n} \cos(b_n \log(x))$, y $f_n^{(2)}(x) = x^{a_n} \operatorname{sen}(b_n \log(x))$ tienen densidad $\alpha$ en $[\delta, \Delta]$, y a posteriori en el compacto considerado.

✓ Probaremos que $f_{n,j}^{(1)}(x)$ y $f_{n,j}^{(2)}(x)$ para todo cero $\alpha_n^{(j)}$ de (3), $j = 1, 2, 3, \ldots$, y ninguno conjugado de otro, son linealmente independientes:

Definimos $b_n := \max \left\{ |b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m \right\}$.

Definimos $b_n := \max\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$.

Definimos $b_n := \max\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$. Y sea $c_j := r_n^{j-1},\ 1 \leq j \leq 2m$.

Definimos $b_n := \text{máx}\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$. Y sea $c_j := r_n^{j-1},\ 1 \leq j \leq 2m$.
Entonces el determinante:

$$W = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}^{(2)}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}^{(2)}(c_j), \ldots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}^{(2)}(c_j) \right|_{j=1,2,\ldots,2m}$$

es no nulo.

Definimos $b_n := \text{máx}\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$. Y sea $c_j := r_n^{j-1},\ 1 \leq j \leq 2m$.
Entonces el determinante:

$$W = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}^{(2)}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}^{(2)}(c_j), \dots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}^{(2)}(c_j) \right|_{j=1,2,\dots,2m}$$

es no nulo.

Para calcular $W$ reduciremos sus elementos a forma compleja.
Multipliquemos la $2^o, 4^o, \cdots$ columnas por $i$, y a ellas les sumamos la $1^o, 3^o, \dots$ columnas respectivamente $\Longrightarrow$

Definimos $b_n := \max\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$. Y sea $c_j := r_n^{j-1},\ 1 \leq j \leq 2m$.
Entonces el determinante:

$$W = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}^{(2)}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}^{(2)}(c_j), \ldots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}^{(2)}(c_j) \right|_{j=1,2,\ldots,2m}$$

es no nulo.

Para calcular $W$ reduciremos sus elementos a forma compleja. Multipliquemos la $2^o, 4^o, \cdots$ columnas por $i$, y a ellas les sumamos la $1^o, 3^o, \ldots$ columnas respectivamente $\Longrightarrow$

$$W \cdot i^m = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}(c_j), \ldots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}(c_j) \right|_{j=1,2,\ldots,2m}$$

Definimos $b_n := \text{máx}\left\{|b_n^{(j)}| : 1 \leq j \leq m\right\}$. Elegimos $r_n > 1$ tal que $b_n \cdot \ln(r_n) < \pi$. Y sea $c_j := r_n^{j-1},\ 1 \leq j \leq 2m$.
Entonces el determinante:

$$W = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}^{(2)}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}^{(2)}(c_j), \ldots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}^{(2)}(c_j) \right|_{j=1,2,\ldots,2m}$$

es no nulo.

Para calcular $W$ reduciremos sus elementos a forma compleja.
Multipliquemos la $2^{o}, 4^{o}, \cdots$ columnas por $i$, y a ellas les sumamos la $1^{o}, 3^{o}, \ldots$ columnas respectivamente $\Longrightarrow$

$$W \cdot i^m = \left| f_{n,1}^{(1)}(c_j),\ f_{n,1}(c_j),\ f_{n,2}^{(1)}(c_j),\ f_{n,2}(c_j), \ldots, f_{n,m}^{(1)}(c_j),\ f_{n,m}(c_j) \right|_{j=1,2,\ldots,2m}$$

ya que: $i \cdot f_{n,j}^{(2)}(x) + f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$

Sea ahora $h_{n,j}(x)$ el conjugado de $f_{n,j}(x)$, entonces:

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Sea ahora $h_{n,j}(x)$ el conjugado de $f_{n,j}(x)$, entonces:

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Multipliquemos la $1^{\text{o}}, 3^{\text{o}}, \ldots$ columnas por $-2$ y sumemos la $2^{\text{o}}, 4^{\text{o}}, \ldots$ respectivamente $\Longrightarrow$

Sea ahora $h_{n,j}(x)$ el conjugado de $f_{n,j}(x)$, entonces:

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Multipliquemos la $1^{\circ}, 3^{\circ}, \ldots$ columnas por $-2$ y sumemos la $2^{\circ}, 4^{\circ}, \ldots$ respectivamente $\Longrightarrow$

$$W{\cdot}(-2i)^m = |-h_{n,1}(c_j), f_{n,1}(c_j), -h_{n,2}(c_j), f_{n,2}(c_j), \ldots, -h_{n,m}(c_j), f_{n,m}(c_j)|$$

Sea ahora $h_{n,j}(x)$ el conjugado de $f_{n,j}(x)$, entonces:

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Multipliquemos la $1^o, 3^o, \ldots$ columnas por $-2$ y sumemos la $2^o, 4^o, \ldots$ respectivamente $\Longrightarrow$

$$W\cdot(-2i)^m = |-h_{n,1}(c_j), f_{n,1}(c_j), -h_{n,2}(c_j), f_{n,2}(c_j), \ldots, -h_{n,m}(c_j), f_{n,m}(c_j)|$$

o equivalentemente,

$$W\cdot(2i)^m = |h_{n,1}(c_j),\ f_{n,1}(c_j),\ h_{n,2}(c_j),\ f_{n,2}(c_j), \ldots, h_{n,m}(c_j),\ f_{n,m}(c_j)|_{j=1,2,\ldots}$$

Sea ahora $h_{n,j}(x)$ el conjugado de $f_{n,j}(x)$, entonces:

$$2f_{n,j}^{(1)}(x) = f_{n,j}(x) + h_{n,j}(x), \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Multipliquemos la $1^{o}, 3^{o}, \ldots$ columnas por $-2$ y sumemos la $2^{o}, 4^{o}, \ldots$ respectivamente $\Longrightarrow$

$$W \cdot (-2i)^m = |-h_{n,1}(c_j), f_{n,1}(c_j), -h_{n,2}(c_j), f_{n,2}(c_j), \ldots, -h_{n,m}(c_j), f_{n,m}(c_j)|$$

o equivalentemente,

$$W \cdot (2i)^m = |h_{n,1}(c_j), \; f_{n,1}(c_j), \; h_{n,2}(c_j), \; f_{n,2}(c_j), \ldots, h_{n,m}(c_j), \; f_{n,m}(c_j)|_{j=1,2,\ldots}$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} h_{n,1}(c_1) & f_{n,1}(c_1) & h_{n,2}(c_1) & f_{n,2}(c_1) & \cdots & h_{n,m}(c_1) & f_{n,m}(c_1) \\ h_{n,1}(c_2) & f_{n,1}(c_2) & h_{n,2}(c_2) & f_{n,2}(c_2) & \cdots & h_{n,m}(c_2) & f_{n,m}(c_2) \\ \cdots\cdots\cdots & & & & & & \\ h_{n,1}(c_{2m}) & f_{n,1}(c_{2m}) & h_{n,2}(c_{2m}) & f_{n,2}(c_{2m}) & \cdots & h_{n,m}(c_{2m}) & f_{n,m}(c_{2m}) \end{vmatrix}$$

Ahora teniendo en cuenta que:

$$f_{n,j}(c_1) = h_{n,j}(c_1) = 1 \ \forall \ 1 \leq j \leq m$$

$$f_{n,j}(c_2) = r_n^{\alpha_n^{(j)}} := d_j \qquad h_{n,j}(c_2) = r_n^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} := e_j$$

$$f_{n,j}(c_3) = (r_n^2)^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^2 \qquad h_{n,j}(c_3) = (r_n^2)^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n,j}(c_{2m}) = (r_n^{2m-1})^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^{2m-1} \qquad h_{n,j}(c_{2m}) = (r_n^{2m-1})^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^{2m-1},$$

Ahora teniendo en cuenta que:

$$f_{n,j}(c_1) = h_{n,j}(c_1) = 1 \ \forall\ 1 \leq j \leq m$$

$$f_{n,j}(c_2) = r_n^{\alpha_n^{(j)}} := d_j \qquad h_{n,j}(c_2) = r_n^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} := e_j$$

$$f_{n,j}(c_3) = (r_n^2)^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^2 \qquad h_{n,j}(c_3) = (r_n^2)^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n,j}(c_{2m}) = (r_n^{2m-1})^{\alpha_n^{(j)}} = d_j^{2m-1} \qquad h_{n,j}(c_{2m}) = (r_n^{2m-1})^{\overline{\alpha_n^{(j)}}} = e_j^{2m-1},$$

el determinante anterior se convierte en el siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ d_1 & e_1 & d_2 & e_2 & \cdots & d_m & e_m \\ d_1^2 & e_1^2 & d_2^2 & e_2^2 & \cdots & d_m^2 & e_m^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ d_1^{2m-1} & e_1^{2m-1} & d_2^{2m-1} & e_2^{2m-1} & \cdots & d_m^{2m-1} & e_m^{2m-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k} (a_j - a_k) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k} (a_j - a_k) \neq 0$$

En efecto, primero veamos que $d_j \neq d_k$ si $j \neq k$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k}(a_j - a_k) \neq 0$$

En efecto, primero veamos que $d_j \neq d_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{\alpha_n^{(j)}} = e^{\alpha_n^{(j)} \ln(r_n)} = e^{(a_n^{(j)} + i b_n^{(j)}) \ln(r_n)} = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{i b_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k}(a_j - a_k) \neq 0$$

En efecto, primero veamos que $d_j \neq d_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{\alpha_n^{(j)}} = e^{\alpha_n^{(j)} \ln(r_n)} = e^{(a_n^{(j)} + i b_n^{(j)}) \ln(r_n)} = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{i b_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}; \qquad \mathrm{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$

$$-\pi \leq b_n^{(j)} \ln(r_n) \leq \pi \quad \text{(por la elección escogida).}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k}(a_j - a_k) \neq 0$$

En efecto, primero veamos que $d_j \neq d_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{\alpha_n^{(j)}} = e^{\alpha_n^{(j)} \ln(r_n)} = e^{(a_n^{(j)} + i b_n^{(j)}) \ln(r_n)} = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{i b_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}; \qquad \mathrm{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$

$$-\pi \leq b_n^{(j)} \ln(r_n) \leq \pi \quad \text{(por la elección escogida).}$$

Y como $\alpha_n^{(j)} \neq \alpha_n^{(k)}$ si $j \neq k$, entonces necesariamente $d_j \neq d_k$ si $j \neq k$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_{2m-1}^2 & a_{2m}^2 \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ a_1^{2m-1} & a_2^{2m-1} & a_3^{2m-1} & a_4^{2m-1} & \cdots & a_{2m-1}^{2m-1} & a_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>k} (a$$

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}}$,

$\rightarrow \mathrm{Arg}(d_j) = -\mathrm{Arg}(e_j) \neq 0$ (ya que $b_n^{(j)} \neq 0$ y $r_n > 1$).

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\rightarrow \operatorname{Arg}(d_j) = -\operatorname{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\rightarrow \mathrm{Arg}(d_j) = -\mathrm{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \qquad \mathrm{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$
$$\rightarrow |e_k| = r_n^{a_n^{(k)}}, \quad \mathrm{Arg}(e_k) = -b_n^{(k)} \ln(r_n).$$

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\rightarrow \mathrm{Arg}(d_j) = -\mathrm{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \qquad \mathrm{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$
$$\rightarrow |e_k| = r_n^{a_n^{(k)}}, \quad \mathrm{Arg}(e_k) = -b_n^{(k)} \ln(r_n).$$

Si $|d_j| \neq |e_k| \Rightarrow d_j \neq e_k$.

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\rightarrow \mathrm{Arg}(d_j) = -\mathrm{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \qquad \mathrm{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$
$$\rightarrow |e_k| = r_n^{a_n^{(k)}}, \quad \mathrm{Arg}(e_k) = -b_n^{(k)} \ln(r_n).$$

Si $|d_j| \neq |e_k| \Rightarrow d_j \neq e_k$.
Si $|d_j| = |e_k| \Rightarrow a_n^{(j)} = a_n^{(k)}$, y por tanto $b_n^{(j)} \neq b_n^{(k)}$, y además $b_n^{(j)} \neq -b_n^{(k)}$ (no hay ceros conjugados) $\Rightarrow \mathrm{Arg}(d_j) \neq \mathrm{Arg}(e_k) \Rightarrow d_j \neq e_k$.

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\rightarrow \text{Arg}(d_j) = -\text{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

$$\rightarrow |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \qquad \text{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$
$$\rightarrow |e_k| = r_n^{a_n^{(k)}}, \quad \text{Arg}(e_k) = -b_n^{(k)} \ln(r_n).$$

Si $|d_j| \neq |e_k| \Rightarrow d_j \neq e_k$.
Si $|d_j| = |e_k| \Rightarrow a_n^{(j)} = a_n^{(k)}$, y por tanto $b_n^{(j)} \neq b_n^{(k)}$, y además $b_n^{(j)} \neq -b_n^{(k)}$ (no hay ceros conjugados) $\Rightarrow \text{Arg}(d_j) \neq \text{Arg}(e_k) \Rightarrow d_j \neq e_k$.

$\Rightarrow a_j \neq a_k$ si $j \neq k$.

Por otra parte $d_j \neq e_j$ ya que:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{-ib_n^{(j)} \ln(r_n)},$$

$$\to |d_j| = |e_j| = r_n^{a_n^{(j)}},$$
$$\to \operatorname{Arg}(d_j) = -\operatorname{Arg}(e_j) \neq 0 \text{ (ya que } b_n^{(j)} \neq 0 \text{ y } r_n > 1).$$

Nos falta ver que $d_j \neq e_k$ si $j \neq k$:

$$d_j = r_n^{a_n^{(j)}} \cdot e^{ib_n^{(j)} \ln(r_n)}, \quad \text{y} \quad e_k = r_n^{a_n^{(k)}} \cdot e^{-ib_n^{(k)} \ln(r_n)},$$

$$\to |d_j| = r_n^{a_n^{(j)}}, \qquad \operatorname{Arg}(d_j) = b_n^{(j)} \ln(r_n)$$
$$\to |e_k| = r_n^{a_n^{(k)}}, \quad \operatorname{Arg}(e_k) = -b_n^{(k)} \ln(r_n).$$

Si $|d_j| \neq |e_k| \Rightarrow d_j \neq e_k$.
Si $|d_j| = |e_k| \Rightarrow a_n^{(j)} = a_n^{(k)}$, y por tanto $b_n^{(j)} \neq b_n^{(k)}$, y además $b_n^{(j)} \neq -b_n^{(k)}$ (no hay ceros conjugados) $\Rightarrow \operatorname{Arg}(d_j) \neq \operatorname{Arg}(e_k) \Rightarrow d_j \neq e_k$.

$\Rightarrow a_j \neq a_k$ si $j \neq k$.

$$\Longrightarrow \quad W \neq 0.$$

# Referencias


- Aczél, J. and Dhombres, J.: *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- Ash, Robert B.: *Complex Variables*, Academic Press, INC., New York, 1971.
- Castillo, E., Iglesias, A. and Ruíz-Cobo, R.: *Functional Equations in Applied Sciences* , Mathematics in Science and Engineering, Vol. 199, Elsevier, 2005.
- Cherruault, Y. and Mora, G.: *Optimisation Globale. Théorie des Courbes Alpha-Denses* , Economica, Paris, 2005.
- Mora, G.; Mira, J.A. : Alpha-dense Curves in Infinite Dimensional Spaces, *International Journal of Pure and Applied* Vol. 5 (2003), 437–449.
- Mora, G., Cherruault, Y. and Ziadi, A.: Functional equations generating space-densifying curves, *Computers and Mathematics with Applications* Vol. 39 (2000), 45–55.