Investigación en Educación Matemática XIX

3, 4 y 5 de septiembre de 2015 · Facultad de Educación

Departamento de Innovación y Formación Didáctica — Área de Didáctica de la Matemática

http://web.ua.es/es/investigacion-educacion-matematica/

Editoras

Ceneida Fernández Verdú   Marta Molina González   Núria Planas Raig

Organizan

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Departament d'Innovació i Formació Didàctica
Departamento de Innovación y Formación Didáctica

SEIEM

Colaboran

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Vicerrectorado de Campus y Sostenibilidad
Facultad de Educación

GENERALITAT VALENCIANA

VALOR 1881 CHOCOLATES

MELIÃ ALICANTE

Investigación en Educación Matemática

XIX

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Investigación en Educación Matemática
XIX

Ceneida Fernández, Marta Molina y Núria Planas (eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Alicante, 3, 4 y 5 de septiembre de 2015

Investigación en Educación Matemática XIX

Edición científica

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Ceneida Fernández Verdú
Marta Molina González
Núria Planas Raig

Cítese como:

C. Fernández, M . Molina y N. Planas (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX*. Alicante: SEIEM.

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada*: Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante.*

Servicio editorial: Universidad de Alicante
ISBN: 978-84-9717-385-8
ISSN: 1888-0762
Depósito legal: A 602-2015

LA APREHENSIÓN COGNITIVA EN PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES LINEALES

Cognitive apprehension in linear pattern generalization problems

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo del estudio es examinar qué tipo de aprehensiones cognitivas utilizan alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal. 81 alumnos de 5º y 6º curso resolvieron dos problemas de generalización lineal que diferían en la configuración de la sucesión de figuras dadas (mesas cuadradas o mesas en forma de trapecio). Los resultados indican que la configuración de la sucesión de figuras condiciona el tipo de aprehensión utilizada por los alumnos; en algunos casos tienen dificultades para cambiar de aprehensión.

Palabras clave: *Generalización de patrones, aprehensión cognitiva, patrones lineales, estudiantes de primaria*

Abstract

The aim of this study is to examine the type of cognitive apprehension that primary school students use when solving linear generalization problems. 81 primary school students solved two linear generalization problems which differed on the configuration of the succession of figures provided (squared tables or trapeze-shaped tables). Results showed that the configuration of the succession of figures provided influences the type of apprehension used by students showing, in some cases, difficulties for changing the apprehension.

Keywords: *Pattern generalization, cognitive apprehension, linear patterns, primary school students*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, un objetivo importante de la investigación ha sido proporcionar información sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza. Esta línea de investigación denominada "Álgebra temprana", considera que el pensamiento algebraico debe tener un lugar en el currículum de Educación Primaria (Cai y Knuth, 2011; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Socas, 2011; Vergel, 2015) y propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas tratando de que haya una continuidad entre ambas.

La generalización de patrones es uno de los contextos en los que es posible empezar a desarrollar formas de pensamiento algebraico en la Educación Primaria. Investigaciones recientes han mostrado que los estudiantes de los primeros cursos son capaces de comprender algunos aspectos de la generalización de patrones antes de ser introducidos el álgebra formal (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011; Rivera y Becker, 2011; Vergel, 2015). Estos estudios muestran la importancia de centrar la atención de los estudiantes de los primeros niveles en comprender patrones, relaciones funcionales, y usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones entre cantidades.

Una propuesta en esta línea es trabajar con problemas de generalización de patrones lineales con figuras (Radford, 2011), donde se pide a los alumnos describir y extender la sucesión y predecir

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

términos lejanos. En este contexto el objetivo de este trabajo es identificar los tipos de aprehensiones cognitivas que utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras.

PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Zapatera y Callejo (2011) definen los problemas de identificación de patrones lineales como:

> "aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos f(1), f(2), f(3),… de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular f(n) para n "pequeño" y para n "grande" y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín" (p. 600)

En estos problemas Stacey (1989) distingue dos tipos de cuestiones: las que piden la búsqueda del siguiente término u otro término al cual se pueda llegar mediante recuento, una tabla o un dibujo (generalización cercana); y las cuestiones en que los procedimientos anteriores resultan laboriosos y es necesario la identificación de un patrón o regla general (generalización lejana). Se han identificado tres tipos de estrategias de estudiantes en la resolución de problemas de generalización lineal (Stacey, 1989): 1) estrategia recursiva, donde el estudiante observa que cada término aumenta con una diferencia constante y calcula un término apoyándose en el anterior; 2) estrategia funcional, en la que el estudiante identifica la relación funcional entre la posición (término) y el número de elementos que lo componen siendo capaz de hallar un término específico –generalización local– o un término cualquiera –generalización global–; 3) razonamiento proporcional, donde el estudiante utiliza multiplicaciones o reglas de tres, a veces de forma errónea, para hallar un término. También se ha identificado el uso de una representación gráfica, reproduciendo el término que se pide y contando sus elementos (Radford, 2011; Zapatera y Callejo, 2011).

En unos casos los estudiantes responden a las cuestiones de generalización lejana haciendo consideraciones de tipo numérico, por ejemplo elaborando una tabla y observando regularidades, mientras que en otros casos responden apoyándose en las figuras. La segunda forma de proceder implica un proceso de visualización denominado *aprehensión cognitiva*.

FORMAS DE APREHENSIÓN COGNITIVA

La acción de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una *aprehensión cognitiva*. Esta acción no es unívoca, pues hay diferentes formas de "ver" un dibujo o de interpretar un estímulo visual. Duval (1993) distingue cuatro formas de aprehensión cognitiva (Figura 1):

- *Aprehensión perceptiva*. Se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. En esta forma de aprehensión se pueden percibir varias sub-configuraciones. Por ejemplo la configuración mostrada en la Figura 1 se puede ver como cuadrados consecutivos rodeados de arcos de circunferencia, como la decoración de un mantel, etc.

- *Aprehensión secuencial*. Se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas. Por ejemplo en la Figura 1 la aprehensión secuencial puede emerger de reconocer que la construcción (mental o física) del término siguiente requiere introducir un cuadrado y dos arcos.

- *Aprehensión discursiva*. Se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades…) que determinan el objeto representado. Por ejemplo a la configuración De la Figura 1 se le puede asociar la expresión "4 cuadrados están rodeados de 2 x 4 arcos arriba y abajo, más 2 arcos en los extremos, en total 10 arcos."

- *Aprehensión operativa*. Se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos. Por ejemplo podemos modificar la configuración inicial de la Figura 1, separando un cuadrado del extremo izquierdo y los arcos que lo rodean, y añadiéndole un arco del extremo derecho.

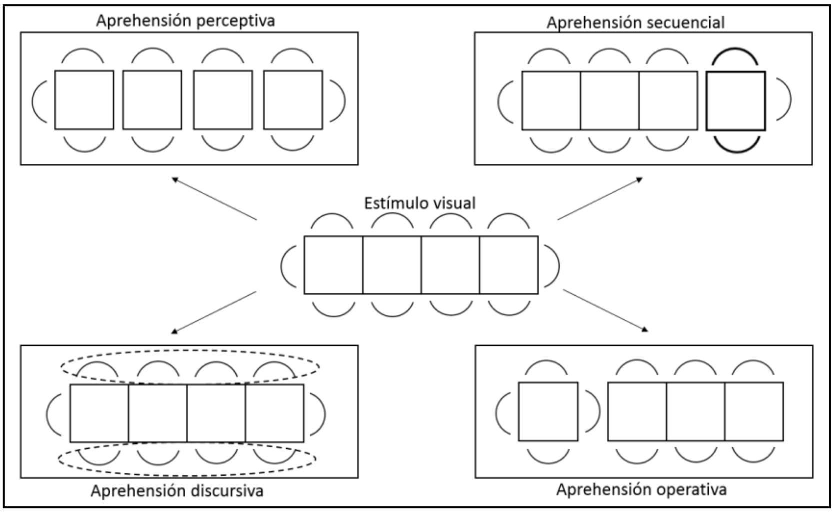


Figura 1. Ejemplos de aprehensiones. Adaptado de Samson y Schäfer (2011, p. 39)

En el contexto de los problemas de generalización lineal, cuando el resolutor se apoya en las figuras para responder a las cuestiones, podemos asociar las estrategias antes expuestas a distintas formas de aprehensión cognitiva:

- El uso de una representación gráfica se apoya en una aprehensión perceptiva, pues el resolutor se limita a identificar la configuración presentada y a reproducir la que se pide, sin asociarle explícitamente afirmación matemática alguna.
- La estrategia recursiva se apoya en la aprehensión secuencial, pues el resolutor identifica un orden en la sucesión de figuras y el patrón de crecimiento; se apoya en un término para construir el siguiente.
- La estrategia funcional se apoya en aprehensión discursiva o en la operativa, pues el resolutor asocia las configuraciones a expresiones matemáticas para identificar el número de elementos de términos específicos o del término general. Si descompone la figura en partes se apoya en una aprehensión discursiva, y si la transforma en una aprehensión operativa.

En general, los estudiantes que utilizan la estrategia proporcional no suelen apoyarse en la figura, sino que identifican una regularidad, la relación de proporcionalidad, que no siempre es correcta.

Tomando estudios previos y la importancia de analizar características del pensamiento algebraico de los alumnos de Educación Primaria en problemas de generalización lineal, nos preguntamos: ¿Qué tipo de aprehensiones utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras?

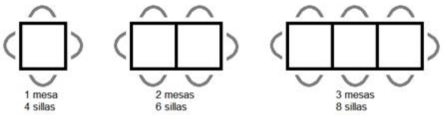
MÉTODOS

Participaron 81 alumnos de educación primaria (35 de quinto curso y 46 de sexto), quienes no habían recibido formación explícita sobre resolución de problemas de generalización lineal.

Para la recogida de datos, diseñamos un cuestionario con dos problemas de generalización lineal. En el primero se presenta una sucesión de figuras formadas por mesas cuadradas alineadas (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008); el segundo es una variante del primero con una sucesión de figuras formadas por mesas en forma de trapecio (Figura 2). En ambos casos se muestran los tres primeros términos de una sucesión de forma gráfica y se plantean cinco cuestiones: las cuestiones 1 y 2 corresponden a la generalización cercana, la 3 a la generalización lejana, la 4 a la inversión y la 5 a la regla general.

Problema 1. Mesas cuadradas

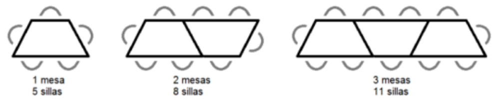
Actividad 1: En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos.



1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Problema 2. Mesas en forma de trapecio

Actividad 2: Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. Como puedes ver, alrededor de una mesa hemos colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 11 sillas.



1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 56 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Figura 2. Problemas propuestos

Para responder las cuestiones 2 a 5 de estas tareas se puede centrar la atención en el patrón de crecimiento cuantitativo (por cada mesa que se añade el número de sillas aumenta en 2 o en 3) estableciendo así una relación recursiva (aprehensión secuencial), o apoyarse en la aprehensión discursiva u operativa de las figuras, para expresar una relación funcional que relaciona el número de mesas con el de sillas. En este último caso se pueden percibir diferentes sub-configuraciones en la disposición de las sillas, como los ejemplos que se muestran en la Figura 3 para el problema 1.

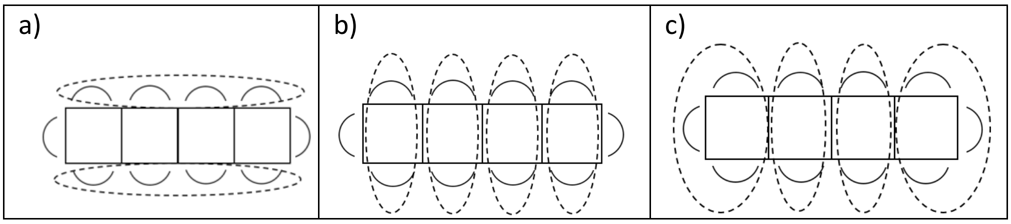


Figura 3. Sub-configuraciones posibles en el problema 1 como apoyo a una aprehensión discursiva

Esto conduce a una asociación de las sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas o aprehensión discursiva, del siguiente modo: (a) "en la fila de arriba hay tantas sillas como mesas, en la fila de abajo hay tantas sillas como mesas y hay 2 sillas en los extremos", (n+n+2); (b) "cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos" (2n+2); (c) "cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas" (2(n-2) + 2x3).

En el problema 2 si el número de mesas es par hay el mismo número de sillas en la fila de arriba que en la de abajo, pero si el número de mesas es impar hay una silla más en una de las filas. Además la relación entre el número de mesas y de sillas en cada caso no es tan fácil de establecer como en el problema 1. Por ello las sub-configuraciones que conducen más directamente a una aprehensión discursiva no se apoyan en las filas de arriba y de abajo, sino el número de sillas que rodean cada mesa (ejemplos de la Figura 4).

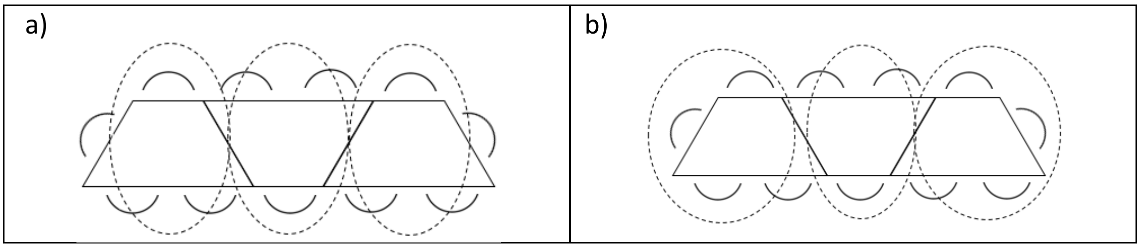


Figura 4. Sub-configuraciones posibles en el Problema 2 propias de la aprehensión discursiva

En el primer caso (a) "cada mesa tiene 3 sillas arriba o abajo y hay 2 en los extremos" (3n+2); en el segundo (b) "cada mesa tiene 3 sillas, menos las de los extremos que tienen 4 sillas" (3(n-2) + 2x4).

El objetivo de introducir configuraciones distintas en la sucesión de figuras (cuadrado y trapecio) era ver el modo de proceder de los alumnos cuando la sub-configuración utilizada como apoyo de la aprehensión discursiva en el problema 1 (filas de arriba, filas de abajo y extremos) no era útil en el problema 2.

En esta comunicación se presentan resultados del análisis de la cuestión de generalización lejana (cuestión 3). El análisis se realizó en dos fases: en la primera se identificaron los niveles de éxito de los estudiantes en dicha cuestión en los dos problemas y en la segunda identificamos las estrategias utilizadas por los estudiantes para la resolución de cada uno de los problemas en relación a las aprehensiones cognitivas (perceptiva, secuencial, discursiva y operativa).

RESULTADOS

Los niveles de éxito en la cuestión de generalización lejana en el problema 1 han sido mayores que en el problema 2 tanto en 5º (51.43% y 31.43%, respectivamente) como en 6º curso (73.91% y 43.48%, respectivamente).

Identificamos cinco grupos de estrategias: el uso de una representación gráfica, la estrategia recursiva, la funcional, la proporcional y otras. La representación gráfica (aprehensión perceptiva) ha sido menos utilizada en el problema 2 que en el problema 1 tanto en 5º como en 6º curso (Tabla 1). La estrategia recursiva (aprehensión secuencial) la han utilizado solo unos pocos estudiantes de 6º curso. Respecto a la estrategia funcional (aprehensión operativa – discursiva) su uso se incrementa en 6º curso y en el problema 2. Por último la estrategia proporcional, incorrecta en todos los casos, se ha utilizado más en el problema 2 que en el 1 y más en 5º que en 6º curso. Estos datos indican que algunos estudiantes han cambiado de estrategia en función del problema lo que muestra que estos estudiantes han sido flexibles en el uso de estrategias.

Tabla 1. Estrategias y aprehensiones utilizadas en la generalización lejana

Aprehensiones/ Estrategias en generalización lejana	**5º Problema 1 (N=35)**	**5º Problema 2 (N=35)**	**6º Problema 1 (N=46)**	**6º Problema 2 (N=46)**
Perceptiva/ Representación gráfica	45,71%	28,57%	45,65%	26,09%
Secuencial /Recursiva	0,00%	0,00%	2,17%	4,35%
Operativa-Discursiva/Funcional	28,57%	31,43%	34,78%	43,48%
Proporcional	14,29%	22,86%	13,04%	17,38%
Otras	11,43%	17,14%	4,36%	8,70%

Estudiantes, tanto de 5º como de 6º curso, que se apoyaron en una aprehensión perceptiva en el problema 1 cambiaron de estrategia para responder a la misma cuestión en el problema 2 (Tabla 1), ante la dificultad que suponía para ellos utilizarla en este último problema. Esta dificultad se observa en la Figura 5 que muestra la respuesta de un estudiante de 5º curso que empleó la representación gráfica sin éxito en el problema 2.

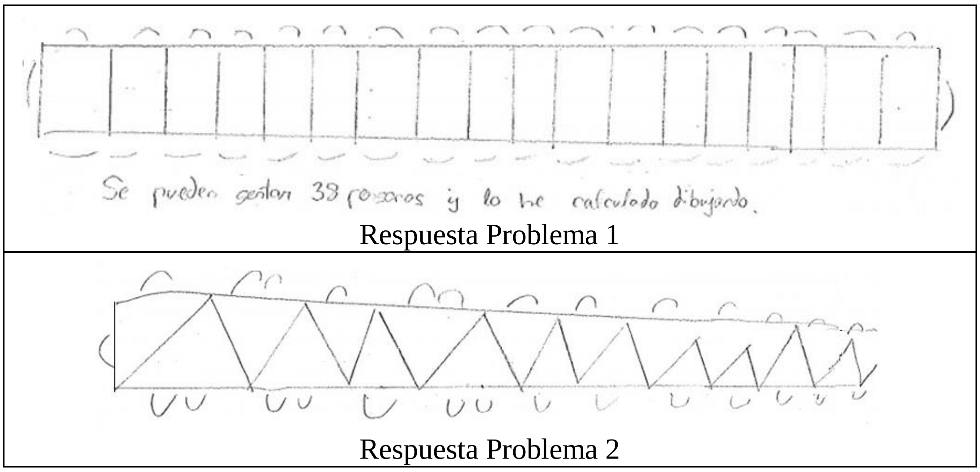


Figura 5. Alumno de 5º que continuó apoyándose en una aprehensión perceptiva en el problema 2 sin éxito

Hubo estudiantes que en el problema 1 se apoyaron en una aprehensión perceptiva y en el problema 2 en una aprehensión discursiva (Figura 6), (Tabla 1) o en una aprehensión secuencial (Figura 7).

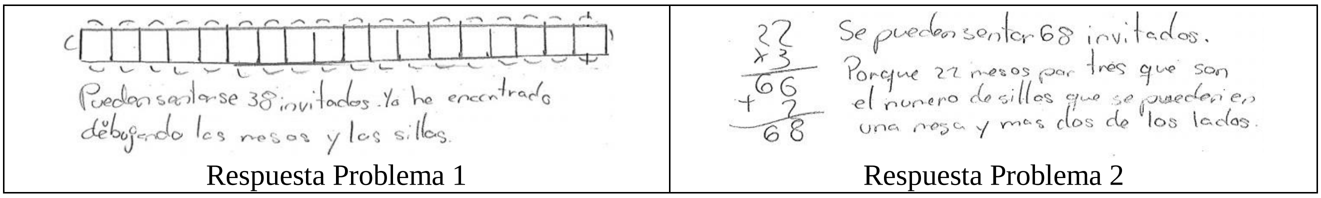


Figura 6. Estudiante de 5º curso que cambió de apoyarse en una aprehensión perceptiva (problema 1) a una discursiva (problema 2)

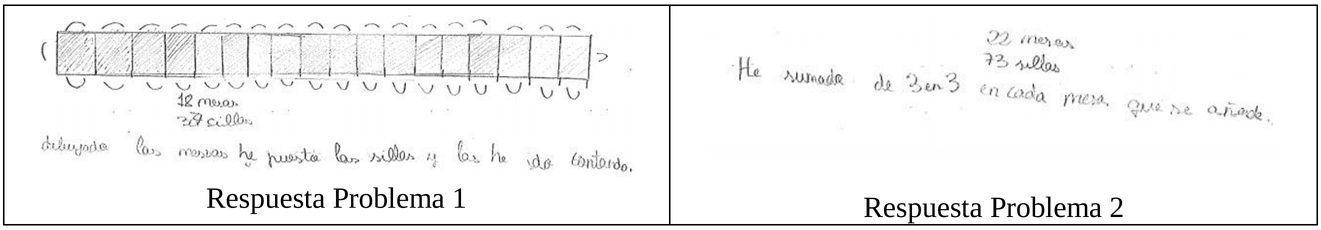


Figura 7. Alumno de 6º que pasó de apoyarse en una aprehensión perceptiva a una secuencial

Sin embargo, otros cambiaron de apoyarse en una aprehensión perceptiva a identificar una relación de proporcionalidad, o a otras estrategias sin sentido en el problema 2. Así la Figura 8 muestra un estudiante de 5º curso que cambió de una representación gráfica a una estrategia proporcional.

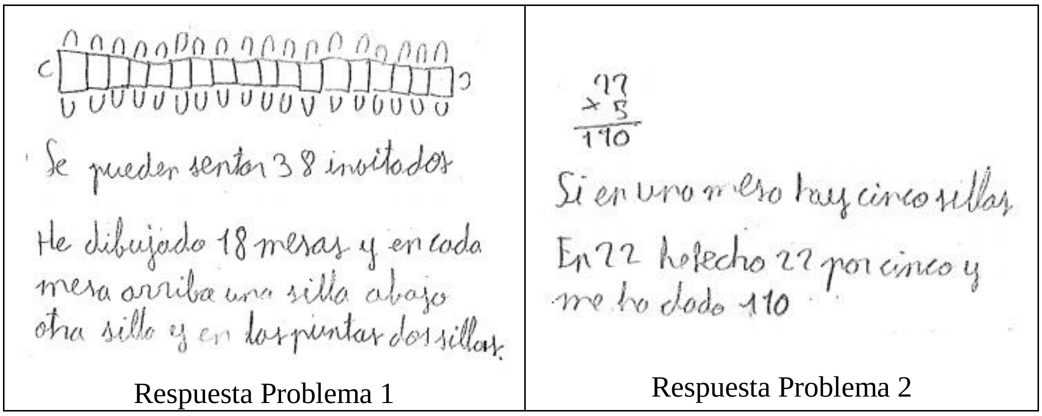
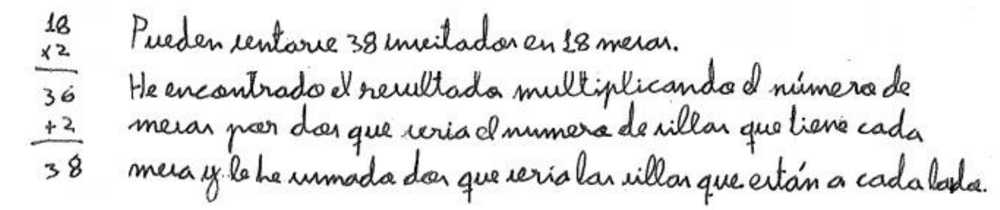


Figura 8. Alumno de 5º que pasó de apoyarse en una aprehensión perceptiva a una estrategia proporcional

Estos datos evidencian que algunos estudiantes han cambiado de aprehensión para responder al mismo tipo de cuestión en una situación diferente, pasando de apoyarse en una aprehensión perceptual a una aprehensión discursiva. Pero los resultados muestran también que no siempre eligieron la estrategia correcta, por ejemplo los que cambiaron a una estrategia proporcional.

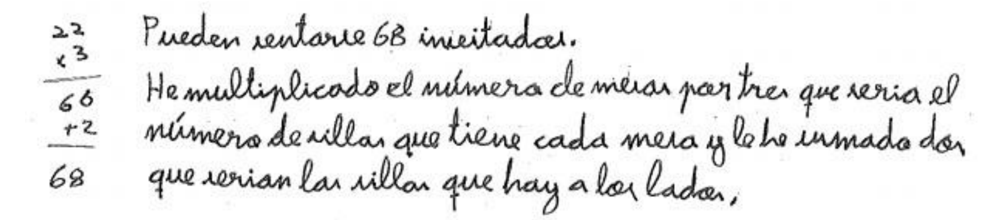
Por último, la mayoría de los estudiantes que habían utilizado una estrategia funcional en el problema 1 apoyada en algunas de las sub-configuraciones de la aprehensión discursiva u operativa, continuaron usando esta estrategia y el mismo tipo de subconfiguración en el problema, 2. Sin embargo, los que en el primer problema se apoyaron en la subconfiguración "fila de arriba, fila de abajo y 2 sillas de los extremos" (Figura 3.a) tuvieron dificultad para adaptarla en el problema 2.

Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional apoyada en la subconfiguración: "cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos", se apoyaron en la misma subconfiguración en el problema 2, como el estudiante de la Figura 9.


18
×2
36
+2
38

Pueden sentarse 38 invitados en 18 mesas.
He encontrado el resultado multiplicando el número de mesas por dos que sería el número de sillas que tiene cada mesa y le he sumado dos que sería las sillas que están a cada lado.

Respuesta Problema 1

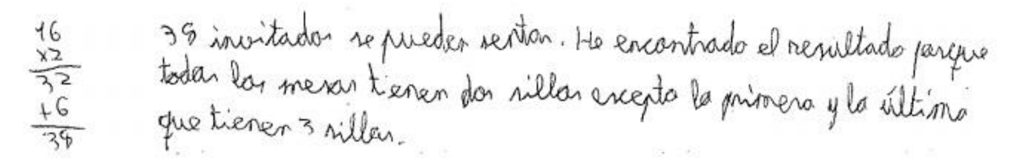

22
×3
66
+2
68

Pueden sentarse 68 invitados.
He multiplicado el número de mesas por tres que sería el número de sillas que tiene cada mesa y le he sumado dos que serían las sillas que hay a los lados.

Respuesta Problema 2

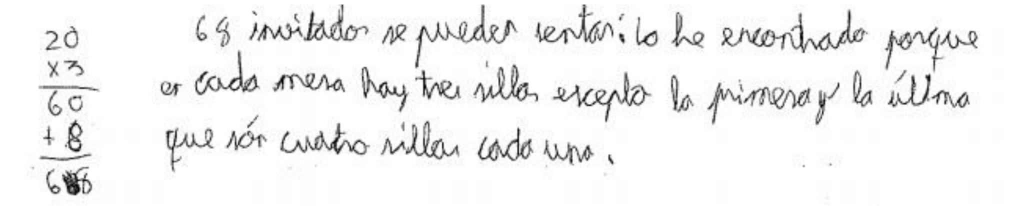
Figura 9. Alumno de 5º que adaptó la sub-configuración de la aprehensión discursiva en el problema 1 "cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos" al problema 2

Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional basada en la sub-configuración: "cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas" también se apoyaron en la misma sub-configuración en el problema 2, como el estudiante de la Figura 10.


16
×2
32
+6
38

38 invitados se pueden sentar. He encontrado el resultado porque todas las mesas tienen dos sillas excepto la primera y la última que tienen 3 sillas.

Respuesta Problema 1


20
×3
60
+8
68

68 invitados se pueden sentar: lo he encontrado porque en cada mesa hay tres sillas excepto la primera y la última que son cuatro sillas cada una.

Respuesta Problema 2

Figura 10. Alumno de 6º que adaptó la sub-configuración de la aprehensión discursiva utilizada en el problema 1 "cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas" al problema 2

Los estudiantes que utilizaron una estrategia funcional basada en considerar "todas las mesas menos 1 con 2 sillas y una mesa de 4 sillas" (aprehensión operativa), también se apoyaron en esta subconfiguración problema 2, como el estudiante de la Figura 11.

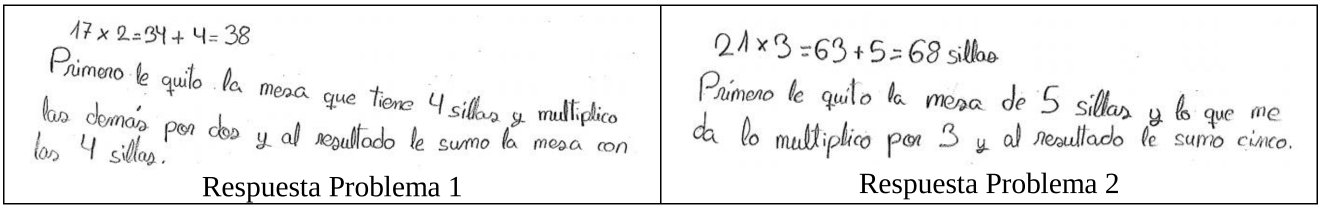


Figura 11. Alumno de 6º que adaptó la aprehensión discursiva utilizada en el problema 1 apoyada en la subconfiguración "una mesa menos con 2 sillas y una mesa de 4 sillas" al problema 2

Algunos estudiantes que en el problema 1 se apoyaron en la sub-configuración "fila de arriba, fila de abajo y 2 sillas de los extremos" no tuvieron éxito en el problema 2, como el ejemplo del estudiante de la Figura 12.

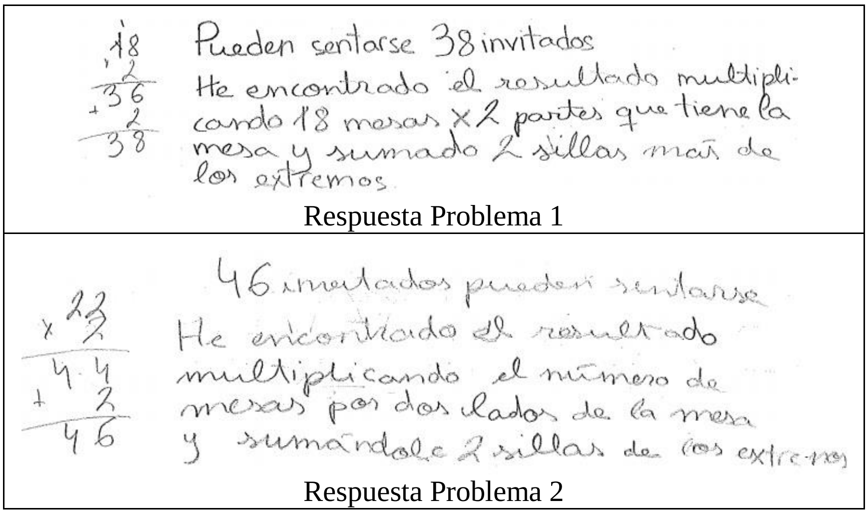


Figura 12. Alumno de 6º con dificultades en adaptar la sub-configuración de la aprehensión discursiva

Pero algunos estudiantes que utilizaron esta última subconfiguración en el problema 1 fueron capaces de adaptarla al problema 2 (Figura 13).

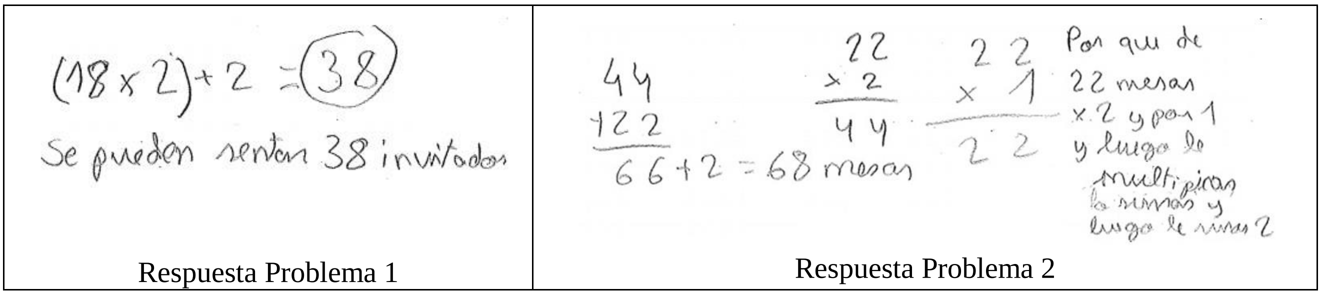


Figura 13. Alumno de 6º que adaptó la sub-configuración "fila de arriba, fila de abajo y sillas en los extremos" al problema 2

Los alumnos tienden a apoyarse en las sub-configuraciones utilizadas en la resolución del problema 1 para resolver el 2. Algunas se aplicaban fácilmente en ambos problemas (configuraciones *b* y *c* del problema 1 -Figura 3- que se corresponden con la *a* y *b* del problema 2 -Figura 4) y otras no (configuración *a* del problema 1); en este último caso hubo quienes modificaron la idea de sumar las sillas de las filas de arriba y de abajo para emplearla en el problema 2 (Figura 13).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestra pregunta de investigación es: ¿Qué tipo de aprehensiones utilizan los alumnos de Educación Primaria cuando resuelven problemas de generalización lineal con configuraciones diferentes en la sucesión de figuras? Los resultados muestran que la configuración de la sucesión de figuras ha condicionado el tipo de aprehensión utilizado por los alumnos. En el problema 1 usaron preferentemente la aprehensión perceptual, ya que la estrategia más común fue la representación gráfica, y en el problema 2 la aprehensión discursiva o la operativa, ya que la estrategia más empleada fue la funcional. Esto pudo deberse a que era más fácil hacer un dibujo con mesas cuadradas que con mesas en forma de trapecio, donde la orientación de las mesas se alterna al formar las filas. Para salvar esta dificultad algunos alumnos cambiaron a una aprehensión discursiva o a una operativa, y otros a una aprehensión secuencial. Cuando cambiaron a una aprehensión discursiva u operativa se apoyaron en sub-configuraciones de un término específico de la sucesión, descomponiéndolo en partes o transformándolo. Cuando cambiaron a una aprehensión secuencial se apoyaron en cómo se construía el término siguiente de la sucesión. En estos casos los alumnos se han mostrado flexibles para cambiar de una aprehensión perceptual a otro tipo de aprehensión. En otros casos, al cambiar las configuraciones de las figuras de mesas cuadradas a mesas en forma de trapecio, adaptaron la sub-configuración en que se apoyaron en la aprehensión discursiva.

Sin embargo no todos los estudiantes tuvieron éxito en un cambio de aprehensión, es decir hubo estudiantes que no supieron apoyarse en un tipo de aprehensión que les condujera a una estrategia adecuada, como aquellos que utilizaron la estrategia proporcional.

Por último destacamos la importancia de que los profesores lleguen a conocer esta información como parte del conocimiento necesario para enseñar, concretamente para identificar los obstáculos de los estudiantes en el proceso de generalización y el papel que desempeña la flexibilidad para favorecer los cambios de aprehensión cognitiva.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Cai, J. y Knuth, E. (2011) (Ed.). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín: Springer-Verlag.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, *40,* 3-22.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer-Verlag.

Duval, R. (1993). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and símbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F. D. y Becker, J.S. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323-366). Berlín: Springer-Verlag.

Samson, S. y Schäfer, M. (2011). Enactivism, figural apprehension and knowledge objectivation: An exploration of figural pattern generalization. *For the Learning of Mathematics, 31*(1), 37-43.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números 77*, 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164

Vergel, R. (2015). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO, 68*, 9-17.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). Ciudad Real: SEIEM.