

# 1. DISEÑO DE LA TOLVA

En muchas extrusoras el alimento está formado por granza en estado sólido la cual hay que fundir y presurizar. El alimento entra en la extrusora a través de la tolva. Básicamente una tolva consiste en un cilindro metálico cuya sección más habitual se muestra en las siguientes figuras:

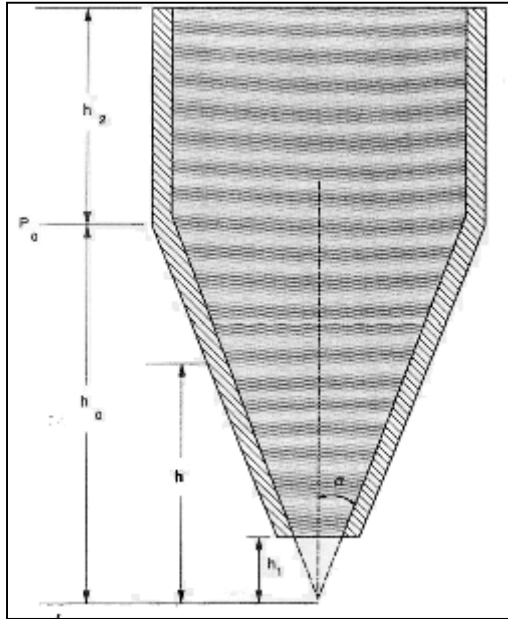


Figura 1

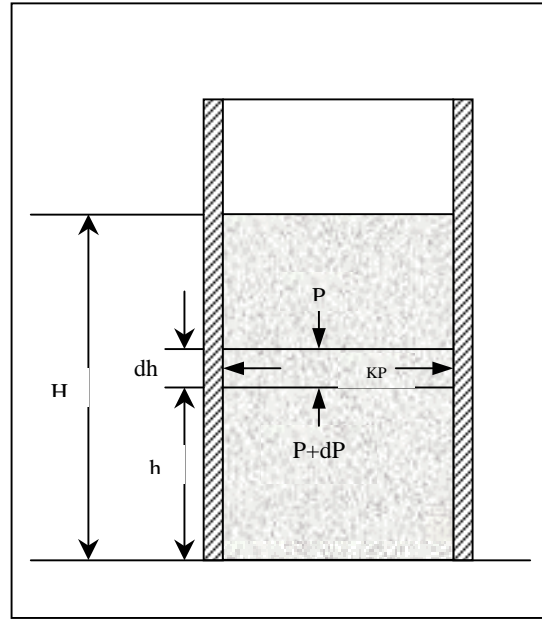


Figura 2

Para poder realizar el cálculo de la sobrepresión de extrusión es necesario conocer la presión en la base de la tolva. Primero se realizará la aproximación de que la forma de la tolva es la de un contenedor cilíndrico tal y como muestra la figura 2. Para un cilindro lleno con un fluido conocido, la variación de la presión estática es  $P=\rho g(H-h)$ , permaneciendo constante este valor a lo largo de una misma sección situada a la misma altura h.

Para la granza la distribución de la presión no es isotrópica ya que los sólidos tienen la capacidad de soportar determinadas tensiones cortantes. Si realizamos un análisis de las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial obtenemos:

$$A \cdot \rho_b \cdot g \cdot dh - (P + dP) \cdot A + P \cdot A - (C_w + f'_w \cdot K \cdot P) C \cdot dh = 0 \quad (1)$$

Donde  $\rho_b$  es la densidad aparente de la granza,  $A$  es la sección transversal de la tolva,  $C$  es el perímetro mojado,  $K$  es la relación existente entre la tensión de compresión en la dirección horizontal y la tensión de compresión en dirección vertical (para un fluido el valor de  $K$  vale 0 pero para un sólido, como puede soportar tensiones, las presiones son diferentes),  $C_w$  es una medida de la adhesión del sólido a las paredes, y  $f'_w$  es el coeficiente de rozamiento entre la granza y las paredes. Reordenando los términos se puede llegar a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dh} = \rho_b g - \frac{CC_w}{A} - \frac{f'_w KPC}{A} \quad (2)$$

Si se separan términos y se integra se obtiene el siguiente resultado:

$$P = P_H \exp\left[\frac{f'_w CK(h-H)}{A}\right] + \frac{(A\rho_b g/C) - C_w}{f'_w K} \left\{1 - \exp\left[\frac{f'_w CK(h-H)}{A}\right]\right\} \quad (3)$$

donde  $P_H$  es la presión en  $H$  (en este caso  $p_a$ ). Cuando  $C_w = 0$  y llevando la presión relativa a  $p_a$ , la presión en la base del cilindro vale:

$$P_0 = \frac{\rho_b g D}{4f'_w K} \left\{1 - \exp\left[\frac{4f'_w K(-H)}{D}\right]\right\} \quad (4)$$

donde  $D$  es el diámetro del cilindro. La presión máxima que se puede obtener en la tolva se calcula cuando  $H$  tiende a infinito, entonces:

$$P_{0,max} = \frac{\rho_b g D}{4f'_w K} \quad (5)$$

En consecuencia, en cierta medida el peso es contrarrestado por el rozamiento entre los granos de granza y las paredes del metal. La máxima presión es proporcional al diámetro e inversamente proporcional al coeficiente de rozamiento en la pared. Para líquidos la presión en la base de la tolva aumenta indefinidamente conforme aumenta el valor de  $H$ , mientras que para sólidos hemos encontrado un valor límite.

Es necesario poder conocer el valor de  $f'_w$ ,  $K$  y  $C_w$ . Estos parámetros se calculan de forma similar a como se hace las propiedades de un fluido mediante un reómetro de discos paralelos, con la excepción de se puede aplicar una tensión de compresión a los

materiales sólidos. El valor de K se obtiene a partir del ángulo efectivo de fricción  $\delta$  usando la siguiente ecuación:

$$K = \frac{1 - \operatorname{sen} \delta}{1 + \operatorname{sen} \delta} \quad (6)$$

La mayoría de las tolvas tienen una parte cilíndrica seguida de otra cónica. Bajo estas condiciones, Walker demostró que la presión viene dada por:

$$P = (h/h_0)^a P_0 + \frac{\rho_b g h}{a-1} \left[ 1 - (h/h_0)^{a-1} \right] \quad (8)$$

donde  $P_0$  es la presión a una altura  $h_0$ , y  $a$  viene dado por la forma cónica de la tolva. Respectivamente, obtenemos:

$$a = \frac{2B'D^*}{\tan \alpha} \quad a = \frac{B'D^*}{\tan \alpha} \quad (9)$$

La variable  $\alpha$  que aparece en las ecuaciones anteriores es la mitad del ángulo que forman las paredes cónicas de la tolva, y  $D^*$  es la función de distribución dada por 1.0.  $B'$  se calcula como:

$$B' = \frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}(2\alpha + \kappa_0)}{1 - \operatorname{sen} \delta \cos(2\alpha + \kappa_0)} \quad (10)$$

donde

$$\kappa_0 = \beta_w + \operatorname{arcsen} \left( \frac{\operatorname{sen} \beta_w}{\operatorname{sen} \delta} \right) ; ; \quad \operatorname{arcsen} > \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

y el valor de  $\beta_w$  es el ángulo de fricción de la pared ( $\beta_w = \operatorname{arctg} f_w$ ).

## **2. PLASTIFICACIÓN EN EXTRUSURAS DE TORNILLO SIMPLE**

### **2.1. TRANSPORTE DE SÓLIDOS**

Consideraremos el transporte de partículas sólidas en un canal rectangular como el mostrado en la figura 3. El objetivo es determinar el flujo másico y la presión como una función de la velocidad de los platos y del coeficiente de fricción entre el plato y la granza,  $f_{wl}$ . Sería deseable tratar esta situación de manera similar a los fluidos, donde resolvemos la ecuación de movimiento. Esta es la mejor manera de describir el flujo granular de sólidos.

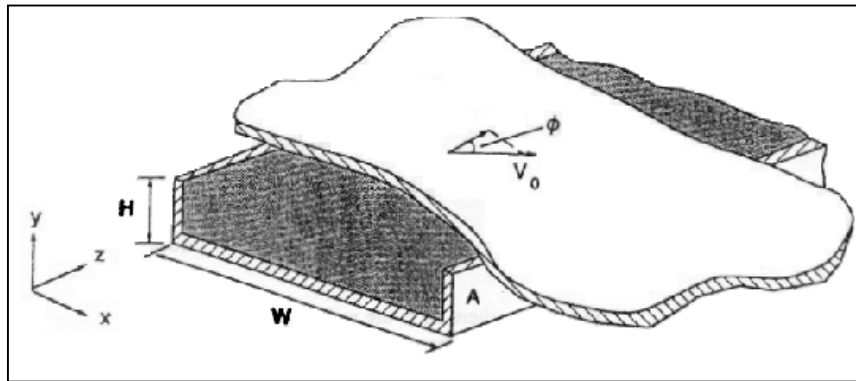


Figura 3.

Por esta razón, supondremos que las partículas sólidas se comportan como un pistón con densidad  $\rho_b$ . El movimiento se produce por fricción con el plato superior que se encuentra en movimiento. El plato superior se mueve con una velocidad  $V_0$ , formando un ángulo  $\phi$  con la dirección del canal, tal y como se muestra en la figura 4:

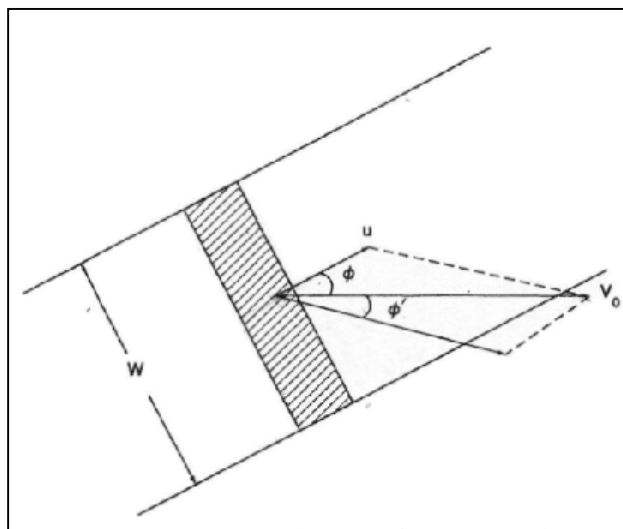


Figura 4.

La velocidad relativa del plato con el lecho de sólidos,  $v_r$ , es:

$$V_r = V_0 \sin \phi \delta_x + V_0 \cos \phi \delta_z - u \delta_z \quad (12)$$

A partir de la cual podemos obtener:

$$\tan(\phi + \phi') = \frac{V_o \sin \phi}{V_o \cos \phi - u} \quad (13)$$

Usando la trigonometría para  $\tan(\phi + \phi')$  llegamos a la siguiente expresión:

$$\tan \phi' = \frac{u \cdot \sin \phi}{V_o - u \cdot \cos \phi} \quad (14)$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas,  $u$  y  $\phi'$ , por lo que buscaremos una ecuación adicional.

Esta ecuación se obtienen haciendo un balance de fuerzas en la dirección  $Z$  en un elemento diferencial  $\Delta z$ . Este balance incluye dos fuerzas de presión y las fuerzas debido a la fricción con los platos tanto arriba como abajo. El balance es el siguiente:

$$P|_z \cdot W \cdot H - P|_{z+\Delta z} \cdot W \cdot H + K \cdot P \cdot W \cdot H \cdot f_{w1} \cdot \cos(\phi + \phi') \cdot \Delta z - K \cdot P \cdot W \cdot H \cdot f_{w2} \cdot \Delta z = 0 \quad (15)$$

Donde  $f_{w1}$  y  $f_{w2}$  son los coeficientes de fricción entre el plato superior y el plato inferior, respectivamente, y el lecho de sólidos, y  $K$  es el coeficiente de anisotropía en la distribución de tensiones. La contribución en el balance de fuerzas de las paredes es prácticamente despreciable en este caso. Dividiendo entre el área de un elemento y haciendo que  $\Delta z$  tienda a cero obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{dP}{dz} + K \cdot P \cdot [f_{w1} \cdot \cos(\phi + \phi') - f_{w2}] = 0 \quad (16)$$

Integramos utilizando la condición inicial de que cuando  $z = 0$ ,  $P = P_o$ , obtenemos:

$$P = P_o \exp\{[K \cdot f_{w1} \cdot \cos(\phi + \phi') - K \cdot f_{w2}]z\} \quad (17)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser resueltas. Vemos como la presión crece exponencialmente con la distancia.

Se ha despreciado la resistencia que las paredes ejercen al flujo. Un balance de fuerzas en la dirección  $X$  sirve para calcular la fuerza norma ejercida sobre las paredes sobre el

flujo sólido. Un incremento de las fuerzas de fricción producido por las paredes podría reducir la capacidad de presurización.

A continuación consideraremos la capacidad transmisora de un tornillo simple en la extrusión. El modelo del canal rectangular no puede ser usado para describir la transmisión sólida en un tornillo simple por la presencia de canales profundos que hacen que los efectos de la curvatura sean significantes.

El modelo de la sección de alimentación de un tornillo simple en extrusión viene dado por Darnell y Mol (1956) y es en parte muy similar al modelo dado por el canal rectangular. Se realizan las siguientes suposiciones:

- Las partículas del lecho sólido se consideran como un continuo.
- La profundidad del canal es constante.
- Se desprecia la distancia entre las aletas del tornillo y la pared externa del mismo.
- Se da flujo pistón.
- El canal está tan lleno que las paredes están en contacto con el sólido.
- La distribución de tensiones en el lecho es isotrópica.
- La densidad es constante.
- Las fuerzas gravitatorias son despreciadas.
- Se suponen condiciones isoterma.

Primero relacionamos el flujo másico con el ángulo  $\phi'$ , que es el ángulo que el vector de velocidad relativa hace con el de velocidad de las paredes. Un pistón cilíndrico se muestra en la figura 5. El flujo másico,  $G$ , es el producto de la velocidad de flujo en la dirección axial,  $V_{pl}$ ,  $\rho_b$  y el área transversal al flujo, y viene dada por:

$$G = V_{pl} \rho_b \left[ \frac{\pi}{4} (D_b^2 - D_s^2) - \frac{eH}{\sin \phi} \right] \quad (18)$$

Donde el primer término del paréntesis tiene en cuenta que la sección transversal del flujo tiene forma toroidal debido al cuerpo del tornillo. Así,  $D_b$  es el diámetro del tornillo más las aletas, y  $D_s=D_b-2H$ , es decir, sólo del cuerpo del tornillo. El ángulo  $\bar{\phi}$  es la media de los ángulos  $\phi_b$ ,  $\phi$  en la parte superior de las aletas, y  $\phi_s$ , ángulo en la base de las aletas.

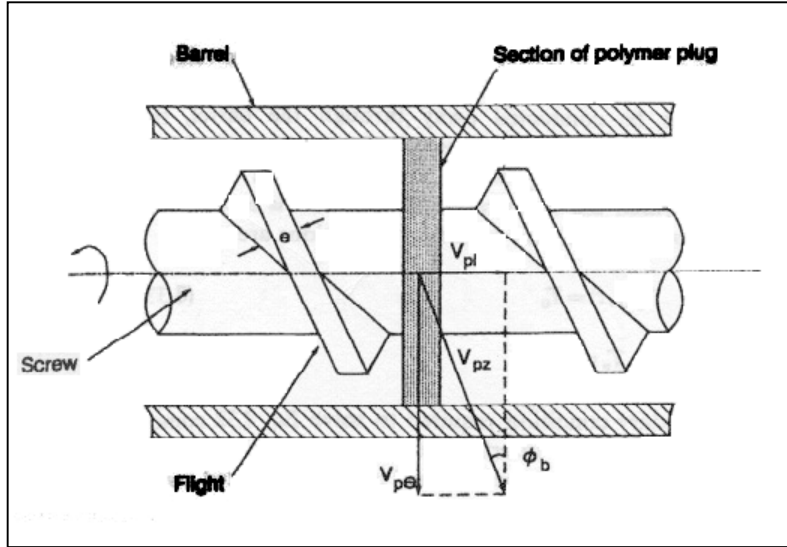


Figura 5.

En la figura 5 se muestra el tornillo girando. La velocidad de los vectores se muestra relativa a la rotación del tornillo. El flujo tiene entonces componentes de velocidad en la dirección tangencial,  $V_{p\theta}$ , y paralelos a los vuelos,  $V_{pz}$ . De forma similar a esta podemos relacionar  $V_{pl}$ ,  $V_b$  y el ángulo  $\phi'$ , el cual es el ángulo que el vector de velocidad relativa forma con la aparente rotación de las paredes, obteniendo:

$$V_{pl} = V_b \frac{\tan \phi' \cdot \tan \phi_b}{\tan \phi' + \tan \phi_b} \quad (19)$$

Donde  $V_b = \pi N D_b$  y  $N$  es la velocidad angular del tornillo, en revoluciones por segundo. Sustituyendo esta ecuación:

$$G = \pi^2 N H D_b (D_b - H) \rho_b \frac{\tan \phi' \cdot \tan \phi_b}{\tan \phi' + \tan \phi_b} \left[ 1 - \frac{e}{\pi (D_b - H) \sin \phi} \right] \quad (20)$$

En esta ecuación aparecen dos incógnitas,  $\phi'$  y  $G$ , por lo que se necesita una ecuación adicional.

Esta ecuación se obtiene haciendo un balance de fuerzas en un elemento de lecho sólido como el mostrado en la figura 6. Para una distribución de tensiones isotrópica, las fuerzas pueden calcularse como:

- Fuerza de fricción con las paredes:  $F_1=f_bPW_bdz_b$
- Fuerzas debidas a la presión diferencial:  $F_6-F_2=HWdP$
- Fuerza normal al vuelo delantero:  $F_8=PHdz$
- Fuerza normal al vuelo trasero:  $F_7=PHdz+F^*$
- Fuerza de fricción en el vuelo delantero:  $F_4=f_sF_8$
- Fuerza de fricción en el vuelo trasero:  $F_3=f_sF_7$
- Fuerza de fricción en el tornillo:  $F_5=f_sPW_sdz_s$

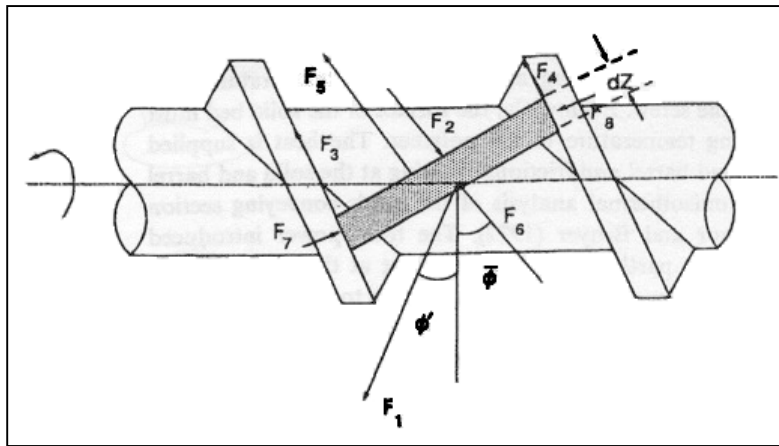


Figura 6.

Donde  $f_s$  y  $f_b$  son los coeficientes de fricción entre el polímero y el tornillo y la pared, respectivamente. Haciendo balances de fuerza y torque obtenemos los siguientes resultados:

$$\cos\phi' = K_s \sin\phi' + M \quad (21)$$

donde

$$K_s = \frac{\bar{D}}{D_b} \frac{\sin\bar{\phi} + f_s \cos\bar{\phi}}{D_b \cos\bar{\phi} + f_s \sin\bar{\phi}} \quad (22)$$

$$M = \frac{2H}{W_b} \frac{f_s}{f_b} \sin\phi_b \left( K_s + \frac{\bar{D}}{D_b} \cotan\bar{\phi} \right) + \frac{W_s}{W_b} \frac{f_s}{f_b} \sin\phi_b \left( K_s + \frac{D_s}{D_b} \cotan\phi_s \right) + \frac{\bar{W}}{W_b} \frac{H}{z_b} \frac{1}{f_b} \sin\bar{\phi} \left( K_s + \frac{\bar{D}}{D_b} \cotan\bar{\phi} \right) \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (23)$$



Donde  $\bar{D}=(1/2)(D_b+D_s)$ ,  $P_1$  es la presión inicial cuando  $z=0$  y  $P_2$  es la presión a cualquier distancia del canal  $Z_b$ .

A continuación calcularemos la potencia consumida. La potencia a través de las paredes se calcula como:

$$P_w = \int F_b \cdot V_b \cdot dA = \int F_1 V_b \cdot \cos \phi' \cdot W_b \cdot dz_b \quad (24)$$

Sustituyendo los valores de  $F_1$  y de  $P$  Tadmor y Broyer obtuvieron la siguiente ecuación:

$$P_w = \pi \cdot N \cdot D_b \cdot W_b \cdot Z_b \cdot f_b \cdot \cos \phi' \frac{P_2 - P_1}{\ln(P_2 / P_1)} \quad (25)$$

Son cuestionables las suposiciones que se realizan en este modelo. Se supuso que había una distribución de tensiones isotrópica, pero no está claro que las predicciones del modelo sean probables al tener una distribución anisotrópica de tensiones.

La suposición de que la temperatura permanece constante puede ser modificada al producirse un aumento de temperatura conforme se avanza en el tornillo. La superficie del lecho sólido puede superar la temperatura de fundido del polímero. El calor es suministrado a través de la pared y por fricción entre la interfase sólida la pared. El análisis no isoterma de fue dado por Tadmor y Broyer. El calor introducido a través del eje es en parte disipado por calentando las superficies de las paredes, los vuelos y el cuerpo del tornillo. El calor generado por unidad de superficie de pared viene dado por:

$$q_b = f_b \pi N D_b \frac{\text{sen } \phi_b}{\text{sen}(\phi_b + \phi')} \frac{P_2 - P_1}{\ln(P_2 / P_1)} \quad (26)$$

El calor es conducido en el flujo de sólido y en las paredes, si las paredes no son calentadas. Tadmor y Broyer despreciaron la curvatura del sistema y trataron el movimiento de sólidos como en un canal rectangular. Suponiendo que la conducción de calor se da solo en la dirección Y, y el flujo en la dirección Z, la ecuación de energía conduce a la siguiente ecuación diferencial para la distribución de temperaturas:

$$\rho_b \bar{C}_{p,p} V_{pz} \frac{\partial T_p}{\partial z} = k_p \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} \quad (27)$$

donde  $T_p$  es la temperatura en el flujo y  $\bar{C}_{p,p}$  y  $k_p$  son la capacidad y la conductividad térmica, respectivamente, para el flujo. La ecuación anterior para la conducción térmica unidimensional lleva a :

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} \quad (28)$$

donde  $\alpha_p$  es la difusividad térmica del lecho sólido.  $V_{pz}$  es la velocidad del flujo dirección canal abajo y se obtienen de la ecuación obtenida para el caso isoterma.

## 2.2. ZONA DE FUNDIDO

El modelo básico de conversión del lecho sólido en fundido es dado por Tadmor (Tadmor & Klein, 1970) y se basa en observaciones del estado del material a lo largo del canal del tornillo. Aparece una película de fundido en la pared superficial como resultado del calor generado por dos efectos: por un lado la fricción y por otro el calor conducido por las paredes calientes. Una vez se ha formado la película de fundido el mecanismo de transmisión cambia en la superficie del canal, donde ahora la resistencia viscosa es dominante. La resistencia por fricción sigue siendo importante en el fondo del tornillo y en los vuelos. El espesor de la película de fundido sigue aumentando hasta varias veces el valor del espacio que queda entre los vuelos del tornillo y la pared externa del tornillo. A partir de ese momento, el espesor de la película de fundido permanece prácticamente constante. El fundido es arrastrado y acumulado en la parte delantera de los vuelos del tornillo, tal y como muestra la figura siguiente:

La distancia axial desde donde aparece la primera película de fundido hasta donde el fundido comienza a acumularse se conoce como *zona de dilatación*.

Parece que resulta imposible poder predecir un modelo matemático para el cálculo de la longitud de la zona de dilatación. Tadmor y Klein, basándose en datos experimentales, encontraron una correlación empírica entre el número de vueltas, esto es, la longitud de

la zona de dilatación, y un parámetro dimensional  $\psi$ , donde  $\psi$  se definirá después, y representa la relación entre el fundido y el lecho sólido. La correlación es la siguiente:

$$N' = 0.008 \left( \frac{1}{\psi} \right) \quad (29)$$

donde  $N'$  es el número de vueltas. Aunque esta expresión ha sido obtenida a partir de datos experimentales para un número limitado de polímero, sigue siendo válida para estimar la longitud de esta zona.

Basándose en observaciones visuales, Tadmor (Tadmor & Klein, 1970) propusieron el mecanismo de fundido descrito en la figura 8. La película de fundido es separada y acumulada en el vuelo delantero del tornillo. La anchura del lecho sólido,  $X$ , disminuye por la zona del avance del tornillo. Los sólidos son impulsados hacia el interior, y la interfase entre el lecho de sólidos y el fundido parece moverse canal abajo con una velocidad  $V_{sy}$ . Se ha observado que el espesor de la película de fundido,  $\delta$ , cambia ligeramente a lo largo de la anchura del canal, y parece que no cambie significativamente en la longitud del canal.

La finalidad del modelo de la sección de fundido es determinar la anchura longitudinal del lecho sólido,  $X$ , como una función de la distancia de la distancia canal abajo,  $z$ . La idea básica es determinar la distribución de temperaturas tanto en la película de fundido como en el lecho sólido. El balance de energía se realiza asumiendo que hay una clara interfase entre el sólido y el fundido. El flujo de calor en la interfase es conducido dentro del lecho sólido donde se utiliza para fundir el sólido (entalpía de cambio de fase). Por lo tanto, no sólo el espesor de la película de fundido permanece constante también lo hace la temperatura.

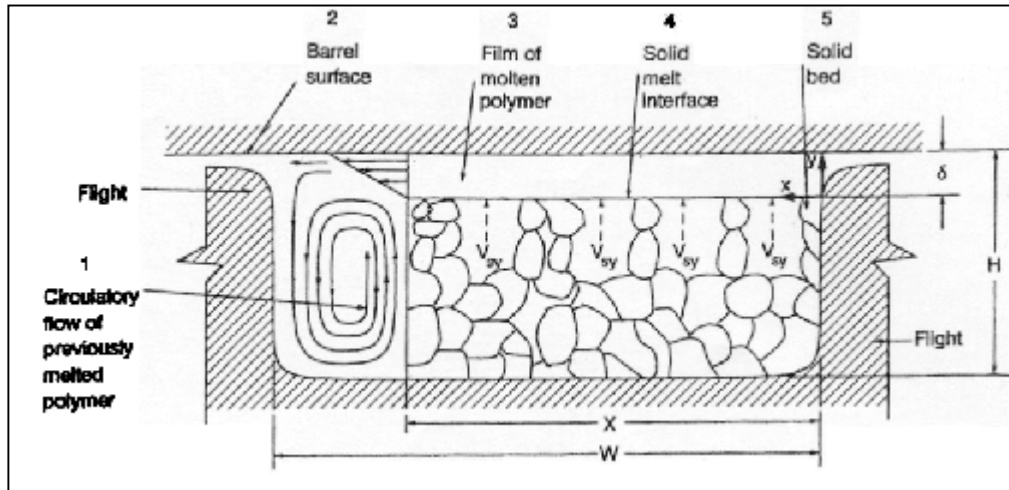


Figura 8.

Basado en estas suposiciones, Tadmor realizó las siguientes suposiciones:

- En la extrusora se alcanza el estado estacionario.
- La fundición se da en la superficie de la pared (en algunos casos se ha observado fundido en la base y en los vuelos del tornillo –Rauwendaal, 1986-)
- El lecho sólido es homogéneo, continuo y deformable.
- Se suponen constantes las propiedades físicas y termofísicas.
- La interfase entre el lecho sólido y la película de fundido se supone que está claramente definida, a la temperatura de fusión,  $T_w$ , del polímero.

Para determinar el perfil del lecho sólido es necesario calcular la distribución de temperaturas en el fundido. En la figura 8 se presenta el modelo de fusión de Tadmor. La localización de los ejes de coordenadas será en la interfase sólido-fundido, en el vuelo de arrastre (vuelo derecho en la figura 8).

El siguiente paso es desarrollar postulados para la temperatura y velocidad en el fundido:

$$v_x = v_x(y) \quad v_z = v_z(y) \quad v_y = 0 \quad T = T(x, y) \quad (30)$$

y del lecho sólido:

$$T_s = T_s(y) \quad (31)$$

El lecho sólido se supone que se mueve como un pistón con velocidad canal abajo  $V_{sz}$ , donde:

$$V_{sz} = G/(\rho_s HW) \quad (32)$$

Que es la misma que la velocidad del lecho sólido al principio de la zona de fundido,  $V_{pz}$  (el espesor de la película de fundido ha sido despreciado). Para la película de fundido, las ecuaciones de movimiento y de energía son:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

$$\rho \bar{C}_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = +k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (35)$$

La resolución de estas ecuaciones se hace utilizando una relación constitutiva, que será la ley empírica para la viscosidad. La velocidad se puede obtener independientemente de la ecuación de energía. La ecuación de energía puede ser sustituida en las ecuaciones de movimiento por términos de disipación viscosa. La velocidad se obtiene integrando las ecuaciones (33) y (34) después de sustituir en el modelo generalizado para un fluido Newtoniano (GNF) usando las siguientes condiciones de contorno:

- Para  $y=0$ ,  $v_x=0$
  - Para  $y=0$ ,  $v_z=V_{sz}$
  - Para  $y=\delta$ ,  $v_x=V_{bx}$
  - Para  $y=\delta$ ,  $v_z=V_{bz}$
- (36)

Por la naturaleza homogénea de las ecuaciones (33) y (34) la función de la viscosidad se desprecia, y la velocidad es:

$$v_x = \left( \frac{V_{bx}}{\delta} \right) y \quad (37)$$

$$v_z = \left( \frac{V_{bz} - V_{sz}}{\delta} \right) y + V_{sz} \quad (38)$$

La dificultad aparece al intentar resolver la ecuación de energía porque la viscosidad es una función de la temperatura y por el término de la mano izquierda de esta ecuación. Este término está asociado con el transporte de calor por convección y si la disipación viscosa es grande, este término podría ser importante. Tadmor y Klein (1970)

supusieron una distribución de temperaturas parabólica y inicialmente despreciaron los términos de conducción y convección en la dirección x. Mejor que suponer una distribución de temperaturas, supondremos que hay convección forzada. Por lo tanto, la ecuación (35) puede ser directamente integrada, si despreciamos el término de convección, y obtenemos la siguiente distribución de temperaturas en el fundido:

$$T = \frac{\Phi_v}{2k_m}(y^2 - y\delta) + y\left(\frac{T_b - T_m}{\delta}\right) + T_m \quad (39)$$

donde  $\Phi_v$  es el término de disipación viscosa, dado por:

$$\Phi_v = m \left[ \left( \frac{V_{bx}}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{V_{bx} - V_{sz}}{\delta} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (40)$$

Este perfil de temperaturas se ha obtenido utilizando las siguientes condiciones límite:

- Para  $y=0$ ,  $T=T_m$
  - Para  $y=\delta$ ,  $T=T_b$ ,
- (41)

Donde  $T_b$  es la temperatura de la pared.

A continuación determinaremos la distribución de temperaturas en el lecho sólido. Suponemos que  $T_s=T_s(y)$ , por lo que la ecuación de energía es:

$$\rho_s \bar{C}_{ps} v_{sy} \frac{\partial T_s}{\partial x} = +k \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (42)$$

Las condiciones límite utilizadas en este caso son:

- Para  $y=0$ ,  $T_s=T_m$
  - Para  $y=\delta$ ,  $T_s=T_o$ ,
- (43)

Donde  $T_o$  es la temperatura del lecho cuando entra a la zona de fundición. La segunda condición presenta el problema de que el gradiente de temperatura en el lecho sólido y la temperatura del lecho puede cambiar conforme se mueve canal abajo. Las condiciones bajo las cuales se podría considerar que se producen cambios en la temperatura del lecho a lo largo del canal fueron discutidas por Rawendaal (1986).

Usando las condiciones límite dadas por las ecuaciones (43), el perfil de temperaturas es:

$$T_s = (T_m - T_o) \exp\left(\frac{yV_{sy}}{\alpha_s}\right) + T_o \quad (44)$$

El paso final para determinar el rango de fundido es un balance de energía en la interfase sólido-fundido:

$$q_y \Big|_{y=0} - q_{sy} \Big|_{y=0} - \rho_s V_{sy} \Delta \bar{H}_f = 0 \quad (45)$$

Sustituyendo la distribución de temperaturas dada por la ecuación (39) y (44) en la ecuación anterior y obtenemos:

$$\frac{\Phi_v \delta}{2} + k_m \frac{(T_b - T_m)}{\delta} = [\bar{C}_{ps} (T_m - T_o) + \Delta \bar{H}_f] \rho_s V_{sy} \quad (46)$$

La ecuación (46) contiene dos incógnitas,  $\delta$  y  $V_{sy}$ , por lo que es necesario encontrar otra ecuación. Usando el hecho de que la fracción de sólidos que es fundida en la interfase debe igualar a la fracción acumulada en el vuelo, se obtiene:

$$w_L(z) = \rho_s V_{sy} X = \rho_m \int_0^\delta \frac{V_{bx}}{\delta} y dy = \frac{\rho_m V_{bx} \delta}{2} \quad (47)$$

donde  $X$  es la anchura del lecho a cualquier  $z$  distancia canal abajo y  $w_L$  es la proporción de fundido. Para un fluido Newtoniano,  $\Phi_v$  vale:

$$\Phi_v = \frac{\mu}{\delta^2} [V^2 + (V_{bz} - V_{sz})^2] \quad (48)$$

Por lo que sustituyendo y despejando  $\delta$  se obtiene:

$$\delta = \left[ \frac{2k_m (T_b - T_m) + \mu (V_{bx}^2 + (V_{bz} - V_{sz})^2) X}{(\bar{C}_{ps} (T_m - T_o) + \Delta \bar{H}_f) (\rho_m V_{bx})} \right] \quad (49)$$

y  $w_L(z)$ :

$$w_L(z) = \left\{ \frac{V_{bx} \rho_m \left[ k_m (T_b - T_m) + \left( \frac{\mu}{2} \right) V_j^2 \right] X}{2 \left[ \Delta \bar{H}_f + \bar{C}_{ps} (T_m - T_o) \right]} \right\}^{1/2} \quad (50)$$

donde

$$V_j^2 = V_{bx}^2 + (V_{bz} - V_{sz})^2 \quad (51)$$

Para un GNF con una función de viscosidad dada por el modelo, la ecuación (49) representa una ecuación algebraica no lineal que puede ser resuelta para  $\delta$ .

Por último, determinaremos el perfil del lecho sólido como una función de la distancia canal abajo. El cambio en la anchura del lecho sólido se obtiene mediante un balance de materia a un elemento de espesor  $\Delta z$ :

$$\rho_s V_{sz} (H - \delta) X \Big|_z - \rho_s V_{sz} (H - \delta) X \Big|_{z+\Delta z} = w_L(z) \Delta z \quad (52)$$

Si se hace que  $\Delta z \rightarrow 0$  y se desprecia el cambio del espesor de la película canal abajo, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{-d(HX)}{dz} = \frac{w_L(z)}{\rho_s V_{sz}} \quad (53)$$

Sustituyendo la ecuación (50) en la (53) se llega a la expresión:

$$\frac{-d(hX)}{dz} = \frac{\Phi \sqrt{X}}{\rho_s V_{sz}} \quad (54)$$

donde:

$$\Phi = \left\{ \frac{V_{bx} \rho_m \left[ k_m (T_b - T_m) + \left( \frac{\mu}{2} \right) V_j^2 \right]}{2 \left[ \Delta \bar{H}_f + \bar{C}_{ps} (T_m - T_o) \right]} \right\}^{1/2} \quad (55)$$

Para un canal de profundidad constante, la ecuación (54) se puede integrar dando:



$$\frac{X_2}{W} = \frac{X_1}{W} \left[ 1 - \frac{\psi(z_2 - z_1)}{2H} \right]^2 \quad (56)$$

donde  $X_1$  y  $X_2$  son las anchuras del lecho sólido en las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  respectivamente, y el grupo dimensional  $\psi$  se define como:

$$\psi = \frac{\Phi}{V_{sz} \rho_s \sqrt{X}} \quad (57)$$

Por lo tanto, para un canal de profundidad constante se puede determinar la longitud del canal necesario para fundir todo el lecho sólido con la ecuación (56).

Para un canal estrecho de estrechez constante, que es el caso usual, se puede describir la ecuación (54) como:

$$\frac{d(HX)}{dH} = \frac{\Phi \sqrt{X}}{A \rho_s V_{sz}} \quad (58)$$

donde

$$A = -\frac{dH}{dz} \quad (59)$$

La ecuación (58) se integra obteniendo:

$$\frac{X_2}{W} = \frac{X_1}{W} \left[ \frac{\psi}{A} - \left( \frac{\psi}{A} - 1 \right) \sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \right]^2 \quad (60)$$

Donde  $X_2$  y  $X_1$  son las anchuras del lecho sólido en los puntos correspondientes a  $H_2$  y  $H_1$  respectivamente.

Las ecuaciones (56) y (60) representa las ecuaciones básicas para el modelo de fundido.

La longitud total del canal de profundidad constante es:

$$z_T = \frac{2H}{\psi} \quad (61)$$

y para un canal estrecho es:

$$z_T = \frac{H}{\psi} \left( 2 - \frac{A}{\psi} \right) \quad (62)$$

Para un canal de profundidad constante, la longitud del canal necesaria para fundir el lecho sólido es función de la profundidad del canal y un grupo adimensional  $\psi$ , donde  $\psi$  representa la proporción local de fundido por unidad de interfase sólido-fundido para el flujo másico sólido local. Así, la longitud de fundido es proporcional a la proporción de flujo másico e inversamente proporcional a la fracción de fundido. En el caso de canales estrechos, si es demasiado estrecho, la achura del lecho sólido puede aumentar en vez de decrecer.

### 2.3. ZONA DE PRESURIZACIÓN.

Una vez que el polímero está totalmente fundido, entra tercera zona de la extrusora donde será presurizado. El aumento de presión es necesario para bombear al fundido a través de la boquilla al final de la extrusora. La presurización del fundido se realiza por mecanismos de arrastre viscoso. Primero veremos como la resistencia viscosa puede llegar a presurizar al fundido. Se puede obtener para modelos no isotermos y no Newtonianos, pero es necesario utilizar métodos numéricos para resolver las ecuaciones generadas con este modelo. Por ello, utilizaremos la resolución analítica para resolver el caso isoterma de un fluido Newtoniano.

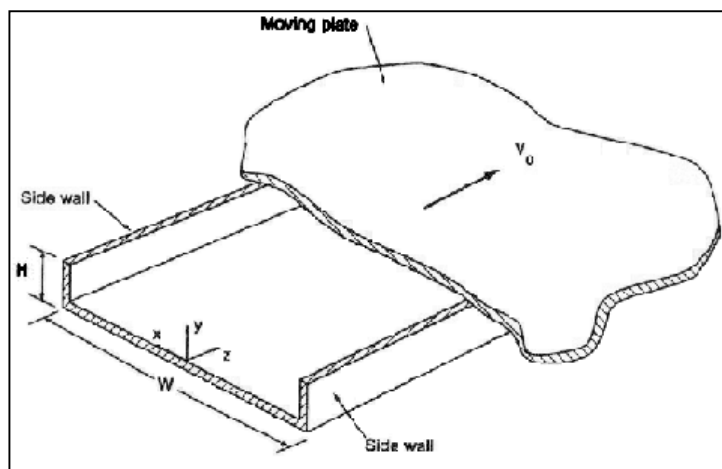


Figura 9

El principio básico de operación para la zona de presurización de una extrusora con husillo simple es ilustrado por el plato simple mostrado en la figura 9. El fluido que circula entre los dos platos se considera que es Newtoniano y se trabaja en condiciones isotermas en régimen estacionario. Debido a la restricción al final del canal, la presión aumenta a lo largo de la dirección z. La velocidad  $v_z$  se supone que sólo depende de y, y la relación entre las dimensiones del canal es grande ( $W/H > 10$ ). Después de sustituir en la ecuación de movimiento las tensiones para un fluido Newtoniano queda:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} - \frac{dp}{dz} = 0 \quad (63)$$

Utilizaremos las siguientes condiciones límite:

- Para  $y=0$ ,  $v_z=0$
  - Para  $y=\delta$ ,  $v_z=V_o$ ,
- (64)

Después de integrar la ecuación (63) y utilizando las ecuaciones límite dadas por la velocidad, se calcula:

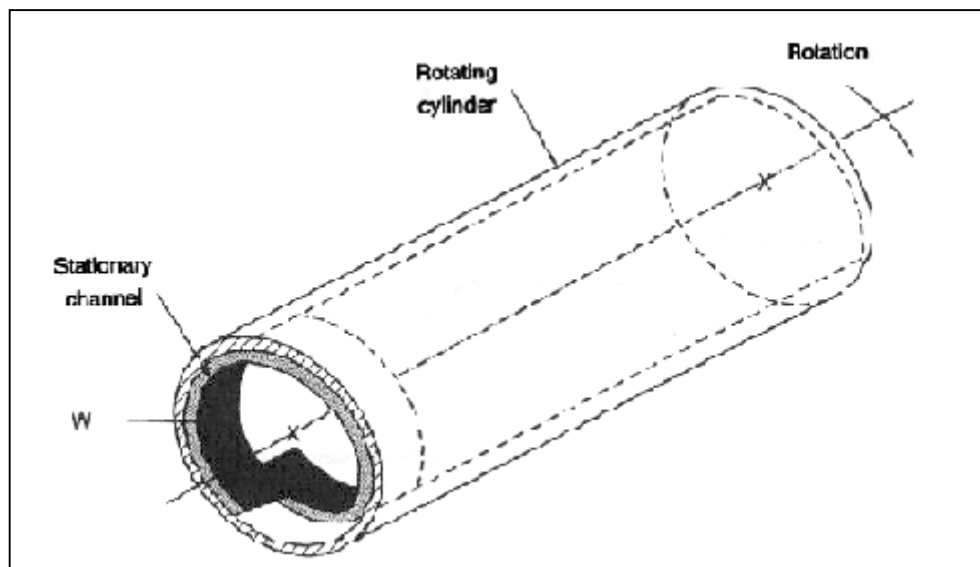
$$v_z = (H^2 / 2\mu) \left( \frac{dp}{dz} \right) \left[ \left( \frac{y}{H} \right)^2 - \frac{y}{H} \right] + \frac{V_o y}{H} \quad (65)$$

Para obtener el caudal volumétrico, integramos la ecuación anterior en una sección transversal:

$$Q = \frac{V_o WH}{2} - \frac{dp}{dz} \left( \frac{WH^3}{12\mu} \right) \quad (66)$$

El caudal Q se divide en dos términos: el primero se conoce como flujo de arrastre,  $Q_d$ , y el segundo flujo de presión,  $Q_p$ . Cuando no hay aumento de presión, el transporte se da enteramente por el flujo de arrastre. Si hay un aumento de presión significativo, entonces Q decrece. En este caso el término de presión puede dominar hasta el punto de que el flujo puede ir en dirección contraria (como veremos después, esto no puede suceder en una extrusora). El principal punto es que, como resultado del arrastre viscoso, el fluido puede avanzar contra la resistencia por un aumento de presión. Este es en esencia el principio de operación en la sección de presurización de una extrusora de husillo simple.

Como en una bomba, el mecanismo de platos paralelo no es práctico en sí mismo. Se necesita un camino para recorrer la longitud del canal y volver al plato superior del canal después de haber atravesado la longitud del mismo. Como muestra la figura 10, una manera de hacer esto es construir un canal y darle una inclinación helicoidal, de forma que la longitud puede ser incrementada. El cilindro interno o externo pueden rotar. En la figura, rota el cilindro externo. Cuando el canal es poco profundo en comparación con el radio del cilindro, la curvatura puede ser despreciada, y se puede considerar que es como platos paralelos.



**Figura 10.**

Ahora se puede desarrollar el modelo para esta zona. En la práctica, el tornillo está rotando dentro del cilindro, y las coordenadas cilíndricas son necesarias para describir la geometría. Como la profundidad del canal es normalmente pequeña comparada con el radio del cilindro, se puede resolver el flujo considerando coordenadas coordenadas Cartesianas, como muestra la figura 11. Normalmente se sitúan los ejes pegados al husillo, de forma que para un observador situado en ellos es como un plato se estuviese moviendo sobre el canal formando un ángulo  $\phi_b$  con la dirección del canal hacia abajo.

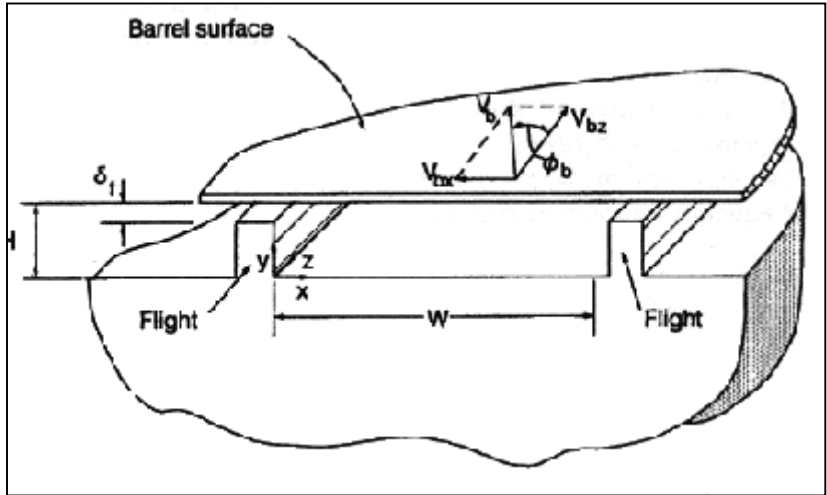


Figura 10.

En principio se necesita un modelo de tridimensional para describir los perfiles de temperatura y velocidad en el canal de la extrusora. Este tipo de detalles no es normalmente necesario para el diseño del husillo. Con las suposiciones de densidad constante y condiciones estacionarias, se pueden realizar los siguientes postulados para la velocidad y la temperatura:

$$v_z = v_z(x, y) \quad v_x = v_x(x, y) \quad (67)$$

$$T = T(y, z) \quad (68)$$

Si  $W/H > 10$ , entonces se puede simplificar de la siguiente forma:

$$v_z = v_z(y) \quad v_x = v_x(y) \quad (69)$$

En esencia, se están despreciando los efectos de las paredes de los lados del canal, lo cual es probablemente válido para muchos casos. Utilizando estos postulados, la ecuación de movimiento y de energía es:

$$0 = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (70)$$

$$0 = -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (71)$$

$$\rho \bar{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (72)$$

Utilizando el modelo GNF, los componentes de las tensiones son:

$$\tau_{yx} = -\eta(\dot{\gamma}, T) \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (73)$$

$$\tau_{yz} = -\eta(\dot{\gamma}, T) \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (74)$$

donde  $\dot{\gamma}$  viene dado por:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2} \quad (75)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal, y están acopladas por la dependencia de la viscosidad con la temperatura. Es necesario utilizar técnicas numéricas para resolver estas ecuaciones.

Se pueden obtener soluciones razonables a estas ecuaciones si se asume que las fuerzas de convección supuestas son válidas y que el ángulo  $\phi_b$  es menor de  $20^\circ$ . De echo, muchos husillos son diseñados con dimensiones cuadradas (esto es,  $L_s = D_b$ , lo que significa que  $\phi_b = 17.7^\circ$ ). Valores de  $\phi_b < 20^\circ$  llevan a que  $dv_x/dy \ll dv_z/dy$  (para ver esto, aproximamos  $dv_x/dy$  a  $V_b \sin \phi_b / H$  y  $dv_z/dy$  a  $V_b \cos \phi_b / H$  y  $\dot{\gamma}$  a  $dv_z/dy$ ). Las ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dy} \left( m \left| \frac{dv_z}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_z}{dy} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (76)$$

$$\frac{d}{dy} \left( m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (77)$$

La ecuación (76) puede ser integrada utilizando las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{- Para } y=0, v_z=0 \quad (78)$$

$$\text{- Para } y=H, v_z=V_{bz}=V_b \cos \phi_b \quad (79)$$

Es conveniente utilizar los siguientes variables adimensionales:

$$u_z = v_z / V_{bz} \quad \xi = y/H$$

Como  $u_z$  tienen un valor máximo en algún punto  $\beta$ , en la solución se distinguen dos regiones:

$$\text{Para } 0 \leq \xi \leq \beta: u_z < = \left( \frac{GH^{n+1}}{mV_{bz}^n} \right)^s \left( \frac{1}{s+1} \right) [(\beta - \xi)^{s+1} - \beta^{s+1}] \quad (80)$$

$$\text{Para } \beta \leq \xi \leq 1: u_z < = \left( \frac{GH^{n+1}}{mV_{bz}^n} \right)^s \left( \frac{1}{s+1} \right) [(\xi - \beta)^{s+1} - (1 - \beta)^{s+1}] + 1 \quad (81)$$

Donde  $G = \partial p / \partial z$  y  $s=1/n$ . El valor de  $\beta$  se obtiene igualando las dos velocidad en  $\xi=\beta$  para dar:

$$\beta^{s+1} - (1 - \beta)^{s+1} + \frac{m^s V_{bz} (s+1)}{G^s H^{1+s}} = 0 \quad (82)$$

El flujo volumétrico se obtiene integrando la velocidad a través de una sección transversal, y es:

$$\frac{Q}{WHV_{bz}} = \left( \frac{GH^{n+1}}{mV_{bz}^n} \right)^s \left[ -\frac{\beta^{s+2}}{s+1} - \frac{(1-\beta)^{s+2}}{s+2} \right] + (1-\beta) \quad (83)$$

La expresión anterior viene referida a las características del tornillo y la consistencia de los términos de flujo de arrastre y del de presión. Finalmente, la velocidad con la que cruza el canal,  $v_x$ , se obtiene integrando la ecuación (77) y usando las ecuaciones de velocidad (80) y (81), con las siguientes condiciones de contorno:

- Para  $y=0$ ,  $v_x=0$
- Para  $y=H$ ,  $v_z = -V_{bx} = V_b \text{sen} \phi_b$  (84)

Con las fuerzas de convección supuestas y la restricción de que los ángulos de la hélice sean pequeños, la ecuación (72) se transforma en:

$$\rho \bar{C}_p v_z(y) \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + m \left| \frac{dv_z}{dy} \right|^{n+1} \quad (85)$$

Rescribimos el balance de energía de forma adimensional utilizando las siguientes variables:

$$z/L=\zeta \quad v_z/V_{bz}=u \quad T^*=(T-T_i)/(T_b-T_i) \quad (86)$$

donde  $T_i$  es la temperatura inicial del fundido cuando entra a la zona de presurización, y  $T_b$  es la temperatura de la pared. La ecuación (85) en la forma adimensional es:

$$Pe u_\zeta(\xi) \frac{\partial T^*}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial \zeta^2} + Br \left| \frac{du^{n+1}}{d\xi} \right| \quad (87)$$

Donde  $Pe = H^2 \rho \bar{C}_p V_{bz} / kL$  y  $Br = m V_{bz}^{n+1} / H^{n-1} k (T_b - T_i)$ . Con las suposiciones hechas aquí, se necesitan métodos numéricos para resolver la ecuación (87).

El modelado del flujo en el canal de la extrusora es dificultoso de visualizar, por lo tanto consideraremos el caso de un fluido Newtoniano. El desarrollo es pedagógico, pero tiene pocas aplicaciones por las suposiciones realizadas de extrusión de un fluido Newtoniano bajo condiciones isotermas. Para un fluido Newtoniano, las ecuaciones (76) y (77) dan las siguientes expresiones para  $u_x$  y  $u_z$ , respectivamente:

$$u_x = -\xi + \xi(\xi-1)(GH^2/2\mu V_{bx}) \quad (88)$$

$$u_z = \xi - 3\xi(1-\xi)(H^2G/6\mu V_{bz}) \quad (89)$$

Como no puede haber flujo neto en la dirección x, integrando  $u_x$  sobre  $\xi$  obtenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\mu V_{bx}}{H^2} \quad (90)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (88) se obtiene el perfil de velocidades transversal:

$$u_x = -\xi(2-3\xi) \quad (91)$$

La ecuación anterior nos viene a indicar que el fluido circula alrededor de una capa paralizada a una altura  $y=2H/3$ . Por supuesto, para materiales pseudoplásticos esta posición podría cambiar.



El rango del flujo volumétrico se obtiene integrando la ecuación (89) sobre el área de la sección transversal del canal:

$$Q = \frac{V_{bz}WH}{2} - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{WH^3}{12\mu} \quad (92)$$

Estas son las ecuaciones características para un caso Newtoniano. La proporción de flujo de arrastre y flujo de presión es:

$$Q_p / Q_d = - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{H^2}{6\mu V_{bz}} \quad (93)$$

Se podría tener la impresión de que es posible que el fluido circule hacia, hacia la tolva. Sin condiciones, esto es posible, como vamos a mostrar. La velocidad axial,  $v_l$ , se obtiene mediante la contribución vectorial de  $v_x$  y  $v_y$  a lo largo de la dirección axial  $l$ :

$$v_l = v_x \cos \phi + v_z \sin \phi \quad (94)$$

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (88), (89) y (93) en la ecuación anterior y definiendo  $u_l = v_l / V_b$ , obtenemos:

$$u_l = 3\xi(1 - \xi) \left(1 + \frac{Q_p}{Q_d}\right) \sin \phi \cos \phi \quad (95)$$

Para el caso Newtoniano (ver figura 11), se observa que  $u_x$  es independiente de la fracción  $Q_p/Q_d$ . Por un lado,  $u_z$  y  $u_l$  dependen fuertemente de  $Q_p/Q_d$ , y cuando esta fracción se hace más negativa, decrece el flujo en dirección axial. Cuando  $Q_p/Q_d = -1$ , no sale flujo de la extrusora (se conoce como carga cerrada). Es porque  $u_x$  tiene  $v_l > 0$ . Bajo condiciones de carga cerrada el tiempo de residencia del fluido dentro de la extrusora es infinito y cuando cambian las condiciones el tiempo es más corto.

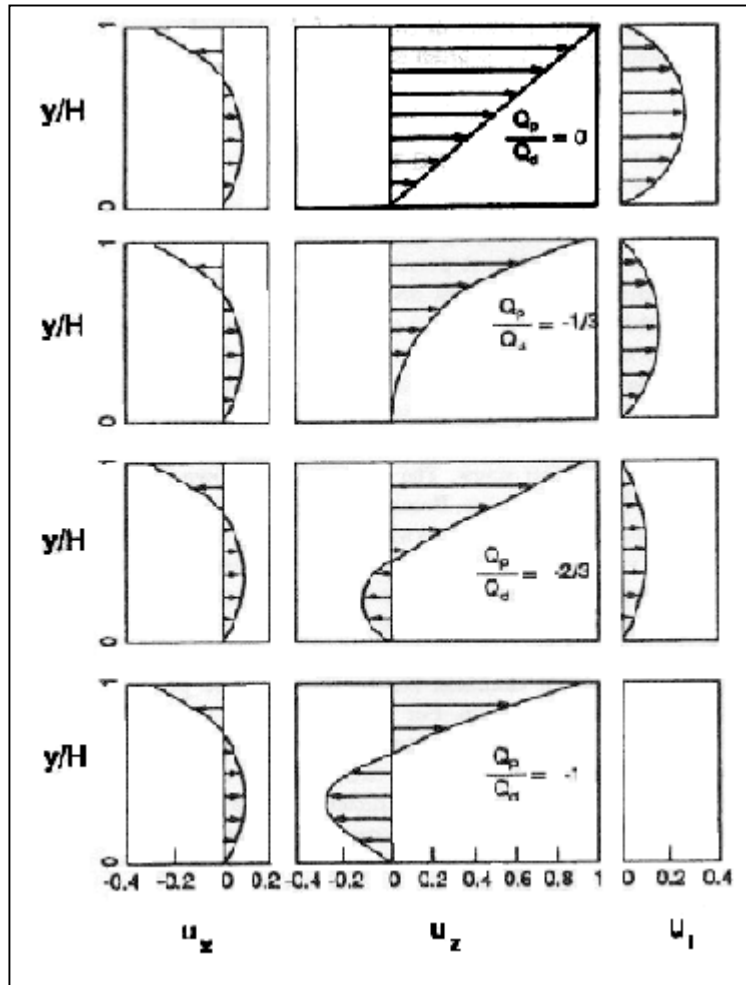


Figura 11

La distribución de presión a lo largo de la dirección axial de una extrusora es debida a la resistencia que ofrece de la boquilla y de otros elementos como conectores y sistemas de filtración. Por lo tanto, la forma de operar de la extrusora está directamente relacionada con el diseño de la boquilla y los elementos de conexión. Para ilustrar esto, consideramos un fluido Newtoniano, y sólo la sección de presurización de la extrusora. Además, suponemos que la boquilla es un simple capilar, y despreciamos cualquier pérdida de presión debida a contracción o expansiones en el sistema. Utilizando la ecuación (92) escribimos las características de la extrusora como:

$$Q_s = \frac{1}{2} \pi D_b N \cos \phi WH - \left( \frac{\Delta P_s}{L_b} \right) \frac{WH^3 \sin \phi}{12\mu} \quad (96)$$

donde  $Q_s$  es el caudal volumétrico en la extrusora,  $\Delta P_s$  es el aumento de presión en la extrusora,  $L_b$  es la longitud de la extrusora y  $\bar{\phi}$  es el ángulo medio de la hélice. Para una boquilla circular, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$Q_D = \left( \frac{\pi R^4}{8L_D} \right) \frac{\Delta P_D}{\mu} = \frac{K_D \Delta P_D}{\mu} \quad (97)$$

donde  $K_D$  está relacionado con las características de la boquilla, y  $Q_D$  y  $\Delta P_D$  son el caudal volumétrico y la pérdida de presión en la boquilla, respectivamente. Como  $Q_D = Q_s (= Q)$  y  $|\Delta P_s| = |\Delta P_D| (= \Delta P)$ , entonces el conjunto de ecuaciones (96) y (97) son dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo, se llega al siguiente resultado para  $\Delta P$  y  $Q$ :

$$Q = \frac{\frac{1}{2} \pi D_b \cos \bar{\phi}_w H}{1 + \frac{WH^3 \sin \bar{\phi}}{12 \mu L_b K_D}} \quad (98)$$

$$\Delta P = \frac{\frac{1}{2} \mu \pi D_b \cos \phi_b WH}{K_D + \frac{WH^3 \sin \bar{\phi}}{12L}} \quad (99)$$

Las dos ecuaciones anteriores son muy usadas para pequeños cálculos cuantitativos, y sólo sirven para ilustrar el efecto de la boquilla en las condiciones de operación de la extrusora. En la práctica, se deberían obtener valores para  $\Delta P$  y para  $Q$  numéricamente para la boquilla y la extrusora, y determinar bajo que condiciones los valores son idénticos.

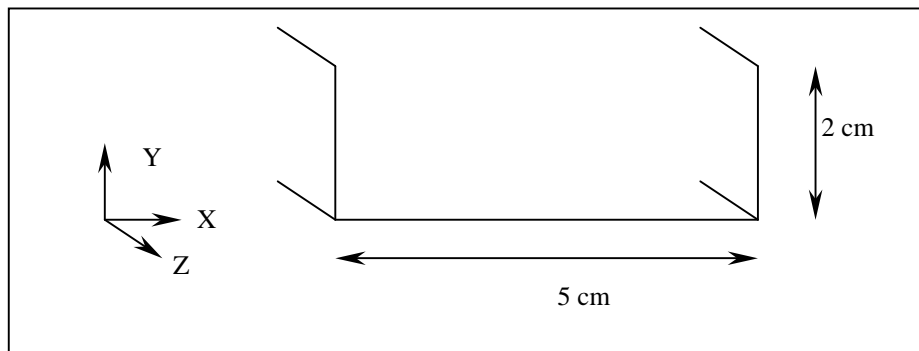
### **3. MODELIZACIÓN DE LA ZONA DE PRESURIZACIÓN EN EXCEL**

#### **3.1. CÁLCULOS REALIZADOS.**

Se ha simulado el comportamiento de un diferencial de tornillo isoterma en el tramo de bombeo del fundido en una extrusora. La temperatura de simulación será 150° C.

Para realizar los cálculos desenrollaremos el tornillo, quedando de esta forma como un canal largo. Se supondrá que sobre el canal hay situada una placa que se mueve a una velocidad  $V_o$ , cuya dirección forma un ángulo  $\phi$  con la dirección Z del canal.

El canal simulado tiene las siguientes dimensiones:



**Figura 12.**

Para un fluido no Newtoniano, la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (100)$$

Integramos esta ecuación para obtener el valor de  $v_z$ , velocidad del polímero en la dirección Z. La integración se va a realizar numéricamente. Tanto la dimensión X como para Y se divide en 10 segmentos, por lo que  $\Delta y = 0.002$  m y  $\Delta x = 0.005$  m.

Así, se prepara una tabla de 10x10 celdas que representa al canal. Las condiciones límite que impondremos serán las siguientes:

- para  $y = 0$   $v_z = 0$ ,
- para  $x = 0$ ,  $v_z = 0$ ,

- para  $x = 0,05$ ,  $v_z = 0$ ,
- para  $y = 0,02$ ,  $v_z = V_o \cdot \cos\phi$ ,

$$(101)$$

Aplicando el método de integración numérica a la ecuación (100) y desarrollando llegamos a la siguiente:

$$v_z^{i,j} = \frac{\left(\frac{\eta_{j+1} - \eta_{j-1}}{2\Delta y}\right)\left(\frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2\Delta y}\right) + \eta_{i,j}\left(\frac{v_{j+1} + v_{j-1}}{\Delta y^2}\right) + \eta_{i,j}\left(\frac{v_{i+1} + v_{i-1}}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta x}\right) - \frac{\partial P}{\partial z}}{2\eta_{i,j}\left(\frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta x^2}\right)} \quad (102)$$

Donde el subíndice “i” representa a la x y el subíndice “j” a la y.

La ecuación anterior será válida para las casillas internas del canal. Por lo tanto, la tabla se rellenará como se indica a continuación:

y/x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
<b>0,02</b>	0	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	$V_o \cos\phi$	0
<b>0,018</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,016</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,014</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,012</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,01</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,008</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,006</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,004</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0,002</b>	0	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	$v_z^{ij}$	0
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

**TABLA 1. Condiciones límite para  $v_z$ .**

Suponemos que  $\frac{\partial P}{\partial z} = 2 \cdot 10^5$  Pa.

Al igual que sucede con la velocidad, como la viscosidad varía de un punto a otro, será necesario preparar otra tabla 10x10 para el cálculo de las viscosidades en cada posición, apareciendo de esta forma  $\eta_{i,j}$ .

Para el cálculo de la viscosidad se ha utilizado el modelo Cross-WLF, cuyas ecuaciones son las siguientes:

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \left( \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau} \right)^{(1-n)}} \quad (103)$$

$$\eta_0 = D_1 \exp \left[ \frac{-A_1(T - T^*)}{A_2 + (T - T^*)} \right] \quad (104)$$

$$T^* = D_2 + D_3 \quad (105)$$

Para un POM, los parámetros de la viscosidad son (vienen en unidades del S.I.):

Parámetros del modelo de viscosidad de Cross-WLF para un POM							
$\eta_0$	$n$	$\tau$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$A_1$	$A_2$
2,579,3	0,2674	228840	$1,06 \cdot 10^{12}$	223,15	0	24,955	51,6

Donde  $\eta_0$  se ha calculado para 150 °C.

El valor para  $\dot{\gamma}$  se calcula de la siguiente forma:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} I_z} = \sqrt{\left( \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2} \quad (106)$$

Por lo tanto, para el cálculo de  $v_z$  es necesario calcular la viscosidad, y para ello, hay que conocer el valor de  $\dot{\gamma}$ , que se calcula a partir de las variaciones de  $v_z$  y de  $v_x$  con respecto a  $x$  e  $y$ . Se da pues que para calcular  $v_z$  hay que conocer antes su valor. La resolución de este problema se planteará más adelante. Ahora vamos a ver como se calcula  $v_x$ .

De la ecuación de movimiento en esta dirección se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \left[ \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \right] \quad (107)$$

Las condiciones límite son:

- para  $y = 0$   $v_x = 0$ ,
- para  $x = 0$ ,  $v_x = 0$ ,
- para  $x = 0,05$ ,  $v_x = 0$ ,

$$- \text{ para } y = 0.02, v_x = V_o \cdot \text{sen}\phi, \quad (108)$$

Igual que se ha realizado para el cálculo de  $v_z$ , utilizamos el método numérico para la integración de  $v_x$ , resultando:

$$v_x^{i,j} = \frac{\Delta x^2 (v_{j+1} + v_{j-1}) + \Delta y^2 (v_{i+1} + v_{i-1}) - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\Delta y^2 \Delta x^2}{\eta_{i,j}}}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (109)$$

Se utilizará para el cálculo de  $v_x$  una tabla de 10x10 celdas:

y/x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
<b>0,02</b>	0	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	$V_o \text{sen}\phi$	0
<b>0,018</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,016</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,014</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,012</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,01</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,008</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,006</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,004</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0,002</b>	0	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	$v_x^{ij}$	0
<b>0</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLA 2. Condiciones límite para  $v_x$ .

El valor de  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i$  se calcula para cada  $\Delta x_i$  sabiendo que, como en un  $\Delta x_i$  no hay acumulación ni generación de materia, la suma de todos los caudales que pasan por a través de un  $\Delta x_i$  determinado debe de ser cero. Así, se optimiza el valor de  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i$  para hacer que el sumatorio de los caudales de todos los  $\Delta y_j$  que atraviesan a  $\Delta x_i$  valga cero:

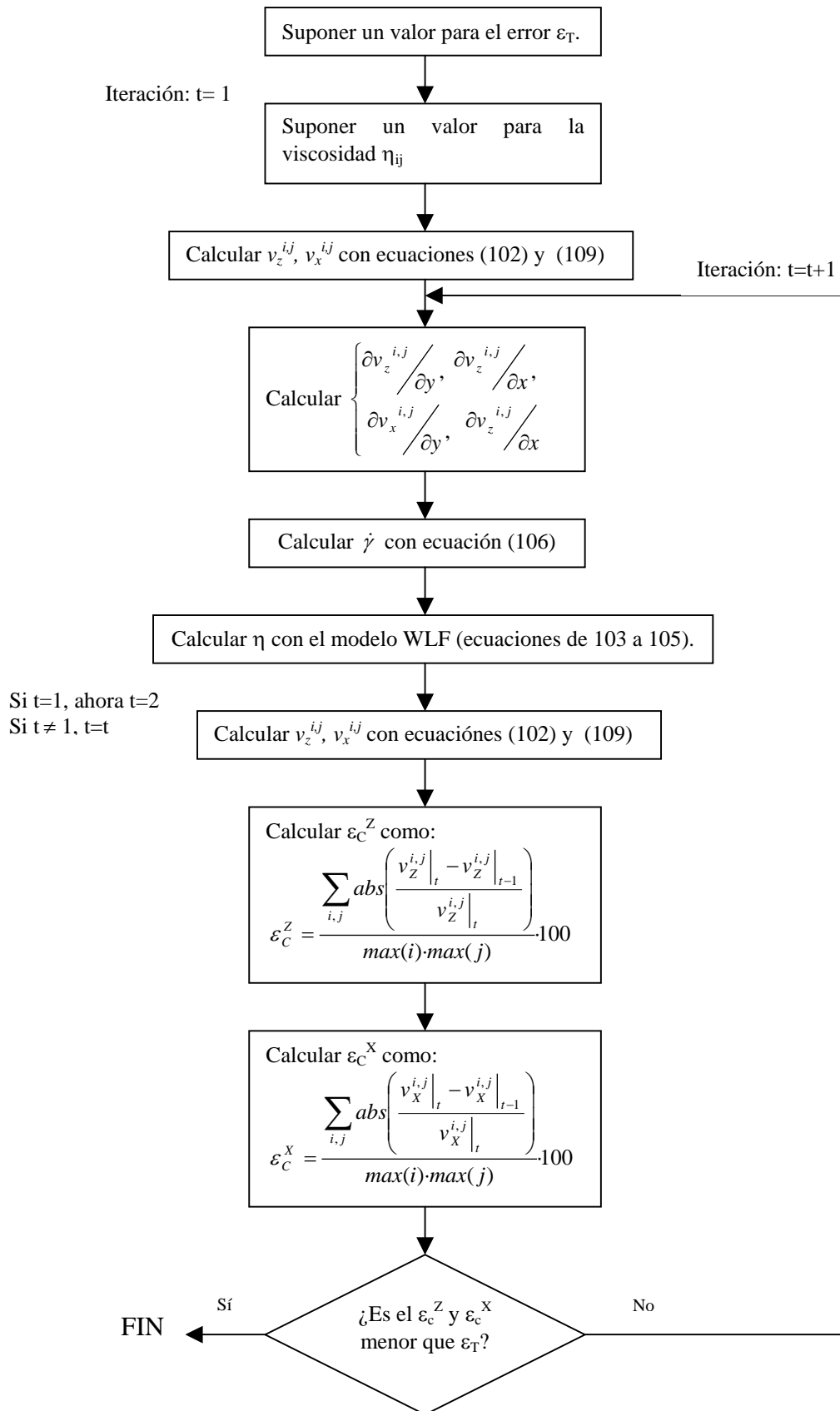
El problema se plantea cuando, optimizado un  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i$ , se pretende optimizar el siguiente. Como todos los elementos de la tabla están interrelacionados, el cálculo de  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i+1}$  provoca cambios en la fila correspondiente a  $v_x^{i,j}$ , por lo que el caudal que pasa por  $\Delta x_i$  ya no es cero. La solución es sumar todos los sumatorios de caudales y hacer cero este valor cambiando todos los  $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i$ :

$$\sum_i \left[ \text{abs} \left( \sum_j v_x^{i,j} \Delta x \cdot \Delta y \right) \right] = 0 \quad (110)$$

Este cálculo es muy lento, al tener que optimizar los 8 valores de  $\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$  para que de cero la ecuación anterior.

La resolución general del problema se realiza mediante iteraciones, que comienzan suponiendo un valor para la viscosidad. Seguiremos el siguiente proceso de cálculo:





### 3.2. RESULTADOS OBTENIDOS.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

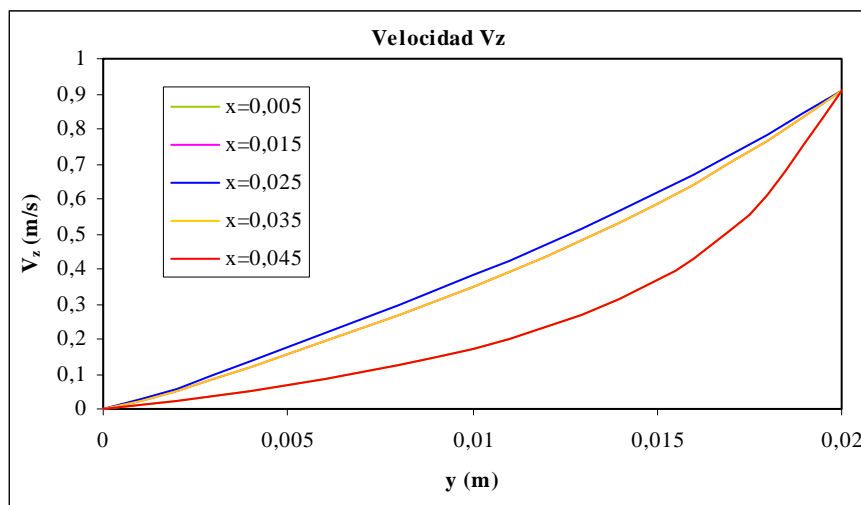
y/x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
0,02	0	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0,9063078	0
0,018	0	0,6102246	0,7314663	0,7671802	0,7801679	0,7835695	0,7801664	0,7672329	0,7314534	0,610113	0
0,016	0	0,4297294	0,5839587	0,6414041	0,66397	0,6700487	0,6639761	0,6414562	0,5839405	0,4296896	0
0,014	0	0,3126818	0,463528	0,5300496	0,5581669	0,5659564	0,5581776	0,5300877	0,4635294	0,3127609	0
0,012	0	0,2319448	0,3656495	0,432298	0,4622338	0,470732	0,4622451	0,4323214	0,3656947	0,2321318	0
0,01	0	0,1726475	0,2848943	0,3458869	0,374521	0,3828046	0,3745313	0,3458955	0,2849956	0,1729114	0
0,008	0	0,1263017	0,2160306	0,2675336	0,2923672	0,2996478	0,2923785	0,2675251	0,2161769	0,1266056	0
0,006	0	0,0878385	0,1543817	0,1936074	0,212738	0,2183964	0,2127529	0,1935859	0,1545363	0,0881309	0
0,004	0	0,0540261	0,0964601	0,1215996	0,1338915	0,1375384	0,1339046	0,1215906	0,0965773	0,0542177	0
0,002	0	0,0229712	0,0403864	0,0506222	0,0556516	0,0571108	0,0556476	0,0506664	0,0404324	0,0229715	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

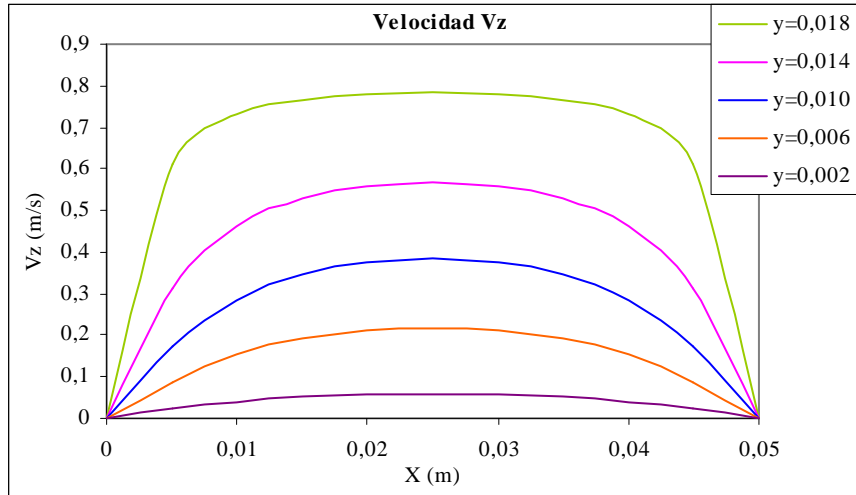
Velocidad  $v_z$

y/x	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05
0,02	0	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0,422618	0
0,018	0	0,217423	0,236762	0,244155	0,24764	0,247756	0,247305	0,245207	0,236607	0,213872	0
0,016	0	0,083284	0,093195	0,101306	0,106038	0,106222	0,1056	0,102828	0,092787	0,078046	0
0,014	0	-0,004681	-0,013013	-0,008398	-0,004074	-0,004013	-0,004528	-0,006702	-0,013629	-0,01064	0
0,012	0	-0,061001	-0,087149	-0,087654	-0,08466	-0,084886	-0,085102	-0,08592	-0,087885	-0,067173	0
0,01	0	-0,094163	-0,133656	-0,138926	-0,137479	-0,138051	-0,137907	-0,137207	-0,134423	-0,100265	0
0,008	0	-0,108948	-0,155631	-0,163975	-0,163718	-0,164574	-0,164141	-0,162291	-0,156346	-0,114784	0
0,006	0	-0,107655	-0,154472	-0,163421	-0,163671	-0,164649	-0,164093	-0,161812	-0,155056	-0,113014	0
0,004	0	-0,09055	-0,129622	-0,136614	-0,136721	-0,137606	-0,137119	-0,135196	-0,130004	-0,095068	0
0,002	0	-0,05583	-0,079039	-0,082466	-0,082263	-0,082842	-0,08256	-0,081506	-0,079188	-0,058757	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Velocidad  $v_x$

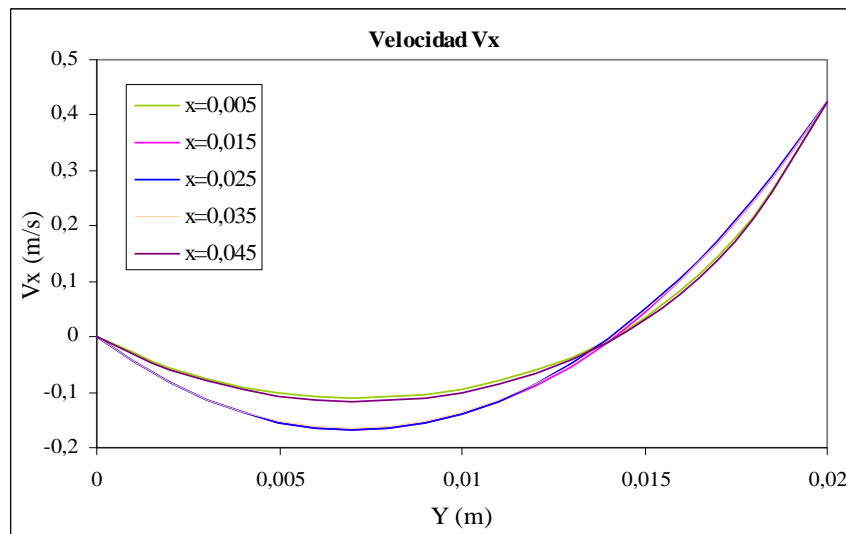
Para la velocidad  $v_z$  podemos dibujar los siguientes resultados:



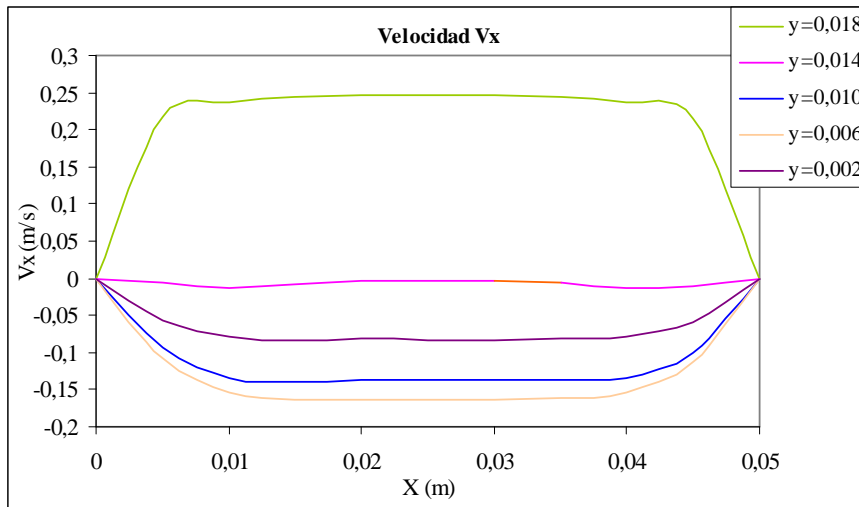


Se observa la simetría de la velocidad en el canal así como la meseta esperada.

Para  $v_x$  tenemos:



Se observa como por el fondo del canal la velocidad tiene valores negativos y por arriba altamente positivos. Estas velocidades se compensan dando un caudal neto cero.



Se observa como los perfiles son simétricos