Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación[1]

Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

Resumen. La relación entre los modelos de aprendizaje de los profesores y el diseño de entornos de aprendizaje es un contexto donde se ejemplifica los procesos de transferencia de conocimiento (relación dialéctica teoría-práctica entre la investigación y la formación de profesores). En este contexto se generan cuestiones relativas a la caracterización del proceso de construcción del conocimiento, las destrezas y creencias necesarias para enseñar matemáticas. Se ejemplifica este análisis en entornos de aprendizaje que integran el análisis de videos, la participación en discusiones on-line y la elaboración de informes en una estructura metodológica que adopta la forma de b-learning.

La formación de profesores enfatiza la necesidad de pensar en la formación en función de estar preparado para realizar "algo" de manera competente al finalizar el proceso educativo, pero además haber adquirido las destrezas que permitan seguir aprendiendo a lo largo de la vida (Llinares, 2007; Llinares & Krainer, 2006). Adoptar estas perspectivas ha favorecido que se generen tres tipos de cuestiones

¿Cuál debe ser el conocimiento y las destrezas de los maestros y profesores de matemáticas (en el sentido de competencia)?
¿Cómo adquieren este conocimiento y destrezas? , y
¿Qué características deben tener las oportunidades de aprendizaje diseñadas para los estudiantes para profesores y las oportunidades de desarrollo profesional de los profesores en ejercicio?

Una manera de aproximarse a una respuesta a estas cuestiones incide en la necesidad de considerar dos aspectos. En primer lugar, analizar la actividad en la que se pretende que el individuo llegue a ser competente (enseñar matemáticas), e identificar el conocimiento que fundamenta dicha actividad y las competencias para su realización. En segundo lugar, tener en cuenta la manera en la que se construye el conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

---

1 Conferencia invitada en *III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas* Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fe de Bogotá, Colombia. Abril 24 y 25 de 2008.

Las actividades que articulan la enseñanza de las matemáticas como referencia para la identificación de competencias docentes

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas se considera que está integrado por diferentes dominios (conocimiento sobre la organización del currículo, los modos de representación y ejemplos más adecuados en cada momento, las destrezas de gestión y comunicación matemática en el aula, etc) (Escudero & Sánchez, 2007; García, 1997; Gavilán et al., 2007-a, 2007-b; Llinares, 2000). Sin embargo, el rasgo que caracteriza el conocimiento del profesor no está sólo en lo que conoce (dominios de conocimiento) sino en lo que hace con lo que conoce (uso del conocimiento) (Eraut, 1996). Se subraya la importancia del uso del conocimiento en la resolución de las situaciones problemáticas generadas en su actividad profesional, es decir la *práctica de enseñar matemáticas* entendida como

- realizar unas tareas (sistema de actividades) para lograr un fin,
- hacer uso de unos instrumentos, y
- justificar su uso

Desde esta perspectiva, la identificación del conocimiento y competencias específicas necesarias para enseñar matemáticas pasa por analizar el "sistema de actividades" que configuran la práctica de enseñar matemáticas. Al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida podemos identificar tres sistemas de actividades que la articulan y los componentes del conocimiento profesional que permiten realizarlas (figura 1) (Llinares, 2004-a). Por ejemplo,

- *analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones matemáticas de sus alumnos* y comparar estas producciones con lo que él pretendía (objetivos). El proceso por el cual los estudiantes para profesor aprenden a interpretar las producciones de los alumnos se apoya en el uso de determinados conocimientos sobre la manera en la que los estudiantes aprende determinadas nociones matemáticas. Ejemplos del uso de este tipo de conocimiento proceden inicialmente de la investigación en didáctica de la matemática sobre cómo los

estudiantes aprenden matemáticas [i,ii].

- *planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo–determinar planes de acción-*. El proceso por el cual los estudiantes para profesor pueden analizar y dotar de significado a este tipo de actividades se apoya en el desarrollo de la capacidad de usar conocimiento conceptual como por ejemplo, la idea de "situaciones didácticas"[iii], "ingeniería didáctica"[iv,] "elementos de la transposición didáctica"[v,] u "organizadores curriculares"[vi,]

- *dotar de sentido y gestionar la comunicación matemática en el aula*– e.g. formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo, subrayar y valorar las diferentes aportaciones, identificar y caracterizar las normas socio-matemáticas que regulan los procesos de comunicación matemática en el aula, etc-. Es decir, evaluar las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático en diferentes contextos sociales de enseñanza, aprendizaje y de comunicación matemática.

Para desarrollar cada uno de estos "sistemas de actividad" el estudiante para profesor debe llegar a ser competente en los diferentes aspectos que los definen, y por tanto "conocer" lo que lo fundamenta generándose de esta manera la competencia docente[2] respectiva. Por tanto, desde la idea de la "actividad de enseñar matemáticas" como núcleo alrededor del cual desarrollar las competencias de ser profesor de matemáticas, podemos derivar la organización de las intervenciones de formación en bloques que se corresponden con los sistemas de actividad que configuran la "actividad de enseñar matemáticas":

2 El término "competencia" ha sido elegido por el proyecto Sócrates-Erasmus "Tuning Educational Structures in Europe" para condensar el significado que mejor puede representar los nuevos objetivos de la educación europea. El concepto de competencia aquí utilizado enfatiza los resultados del aprendizaje considerando lo que el alumno es capaz de hacer al término del proceso educativo y en los procedimientos que le permitirán continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida.
El término de "competencia" conlleva el detallar las "habilidades" que el estudiante debe haber adquirido al superar el curso. Los términos como competencia, destrezas, habilidades, … utilizados en este tipo de discurso pretenden tener un dominio de significado semejante por lo que a veces se utilizan de forma intercambiable. El Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia (19ª Edición, 1970) identifica competencia con Aptitud, e idoneidad; pero el uso del término "competente" para el diccionario de Sinónimos y Antónimos de Espasa Calpe (1994) lo relaciona con capacitado, cualificado, apto, idóneo, entendido, experto, diestro, capaz, especialista, eficiente, eficaz, hábil, preparado. Por lo tanto, preparar a alguien para llegar a ser competente implica pensar en ser competente para "algo". El proyecto Tuning enfatizaba la necesidad de pensar en la formación universitaria en función de estar preparado para realizar "algo" de manera competente al finalizar el proceso educativo y haber adquirido los procedimientos que le permitan seguir aprendiendo. En este sentido, y en el contexto en el que se están usando estos términos en la configuración del espacio europeo de educación superior, el que el estudiante sea capaz, sea eficaz, eficiente, diestro, este preparado para realizar algo se apoya en "conocer", es decir en acceder al "conocimiento" que fundamenta la competencia.

- sobre la organización de los contenidos matemáticos para enseñarlos,
- sobre el análisis e interpretación de las producciones matemáticas de los alumnos, y
- sobre la gestión de los contenidos matemáticos como objetos de enseñaza-aprendizaje en el aula

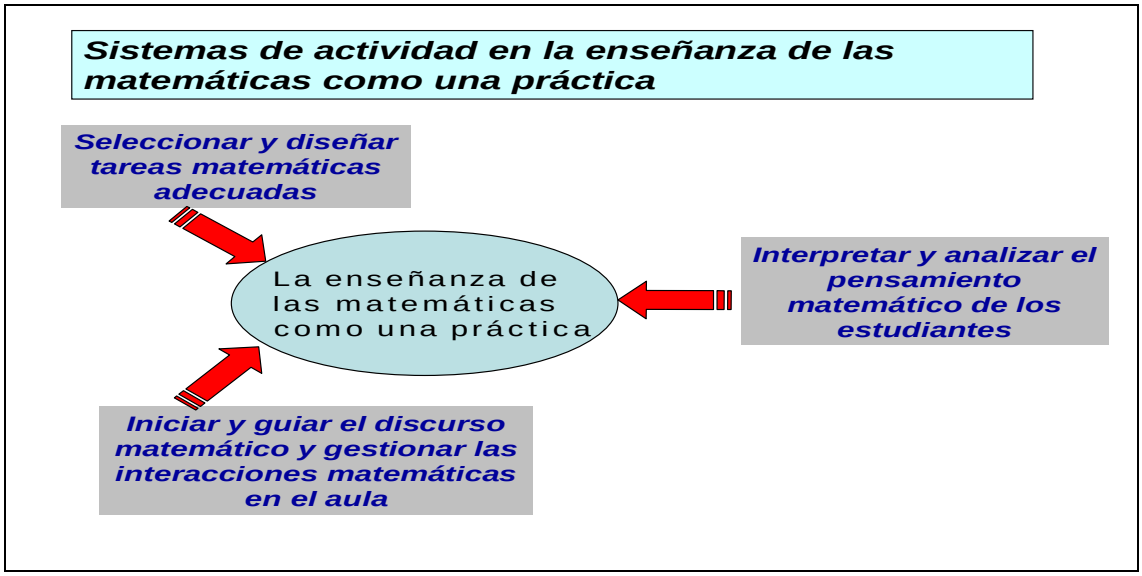

Figura 1. Sistemas de actividad que articulan la enseñanza de las matemáticas como una práctica

Esta organización permite determinar los conocimientos de Didáctica de la Matemática que pueden integrarse como contenidos en el programa de formación y que deberán ser los conocimientos que fundamentan las competencias específicas en cada uno de los sistemas de actividad identificados (Chamorro, 2003; Castro, 2002; D'Amore, 2006). Desde este punto de vista, los conocimientos de Didáctica de la Matemática (vistos ahora como contenidos en el programa de formación) se consideran los instrumentos para ser interpretados y usados para llegar a ser competente en la actividad de enseñar matemáticas por parte de los estudiantes para profesor. Es así como los contenidos de Didáctica de la Matemática son fundamentos de las diferentes competencias / destrezas específicas y generales que se pretenden desarrollar. Por otra parte, el desarrollo de estas competencias debería estar relacionado con los siguientes descriptores en cada uno de los sistemas de actividad identificados (Llinares, 1998-a):

- conocer
- usar para ..... observar
  analizar

interpretar

- usar para actuar/hacer

Una manera de particularizar estos descriptores en cada uno de los sistemas de actividad vinculados a la práctica de enseñar matemáticas sería:

a) sistema de actividad: organizar el contenido matemático para enseñarlo

- conocer los contenidos matemáticos como objeto de enseñanza-aprendizaje,
- usar la información sobre los contenidos matemáticos como objeto de enseñanza-aprendizaje para diseñar, seleccionar y analizar los problemas (actividades, ejercicios) como instrumentos de aprendizaje en la Enseñanza Secundaria (por ejemplo, estableciendo rangos de demandas cognitivas)
- usar el conocimiento sobre el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje, sobre los problemas como instrumentos de aprendizaje y sobre el aprendizaje para diseñar, seleccionar y analizar unidades didácticas
- usar el conocimiento de didáctica de la matemática para evaluar y criticar propuestas y organizaciones curriculares de matemáticas

b) sistema de actividad: analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos

- conocer el conocimiento de didáctica de la matemática sobre teorías del aprendizaje y construcción del conocimiento matemático
- conocer las características del aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos del nivel educativo correspondiente
- usar el conocimiento anterior para interpretar las producciones de los alumnos (oral, escritas, en problemas puntuales o en proyectos,...)
- usar los conocimientos de didáctica de la matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar – dotar de significado a las producciones de los alumnos identificando posibles causas que las justifiquen – y proponer justificaciones y procesos de intervención

c) sistema de actividad: gestionar el contenido matemático en el aula

- conocer e identificar las fases y tipos de lecciones de matemáticas

- conocer e identificar las características que puede adoptar la interacción en el aula en relación al aprendizaje matemático (por ejemplo, las diferentes normas socio matemáticas, el contrato didáctico, ...)
- conocer, identificar e interpretar características del discurso matemático en el aula y su relación con el aprendizaje matemático
- conocer, identificar e interpretar características de la gestión de debates como instrumentos de aprendizaje matemático – formular preguntas que permitan vincular concepciones matemáticas previas con lo nuevo y saber subrayar las diferentes aportaciones apoyando el desarrollo de metacognición en los alumnos y proponer cuestiones matemáticamente desafiantes, para apoyar el progreso de los alumnos a lo largo de la realización de los problemas matemáticos

Características del aprendizaje de las competencias necesarias para enseñar matemáticas (conocimiento y destrezas)

Para diseñar los entornos de aprendizaje en los programas de formación debemos tener en cuenta de manera explicita el modelo de aprendizaje que asumimos. Es decir, pensar en determinar qué características deben cumplir los entornos de aprendizaje creados para este fin debe apoyarse no solo en la respuesta a *qué conocimiento y destrezas se quiere que se aprenda,* sino también a la caracterización de *cómo se aprende.* Desde perspectivas socio-culturales el aprender a enseñar matemáticas consiste en

- aprender a usar instrumentos conceptuales y/o técnicos en la actividad de enseñar matemáticas, y
- participar en un proceso social de construcción del conocimiento.

Estas dos características de lo que supone aprender tienen implicaciones importantes cuando pensamos en el proceso de llegar a ser profesor de matemáticas (construcción de conocimiento y formas de participar en la comunidad de práctica de ser un profesor) y por tanto en la forma en la que diseñemos las oportunidades para aprender a enseñar matemáticas (García y Sánchez, 2002; Llinares, 1999). En las dos próximas secciones describiré una manera de entender estas dos características en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

i) aprender a enseñar matemáticas: aprender a usar "instrumentos" en la actividad de enseñar matemáticas

Ver el "proceso de aprender a enseñar" como un proceso en el que los estudiantes para profesor dotan de significado y usan "instrumentos" para realizar las actividades que constituyen la práctica de enseñar matemáticas se deriva de considerar aprender enseñar matemáticas como una acción mediada por instrumentos[vii]. Las perspectivas socioculturales del aprendizaje amplían el significado dado al término instrumento como un objeto físico para incluir también conceptos, formas de razonar, formas de generar un discurso, entre otras, que condicionan y permiten las interacciones dentro de las comunidades de práctica. Así, podemos considerar, instrumentos técnicos necesarios para realizar la "práctica", como por ejemplo materiales y recursos didácticos – geoplanos -, software didáctico – como el Cabri-Geomètre, Logo -, e instrumentos conceptuales constituidos por los conocimientos conceptuales que fundamentan la práctica de enseñar matemáticas. Es decir, conceptos y construcciones teóricas que permiten que los estudiantes para profesor puedan realizar un análisis más allá de las características superficiales de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y comprender y tratar la realidad (situaciones en las que se enseña y aprende matemáticas).

Por otra parte, centrar el foco de atención en los "estudiantes para profesor utilizando algún tipo de instrumento", se vincula a la idea de que *el uso de un instrumento* cambia cualitativamente el flujo y la estructura de una actividad. Es decir, la forma en la que los estudiantes para profesor usan los instrumentos condiciona la práctica y, por tanto, lo que se está aprendiendo, condicionando de esta manera el proceso de llegar a ser "competente" en la actividad de enseñar matemáticas. Así, la forma en la que un estudiante para profesor "usa un instrumento" particular transforma su propia actividad. Por ejemplo, el uso de la información teórica sobre los problemas aritméticos elementales de estructura multiplicativa por estudiantes para maestros en el análisis de libros de texto puede mostrar diferentes niveles de desarrollo de la actividad de análisis curricular realizada por los estudiantes para profesor en función del nivel de integración de la información teórica en su toma de decisión (García et al., 2006; Llinares, 2002-a). Así, el llegar a ser competente en la práctica de enseñar matemáticas está en función de

que el estudiante para profesor llegue a ser consciente del potencial de los diferentes instrumentos (técnicos y/o conceptuales) de los que dispone para realizar las diferentes actividades que constituye la practica de enseñar matemáticas y ser capaz de elegirlos para usarlos adecuadamente.

Desde esta perspectiva, los instrumentos conceptuales y técnicos desempeñan diferentes papeles en la caracterización de las tareas que definen la práctica de enseñar matemáticas. Mientras los instrumentos conceptuales permiten poseer unas determinadas referencias para interpretar las situaciones de la práctica, condicionando lo que se ve y cómo se ve; los instrumentos técnicos permiten tener los medios para hacer "determinadas cosas" en la práctica. En conjunto, el uso y generación de los instrumentos condiciona las interacciones en el desarrollo de la práctica y, por tanto, la propia práctica.

Por otra parte, cómo incorporar en los programas de formación los diferentes elementos de conocimiento necesarios para desarrollar la práctica de enseñar matemáticas es una tarea vinculada al diseño de entornos de aprendizaje. Es decir, al diseño de oportunidades en las que los estudiantes para profesor puedan tener la posibilidad de dotar de significado y usar los medios que les permitan desarrollar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

ii) aprender a enseñar matemáticas: aprender como un asunto de participación en un proceso social de construcción del conocimiento

La segunda característica derivada de las perspectivas socioculturales del aprendizaje y que es una referencia en el diseño de los entornos de aprendizaje es asumir que aprender a enseñar matemáticas es un asunto de participación en un proceso social de construcción del conocimiento (Callejo, Valls y Llinares, 2007; Callejo, Llinares y Valls, 2007; Llinares, 2004-b). Esta idea lleva a subrayar la importancia de analizar las relaciones entre

- los instrumentos (conceptuales y/o técnicos),
- las características del uso de los diferentes instrumentos en los diferentes sistemas de actividad de la práctica de enseñar matemáticas,

- la naturaleza de los entornos de aprendizaje diseñados en los programas de formación (las formas en las que los estudiantes para profesor y los formadores de profesores interactúan definen una cultura y un contexto de aprendizaje), y
- el conocimiento y creencias previas de los estudiantes para profesor que nos permitirá prestar atención a los aspectos de uso de los instrumentos y a las implicaciones de la teoría de aprendizaje que justifica el diseño de los entornos para aprender el conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

Los entornos de aprendizaje basados en estos principios intentan reflejar la idea de que los estudiantes para profesor construyen activamente el significado en colaboración con otros. Desde esta perspectiva las ideas teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática pueden ser usadas como instrumentos para resolver la situación y para guiar la participación y apoyar la comunicación (comunidades de aprendizaje) (Penalva et al., 2005). Diferentes estrategias pueden ser empleadas por los formadores de profesores que reflejen estos dos principios. Sin embargo, estas diferentes estrategias definen roles diferentes en los formadores de profesores que plantean dificultades. Esta situación pone de manifiesto el papel que pueden desempeñar las creencias previas de los estudiantes para profesor y en particular su papel como aprendices. En este contexto, la construcción de comunidades de aprendices no es una tarea fácil ya que se apoya, según Shulman & Shulman (2004), en

- actividades en las que los estudiantes para profesor participan activamente en la discusión,
- reflexión, donde el estudiante para profesor reflexiona y analiza su propio proceso de pensamiento,
- la colaboración, en la que los estudiantes para profesor se apoyan mutuamente, y
- la idea de comunidad, donde la clase se ve no sólo como una colección de individuos sino como una comunidad de aprendices.

La consideración de estos cuatro aspectos en la definición de las oportunidades de aprender a enseñar que los programas de formación deben proporcionar a los estudiantes para profesor traslada el foco de atención de lo *individual a lo social*. Esta traslación nos obliga a ver lo que el individuo aporta a la comunidad y lo que la constitución de una comunidad de aprendices aporta al aprendizaje del individuo.

Establecer pues la relación entre lo individual y lo social en el diseño de los entornos de aprendizaje puede, sin embargo, generar algunas dificultades. Desde este punto de vista se asume que el conocimiento y la forma en que lo utilizamos son productos de las interacciones entre los individuos - la forma en la que los grupos han ordenado sus experiencias y dotan de sentido a su mundo (Putman & Borko, 2000). Desde esta visión del conocimiento como socialmente construido se deriva la idea de que una parte importante de aprender a enseñar es llegar a enculturizarse en una "comunidad de práctica de enseñanza" –es decir, aprender a pensar, hablar y actuar como un profesor de matemáticas. Desde este punto de vista, el formador de profesores toma el papel de "preparador" ("coach") y facilitador que ayuda a que los estudiantes para profesores se impliquen en una indagación y aprendizaje activo, se involucren en procesos de reflexión y razonamiento sobre la práctica de enseñar. La característica que se subraya aquí es que los formadores de profesores, los estudiantes para profesores, los maestros, los profesores de secundaria y tutores de prácticas llevan diferentes tipos de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas a la comunidad. De ahí que, en la comunidad de aprendizaje que se pueda generar a través del establecimiento de diferentes "estructuras de participación", las ideas o conceptos se conciben como herramientas cognitivas con las que pensar y razonar..

La idea de participar en una comunidad como una forma de aprender subraya la necesidad de la coherencia en el discurso- indagación sistemática, critica, reflexión y uso de conceptos como herramientas con las que pensar - en los diferentes entornos de aprendizaje en los que se articulan los programas de formación. Es decir, los estudiantes para profesor deben construir su comprensión personal de los componentes del conocimiento profesional (vistos como instrumentos de la práctica de enseñar matemáticas) investigando casos de enseñanza y reflexionando sobre sus propias creencias relativas a la naturaleza de las matemáticas.

Las perspectivas socioculturales de la cognición van más allá de la idea de que la cognición es algo más que una propiedad de los individuos, señalando que está "distribuida" a través de diferentes personas, y diversos "artefactos simbólicos o físicos" - sistemas de representación de las ideas, software y ordenadores como instrumentos que permiten hacer matemáticas de manera diferente, etc. Esta manera de entender la cognición es relativamente reciente y reconoce la necesidad de buscar un equilibrio

entre actividades que sólo fomentan el desarrollo de competencias individuales con actividades que reconozcan el aprendizaje compartido (Penalva et al., 2005). Este punto de vista se apoya en la idea de que los instrumentos y sistemas de simbolización utilizados en los discursos -pensar sobre la enseñanza de las matemáticas y el papel del profesor - transforma la cognición implicada - con lo que vuelve a surgir la idea del uso de los conceptos como herramientas con las que pensar en las actividades de análisis y reflexión sobre la práctica.

Por otra parte, los recursos que las nuevas tecnologías han puesto al alcance de los formadores de profesores tales como el correo electrónico, los foros virtuales de discusión o los recursos multimedia (Llinares, 2002-b; Mousley et al., 2003; Rey et al., 2007; Roig & Callejo, 2006; Valls et al., 2003) empiezan a ser integrados como materiales y recursos docentes en los programas de formación y permiten desarrollar unas características del intercambio de información y perspectivas de análisis de las situaciones de enseñanza. La arquitectura no lineal de estos recursos - por ejemplo los derivados de la tecnología multimedia - donde segmentos de video, información teórica, reflexiones de profesores expertos y espacios virtuales para el intercambio de interpretaciones están al alcance de los estudiantes para profesor- permite que los productos de la reflexión, indagación sistemática o crítica puedan ser diferentes (Llinares & Olivero, en presna). En este tipo de contextos, la representación digital de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas posibilita que los estudiantes para profesor lleguen a conocer diferentes perspectivas para analizar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas procedentes de profesores tutores, formadores de profesores y otros estudiantes para profesor. De esta manera, pensar en el papel de los recursos tecnológicos para crear nuevos tipos de comunidades de aprendizaje para los profesores, y en la influencia que puedan tener en caracterizar de manera diferente el conocimiento del profesor, plantea nuevos interrogantes para la investigación centrada en el análisis del conocimiento profesional y el aprendizaje del profesor.

La consideración de estos aspectos en el diseño de entornos de aprendizaje para los estudiantes para profesor de matemáticas es un ejemplo de cómo parte de los programas de formación pueden empezar a articularse teniendo en cuenta principios teóricos procedentes de las teorías del aprendizaje de los profesores (Callejo, Valls y Llinares

2007; Cos & Valls, 2006; Llinares & Valls, 2007). En las próximas secciones se describe un ejemplo del diseño de entornos de aprendizaje que intenta reflejar los principios teóricos sobre el aprendizaje derivados desde perspectivas socioculturales descritas anteriormente.

Una experiencia b-learning en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Alicante

El B-Learning (*formación combinada*, del inglés *blended learning*) consiste en un proceso docente semipresencial; esto significa que un curso en este formato incluirá tanto clases presenciales como actividades de e-learning[viii]. El B-Learning puede ser logrado a través del uso mezclado de recursos virtuales y físicos. Un ejemplo de esto podría ser la combinación de materiales basados en la tecnología (e-learning) y sesiones presenciales. Esta estructura metodológica esta siendo usada en una asignatura de Didáctica de la Matemática en el Grado de Matemáticas en la Universidad de Alicante (Llinares, 2004-c). Esta asignatura consta de 60 horas de formación cuyos objetivos y contenidos se organizaron considerando las competencias (conocimiento y destrezas) vinculadas a los sistemas de actividad que configuran la práctica de enseñar matemáticas que se recogen a continuación:

Módulo I. Competencia matemática y enseñanza I.1.Competencia matemática, análisis curricular y análisis de tareas Módulo II. Aprendizaje matemático: Características del razonamiento matemático de los estudiantes II.1. Aprendizaje matemático y resolución de problemas Módulo III. Enseñanza de las matemáticas III.1. Características de la interacción en el aula. Comunicación y discurso matemático en el aula

Tabla 1. Competencias vinculadas a los sistemas de actividad que configuran la práctica de enseñar matemáticas

Objetivos de las asignatura / competencias (2007-08)
> Conocimiento: Comprender y usar criterios de análisis de actividades y del currículo de matemáticas de la Educación Secundaria. Análisis de los contenidos matemáticos de la Educación Secundaria
> Competencia: Desarrollar la aptitud para seleccionar y secuenciar actividades, unidades didácticas, textos y organizaciones curriculares

> Conocimiento: Comprender y usar modelos teóricos sobre los procesos de aprendizaje de las matemáticas (razonamiento matemático de los estudiantes). Estudio de teorías de aprendizaje del conocimiento matemático y de las características del pensamiento matemático de los estudiantes.
> Competencias. Desarrollar la aptitud para interpretar los procesos de aprendizaje matemático

> Conocimiento: Comprender y usar criterios de análisis para la enseñanza de las matemáticas (interacción y gestión)
> Competencia: Desarrollar la aptitud de interpretar y aplicar características de la interacción y gestión del contenido matemático en la clase de matemáticas

> Conocimiento y competencia: Conocer y usar recursos y materiales para la enseñanza de las matemáticas. Introducción al uso de ejemplos de software dinámico y nuevas tecnologías como instrumentos de enseñanza de las matemáticas. Manejo de nuevos instrumentos interactivos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde las TICs.

Tabla 2. Objetivos/Competencias de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Grado de Matemáticas

Metodológicamente se realiza una aproximación b-learning en la que el 50% de la materia se desarrolla de manera presencial (face-to-face, F2F) y en el otro 50% los estudiantes participaban en entornos de aprendizaje virtuales. La parte virtual se organizó a partir del módulo III (tabla 1) sobre la enseñanza de las matemáticas (Figura 3). Uno de los objetivos de este módulo es que los estudiantes para profesor aprendan a "ver", a "mirar", situaciones de enseñanza, entendiendo esta manera de "ver" como la capacidad de relacionar los sucesos de una clase con principios teóricos procedentes de didáctica de la matemática (Llinares, 2006). Empezar a relacionar lo que ocurre en el proceso de enseñanza de las matemáticas y el conocimiento teórico desde la didáctica de la matemática permite que los estudiantes para profesor interpreten y expliquen diferentes aspectos de una lección de matemáticas, vinculando lo particular a lo general y por tanto ello puede ser el germen del desarrollo del conocimiento profesional. Desde este punto de vista, el hecho de que los estudiantes para profesores de matemáticas generen una perspectiva interpretativa de la enseñanza de las matemáticas se vincula al propósito de llegar a comprender lo que sucede en las aulas de matemáticas (Llinares, 2006). La parte virtual de la asignatura constaba de tres entornos de aprendizaje con la misma estructura metodológica y que están activos cada uno durante quince días (en total 45 días).

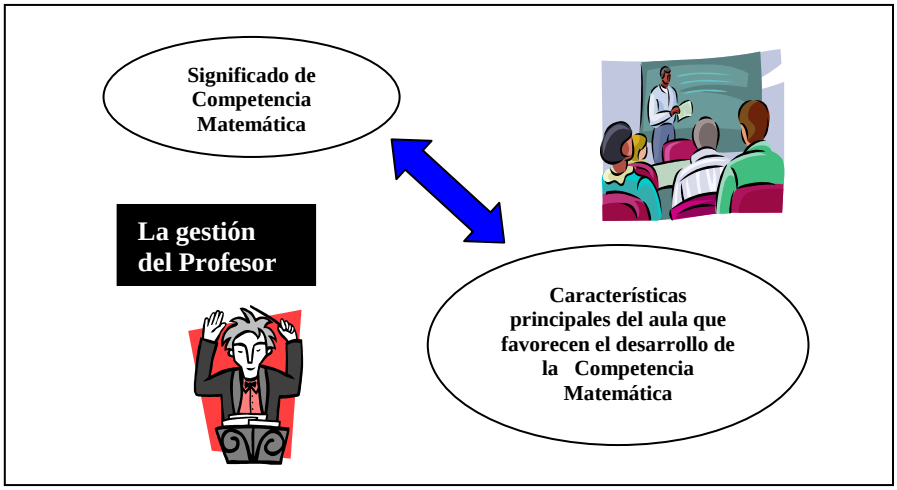

Figura 2. Conocimiento de Didáctica de la matemática necesario *para la resolución de la actividad propuesta*

Secuencia de tareas y debates virtuales

Los estudiantes para profesor deben realizar cuatro tipos de tareas-actividades diferentes (Figura 4).

(a) visionar un video-clip en el que un profesor de matemáticas gestiona las interacciones de un pequeño grupo de estudiantes de 3º de Educación Secundaria (alumnos de 14-15 años) mientras resuelven un problema sobre funciones;

(b) leer unos documentos sobre la idea de competencia matemática y sobre las características de un clase de matemáticas que potencien el desarrollo de los diferentes dimensiones de esta competencia;

(c) participar en un debate virtual para intercambiar y consensuar los análisis e interpretaciones realizados de la situación de enseñanza propuesta, y

(d) escribir un informe en pequeño grupo sobre lo realizado.

Las preguntas planteadas para el debate virtual fueron las siguientes:

> *¿Qué dimensiones de la competencia matemática se potencian en la interacción de Sara (la profesora) con sus alumnos?*
>
> *¿Qué aspectos de la enseñanza (tarea matemática propuesta, metodología, gestión de la enseñanza…) influyen en el desarrollo de las diferentes dimensiones de la competencia matemática en esta situación?*

Entendemos que los estudiantes para profesor construyen conocimiento útil para gestionar como profesores la interacción en pequeño grupo: (a) identificando diferentes aspectos que configuran una secuencia en la que una profesor/a está enseñando las funciones a sus alumnos; (b) identificando e interpretando cómo se favorece el desarrollo de la competencia matemática seleccionando o modificando las variables didácticas del enunciado de una tarea; (c) interpretando las respuestas de los alumnos, y orientando los procesos de resolución (gestión del profesor); y finalmente (d) relacionando entre sí de forma sistémica los elementos anteriores justificándolos desde la teoría para explicar las situaciones reales de enseñanza.

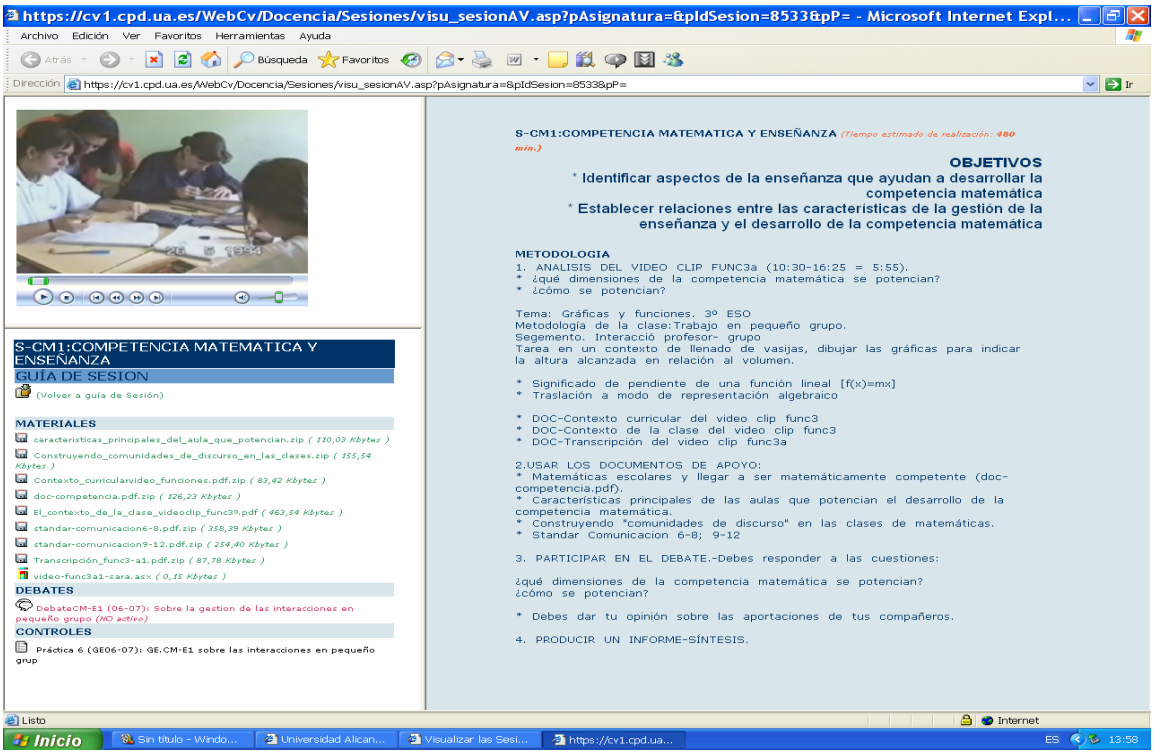

Figura 3. Pagina de entrada al entorno virtual en el que se implementó el entorno de aprendizaje diseñado en el experimento de enseñanza

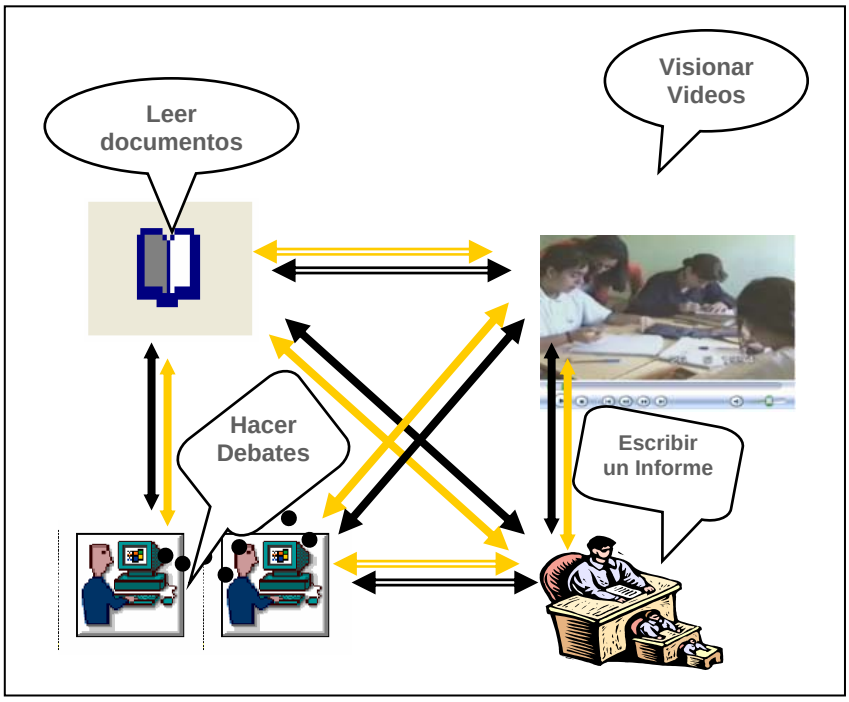

Figura 4. Estructura metodológica del entorno de aprendizaje diseñado en el experimento de enseñanza

De esta manera el entorno de aprendizaje virtual diseñado tiene en cuenta una determinada manera de entender el aprendizaje del estudiante para profesor (Llinares,

2004-b), las características específicas de las tareas que pueden ayudar a desarrollar las destrezas de aprender desde el análisis de la enseñanza, y el papel que puede desempeñar la relación entre la interacción con otros y la construcción del conocimiento (Valls et al., 2006, 2007).

Reflexiones finales

Una estructura metodológica b-learning como la descrita permite ampliar el tiempo para el análisis de la enseñanza al permitir que los estudiantes para profesor puedan acceder a los materiales e interaccionar entre ellos sin las limitaciones físicas de estar en un mismo sitio en un mismo momento. Sin embargo, es necesario preguntarse por las características de cómo los estudiantes para profesor desarrollan las competencias que se requieren para desenvolverse adecuadamente en este tipo de entorno semipresencial. Este último aspecto determina que sea necesario vincular una agenda de investigación sobre el aprendizaje del profesor al contexto práctico de formar profesores. En particular, el diseño de la estructura b-learning descrita generó una aproximación metodológica a la investigación sobre el aprendizaje del profesor denominada "design-based research" (Design-Based Researcher Collective, 2003) que implica determinados ciclos de planificación-implementación –análisis con el objetivo de ampliar nuestra comprensión sobre la influencia del tipo de estructura metodológica utilizada (tipos de tareas, interacción, complemento de actividades presenciales y virtuales, etc) en la manera en la que los estudiantes para profesor empiezan a generar las competencias necesarias para enseñar (Penalva et al., 2006).

Referencias

Callejo, M.L.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la escuela,* vol. 61, pp. 5–21.

Callejo, ML.; Llinares, S,. y Valls, J. (2007) El uso de video-clips para una práctica reflexiva. Comunicación presentada en las *XIII Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas* – JAEM. Granada, Julio.

Castro, E. (Ed.) (2002). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

Chamorro, C. (ed.) (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Cos, A. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKE*, nº 14, 7-28.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Design-Based Researcher Collective (2003). Design- Based Research: An Emerging paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher,* 32(1), 5-8.

Escudero, I. & Sanchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice?. *Journal of Mathematical Behavior,* 26, 312-327.

Escudero, I. & Sanchez, V. (2008). A Mathematics Teachers' perspective and its relationship to practice. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 6(1) 87-106.

Eraut, M. (1996). *Developing Professional Knowledge and Competence*. London: The Falmer Press.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: GIEM-Kronos

García, M. y Sánchez, V. (2002) Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática. Adoptando una perspectiva situada. En L.C. Contreras & L. Blanco (eds.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 59-89). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres.

García, M.; Sánchez, V.; Escudero, I. & Llinares, S. (2006). The Dialectic Relationship Between Research and Practice in Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 109-128.

Gavilán, J.M., García, M. & Llinares, S. (2007-a) Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.

Gavilán, J.M.; García. M. & Llinares, S. (2007-b). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática,* 19(2), 5-39

Llinares, S. (1998-a) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática,* nº 17, 51-64.

Llinares, S. (1998-b) Aprender a enseñar Matemáticas en la enseñanza Secundaria. Relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista interuniversitaria de Formación del profesorado,* nº 32, Mayo/Agosto, pp.117-127

Llinares, S. (1999) Preservice Elementary Teachers and Learning to Teach Mathematics. Relatinship between context, task and cognitive activity. En N. Ellerton (ed.) *Mathematics Teacher Development: International Perspectives.* Australia Meridian Press, pp. 107-119

Llinares, S. (2000) Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas (pp.109-132). En J.P. da Ponte & L. Serrazina (Org.) *Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Itália*. Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Pottuguesa de Ciencias de Educaçao, Lisboa

Llinares, S. (2002-a). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En G.C. Leder, E. Pehkonen & G. Torner (eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 195-209). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Llinares, S. (2002-b) Arrivare ad essere insegnante di matematica: "casi" e "dibattiti elettronici". *La matematica e la seua didactica,* 3(2), 258-277

Llinares, S. (2004-a). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática,*

36, 93-115.

Llinares, S. (2004-b). *Construir conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Prácticas sociales y tecnológicas.* Conferencia presentada en Seminario ticinese sulla didáctica della matemática. L'Alta Scuola Pedagógica (ASP): Locarno.

Llinares, S. (2004-c). Building virtual learning communities and the learning of mathematics student teachers. Invited Regular Lecture in ICME-Copenhagen, Julio.

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a ver la enseñanza de las matemáticas. En Sbaragli, S. & D´Amore, B. (eds.) (2006). *La Matemática e la seua Didattica, ventánni diimpegno.* (pp.177-180). Roma: Carocci Faber.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future, (pp. 429-459). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Llinares, S. & Valls, J. (2007). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science,* DOI 10.1007/s11251-007-9043-4.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores e innovación en la enseñanza de las matemáticas*. Documento de trabajo. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España.

Llinares, S. & Olivero, F. (en prensa). Interactions and new forms of discourse in prospective mathematics teachers' learning. The role of information and communication tools. En T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volumen Editor), *International handbook of mathematics teacher education. Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams and networks*. Rotterdam: Sense Publishers.

Mousley, J.; Lambdin, D. & Koc, Y. (2003). Mathematics teacher education and technology. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.), Second international handbook of mathematics education, (pp. 395-432). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Penalva, MC.; Valls, J.; Cos, A.; Rey, C.; Llinares, S. y Torregrosa, G. (2005). La comunicación en un entorno virtual de aprendizaje de Didáctica de la Matemática. Comunicación presentada en las *III Jornadas de Redes de Investigación en docencia universitaria. La configuración del espacio Europeo de Educación Superior*. Alicante: Universidad de Alicante, pp. 1–14.

Penalva, MC.; Escudero, I. y Barba, D. (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica.* Granada: Proyecto Sur.

Penalva, MC.; Torregrosa, G.; Escudero, I.; Gavilán, JM. y Roig, A. (2006). Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización. En Penalva, MC.; Escudero, I. y Barba, D. (eds.) *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica.* Granada: Proyecto Sur.

Putnam, R. & Borko, H. (2000) What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning. Educational Researcher, 29(1), 4-15

Rey, C.; Penalva, C. y Llinares, S. (2007). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Quadrante* , vol. XV, pp. 95–120, (2007)

Roig, A.I. y Callejo, M.L. (2006). El campus Virtual: Un espacio para el trabajo autónomo y colaborativo en la formación inicial de maestros. Comunicación presentada en el *V Congreso de aplicación de las nuevas tecnologías a la docencia presencial y E-*

Learning. Valencia. Mayo.

Valls, J.; Cos, A. & Llinares, S. (2003). Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education. En *Advances in Technology-based Education: toward a Knowledge-based Society. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003)*. (pp. 1386-1390). Badajoz, España.

Valls, J.; Llinares, S. y Callejo, M.L. (2006). Video-Clips y análisis de la enseñanza. Construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En M.C. Penalva, I. Escudero, & D. Barba (eds.). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas*. Granada: Proyecto Sur.

Valls, J.; Callejo, M.L. y Llinares, S. (2007). *Entornos virtuales de aprendizaje. Interacción y construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.* Comunicación presentada en el XI Simposio de la SEIEM, Adeje, Tenerife. Septiembre.

Shulman, L. & Shulman, J. (2004). How and what teachers learn: a shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies*, 36(2), 257-271.

---

[i] Sánchez-matamoros, G.; García, M. & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.

[ii] Llinares, S. & Roig, A.I. (2006). Secondary school students' construction and use of mathematical models in solving word problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI 10.1007/s10763-006-9055-6

[iii] G. Brousseau (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

[iv] M. Artigue (1992) Didactic engineering. En R. Douady & A. Mercier (eds.) *Research in "Didactique" of Mathematics.* La pensee Sauvage, Pb: Grenoble

[v] Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE-UB; Horsori editorial: Barcelona

[vi] Rico, L. (1997) Los organizadores del currículo de Matemáticas (39-60). En L. Rico (coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE-UB; Horsori editorial : Barcelona

[vii] Esta suposición se apoya en la idea de que las personas pensamos y actuamos ayudadas por instrumentos. El significado del término *instrumento* como "*cualquier medio, cosa o persona de que alguien se sirve para un fin"* (Diccionario de uso del Español de María Moliner), *"(fig.) lo que sirve de medio para hacer una cosa o conseguir un fin./ Aquello de lo que nos servimos para hacer una cosa*" (Diccionario de la Lengua Española, RAE, Espasa Calpe) conlleva la idea de un objeto diseñado y empleado para ampliar el poder de las acciones del individuo.

[viii] http://es.wikipedia.org/wiki/B-learning (acceso 22-enero 2008)