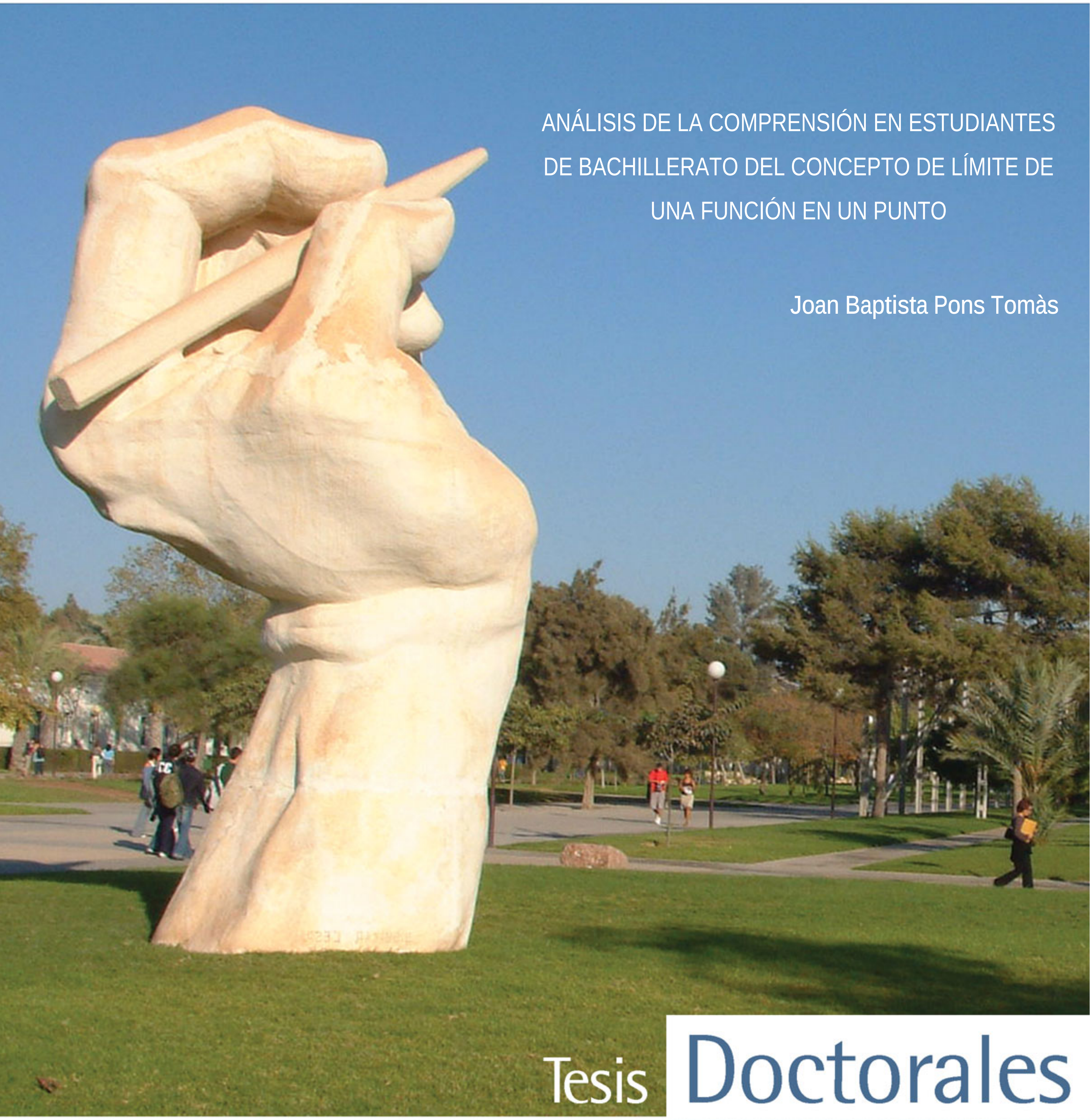
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Joan Baptista Pons Tomàs



Tesis Doctorales

www.eltallerdigital.com

UNIVERSIDAD de ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

DEPARTAMENTO DE INNOVACIÓN Y FORMACIÓN DIDÁCTICA

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

TESIS DOCTORAL

JOAN BAPTISTA PONS TOMÀS

ALICANTE, Noviembre 2014

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Memoria que presenta D. Joan Baptista Pons Tomàs
para optar al grado de doctor

Fdo.: D. Joan Baptista Pons Tomàs

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Trabajo realizado bajo la codirección de

Dra. Julia Valls González — Dr. Salvador Llinares Ciscar

Fdo.: Dra. Julia Valls González — Fdo.: Dr. Salvador Llinares Ciscar

Alicante, Noviembre de 2014

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

AGRAÏMENTS

Vull mostrar el meu agraïment a la codirecció d'aquesta Tesis, a la Dra. Julia Valls González y al Dr. Salvador Llinares Ciscar, per la seua ajuda continua, pel seu recolzament, pel seu rigor i contribució científica al llarg de tot el trajecte, pel seu interès i per la seua presencia permanent en el perfeccionament d'aquesta esta investigació.

A tots els membres de l'àrea de Didàctica de las matemàtiques del Departament d'Innovació i Formació Didàctica de la Universitat d'Alacant por les seues aportacions al llarg de tot el procés en els Seminaris dels dimecres, així como a totes las persones que han participat en ells.

A Carmen Aranda que em va indicar la via d'inici.

Al professorat: Fernando Arenas, Isabel Buigues, Salvador Caballero, Vicente Carratalá, Clara García, Jesús García, Paco García, Teresa Grande, Elsa Jordà, Caterina Martínez, Josep Antoni Miquel, Fidel Pastor, Cèsar Rodenas y Antonio Tomás. Aquest treball no haguera sigut possible sense la seua inestimable ajuda.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

A Guillermina i Alba

A María, Juan i José Antonio

A Don Antonio Verd

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

ÍNDICE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTRODUCCIÓN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre la comprensión que la comunidad educativa (estudiantes y profesorado) tiene de los conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la investigación en Educación Matemática.

Nuestra investigación se centra en la comprensión de los estudiantes de educación postobligatoria (16-18 años) sobre el concepto de límite de una función de variable real. El campo en que se ubica el trabajo realizado es el de Pensamiento Matemático Avanzado, dentro de la investigación en Didáctica de la Matemática, y en el cual hemos encuadrado nuestro estudio.

La legislación vigente en la comunidad valenciana (DOGV de 11 de julio de 2008) indica al profesorado como contribuir a desarrollar en los estudiantes los conocimientos científicos fundamentales y asegurar las destrezas básicas necesarias para utilizar los procedimientos propios de las matemáticas para la resolución de problemas con un doble objetivo: analizar e interpretar situaciones en las que exista relación funcional entre dos variables y utilizar el concepto y el cálculo de límites como técnicas básicas del cálculo diferencial.

Esta situación muestra el interés de la investigación educativa en caracterizar los procesos de aprendizaje del concepto de límite de una función.

Nuestra investigación tiene como objetivo identificar características de los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función y analizar la influencia de los distintos modos de representación en la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación.

La tesis doctoral que presentamos consta de cinco capítulos.

El primer capítulo recoge la idea de límite de una función de variable real como objeto de aprendizaje. Describe el desarrollo histórico de la noción de límite, cómo aparece la idea de límite de una función real en los libros de texto españoles del siglo XX, y cómo se introduce la idea de límite de una función en el currículum actual tanto de la educación secundaria obligatoria, como de la educación post obligatoria, y su tratamiento en los libros de texto. Finalmente se sintetizan las investigaciones sobre la comprensión de la noción de límite de una función y el papel que desempeñan los obstáculos epistemológicos, las concepciones espontáneas y los diferentes modos de representación.

En el segundo capítulo se expone el marco teórico utilizado en el desarrollo de esta investigación. Analizaremos diferentes perspectivas sobre cómo se construyen los objetos matemáticos; el modelo piagetiano de desarrollo de un esquema basado en la abstracción reflexiva, y la Teoría APOS con las construcciones mentales, los diferentes mecanismos de la abstracción reflexiva, la descomposición genética de un concepto matemático y la tematización que nos han permitido plantear las preguntas de nuestra investigación.

En el tercer capítulo se describe el diseño realizado atendiendo en primer lugar a los participantes y al contexto; los instrumentos de recogida de datos explicitando las tareas del cuestionario y la forma en que se desarrollaron las entrevistas; y las diferentes fases del análisis de los datos: la evaluación de las respuestas de los estudiantes, el análisis cualitativo, y el análisis estadístico implicativo.

En el cuarto capítulo se recogen los resultados obtenidos en el análisis de datos interpretados desde el marco teórico. En este capítulo presentamos tanto resultados cualitativos como estadísticos implicativos. En primer lugar las características de los niveles (Intra, Inter y Trans) de desarrollo del esquema de límite desde la Teoría APOS, en segundo lugar las características de los niveles de desarrollo desde el análisis implicativo y finalmente la tematización del esquema de límite de una función.

En el quinto y último capítulo, se presentan las conclusiones y la discusión sobre los resultados obtenidos, reflexionando sobre la comprensión del límite de una función y los modos de representación, el desarrollo del esquema de una función, la tematización del esquema de límite comparando nuestros resultados con los resultados obtenidos en otras investigaciones y considerando algunos aspectos que podrían tenerse en cuenta en futuras investigaciones así como las limitaciones que pudiera tener nuestra investigación referidas a la construcción del concepto de límite en estudiantes de bachillerato.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

El estudio de la comprensión de conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la investigación en Educación Matemática, y en él hemos encuadrado nuestro estudio. El presente trabajo trata de la comprensión de los estudiantes de educación postobligatoria sobre el concepto de límite de una función de variable real. El estudio se centra en las formas de conocer y construir el conocimiento del concepto de límite, en un rango de edad de 16 a 18 años (estudiantes de Primero y Segundo curso de Bachillerato de la opción Científico-Técnica) (DOGV de 11 de julio de 2008). El campo en que se ubica el trabajo realizado es el del Pensamiento Matemático Avanzado, dentro de la investigación en Didáctica de la Matemática.

Este primer capítulo está organizado en cinco secciones. En la primera, describimos la idea de límite de una función de variable real como objeto de aprendizaje. En la segunda, presentamos el desarrollo histórico de la noción de límite. En la tercera, mostramos cómo aparece la idea de límite de una función real en los libros de texto del siglo XX. En la cuarta, presentamos el concepto de límite de una función en el currículum, tanto de la educación secundaria obligatoria como de la educación postobligatoria y su tratamiento en los libros de texto. Finalizaremos el capítulo, presentando una síntesis de las investigaciones sobre la comprensión de la noción de límite de una función y el papel que desempeñan las concepciones espontáneas, los obstáculos epistemológicos y los diferentes modos de representación.

1.1. El límite de una función real de variable real como objeto de aprendizaje

El concepto de límite es una noción particularmente difícil, típica del pensamiento matemático avanzado con una posición central en el análisis matemático fundamental en la teoría de aproximación, de continuidad y del cálculo diferencial e integral (Cornu, 1991). Cornu afirma que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática. Una de las múltiples facetas del concepto de límite es la idea de aproximación. Muchas veces "*la idea de aproximación es el primer encuentro que los estudiantes tienen del concepto de límite a través de la noción dinámica de límite*" (Cornu, 1991, p.153), y la vía por la cual el concepto de límite se usa para resolver problemas reales, apoyándose más en diversas propiedades intuitivas del concepto de límite que en la definición. .

La concepción dinámica del límite como "*aproximación óptima*" la definen Blázquez y Ortega (2002) de la siguiente forma:

> *"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se debiera escribir* $\lim_{x \to a} f(x)$, *si cuando "x" se acerca al número "a" más que cualquier aproximación, sus imágenes "f(x)" se acercan a "L" más que cualquier otra aproximación fijada"*

Por otra parte la concepción métrica de límite se define en términos de desigualdades:

> *Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se debiera escribir,* $\lim_{x \to a} f(x)$*, si cuando "x – a" en valor absoluto se aproxima a 0, "f(x) – L" en valor absoluto se aproxima a 0*

Cottrill et al. (1996) afirman que está se debe visualizar y, para ello, el estudiante debe construir "*un proceso en el dominio y un proceso en el rango y usar la función para* *coordinarlos*” (p.174). Sin embargo, también sugieren que la concepción dinámica del límite, es decir, los valores de la función que van aproximándose al valor límite, mientras los valores en el dominio se aproximan a una cantidad, es más complicada de lo que se había pensado.

Las evidencias empíricas que justifican las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto de límite son abundantes en la literatura.

La concepción dinámica del concepto de límite puede dificultar el progreso hacia el desarrollo de una comprensión de la definición formal como concepción métrica (Williams, 1991). Sin embargo Cottrill et al. (1996) indican que la dificultad de los estudiantes en construir la definición formal del límite es el resultado de un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica del límite. Estos autores conjeturan que lo que hace tan inaccesible el concepto de límite a muchos estudiantes es la exigencia de coordinar dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la aproximación métrica. Por otra parte, partiendo de que fue importante discutir si era o no deseable enseñar el concepto de límite desde la concepción dinámica del límite, Roh (2008) sugiere que “*la discusión real no es tanto si usar la imagen dinámica en la enseñanza, sino más bien, cómo inducir imágenes dinámicas que sean compatibles con la definición de límite*” (p.231).

En este mismo sentido hemos de destacar los experimentos de enseñanza realizados por Swinyard (2011) y de Swinyard y Larsen (2012) en los que partiendo del trabajo de Cottrill et al. (1996) manifiestan que los estudiantes tienen dos desafíos a superar: a) basarse en una perspectiva desde el eje de la *x* (x-axis perspective) y ser reacios a usar una perspectiva desde el eje de la *y* (y-axis perspective); y b) las dificultades para poner en práctica el significado de lo infinitamente próximo a un punto. Además, en las conclusiones Swinyard (2011) afirma que si alguien tiene la tentación (might be tempted) de inferir de la investigación realizada que inducir un cambio cognitivo a partir de la noción dinámica de límite, desde la perspectiva del eje de la *x*, hacia la noción de lo arbitrariamente próximo, desde la perspectiva del eje de la *y*, le da más valor a esta última y devalúa la primera, el autor argumenta lo contrario, al indicar que el experimento de enseñanza sugiere que “*es la habilidad de emplear de forma flexible las dos perspectivas lo que le permite a los estudiantes desarrollar una rica y solida (rich and robust) comprensión del concepto de límite de una función y de* *su definición formal*" (p. 21)

Por otra parte, distintas investigaciones han centrado su atención en la necesidad de encontrar, para los primeros niveles, una propuesta didáctica que favorezca la comprensión formal del concepto de límite. En diferentes estudios se indica que el primer encuentro de los estudiantes con la noción de límite se lleva a cabo a través de la "*idea de aproximación*" (Cornu, 1991, p.153), e incluso que el uso de la idea de aproximación tiene motivaciones históricas (Oehrtman, 2009). Tras la Revolución Francesa las matemáticas obtuvieron en Francia el estatus de materia obligatoria, en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica, y a principios del siglo XIX fue Auguste Louis Cauchy quien en 1821 propone la siguiente definición de limite: "*Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfinidament d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière es appelée la limite de toutes les autres*" (Cauchy, 1821, p.4). El carácter aritmético, pero impreciso de la noción de límite, hace de ella un concepto dinámico.

Con posterioridad fue Weierstrass quien dio una definición métrica de límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 : \forall x, \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{(Spivak, 1977)}$$

que es la que actualmente se utiliza en los primeros cursos universitarios. En contraposición a la concepción dinámica, la definición métrica de límite representa una concepción estática.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.2. Desarrollo histórico de la noción de límite

La evolución histórica del concepto de límite puede dividirse en cuatro etapas, (Collette, 1985; Ríbnikov, 1991; Boyer, 1987; Kline, 1972; Blázquez y Ortega, 2002; Kleiner, 2001), o en siete etapas diferentes (Valdivé y Garbin, 2008). En la división en cuatro etapas, la primera es aquella donde los problemas se resuelven mediante métodos infinitesimales con un enfoque geométrico, que va desde el siglo V antes de Cristo hasta la primera mitad del siglo XV. En la segunda etapa, se modifican los fundamentos del cálculo infinitesimal con un enfoque algebraico que ocupa la segunda mitad del siglo XVIII y termina en 1820. La tercera etapa es en la que el cálculo llega a ser riguroso con un enfoque aritmético, que empieza en 1821 y ocupa el siglo XIX. Y la cuarta etapa es la de las matemáticas contemporáneas y ocupa el último siglo. Estos cuatro periodos de la evolución de la idea de límite se corresponderían con el descubrimiento, el uso, la comprensión y la justificación de dicha idea. Nosotros nos centraremos en los tres primeros porque el cuarto periodo está muy lejos de los planteamientos curriculares de la educación post obligatoria.

- *Primera Etapa*

En la primera etapa, hemos de considerar el método griego para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas que fue una idea intuitiva de Eudoxo de Cnido (408 a.C.–355 a.C.) y que en el siglo XVII fue denominado método de exhausción. Se trata realmente de la primera etapa en la historia del cálculo infinitesimal, pero no utiliza una teoría de límites de forma explícita (Kline, 1972). El lema básico del método de exhausción se encuentra en el X libro de los "Elementos" de Euclides que dice lo siguiente: "*dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada*" (Euclides, 1996, p. 12). En el libro XII, que el testimonio de Arquímedes (287 a.C.–212 a.C.) atribuye a la Escuela de Eudoxo de Cnido, Euclides establece que los polígonos regulares semejantes, inscritos en círculos, se relacionan como la razón entre los cuadrados de los diámetros. Después los círculos se "agotan" mediante sucesiones de polígonos regulares inscritos de 2n lados (n=2,3,…). La relación entre los últimos queda invariable al aumentar el número de lados. Después de un paso al límite implícito se demuestra por reducción al absurdo que los círculos están en la misma relación que los cuadrados de sus diámetros. El método de exhausción se aplicaba al cálculo de las áreas de las figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, subtangentes a las curvas, etc. La esencia del método consiste en aproximarse al área de una figura *B* (Figura 1.1), mediante otras figuras A_i (i= 1, 2,….), inscritas en *B,* en las que el cálculo de su área puede ser determinada y cuyas áreas crecen monótonamente.

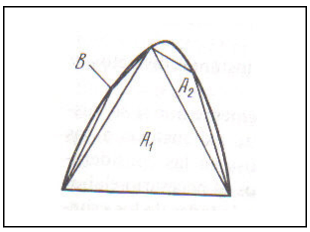


Figura 1.1.Método de exhausción

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Con la propia existencia y construcción de la sucesión de figuras A_i se deduce que “agotaran” a la figura *B*. Implícitamente se busca el límite de las figuras inscritas A, y se demuestra para cada caso mediante la reducción al absurdo que $A=B$. Con el método de exhausción “*se demuestra la unicidad del límite, pero no da solución a la cuestión sobre la existencia del límite*” (Ríbníkov, 1991, p. 76). El método viene a decir que cualquier magnitud puede ser aproximada por una sucesión de magnitudes cuya diferencia con la original se puede hacer arbitrariamente pequeña. Aunque puede dar la impresión de que se trata de un método aproximado que constituye una etapa hacia el concepto de límite, es un método riguroso en sí mismo, que no necesita del paso al límite y que su valor lo proporciona “*el método indirecto de prueba, que evita el empleo de límites*” (Kline, 1972, p.121). El método fue utilizado por Arquímedes al cuadrar una sección cónica, en concreto un segmento de parábola. La demostración por el método de exhausción es larga y complicada, pero el hecho es que Arquímedes demostró rigurosamente que el área de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triangulo que tenga la misma base y la misma altura (Boyer, 1987).

- *Segunda Etapa*

Hemos de esperar al Renacimiento, siglos XV y XVI, para reencontrarnos con la matemática griega. En esta segunda etapa, llegaron a Europa enormes cantidades de obras griegas procedentes de las bibliotecas del Imperio Bizantino ocupado por los turcos en 1453. La invención de la imprenta hacia 1450 aceleró la difusión del conocimiento. La primera impresión escrita de los Elementos de Euclides en latín apareció en Venecia en 1482, y la primera en italiano en 1543. El Renacimiento fue una etapa de recuperación y absorción de los trabajos griegos. En esta etapa los problemas que motivaron la creación del cálculo fueron:

a) obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante, y al revés, a partir de la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo;

b) obtener la tangente a una curva, como necesidad práctica en la construcción de lentes;

c) obtener el valor máximo o mínimo de una función, como necesidad práctica para maximizar el disparo de un cañón; y

d) obtener longitudes de curva como la distancia recorrida por un planeta en un tiempo dado, áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, los centros de gravedad de los cuerpos, y la atracción gravitatoria.

El conocimiento de los trabajos de Arquímedes y del método exhaustivo de los griegos aumentó el interés en estos problemas. El método exhaustivo se modificó primero gradualmente y después radicalmente por la invención del cálculo (Kline, 1972).

Hacia el siglo XVII la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral culminó el largo proceso que habían desarrollado las siguientes premisas: existencia del álgebra y de técnicas de cálculo, se introducen las variables y el método de coordenadas, se asimilan las ideas infinitesimales de los griegos, se acumulan los métodos de resolución de problemas de cuadraturas, curvaturas, determinación de centros de gravedad, búsqueda de tangentes, máximos y mínimos.

También debemos tener en consideración la creación de diferentes Academias de las Ciencias como impulsoras y divulgadoras de los métodos científicos. Para analizar este complejo proceso consideraremos los métodos de resolución que contienen elementos del futuro cálculo infinitesimal: métodos integrales (Kepler y Cavalieri) y métodos diferenciales (Fermat).

La obtención en el siglo XVII de áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitudes de curvas, comienza con Kepler (1571–1630). Kepler retoma el antiguo método de exhausción de Arquímedes eliminando la parte final de reducción al absurdo. La adaptación que hace Kepler consiste en afirmar que "*cualquier figura o cuerpo se representa en la forma de una figura de un conjunto de partes infinitamente pequeños*" (Ríbnikov, 1991, p. 170). Las partes de un volumen eran superficies y las de una superficie eran líneas. Kepler lo utilizó con éxito para calcular el volumen de los toneles de vino. Los métodos de cálculo no eran rigurosos ni para él ni para sus contemporáneos, no obstante la fecundidad de la sumación de elementos, que Kepler leyó en Arquímedes, fue evidente. El intento de crear un algoritmo para operar con los infinitesimales llevó a Cavalieri (1598–1647) a desarrollar el método general de los indivisibles. Para Cavalieri "*las figuras planas y los cuerpos se relacionan entre sí como* *todos sus indivisibles tomados en conjunto; si los indivisibles se encuentran en una misma relación uno con otro, entonces la relación entre las áreas de las figuras correspondientes (o los volúmenes de los cuerpos) es igual a esta relación*" (Ríbnikov, 1991, p. 175). Este método tenía sus deficiencias. En primer lugar, no era adecuado para la medición de longitudes de curvas, puesto que los correspondientes indivisibles al ser puntos no tienen dimensiones. En segundo lugar, la dificultad para explicar el concepto de indivisible. Y, en tercer lugar, las propias ideas de la época sobre el rigor científico frenaban el desarrollo del método al no utilizar el simbolismo ni los métodos del álgebra.

La acumulación de los métodos de cálculo diferencial adquirió su forma más clara en los trabajos de Fermat (1601–1665). Fermat comunicó a Descartes, en 1638, que había resuelto el problema de la determinación de los valores extremos de una función $f(x)$. El método de Fermat consistía en considerar para valores extremos (x) que los valores de $f(x)$ y $f(x+E)$, cuando E es muy pequeño, se pueden considerar como iguales. Fermat obtuvo la ecuación $(f(x+E)–f(x))/E=0$, y después de las transformaciones en el miembro izquierdo consideró $E = 0$. El éxito del método de Fermat se basaba en que todas las funciones que utilizó fueron algebraicas polinomiales (Ríbnikov, 1991). El método de Fermat no permite distinguir entre un máximo y un mínimo. El mismo, tiene la forma actual del cálculo diferencial, pero estaba suponiendo enteramente la difícil teoría de los límites. Fue criticado por sus contemporáneos, y en particular por Descartes que objetó la introducción y posterior supresión del "misterioso" valor de E. Dividir por E significa considerarlo como diferente de cero, pero descartarlo implica considerarlo como cero (Kleiner, 2001).

La última fase del desarrollo embrionario del cálculo infinitesimal fue el establecimiento de la relación de inversibilidad entre las investigaciones diferenciales e integrales. Uno de los motivos más importantes fueron los problemas inversos de las tangentes, es decir, la determinación de las curvas a partir de una propiedad dada, común a todas las tangentes a ellas. Los problemas inversos de las tangentes tenían un origen práctico, puesto que los navegantes en las épocas de los descubrimientos necesitaban conocer la curva del verdadero curso de la nave (la loxodroma). El primero en intentar encontrar un método general fue Descartes (1596–1650). El resultado general sobre la dependencia mutuamente inversa de los problemas sobre la cuadratura

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

y trazado de tangentes pertenece a Barrow (1630–1677). A mediados del siglo XVII las matemáticas se encontraban en los umbrales del descubrimiento del cálculo diferencial e integral (Ríbnikov, 1991).

Esta segunda etapa culmina con los trabajos de Leibniz (1646–1716) y Newton (1642–1727) que contribuyeron al desarrollo del cálculo infinitesimal al inventar los conceptos generales de la derivación y la integración, reconocieron dichos conceptos como inversos, desarrollaron algoritmos de cálculo y extendieron el rango de aplicaciones de los métodos del cálculo. Pero un elemento básico de su trabajo fue la noción de infinitesimal, no definido formalmente, pero entendido como una cantidad infinitamente pequeña menor que una cantidad finita pero no nula. El cálculo de Leibniz y Newton es un cálculo de variables, no es un cálculo de funciones (Kleiner, 2001). La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron emplear unos instrumentos más eficaces que los de la geometría y además utilizar el mismo método para resolver problemas de geometría y física.

Una curva era, para Leibniz, como un polígono con infinitas caras, cada una de ellas de una longitud infinitesimal. Una curva de estas características lleva asociada una secuencia infinita de puntos (x_i, y_i). La diferencia entre dos valores sucesivos de x es el diferencial de x y lo representa por dx, e igualmente para la y, dando lugar a su característico triángulo con caras infinitesimales dx, dy, ds (Figura 1.2).

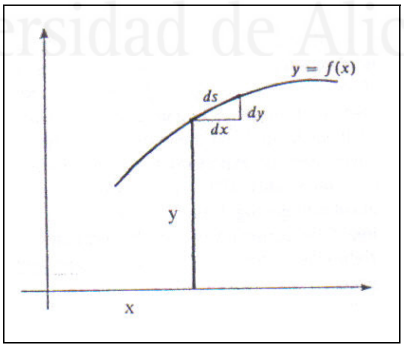


Figura 1.2. Triangulo característico de Leibniz

Cuando calcula la diferencia mínima de $x.y$ indica que $d(x\cdot y) = (x+dx)(y+dy)-x\cdot y=xdy+ydx+dxdy$, donde dx y dy son cantidades infinitamente pequeñas, y el término $dxdy$ es "infinitamente, infinitamente pequeño" y se puede despreciar con lo que obtiene que $dx\cdot y=xdy+ydx$.

El creador de la teoría de las fluxiones que permitió resolver dos problemas fue

Newton. Uno de ellos era determinar la velocidad de movimiento partiendo de un espacio recorrido en un determinado tiempo, y el otro era determinar el espacio recorrido en un tiempo determinado partiendo de la velocidad del movimiento. El primero de los problemas, el directo, representa la diferenciación implícita de funciones y el segundo, el inverso, representa la integración de las ecuaciones diferenciales. Cuando Newton quiere hallar la razón entre dos variaciones de x y xn, llama o a un incremento de la variable x y $(x+o)n–xn$ al incremento correspondiente a xn. Una vez obtenida la razón de dichos incrementos Newton deja "desvanecerse" a o con lo que obtiene la razón buscada. Newton esta aquí muy cerca de la noción de límite, aunque la objeción que se le podría hacer sería el uso impreciso de la palabra "desvanecerse". Pero el intento más claro de definición de límite lo realiza en "Los Principia" donde incluye un lema que dice: "*Cantidades y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales*" (Boyer, 1987, p. 500).

La elección de una notación adecuada fue lo que permitió a Leibniz obtener importantes resultados, pero no pruebas rigurosas. Esa notación adecuada hizo que el cálculo de Leibniz prevaleciera sobre la notación de Newton, junto con la polémica por el reconocimiento en el descubrimiento que separó a las islas del continente. Leibniz y Newton introdujeron un simbolismo algebraico, pero su motivación y los problemas a los que lo aplicaron eran geométricos o físicos relacionados con curvas. Era un cálculo de variables relacionado con ecuaciones y no un cálculo de funciones. La introducción, alrededor de la mitad del siglo XVIII, de las funciones como pieza central del cálculo se debe a Euler (1707–1783). El cálculo de Euler no es sobre curvas, es sobre funciones. La derivada como cociente diferencial no es una abstracción de las nociones de tangentes o velocidad instantánea, ni la integral una abstracción del área. La derivada y la integral ahora son conceptos básicos del cálculo y pueden ser investigados por sí mismos. El recurso utilizado durante el siglo XVIII permitía reducir las funciones a su desarrollo en serie de potencias, y el estilo algebraico del análisis, usado por Euler y muchos matemáticos del siglo XVIII, si bien carecía de fundamentos rigurosos, los resultados que aportaban hacían olvidar estas carencias. Aceptaban como artículos de fe que lo que es "*verdadero para series convergentes es verdadero para series divergentes, lo que es verdadero para cantidades finitas es verdadero para cantidades infinitamente* *grandes o infinitamente pequeñas, y lo que es verdadero para polinomios es verdadero para desarrollos en serie de potencias”* (Kleiner, 2001, p. 151).

Una sugestiva a la vez que imprecisa definición de límite se debe a D’Alambert (1717–1783). D’Alambert consideraba sospechoso el uso que hacia Euler de las series divergentes y se oponía a la necesidad de “desvanecer” una determinada cantidad. También afirmaba que una cantidad es algo o nada, si es algo es porque no se ha desvanecido, y si no es nada ya se ha desvanecido, por lo tanto no hay un estado intermedio entre estos dos. En un artículo sobre límites que escribió para la Encyclopédie denomina que *“una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)”* (Boyer, 1987, p. 567). La imprecisión formal de esta sugestiva definición fue eliminada de la Encyclopédie. Esta formulación del concepto de límite por D’Alambert carecía de la precisión lingüística y de la exactitud necesaria para hacerla operativa. Así pues, los libros de texto continentales de finales del siglo XVIII continuaron utilizando, en la inmensa mayoría, el lenguaje y las concepciones de Leibniz y Euler para el cálculo infinitesimal.

Los pensadores del siglo XVIII no distinguían entre álgebra y análisis, y al no apreciar tanto la necesidad del concepto de límite como los problemas que se introducían por el uso de series infinitas, contemplaban el cálculo infinitesimal como una extensión del álgebra. Un intento de dotar al cálculo infinitesimal del rigor de las demostraciones de los antiguos (en referencia a las demostraciones griegas) se debe a Lagrange (1736–1813), quien quiso y propuso reducirlo al álgebra, incluyendo las series como extensión de polinomios. La suposición de Lagrange de que una función se puede desarrollar en serie de potencias es uno de sus puntos débiles. Aunque pensaba que el cálculo infinitesimal se podía fundamentar sobre una teoría de límites, creyó que había prescindido del concepto de límite porque “*la clase de metafísica que se debía utilizar era ajena al espíritu del cálculo*” (Kline, 1972, p. 574)). Euler y Lagrange reconocieron la efectividad superior de los métodos analíticos y, de forma gradual pero consciente, reemplazaron los métodos geométricos por los analíticos.

Los autores del siglo XVIII no introdujeron ningún concepto original o fundamental del cálculo, pero mediante el ejercicio virtuoso de una técnica, explotaron y adelantaron el poder del cálculo para desarrollar lo que ahora son sus ramas más importantes: series, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la geometría diferencial y el cálculo de variaciones. El trabajo matemático de este siglo estuvo inspirado directamente en la resolución de problemas de la física. Laplace (1749–1827) consideraba a las matemáticas únicamente como una herramienta al servicio de la física, en concreto de la mecánica y, en particular, de la mecánica celeste. El razonamiento no se diferenciaba de una prueba de un teorema de geometría, donde algunos factores totalmente obvios de la figura eran usados sin que los apoyaran ningún axioma o teorema. Y al igual que en la etapa anterior, lo correcto de las conclusiones físicas eran en lo que se basaba la seguridad de que las matemáticas eran correctas (Kline, 1972).

- *Tercera Etapa*

La tercera etapa, donde el cálculo llega a ser riguroso, empieza en 1821, año en el que Cauchy (1798–1857) publica el Cours d'Analyse de l'École Polytecnique, continua con Bolzano (1781–1848) y culmina con la definición formal del concepto de límite de Weierstrass (1815–1897). Se desarrolla a lo largo del siglo XIX.

A finales del siglo XVIII las obras de numerosos matemáticos reflejaban la necesidad objetiva de construir la teoría de límites y basar en ella una reconstrucción radical del análisis matemático. La construcción de la teoría de límites la llevó a cabo Cauchy en el Cours d'Analyse. La piedra angular del Cours d'Analyse lo constituye el concepto de límite.

Muchos matemáticos anteriores a Cauchy habían trabajado la idea de límite basada en una concepción geométrica, ahora Cauchy convertirá el concepto de límite en un concepto aritmético sin apoyo geométrico. Cauchy propuso la siguiente definición de limite: "*Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfinidament d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière es appelée la limite de toutes les autres*" (Cauchy, 1821, p.4). Es decir, que cuando los valores atribuidos sucesivamente a una misma variable se aproximen indefinidamente a un valor fijo, de forma que lleguen a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás.

El carácter aritmético, pero impreciso de esta definición de límite, hace de ella

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

un concepto dinámico, aunque es más verbal que numérica. Basándose en la definición anterior Cauchy define lo infinitamente pequeño y la continuidad de una función (Collette, 1985).

La definición que Cauchy propuso para definir lo infinitamente pequeño fue: "*Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de maniére à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite*" (Cauchy, 1821, pág.4). Es decir, que cuando los sucesivos valores numéricos de una misma variable decrecen indefinidamente de forma que disminuyen por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que llamamos un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene como límite cero.

La definición que Cauchy propuso para definir la continuidad fue: "*Soit f(x) une fonction de la variable x, et supposon que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites donnés, cette function admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x une accroissement infiniment petit &, la fonction elle-méme recevra pour accroissement la différence f(x+&)–f(x), qui dépendra en même temps de la nouvelle variable & et de le valeur de x. Cela posé, la fonction f(x) sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre cettes limites, la valeur numérique de la différence f(x+&)–f(x) décroit indéfiniment avec celle de &. En d'autres termes, la fonction f(x) restara continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. On dit encoré que la fonction f(x) est, dans la voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toute les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont is s'agit*" (Cauchy, 1821, pág.34). Es decir, sea *f(x)* una función de la variable *x*, y supongamos que, para cada entorno dado, esta función admita constantemente un valor único y finito. Si para cada valor de *x* comprendido en ese intervalo, se añade un valor infinitesimal *&*, la función aumentará en la diferencia *f(x+&)–f(x)*, que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable *&* y del valor de *x*. Establecido lo anterior, la función *f(x)* será una función continua de esta variable, entre los dos limites asignados a la variable *x*, si para cada valor de *x* comprendido entre esos límites, el valor numérico de la diferencia *f(x+&)–f(x)* decrece indefinidamente con el valor de *&*. En otros términos, la función *f(x)* será continua con respecto a *x* entre los límites dados, si entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Se dice además que la función *f(x)* es continua en el entorno de un valor particular, atribuido a la variable *x*, siempre que sea continua entre los límites de *x*, incluso muy próximos, que contengan al valor de que se trata.

La definición de límite representa el punto de partida para definir lo infinitamente pequeño y la noción de continuidad. Sin embargo, la ambigüedad de expresiones como “aproximan indefinidamente a un valor fijo”, “un crecimiento infinitamente pequeño” serán eliminadas posteriormente en los trabajos de Weierstrass (1815–1897) y sustituidas por expresiones numéricas bastante más rigurosas. Las razones que llevaron a Cauchy, según Kleiner (2001), a establecer el concepto de límite en el que basarse los demás y derivar a partir de él de forma rigurosa la mayoría de los resultados del cálculo fueron:

a) su oposición a fundamentar el cálculo como una reducción del Álgebra, como exponía Lagrange en sus trabajos;

b) los problemas prácticos de la cuerda vibrante y de la conducción del calor;

c) el cambio social ocurrido en el interior de la comunidad matemática después de la Revolución Francesa. Los matemáticos pasaron de estar bajo protección de una corte a vivir de la enseñanza. Este hecho motivó la aparición de libros de texto como el Cours d’Analyse al obtener las matemáticas en Francia el estatus de materia obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica; y

d) el que a la etapa anterior, como etapa exploratoria, le siguiese otra etapa de reflexión y consolidación.

La nueva propuesta para fundamentar rigurosamente el cálculo realizada por Cauchy generó sus propios problemas y sedujo a una nueva generación de matemáticos para abordarlos. Las mayores dificultades de este enfoque fueron: las definiciones verbales de límite y continuidad y el excesivo uso de los infinitesimales. Las

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

definiciones de límite, infinitesimal y continuidad sugieren un movimiento continuo a un nivel intuitivo, y la apelación intuitiva a la geometría para justificar la existencia de límites. Weierstrass puso remedio a la insatisfactoria mezcla de formulación aritmético-algebraica y a las justificaciones geométricas intuitivas. Propuso una definición estática del concepto de límite en términos de desigualdades con ε, y δ que todavía usamos. Con la formulación en términos de ε y δ Weierstrass "*eliminó los infinitesimales utilizados por Cauchy y sus predecesores durante dos centurias (dos milenios, si consideramos las contribuciones de los griegos)*" (Kleiner, 2001, p. 165).

1.3. El límite de una función real en los libros de texto españoles del siglo XX

El concepto de límite funcional aparece por primera vez que en España en el plan de estudios de 1934 (Blázquez y Ortega, 2002). En el plan de 1938 "*en la distribución de materias no aparece explícitamente el cálculo diferencial e integral, aunque la costumbre de la época era introducir esa parte en los contenidos de álgebra o de álgebra superior*" (Sierra, González y López, 1999, p.465). Estos autores analizan el desarrollo del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU (Curso de Orientación Universitaria) desde 1940 hasta 1995. Para este análisis eligen diferentes libros de texto de los autores más "*famosos*" o de las editoriales más "*importantes*", considerando tres dimensiones de análisis:

a) análisis conceptual (como se define el concepto, representaciones gráficas y simbólicas);

b) análisis didáctico-cognitivo (objetivos); y

c) análisis fenomenológico (fenómenos que toman en consideración con respecto al límite funcional).

Teniendo en cuenta los diferentes planes de estudio los libros de texto los agrupan en tres periodos. El primer periodo abarca desde el final de la guerra civil (1940) hasta la aparición de los textos pilotos de la introducción de la matemática moderna en 1967 y centra su atención en el rigor de las definiciones. El segundo periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del BUP (Bachillerato Unificado Polivalente) en 1975, se centra en el rigor de las demostraciones. El tercer periodo abarca todo el tiempo que duró el BUP, que terminó con la introducción del primer bachillerato de la democracia actual derivado de la LOGSE (Ley de Ordenación General del Sistema Educativo) en 1995. Este último periodo se caracteriza por presentar los conceptos conectados con situaciones para dotarlos de sentido.

El concepto de límite en el primer periodo aparece ligado al concepto de sucesión. En los libros de este periodo algunos contienen pocas representaciones gráficas, y otros presentan un lenguaje abundante de épsilon (ε). En este periodo, los libros de texto se centran en el contenido de la materia y solo hacen referencia a aspectos matemáticos. Aparecen expresiones verbales como "*tiende a*" y "*tan pequeño como se quiera*", pero las capacidades que se pretende desarrollar en los estudiantes son la memorización de definiciones y práctica algorítmica.

El concepto de límite que se utiliza en la segunda etapa es la definición topológica, orientación precedida por las ideas bourbakistas cuyos cimientos son la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas, de orden y topológicas. Los autores encuentran tres tipos de libros de texto. Los continuistas con la etapa anterior, los que empiezan a introducir la matemática moderna, y los que se sitúan decididamente en la corriente de la matemática moderna. Estos últimos empiezan a considerar al estudiante como sujeto de aprendizaje. Las gráficas cartesianas aparecen en todos los libros analizados por los autores. Aparecen tablas de valores (que en algunos casos se usan para comprobar que se verifica la definición de límite), diagramas de Venn y la recta numérica. En general, los libros de texto, siguen haciendo referencia solamente a aspectos matemáticos.

El concepto de límite que se utiliza en la tercera etapa es la definición métrica en contraposición a la orientación topológica del periodo anterior. Durante este periodo, se introducen modificaciones en las que "*no es imprescindible la formalización del concepto de límite ni tampoco utilizar una notación rigurosa para definir un vocabulario básico*" (p. 471). Los autores encuentran cuatro bloques de libros de texto. Los que siguen la etapa anterior, aquellos en los que se impone la matemática moderna, los que se sitúan bajo la influencia de los nuevos planteamientos, y los del Grupo Cero de Valencia con una metodología diferente basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal. Al final del periodo, los autores simplifican el simbolismo, aumentando las

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

expresiones de proximidad como "*muy próxima a*" y "*valores muy cercanos a*". En alguno de los bloques los libros introducen nociones históricas, se presentan intuitivamente los conceptos antes de desarrollarlos formalmente, se presentan fenómenos conectados con la realidad y con otras ciencias, se enfatizan los procedimientos de resolución de problemas, se incorporan resúmenes y se utiliza la calculadora. El libro del Grupo Cero de Valencia parte de la idea de aproximación para llegar a la definición topológica, aunque no hay ningún capítulo dedicado al límite. La noción de límite aparece por primera vez al tratar la velocidad instantánea. En este libro, el aprendizaje predomina sobre la enseñanza, por lo que el libro no sigue un programa concreto, sino que lo que hace es aportar materiales para que los estudiantes experimenten, analicen y rectifiquen sus propios errores.

A lo largo del siglo XX, el concepto de límite que aparece en los libros de texto de matemáticas preuniversitarias ha evolucionado "*desde su consideración ligado al concepto de función*" (p.475), pasando por épocas más dinámicas y épocas más estáticas, dependiendo del tipo de libro de texto que se analice, pero siempre con un carácter marcadamente instrumental. Concluyen que son notables las diferencias existentes entre los diferentes libros de texto a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales y a las influencias internacionales, y constatan el paso que se da de los libros de autor a los libros de editoriales. (Sierra, González y López, 1999).

En 1990 se aprobó la Ley General de Ordenación del Sistema Educativo (LOGSE) la primera ley de Educación de la actual etapa constitucional. Esta ley modificó de forma significativa el sistema educativo español. La educación obligatoria se amplió hasta los 16 años y estableció el bachillerato de dos cursos como educación post obligatoria. Con las transferencias a las Comunidades Autónomas de las competencias educativas, estas establecieron en los Decretos de 20/1992 y 47/1992 los principios generales de la propuesta educativa.

La noción de límite que presentan las editoriales en los libros de texto de educación post obligatoria (primero o segundo de bachillerato) con posterioridad a 1995 incluye la definición formal (topología y/o analítica) y la definición dinámica. Al ser el currículum abierto y flexible podemos encontrar un amplio abanico de posibilidades. Analicemos tres de dichas posibilidades en los libros de las editoriales Marfil (1999),

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

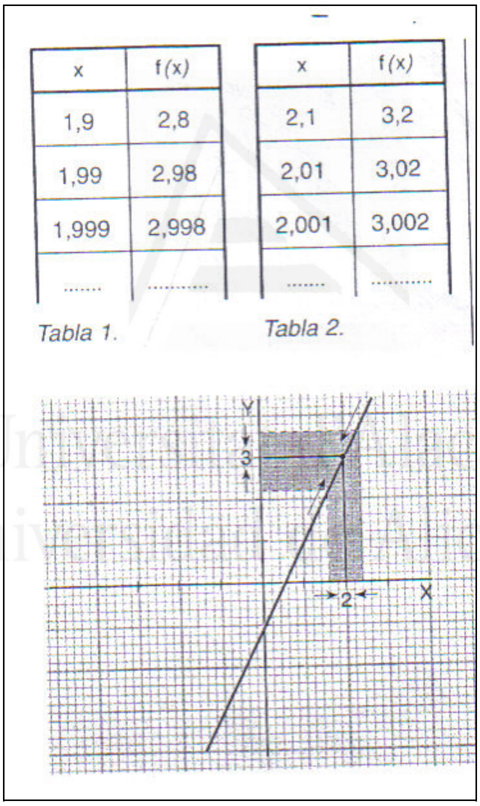
Edebé (1998) y Ecir (2002).

- *El tratamiento de la noción de límite en la Editorial Marfil*

Los libros de texto de matemáticas de bachillerato de la editorial Marfil son continuadores de la línea de trabajo del Grupo Cero de Valencia. El libro de texto de la editorial Marfil (1999) de Matemáticas I no es comparable con los libros de las otras editoriales. Las nociones teóricas son mínimas y lo que presenta es una colección de problemas con los que introducen los modelos funcionales y dentro de ellos la noción de límite de una función. Un ejemplo donde podemos "intuir" que está presente la noción de límite es la pregunta del problema "*Laboratorio farmacéutico*" (p.54). En este laboratorio se realizan estudios sobre la efectividad de un compuesto y han observado que al variar la dosis de un componente (x en mg) varía el porcentaje de curaciones en animales de laboratorio (y) según la función $y = 75x/(x+1)$. La pregunta en cuestión es: "*¿Cómo influye ese componente en los efectos sobre el paciente?*" (p.54). La presentación de la noción de límite la realiza indicando que si al "*dar valores a "x" cada vez más cercanos a "a", las imágenes toman valores cada vez más cercanos a "k"*" (p.55) está basada en la concepción dinámica desde la perspectiva del eje OX. No presentan ningún ejemplo concreto de cálculo de límite dejando la concretización de la de la idea de límite en la programación personal y particular del profesor de la materia.

- *El tratamiento de la noción de límite en la Editorial Edebé*

El límite de una función lo concreta la editorial Edebé (1998) en el libro de texto de Matemáticas I en el capítulo que lleva por título "*Límites funcionales y continuidad*". Este capítulo se inicia con un esquema de la unidad y los objetivos que se pretenden alcanzar. El primero de los objetivos es "*Adquirir el concepto intuitivo de límite de una función en un punto, así como conocer su definición*" (p. 246). El apartado del límite de una función en un punto empieza (Figura 1.3) elaborando una tabla de "*valores cercanos*" a *2* aunque menores, y una tabla de "*valores cercanos*" a *2* aunque mayores para la función $f(x) = 2x–1$, y en ambas tablas cuanto más se acerca x a 2, más se aproximan sus imágenes a 3. Dichas tablas van asociadas con su imagen gráfica. También justifica que el límite de la función es 3 al indicar que si se observa la gráfica de la función “*a medida que estrechamos la franja vertical en torno a 2, la franja horizontal se estrecha también en torno a 3*” (p. 248). La presentación del límite de una función se inicia con la concepción dinámica de límite, utilizando la perspectiva desde el eje OX. También se da la definición topológica (con entornos) de límite, y se continúa con el cálculo sistemático de límites de funciones polinómicas y racionales en un punto. La presentación de los límites laterales sigue exactamente el modelo anterior, pero en el ejemplo utilizado los límites laterales no coinciden. El capítulo del límite de una función finaliza con una colección de catorce ejercicios: de cálculo analítico (13 ejercicios), representaciones gráficas a partir de las cuales se calcula el límite (3 ejercicios) y representar la gráfica de una función que cumple siete condiciones (1 ejercicio).



x	f(x)
1,9	2,8
1,99	2,98
1,999	2,998
....	....

Tabla 1.

x	f(x)
2,1	3,2
2,01	3,02
2,001	3,002
....	....

Tabla 2.

Figura 1.3. Límite de una función en un punto (Matemáticas I. Editorial Edebé (1998), p. 248)

Podemos inferir que el tratamiento que hace la editorial Edebé (1998) en el libro de texto de primero de bachillerato del límite de una función es intuitivo, basado en la concepción dinámica de límite con el uso de tablas de valores acompañados de la representación gráfica de las funciones. Su concepción de límite de una función se basa en la perspectiva del eje OX. El capítulo está dirigido al cálculo procedimental con la finalidad de encontrar el límite de una función.

- *El tratamiento de la noción de límite en la Editorial Ecir*

El límite de una función lo concreta la editorial Ecir (2002) en el libro de texto de Matemáticas I en el capítulo que lleva por título “*Las funciones*”. Los apartados dedicados a la noción de límite se inician con el límite de una función en un punto, límites laterales, límites infinitos, límites en el infinito, continuidad y cálculo de límites. El apartado de límite de una función en un punto se inicia con la representación gráfica de tres funciones en las que se estudia el límite cuando *x* tiende a *2* (que expresa que *x* toma valores distintos de *2*, cuya diferencia con *2* es cercana a *0*). La presentación del límite de una función se inicia con la concepción dinámica de límite, utilizando la perspectiva del eje OX. Enuncia la concepción métrica en términos de desigualdades al indicar que “*si al hacer que x→a resulta que los valores de f(x) se acercan cada vez más a un valor l en el sentido de que la diferencia |f(x)–l| es arbitrariamente pequeña, diremos que l es el límite de la función cuando x→a*” (p. 265). También se presenta de forma gráfica una definición informal (Figura 1.4) desde la perspectiva del eje OY, al indicar que “*Gráficamente: cualquier valor de f(x) próximo a l es imagen de algún valor de x próximo a a*”. Los primeros ejemplos de cálculo de límites los resuelve utilizando la representación gráfica de la función. Esta editorial no presenta ningún ejemplo de cálculo del límite de una función en el que utilice tablas de valores aproximados.

Universitat d’Alacant
Universidad de Alicante

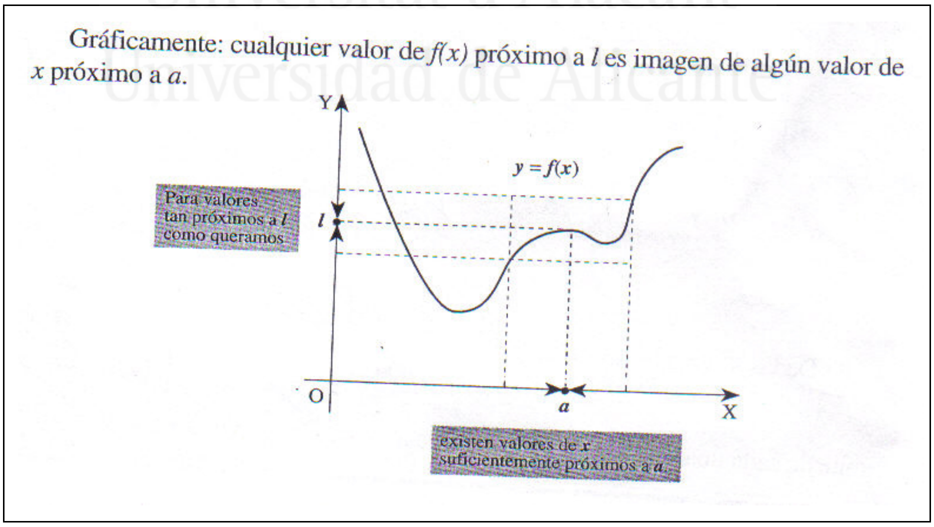


Figura 1.4. Límite de una función en un punto
(Matemáticas I. Editorial Ecir (2002), p. 265)

El apartado sobre el cálculo de límites lo inicia indicando que “*Si la función f viene dada por una única expresión algebraica, es decir, no definida a trozos, comenzaremos hallando f(a). Si el resultado es un número, ese será el límite. Si el* *resultado no está definido, se intentará obtener el valor del límite utilizando otros procedimientos*" (p. 272). A continuación, se desarrollan los "otros procedimientos" dirigidos al cálculo procedimental con la finalidad de encontrar el límite de una función. En los ejercicios finales del capítulo podemos encontrar un ejercicio de una función definida a trozos en el que se pide que se completen dos tablas y a partir de ellas que se calculen los límites laterales y el límite en un punto.

Podemos inferir que en general el tratamiento que la editorial Ecir (2002) da a la noción de límite en el libro de primero de bachillerato es intuitivo basado en la concepción dinámica desde la perspectiva del eje OX utilizando las representaciones gráficas de las funciones para introducir el calcular límites.

En los últimos años del siglo XX y en los primeros del siglo XXI se suceden diferentes leyes que modifican los currículos. En este periodo las editoriales modifican superficialmente los libros de texto, añaden o quitan contenidos, pero mantienen básicamente las nociones límite de una función en un punto. Un ejemplo de estas modificaciones la podemos observar en la Editorial Anaya donde los libros de Matemáticas I, correspondientes a las ediciones de 2000 y 2008, los capítulos dedicados a los límites de funciones son casi idénticos excepto en la numeración de las páginas, y lo mismo ocurre con los libros de Matemáticas II correspondientes a las ediciones de 2003 y 2009. Esta situación se da en otras editoriales, pues esta casi coincidencia también se da en los libros de la Editorial Edebé de Matemáticas I de las ediciones de 1998 y 2002, aunque podemos constatar la modificación de las portadas de los libros.

1.4. El límite de una función real de variable real en el currículo actual de la enseñanza secundaria obligatoria y postobligatoria

En la actualidad el sistema educativo español se divide en cuatro etapas: Educación Infantil (de 0 a 6 años), Educación Primaria (de 6 a 12 años), Educación Secundaria Obligatoria (de 12 a l6 años) y Bachillerato (de 16 a 18 años). Es durante la etapa de la educación obligatoria donde empiezan a desarrollarse contenidos relacionados de forma intuitiva con la noción dinámica de límite a través de la idea de aproximación. En el Diari Oficial de la Comunitat Valenciana, en el Decret 112/2007, de 20 de juliol, del Consell se establece el currículum de la etapa de secundaria obligatoria,

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

en cuatro cursos. En el cuarto curso, los estudiantes pueden elegir entre dos opciones dentro de las matemáticas: opción A y opción B. En dicho Decret, y en la opción B, refiriéndose a las funciones y a las gráficas se encuentran las de "*proporcionalidad inversa*" en las que se da una idea intuitiva de aproximación vinculada a la idea de asíntota. La concreción que de este apartado, por ejemplo, realiza la editorial Anaya (2012), bajo el epígrafe "*Funciones de proporcionalidad inversa*", es a partir de actividades sobre las asíntotas horizontal y vertical. En dichas actividades (Figura 1.5) se puede leer que "*si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes*". Esta es la primera toma de contacto que tienen los estudiantes de la enseñanza obligatoria con la noción dinámica de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño y su coordinación "cuando… entonces…"

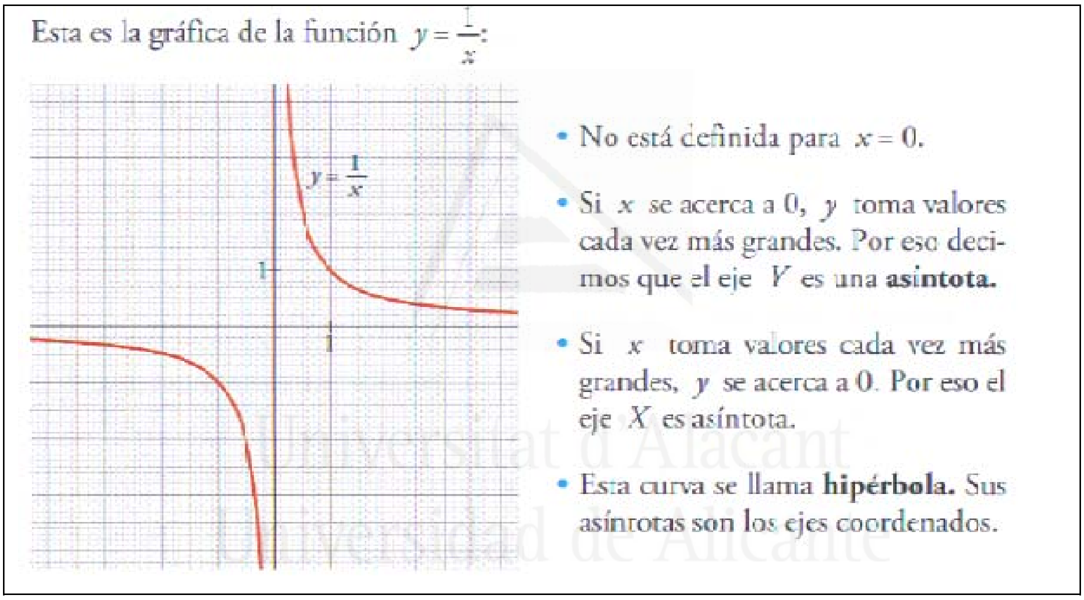


Figura 1.5. Funciones de proporcionalidad inversa
(Matemáticas 4ESO opción B. Editorial Anaya (2012), p. 108)

En la siguiente etapa, el Bachillerato, la Comunidad Valenciana establece el currículum en el Decret 102/2008, de 11 de juliol. El Bachillerato consta de tres modalidades: a) Modalidad de Ciencias y Tecnología, b) Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y c) Modalidad Artística. En este decreto se fijan los contenidos mínimos y los criterios de evaluación del Bachillerato de Ciencias y Tecnología relativos al concepto de límite de una función en un punto en primer curso y en segundo curso.

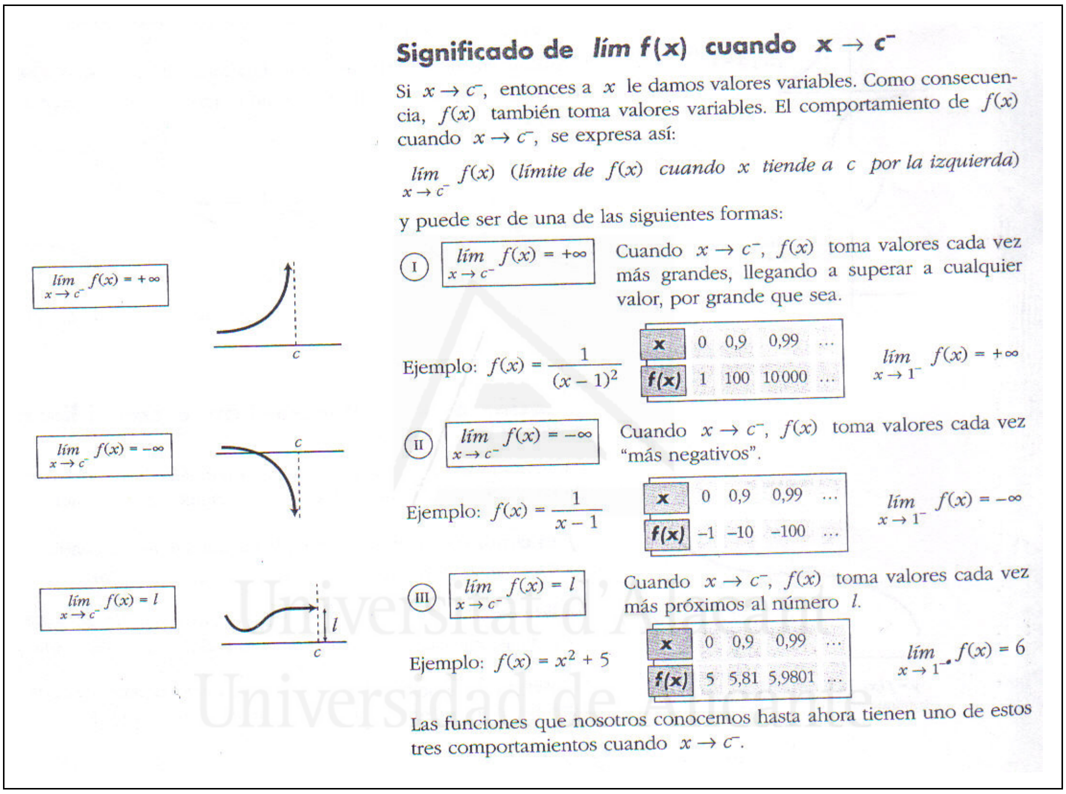
- **El concepto de límite de una función en un punto en primer curso de Bachillerato**

En el primer curso de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, el Decret 102/2008de 11 de julio, introduce dentro de los bloques de Aritmética y Algebra la idea de límite de una sucesión en el epígrafe "*Sucesiones numéricas. Números combinatorios. Binomio de Newton. El número e*". Dentro del bloque de Análisis se introduce la idea de límite de una función en el epígrafe "*Aproximación al concepto de límite. Estudio de las discontinuidades*". En los criterios de evaluación se pretende verificar la capacidad de "*analizar cualitativa y cuantitativamente las propiedades globales y locales (dominio, recorrido, continuidad, simetría, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, intervalos de crecimiento) de una función sencilla"*. En las unidades didácticas sobre el tema del límite de una función en un punto, en los diferentes libros de texto de diferentes editoriales (Anaya, Ecir, Edebé, Edelvives, Editex, Everets, Marfil, McGraw Hill, Santillana, S.M. y Vicens Vives), se aprecia que los estudiantes que cursan 1º de bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud son estudiantes que deben trabajar con el concepto de función, la idea intuitiva del límite, los límites laterales, límites en el infinito, límites infinitos, el cálculo de límites, el cálculo de asíntotas, la continuidad, sucesiones y límites de sucesiones.

El límite de una función tiene tratamientos diferentes según el libro de texto de las editoriales anteriores (Tabla 1.1). Aunque todas coinciden en la necesidad de las representaciones gráficas como soporte al cálculo de límites. Las diferencias las presentaremos basándonos en los libros de texto de Matemáticas I de tres editoriales dependiendo de la menor o mayor formalización en las definiciones del concepto de límite: Anaya (2008), Santillana (2008) y Editex (2008).

- *El tratamiento de la noción del límite de una función en la Editorial Anaya*

El límite de una función en un punto lo concreta la editorial Anaya (2008) en el libro de texto de las Matemáticas I en el capítulo que lleva por título "*Límites de funciones. Continuidad y ramas infinitas*". Este capítulo se introduce con una reflexión sobre aproximaciones sucesivas y problemas contextualizados sobre el volumen de una esfera, a través de una lupa, con la temperatura del agua y con el ruido y el silencio con la finalidad de calcular el límite de una función en situaciones contextualizadas. Sigue con una visión intuitiva de la continuidad y los tipos de discontinuidades basada en la representación gráfica. El límite de una función en un punto se introduce estudiando la tendencia a un número por la izquierda, la tendencia a un número por la derecha y la definición de qué significa el que "*x tiende a c*", asociando las diferentes tendencias con representaciones gráficas. El significado de límite por la izquierda (Figura 1.6) de funciones algebraicas se basa en la construcción de tablas de valores numéricos aproximados, asociadas con imágenes gráficas en tres ejemplos cuyos límites respectivamente son más infinito, menos infinito y un valor finito.



Significado de $\text{lím}\ f(x)$ **cuando** $x \to c^-$

Si $x \to c^-$, entonces a x le damos valores variables. Como consecuencia, $f(x)$ también toma valores variables. El comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to c^-$, se expresa así:

$\lim_{x \to c^-} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la izquierda*)

y puede ser de una de las siguientes formas:

I. $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ — Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más grandes, llegando a superar a cualquier valor, por grande que sea.

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	1	100	10 000	…

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

II. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ — Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez "más negativos".

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	–1	–10	–100	…

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

III. $\lim_{x \to c^-} f(x) = l$ — Cuando $x \to c^-$, $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número l.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 5$

x	0	0,9	0,99	…
f(x)	5	5,81	5,9801	…

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 6$

Las funciones que nosotros conocemos hasta ahora tienen uno de estos tres comportamientos cuando $x \to c^-$.

Figura 1.6. Límite de una función en un punto
(Matemáticas I. Editorial Anaya (2008), p. 276)

El significado del límite por la derecha de una función, lo basa en el comportamiento de tres representaciones gráficas, aunque ahora sin el apoyo de las tablas de valores. Y define el "*significado de lím f(x) cuando x→c*" cuando coinciden y son iguales los límites por la derecha y por la izquierda, indicando que si los dos límites laterales no toman el mismo valor se dirá que no existe el límite de la función en el punto, siempre acompañándolo con imágenes de representaciones gráficas.

Esta editorial no presenta ninguna definición formal de límite. El significado intuitivo de la noción de límite, desde una perspectiva gráfica y el cálculo de tablas de valores aproximados para calcular el límite de una función en un punto, constituye el primer contacto que tienen los estudiantes de primero de bachillerato con la noción de límite con la editorial Anaya (2008). Además, los primeros ejemplos de cálculo de límites lo realiza con funciones polinómicas y cocientes de polinomios en puntos en los que las funciones están definidas. La idea intuitiva de límite se materializa como la concepción dinámica del límite desde la perspectiva del eje OX.

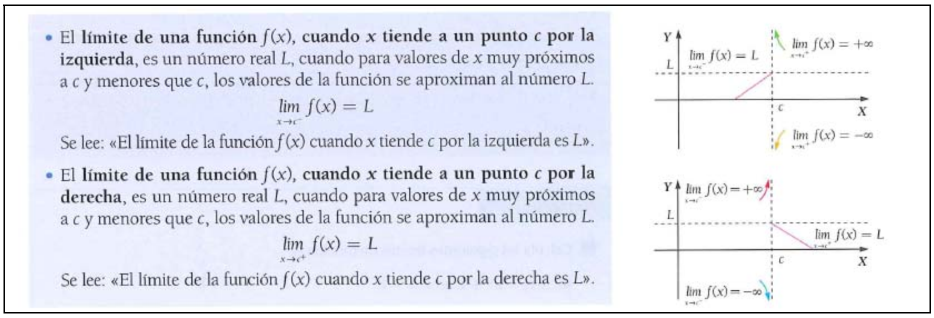
El capítulo sigue con el comportamiento de una función en el infinito, mediante representaciones gráficas y una tabla de valores en la que la variable independiente toma valores cada vez más grandes. Las ramas infinitas y las asíntotas las determina por el procedimiento de calcular el signo en un único valor a la derecha y un único valor a la izquierda del punto en cuestión. Al finalizar el tema, se presentan cinco ejercicios resueltos sobre funciones algebraicas, uno mediante una tabla de valores. También se presentan actividades en las que se pide a los estudiantes que calculen límites de funciones a partir de representaciones gráficas (4), de funciones algebraicas (36), un ejercicio contextualizado en una cadena de montaje y cuestiones teóricas (9).

Podemos inferir que en general el tratamiento que la editorial Anaya (2008) da a la noción de límite en el libro de primero de bachillerato es intuitivo, basado en la concepción dinámica de límite desde la perspectiva del eje OX, utilizando tablas de valores numéricos aproximados y representaciones gráficas. Básicamente el libro se dedica a procedimientos para el cálculo de límites de una función algebraica.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- *El tratamiento de la noción del límite de una función en la Editorial Santillana*

El límite de una función en un punto lo concreta la editorial Santillana (2008) en el libro de texto de Matemáticas I, en el capítulo que lleva por título "*Límites de una función*". Este capítulo se inicia recordando el término general de una sucesión, la factorización de polinomios, simplificación de fracciones algebraicas y operaciones con ellas. Sigue con sucesiones y límites de sucesiones tomando valores muy grandes. En el apartado de límite de una función en el infinito considera la expresión algebraica como el término general de una sucesión, pero al calcular el límite de una función lo hace representándola gráficamente para estudiar los valores de la función cuando la variable independiente toma valores muy grandes. El apartado de límite de una función en un punto lo inicia con la definición dinámica de límites laterales (Figura 1.7), donde se indica que "*para valores de x muy próximos a c y menores que c, los valores de la* *función se aproximan al número L*” (p. 227), que es el límite de la función cuando x tiende a c por la izquierda. De la misma forma define el límite lateral de una función por la derecha (con un error al repetir menores que c). Definiciones asociadas con representaciones gráficas y basadas en la perspectiva del eje OX.



- **El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a un punto c por la izquierda**, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a c y menores que c, los valores de la función se aproximan al número L.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Se lee: «El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende c por la izquierda es L».

- **El límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a un punto c por la derecha**, es un número real L, cuando para valores de x muy próximos a c y menores que c, los valores de la función se aproximan al número L.

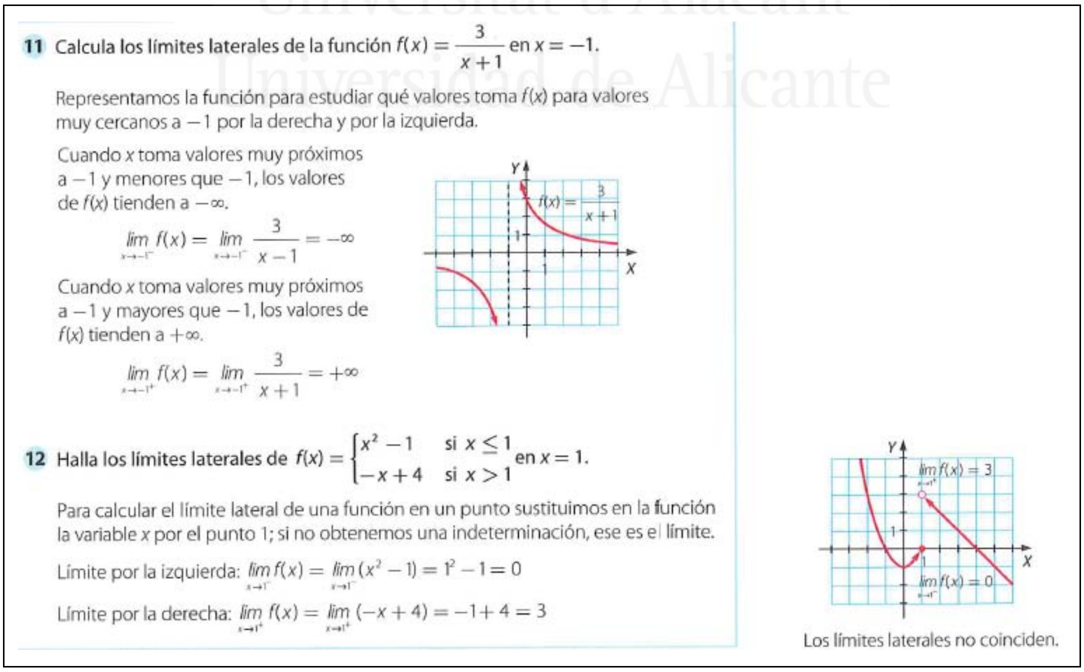
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Se lee: «El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende c por la derecha es L».

Figura 1.7. Límite de una función en un punto
(Matemáticas I. Editorial Santillana (2008), p. 227)

La definición de los límites laterales va acompañada con dos ejemplos resueltos (Figura 1.8). En el primero, calculan el límite de una función algebraica, representándola gráficamente para estudiar qué valores toma la función para valores de *x* muy cercanos a *–1*, por la derecha y por la izquierda. En el segundo ejemplo, calculan el límite de una función algebraica definida a trozos, sustituyendo en la función la variable *x* por el punto *1*. Este cálculo va asociado con la representación gráfica de la función, en la parte inferior de la cual se indica que “*los límites laterales no coinciden*” (p. 227).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



11 Calcula los límites laterales de la función $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x = -1$.

Representamos la función para estudiar qué valores toma $f(x)$ para valores muy cercanos a -1 por la derecha y por la izquierda.

Cuando x toma valores muy próximos a -1 y menores que -1, los valores de $f(x)$ tienden a $-\infty$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{3}{x-1} = -\infty$$

Cuando x toma valores muy próximos a -1 y mayores que -1, los valores de $f(x)$ tienden a $+\infty$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$$

12 Halla los límites laterales de $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

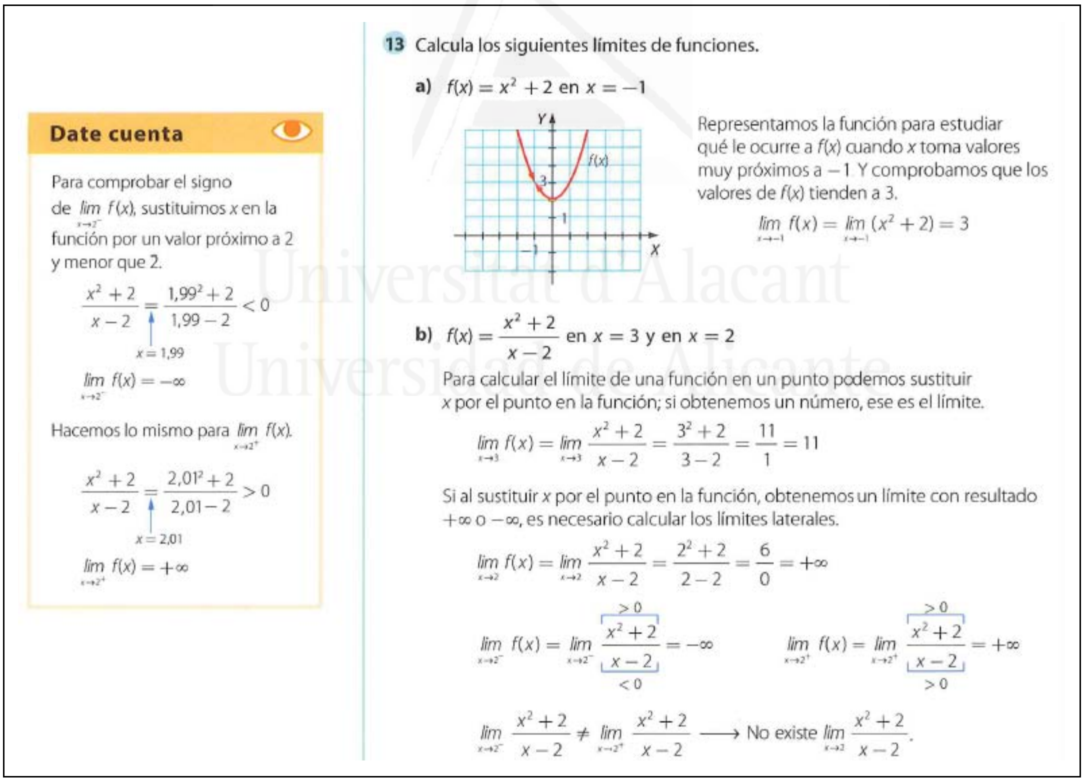
Para calcular el límite lateral de una función en un punto sustituimos en la función la variable x por el punto 1; si no obtenemos una indeterminación, ese es el límite.

Límite por la izquierda: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Límite por la derecha: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x + 4) = -1 + 4 = 3$

Figura 1.8. Límite de una función en un punto
(Matemáticas I. Editorial Santillana (2008), p. 227)

El límite de una función en un punto, la define indicando que es el número real en el que coinciden los límites laterales de dicha función. La definición va acompañada de dos ejemplos resueltos (Figura 1.9). En el primero, pide que se calcule el límite de una función de segundo grado en el punto *x=–1*, representándola gráficamente para estudiar lo que le ocurre a la función en puntos próximos a *–1*, calcula el límite apoyándose en la representación gráfica. En el segundo ejemplo, calcula el límite de una función algebraica cociente de polinomios en dos puntos *x=3* y *x=2*. En estos casos no utiliza la representación gráfica, calcula el límite de la función en el punto *x=3* sustituyendo *x* por el punto y, como obtiene un número, afirma que ese número es el límite de la función. Al sustituir el valor de la *x* por *2*, obtiene un límite infinito por lo que "*es necesario calcular los límites laterales*" (p. 228). La obtención del signo del infinito la resuelve de dos formas: en una de ellas sustituye un único valor por la izquierda (*1.99*) y un único valor por la derecha (*2.01*); en la otra, observa el signo del numerador y el signo del denominador para valores menores y para mayores de *2*.



Date cuenta

Para comprobar el signo de $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, sustituimos x en la función por un valor próximo a 2 y menor que 2.

$$\frac{x^2+2}{x-2} = \frac{1{,}99^2+2}{1{,}99-2} < 0 \quad (x = 1{,}99)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Hacemos lo mismo para $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\frac{x^2+2}{x-2} = \frac{2{,}01^2+2}{2{,}01-2} > 0 \quad (x = 2{,}01)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

13 Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $f(x) = x^2 + 2$ en $x = -1$

Representamos la función para estudiar qué le ocurre a $f(x)$ cuando x toma valores muy próximos a -1. Y comprobamos que los valores de $f(x)$ tienden a 3.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x^2+2) = 3$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$ en $x = 3$ y en $x = 2$

Para calcular el límite de una función en un punto podemos sustituir x por el punto en la función; si obtenemos un número, ese es el límite.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+2}{x-2} = \frac{3^2+2}{3-2} = \frac{11}{1} = 11$$

Si al sustituir x por el punto en la función, obtenemos un límite con resultado $+\infty$ o $-\infty$, es necesario calcular los límites laterales.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x-2} = \frac{2^2+2}{2-2} = \frac{6}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x^2+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{<0}} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{x^2+2}^{>0}}{\underbrace{x-2}_{>0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2}{x-2} \longrightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2}{x-2}.$$

Figura 1.9. Límite de una función en un punto
(Matemáticas I. Editorial Santillana (2008), p. 228)

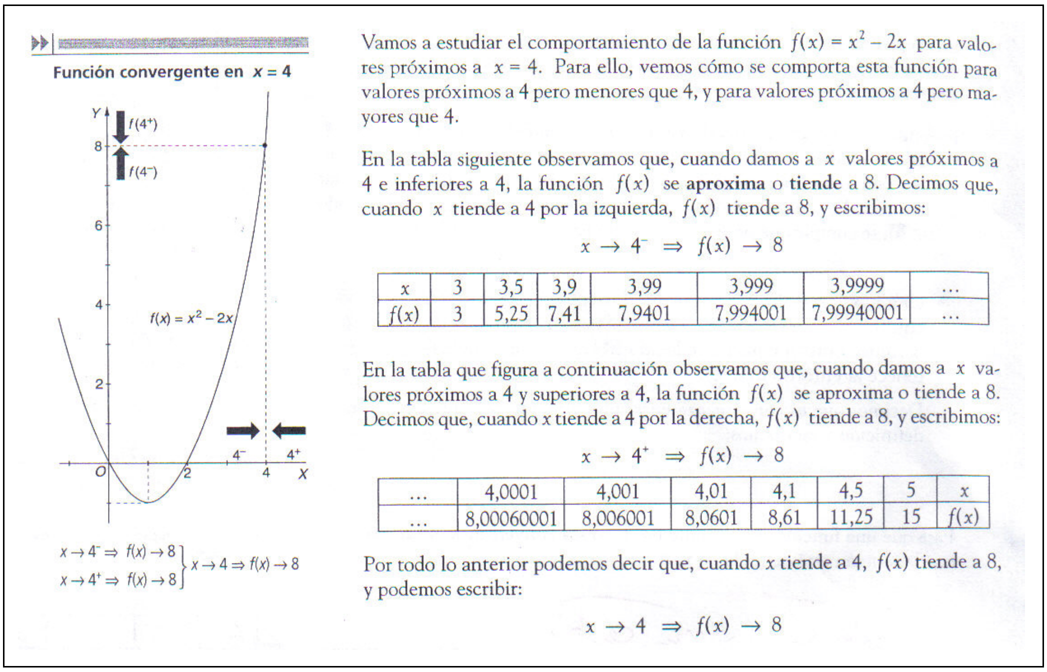
A continuación, resuelve las indeterminaciones de funciones racionales con el procedimiento de la factorización y sigue con el estudio de las asíntotas y de la continuidad. Al finalizar el tema se presentan siete ejercicios resueltos, en uno de ellos, pide la representación gráfica de una función que cumpla cuatro condiciones. En los seis restantes se calculan límites de funciones algebraicas mediante la sustitución de un único valor y el empleo de procedimientos como factorizar y multiplicar por el conjugado. El capítulo se termina con la presentación de una colección de actividades para que las resuelvan los estudiantes en las que se pide que calculen límites de funciones a partir de representaciones gráficas (3), de funciones algebraicas (47), de una función algebraica asociadas a una tabla de valores (3), completar la tabla de una función algebraica (2), representar funciones que cumplan unas condiciones (4), escribir una función racional que cumpla unas condiciones (1) y dos ejercicios contextualizados en una población de zorros y en la tarifa de un aparcamiento.

Podemos inferir que el tratamiento que hace la editorial Santillana (2008), en el libro de primero de bachillerato, del límite de una función se apoya en el estudio de las tendencias en sucesiones para límites en el infinito con ayuda de la representación gráfica. La noción de límite de una función es intuitiva, basada en la concepción dinámica de límite con la ayuda de los límites laterales, asociada a las representaciones gráficas o al cálculo de un único valor de la función. Su concepción del límite de una función se basa en la perspectiva del eje OX. Ha sido al analizar las actividades, en la parte final del capítulo, cuando se han utilizado tablas de valores aproximados y hemos observado que en la mayoría de dichas actividades se calculan límites de funciones algebraicas mediante métodos procedimentales.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- *El tratamiento de la noción del límite de una función en la editorial Editex*

El límite de una función en un punto lo concreta la editorial Editex (2008), en el libro de texto de las Matemáticas I, en el capítulo que lleva por título "*Límites de funciones. Continuidad*". Este capítulo se inicia con la idea intuitiva de función convergente con una tabla de "*valores próximos*" a *4* e inferiores, y otra de "*valores próximos*" a *4* y superiores (Figura 1.10). Dichas tablas van asociadas con su imagen gráfica. En dicho ejemplo introductorio podemos observar que "cuando *x tiende a 4, f(x) tiende a 8*". El límite de una función en un punto que presenta la editorial se inicia mediante la concepción dinámica con la perspectiva del eje OX.



Función convergente en $x = 4$

Vamos a estudiar el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - 2x$ para valores próximos a $x = 4$. Para ello, vemos cómo se comporta esta función para valores próximos a 4 pero menores que 4, y para valores próximos a 4 pero mayores que 4.

En la tabla siguiente observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 e inferiores a 4, la función $f(x)$ se **aproxima** o **tiende** a 8. Decimos que, cuando x tiende a 4 por la izquierda, $f(x)$ tiende a 8, y escribimos:

$$x \to 4^- \Rightarrow f(x) \to 8$$

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	...
$f(x)$	3	5,25	7,41	7,9401	7,994001	7,99940001	...

En la tabla que figura a continuación observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 y superiores a 4, la función $f(x)$ se aproxima o tiende a 8. Decimos que, cuando x tiende a 4 por la derecha, $f(x)$ tiende a 8, y escribimos:

$$x \to 4^+ \Rightarrow f(x) \to 8$$

...	4,0001	4,001	4,01	4,1	4,5	5	x
...	8,00060001	8,006001	8,0601	8,61	11,25	15	$f(x)$

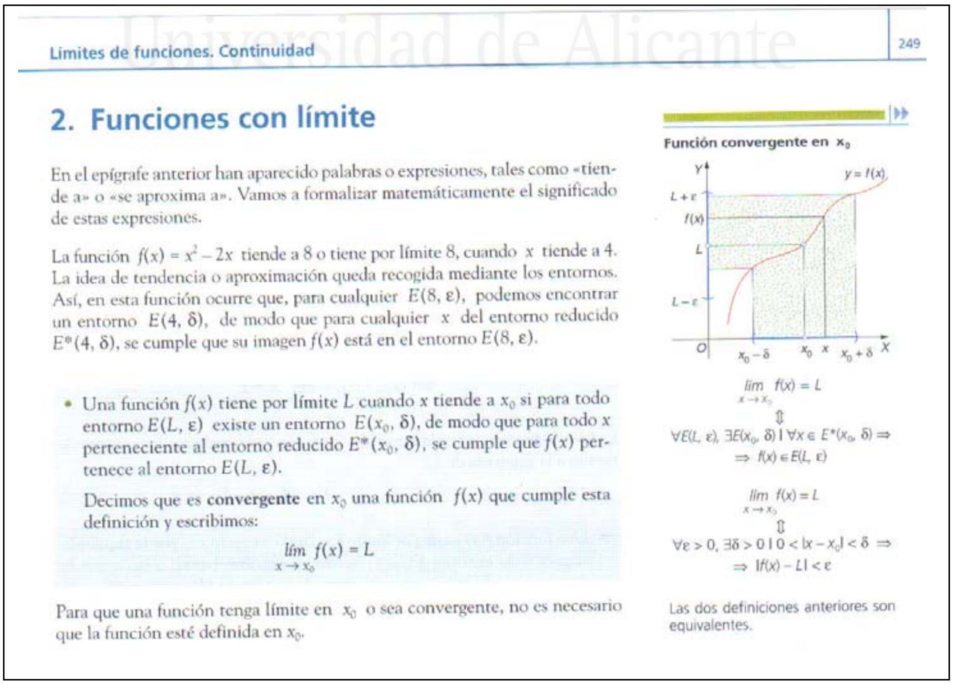
Por todo lo anterior podemos decir que, cuando x tiende a 4, $f(x)$ tiende a 8, y podemos escribir:

$$x \to 4 \Rightarrow f(x) \to 8$$

Figura 1.10. Idea intuitiva de función convergente
(Matemáticas 1 Bachillerato. Editorial Editex (2008), p. 248)

A continuación, formaliza matemáticamente las expresiones "*se aproxima a*" con las definiciones topológica y métrica asociándolas a una representación gráfica (Figura 1.11). Pero antes de dar la definición topológica, podemos observar que "*la función f(x)=x*^{2}*–2x tiende a 8 o tiene por límite 8, cuando x tiende a 4*". Ahora el límite de una función en un punto que presenta la editorial mediante la concepción dinámica es con la perspectiva del eje OY.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Límites de funciones. Continuidad 249

2. Funciones con límite

En el epígrafe anterior han aparecido palabras o expresiones, tales como «tiende a» o «se aproxima a». Vamos a formalizar matemáticamente el significado de estas expresiones.

La función $f(x) = x^2 - 2x$ tiende a 8 o tiene por límite 8, cuando x tiende a 4. La idea de tendencia o aproximación queda recogida mediante los entornos. Así, en esta función ocurre que, para cualquier $E(8, \varepsilon)$, podemos encontrar un entorno $E(4, \delta)$, de modo que para cualquier x del entorno reducido $E^*(4, \delta)$, se cumple que su imagen $f(x)$ está en el entorno $E(8, \varepsilon)$.

- Una función $f(x)$ tiene por límite L cuando x tiende a x_0 si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ existe un entorno $E(x_0, \delta)$, de modo que para todo x perteneciente al entorno reducido $E^*(x_0, \delta)$, se cumple que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L, \varepsilon)$.

  Decimos que es **convergente** en x_0 una función $f(x)$ que cumple esta definición y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Para que una función tenga límite en x_0 o sea convergente, no es necesario que la función esté definida en x_0.

Función convergente en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall E(L, \varepsilon), \exists E(x_0, \delta) \mid \forall x \in E^*(x_0, \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

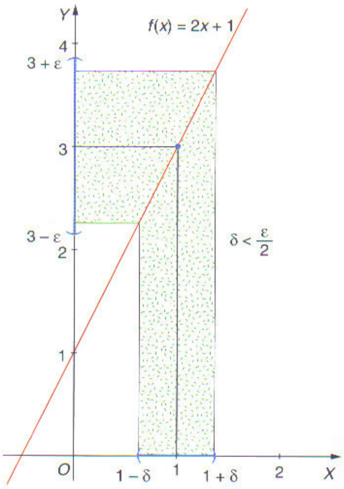
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Las dos definiciones anteriores son equivalentes.

Figura 1.11. Definición formal de límite
(Matemáticas 1 Bachillerato. Editorial Editex (2008), p. 249)

En esta editorial, después de la formalización, se presenta un ejemplo (Figura 1.12) en el que se utiliza la definición métrica para comprobar el límite de una función en un punto asociado con una representación gráfica.

1. Prueba que la función $f(x) = 2x + 1$ es convergente para $x = 1$, siendo su límite 3.



Vamos a probar que $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$, para lo cual hemos de ver que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(2x + 1) - 3| < \varepsilon$$

Razonamos de la forma siguiente:

$$|(2x + 1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta$$

Como $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$, podemos escribir que $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, y así queda probado que la función $f(x) = 2x + 1$ es convergente en $x = 1$ y su límite vale 3, es decir:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

Figura 1.12. Ejemplo de utilización de la definición formal de límite (Matemáticas 1 Bachillerato. Editorial Editex (2008), p. 249)

Continua con definiciones topológicas y métricas de los límites laterales, asociándolas a representaciones gráficas de la función $f(x)=x^2–2x$, calculado previamente mediante las tablas de valores. Sigue con operaciones con funciones convergentes con un ejemplo en el que se calculan las tablas de valores de dos funciones y de su cociente, con la finalidad de justificar que el límite del cociente de dos funciones algebraicas es el cociente de los límites. Para definir los límites infinitos, cuando x tiende a un número finito por la izquierda, por la derecha y en el punto utiliza la definición topológica y métrica apoyándose en funciones representadas gráficamente. El cálculo de límites lo realiza de forma procedimental, la exposición teórica la finaliza con las funciones continuas y las discontinuidades con apoyo gráfico. Presenta una página dedicada a las nuevas tecnologías con el cálculo de límites, mediante el programa informático Derive, con el cual se obtiene el límite de una función de forma automática (casi mágica). El capítulo del límite de una función finaliza con una colección de actividades de cálculo de límites de funciones algebraicas (17 ejercicios), representaciones gráficas a partir de las cuales se calcula el límite (4 ejercicios) y representar la gráfica de una función que cumple determinadas condiciones (2 ejercicios).

Podemos inferir que el tratamiento que hace la editorial Editex (2008), en el libro de primero de bachillerato, del límite de una función, se inicia intuitivamente con el cálculo de tablas de valores aproximados de una función, con ayuda de la representación gráfica desde la perspectiva del eje OX. El capítulo está lleno de definiciones formales: topológicas y métricas desde la perspectiva del eje OY, justificadas siempre con la ayuda de representaciones gráficas. Utiliza un único ejemplo para demostrar formalmente el límite de una función en un punto. El capítulo está dirigido al cálculo procedimental, con la finalidad de encontrar límites de funciones. Además, la utilización del programa informático Derive nos sugiere que su finalidad es el cálculo del valor del límite de funciones.

Las diferencias y similitudes entre las diferentes editoriales la podemos visualizar en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Similitudes-diferencias entre libros de texto de diferentes editoriales

Primero de bachillerato. Matemáticas I		
Editorial ANAYA	**Editorial SANTILLANA**	**Editorial EDITEX**
Dedica dos capítulos. Uno a sucesiones y otro a límites de funciones	Dedica un único capítulo. Comienza con sucesiones y continúa con límites de funciones	No dedica ningún capitulo ni apartado a sucesiones. Dedica un capítulo a límite de funciones
Estudio de tendencias a un número por la izquierda, por la derecha y al punto		
Estudio de límite por la izquierda, mediante tablas de valores aproximados asociadas con sus representaciones gráficas	Estudio de límite por la izquierda, asociados con representaciones gráficas	Estudio de límite por la izquierda, mediante tablas de valores aproximados asociadas con sus representaciones gráficas
Estudio de límite por la derecha (sin utilizar tablas de valores), mediante representaciones gráficas	Estudio de límite por la derecha, asociados con representaciones gráficas	Estudio de límite por la derecha, mediante tablas de valores aproximados asociadas con sus representaciones gráficas
La idea intuitiva de límite se materializa como concepción dinámica desde la perspectiva del eje OX	La idea intuitiva de límite se materializa como concepción dinámica desde la perspectiva del eje OX	La idea intuitiva de límite se materializa como concepción dinámica desde la perspectiva del eje OX

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

No presenta la definición formal	No presenta la definición formal	Introduce la formalización de la idea intuitiva mediante la concepción dinámica desde la perspectiva del eje OY. Presentando definiciones formales: topológicas y métricas, asociadas con la representación gráfica
		Utiliza un único ejemplo para probar formalmente el límite de una función en un punto
Los primeros ejemplos de cálculo de límites los realiza con funciones polinómicas y cocientes de polinomios en puntos en los que las funciones están definidas	Los primeros ejemplos de cálculo de límites los realiza con funciones polinómicas y cocientes de polinomios en un punto en el que la función está definida y otro punto en el que la función no está definida. En el último caso lo resuelve de dos formas: calculando el signo de la función con un único valor de la función tanto por la izquierda como por la derecha, y factorizando	
Procedimientos para el cálculo de límites de funciones algebraicas	Procedimientos para el cálculo de límites de funciones algebraicas	Procedimientos para el cálculo de límites de funciones algebraicas
	En las actividades del final del capítulo se utilizan tablas de valores aproximados para el cálculo de límites	Al final del capítulo, introduce un apartado de “nuevas tecnologías” para calcular el límite de funciones con el programa informático DERIVE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Una diferencia entre las tres editoriales la podemos evidenciar con la relación entre sucesiones y funciones. La editorial Anaya (2008) presenta dos capítulos diferenciados: uno de sucesiones y otro de límites de funciones. La editorial Santillana (2008) presenta un único capítulo que comienza con sucesiones y límites, continúa con límites de una función en el infinito, apoyándose en las ideas anteriores y continúa con límites de una función en un punto. La editorial Editex (2008) no dedica ningún capítulo ni ningún apartado al estudio de sucesiones, la noción de límite se desarrolla solamente con funciones.

El decreto que establece el currículo del primer curso de bachillerato indica que se debe introducir el concepto de límite, y los libros de texto, siguiendo esta indicación, presentan la idea intuitiva de límite. Dicha idea intuitiva de límite se inicia con el cálculo de valores aproximados y con actividades procedimentales, con la finalidad de obtener el valor del límite de una función cuando este existe. En el ejemplo de la Figura 1.12 se presenta la definición formal del límite de una función en un punto a través de la concepción métrica, para justificar que un determinado valor es el límite de la función en un punto. Sin embargo, no se indica cómo se debe calcular el valor límite de la función. Por lo tanto, usar la definición métrica esconde el sentido de la perspectiva dinámica de aproximación.

- **El concepto de límite de una función en un punto en segundo curso de Bachillerato**

En segundo curso de Bachillerato de Ciencias y Tecnología el Decret 102/2008, de 11 de julio, introduce, dentro del bloque de Análisis, la noción de límite en el epígrafe "*Límite de una sucesión. Límite de una función. Cálculo de límites*". En los criterios de evaluación se pretende verificar la capacidad de utilización de los conceptos y técnicas básicas del cálculo diferencial para "*utilizar el concepto y cálculo de límites y derivadas, para analizar cualitativa y cuantitativamente las propiedades globales y locales (dominio, recorrido, continuidad, simetría, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, intervalos de crecimiento) de una función expresada en forma explícita…*".

En las unidades didácticas sobre el tema del límite de una función en un punto, en los diferentes libros de texto de diferentes editoriales (Anaya, Editex, Everest, Marfil, S.M. y Santillana), se aprecia que los estudiantes que cursan 2º de bachillerato deben trabajar con: la idea del límite de una sucesión, funciones reales de variable real, límites de una función en un punto, límites laterales, límites infinitos, límites en el infinito, propiedades de los límites y definiciones formales de límite. En este curso, los libros de texto mencionan la definición formal del límite. La concretización del Decret 102/2008, que realizan las diferentes editoriales, está muy lejos de la uniformidad, prueba de ello es el libro de texto de la editorial Ecir (2000) que no dedica ningún capítulo, ni ningún apartado, al límite de una función.

El límite de una función recibe diferentes tratamientos según el libro de texto de las distintas editoriales. Las diferencias las presentaremos basándonos en los libros de texto de Matemáticas II de la editorial Anaya (2009) y de la editorial Editex (2009).

- *El tratamiento de la noción del límite de una función en la editorial Anaya*

El límite de una función en un punto lo concreta la editorial Anaya (2009), en el libro de texto de las Matemáticas II, en el capítulo que lleva por título "*Límites de funciones. Continuidad*". Este capítulo se inicia utilizando: a) el "*sentido común para dar valores a los límites*" de funciones algebraicas en el infinito, b) gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas para asignar valores a los límites y c) la calculadora para calcular los límites de las funciones. Continúa con el límite de sucesiones utilizando valores cada vez más grandes. Un ejemplo es la forma de calcular el límite del número e. Sigue con el límite de una función en el infinito con métodos procedimentales. El apartado de límite de una función en un punto lo inicia, presentando como equivalentes la concepción dinámica y la concepción métrica de los límites laterales infinitos, apoyándose en representaciones gráficas de funciones. La concepción dinámica la presenta desde la perspectiva del eje OX (cuando x se aproxima a c tomando valores menores que c, $f(x)$ toma valores tan grandes como se quiera). El límite cuando es finito, lo define, presentando como equivalentes la concepción dinámica y la concepción métrica (Figura 1.13), relacionando el concepto de límite con imágenes gráficas. En este caso, la concepción dinámica la presenta desde la perspectiva del eje OY.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Límit finit en un punt

En els límits laterals ens hem acostat al punt c per un costat o per un altre. Ara anem a fer-ho indistintament per un costat o un altre. És a dir, $x \to c$ significa que x s'acosta a c prenent valors tant majors com menors que c.

Una funció té límit finit en c quan admet els dos límits laterals i aquests coincidixen.

$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow$ Si volem que $f(x)$ siga molt pròxim a l, podrem aconseguir-ho donant-li a x valors tan pròxims a c com siga necessari.

$\Leftrightarrow$ Donat $\varepsilon > 0$, podem trobar $\delta > 0$ tal que si $x \neq c$ i $c - \delta < x < c + \delta$, aleshores $|f(x) - l| < \varepsilon$.

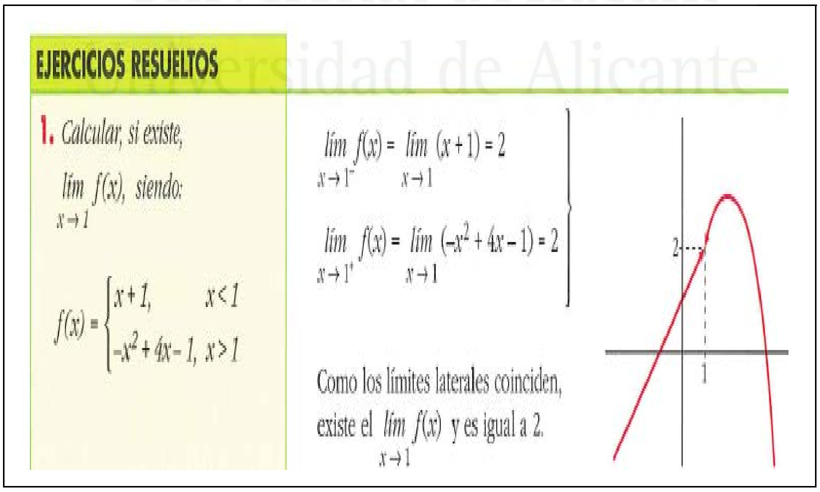
Observeu que aquesta definició engloba les dues definicions de límits laterals. Per tant:

$\lim_{x \to c} f(x) = l \Leftrightarrow$ Hi ha els límits laterals i coincidixen:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

Figura 1.13. Definición de la noción dinámica y formal de límite de una función en un punto (Matemáticas II. Editorial Anaya (2009), p. 237)

Estas definiciones las acompaña con un ejercicio resuelto en el que calcula el límite de una función algebraica definida a trozos (Figura 1.14), calculando los límites laterales mediante la representación gráfica de la función y afirmando que "*como los límites laterales coinciden*" (p. 237), hay límite y este es igual a *2*.


EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular, si existe, $\lim_{x \to 1} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x^2+4x-1, & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2+4x-1) = 2$$

Como los límites laterales coinciden, existe el $\lim_{x \to 1} f(x)$ y es igual a 2.

Figura 1.14. Ejercicio resuelto como ejemplo de límite de una función en un punto (Matemáticas II. Editorial Anaya (2009), p. 237)

Podemos inferir que el tratamiento que hace la editorial Anaya (2009), en el libro de segundo de bachillerato, del límite de una función, se apoya en las representaciones gráficas y en los límites laterales. Menciona la concepción dinámica y

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

la concepción métrica como equivalentes, pero el cálculo de límites es una colección de procedimientos para encontrar el valor del límite.

- *El tratamiento de la noción del límite de una función en la editorial Editex*

El límite de una función en un punto lo concreta la editorial Editex (2009), en el libro el libro de texto de Matemáticas II, en el capítulo que lleva por título "*Limite de funciones*". Este capítulo se inicia recordando intuitivamente la idea de límite de una función en un punto como el número hacia el que tienden o se aproximan los valores que toma la función, cuando la variable independiente se acerca o se aproxima al punto en cuestión. Presenta la idea intuitiva de límite desde la perspectiva del eje OY. La formalización de la idea intuitiva la presenta con la definición topológica y la definición métrica asociadas con imágenes de la representación gráfica de una función. Al igual que hizo en el libro de primero, a las definiciones les sigue una actividad resuelta en la que demuestra que el límite de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x=2$, es 4. Demostración acompañada de la representación gráfica. El uso de la justificación formal, al no indicar cómo se calcula el límite, esconde la perspectiva dinámica de aproximación. La presentación de los límites laterales sigue la misma pauta anterior. El cálculo de límites lo inicia con dos ejemplos resueltos. El primero de ellos, a partir de las representaciones gráficas de las funciones. El segundo, a partir de funciones algebraicas definidas a trozos calculando los límites laterales. Finalizando el capítulo, presenta cuatro actividades resueltas de pruebas de acceso a la universidad, todas ellas procedimentalmente. El capítulo lo termina con una colección de actividades de enseñanza–aprendizaje para calcular límites con presentación gráfica (3), representar gráficamente funciones que cumplan condiciones (3) y cálculo de límites de funciones algebraicas (19).

Podemos inferir que el tratamiento que hace la editorial Editex (2009), en el libro de texto de segundo de bachillerato, del límite de una función es formal, con una abundancia teórica de entornos y notación de ε–δ, siempre asociadas a representaciones gráficas. En la parte final del libro no hay ninguna actividad en la que se pida la justificación de un límite mediante el uso de la notación ε–δ.

En segundo curso de bachillerato, las editoriales consultadas presentan diferencias al tratar el límite de una función (Tabla 1.2). Desde editoriales como Ecir que no incluyen ningún capítulo sobre límites, la editorial Anaya que presenta una concepción dinámica de límite o la editorial Editex con una presentación formal mediante definiciones topológicas y métricas. Algunas editoriales utilizan la definición formal del límite únicamente con la finalidad de justificar el límite de una función sencilla. Los procedimientos para el cálculo de límites y su justificación se presentan como dos compartimentos diferentes. Los procedimientos para el cálculo de límites se inician con funciones continuas y se prosigue con la resolución de indeterminaciones. El objetivo principal de segundo curso, en relación al límite de una función, es la enseñanza de procedimientos para el cálculo de límites.

Tabla 1.2. Similitudes-diferencias entre libros de texto de diferentes editoriales

Segundo de bachillerato. Matemáticas II		
Editorial ANAYA	**Editorial ECIR**	**Editorial EDITEX**
Dedica un único capítulo que empieza con el límite de una sucesión y continúa con el límite de funciones	No dedica ningún capítulo al estudio de límites de una función	Dedica un único capítulo al límite de funciones sin incluir el estudio de sucesiones
La concepción dinámica la presenta unas veces desde la perspectiva del eje OX y otras desde la perspectiva del eje OY		Presenta la idea intuitiva de límite desde la perspectiva del eje OY
Presenta como equivalentes la concepción dinámicas y la concepción métrica de los límites laterales de una función en un punto, asociadas con la representación gráfica		Presenta la formalización mediante las definiciones topológica y métrica, asociadas con la representación gráfica
		Utiliza un único ejemplo para probar formalmente el límite de una función en un punto
Presenta un ejemplo donde estudia el límite por la izquierda y por la derecha, mediante la representación gráfica de la función		Presenta un ejemplo donde estudia el límite de diferentes funciones a partir de la representación gráfica

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Estudio de procedimientos para el cálculo de límites indeterminados		Estudio de procedimientos para el cálculo de límites indeterminados

1.5. La comprensión del límite de una función real de variable real como ámbito de investigación

La compresión del esquema del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para que los estudiantes de educación post secundaria comprendan los elementos de cálculo (Tall, 1991). Las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite han puesto de manifiesto la necesidad de profundizar en la enseñanza y el aprendizaje de este concepto.

La revisión de la literatura sobre el tópico "limite de una función" ha puesto de manifiesto tres aspectos que vamos a desarrollar:

1. El papel que los obstáculos epistemológicos desempeñan en el acceso al concepto de límite.
2. El papel que las concepciones espontáneas tienen en las dificultades que presenta el concepto de límite.
3. La influencia de las distintas representaciones en la comprensión del concepto de límite.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.5.1. El papel que los obstáculos epistemológicos desempeñan en el acceso al concepto de límite

Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso del pensamiento científico se llega al convencimiento de la necesidad de plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad de los propios conceptos o la debilidad del espíritu humano. Es en el acto mismo de conocer dónde aparecen los entorpecimientos y las dificultades, es allí "*donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos*" (Bachellard, 1974, p. 15). El acto de conocer se realiza en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquellos que obstaculizan el acceso al conocimiento científico. Los obstáculos que se analizan e identifican en las ciencias físicas son los producidos por: la experiencia básica, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el uso abusivo de las imágenes familiares, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, la tendencia a generalizar, o el exceso de precisión (Bachellard, 1974).

Los obstáculos de origen propiamente epistemológicos son aquellos que no se pueden ni deben evitar, además su rol debería constituir un objetivo de conocimiento porque los podemos encontrar en la historia del propio concepto (Brousseau, 1983). En este sentido debemos tener en cuenta las dificultades específicas que todo concepto matemático presenta y que pueden poner en evidencia las causas de la lentitud y de la problemática en su adquisición, y que su toma en consideración es indispensable para la comprensión del propio concepto y al conjunto de estas causas se le llama *obstáculos epistemológicos* relativos al concepto (Sierpinska, 1985).

La existencia de los obstáculos epistemológicos y el papel que desempeñan en el acceso al concepto de límite quedan perfectamente documentados en las conclusiones de las investigaciones realizadas por Cornu (1991), Sierpinska (1985), Swinyard (2011), Garbin y Azcárate (2002), Garbin (2005a), Garbin (2005b), Camacho y Aguirre (2001), Tall (1992) y Moru (2007).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Históricamente, como hemos visto en el apartado 1.2, el concepto del límite fue introducido para resolver, principalmente, tres clases de problemas: "*a) problemas geométricos (cálculo de áreas, longitudes y "exhausciones"); b) el problema de la suma y razón de la convergencia de sucesiones y c) el problema de la diferenciación (que proviene de la relación entre dos cantidades que tienden a cero simultáneamente* (Cornu, 1991, p. 162))*"*. Durante los periodos históricos en los que se intentó resolver estos problemas, aparecieron dificultades que nos indican la presencia de obstáculos epistemológicos. Entre estos obstáculos se encuentran: "*1) La incapacidad de unir geometría y números, 2) Las ideas de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, 3) El aspecto metafísico del concepto de límite y 4) El límite, ¿se alcanza, o no?"* (p.162), señalados como los más importantes.

Partiendo del desarrollo histórico del concepto de límite y del análisis del trabajo realizado por 4 estudiantes -obtener una definición operatoria del concepto de límite-

Sierpinska (1985) elaboró una lista de obstáculos relativos al concepto de límite: "*1) Horror al infinito, 2) Obstáculos unidos al concepto de función, 3) Obstáculos geométricos, 4) Obstáculos lógicos y 5) El obstáculo de los símbolos*" (p.38). El horror al infinito en la historia de la noción de límite es un obstáculo que persiste desde los antiguos griegos y su método de exhausción, hasta Cauchy. Este obstáculo está asociado al paso a límite de un movimiento físico, a una aproximación indefinida, mientras que la noción de límite en la teoría formal se concibe de forma estática. El obstáculo unido al concepto de función lo relaciona con la noción de número real, puesto que es difícil precisar si en el siglo XIX la noción de límite se formaliza debido a la definición de número real o, por el contrario, la definición precisa de número real fue posible porque habían comprendido la noción de límite y se quiso prolongar al conjunto numérico. En este contexto, es imprescindible conocer el dominio y el rango de la función para conocer la topología de dichos conjuntos. Los obstáculos lógicos los asocia a los cuantificadores y a su orden, puesto que en el lenguaje natural no se presta demasiada atención al orden de las palabras y a sus sutiles diferencias. Estas sutilezas en el orden de los cuantificadores provienen de que la función nos lleva del eje de la x al eje de la y, mientras que la definición de límite nos lleva del eje de la y al eje de la x, y de que el conocimiento de los cuantificadores no es suficiente para percibir el papel que desempeñan y de la importancia de su posición en la definición formal de límite. El obstáculo de la simbología tiene connotaciones históricas porque el paso al límite no se consideraba una operación matemática diferente, por lo que no se necesitaba ninguna simbología específica. El símbolo de la operación de paso al límite fue introducido por Cauchy al admitir que la noción de límite era un concepto básico. Entre las conclusiones de esta investigación Sierpinska (1985) afirma que en el proceso de adquisición de la definición de límite los obstáculos no son la primera barrera a superar y "*se pregunta si esta formalización es verdaderamente necesaria en el nivel de secundaria*" (p.65).

En la misma línea de la investigación anterior, y con el objetivo de obtener datos empíricos sobre la forma en que los estudiantes reinventan la definición formal de límite, se sitúa el experimento de enseñanza que Swinyard (2011) realizó durante diez semanas con dos estudiantes que "*demuestran tener una robusta categorización de límite*" (p.8). En esta investigación los estudiantes fueron capaces de representar gráficamente el límite de funciones en situaciones diferentes y tuvieron la capacidad de representar una función con límites laterales no coincidentes. En las primeras sesiones emergieron las ideas informales al hacer los estudiantes continuas referencias al límite como una aproximación; al realizar las manipulaciones algebraicas necesarias para calcular el valor del límite, a través del uso directo de la sustitución; y al creer que una función necesita de una representación algebraica. La determinación de la existencia del límite, en ausencia de representación algebraica, centró el trabajo en su representación gráfica, y para precisar las características del límite de una función en un punto mostraban una preferencia por el razonamiento desde el eje de la *x*. El primer intento de precisión lo realizaron durante la cuarta sesión al indicar: "*f tiene por límite L en x=a si cuando los valores de la x se acercan a a, los valores de la y se acercan a L*" (p.10). Utilizando gráficas de funciones discontinuas y empleando la metáfora del zoom, modificaron la expresión "se acercan" por "infinitamente cerca". Al finalizar la sexta sesión la reinvención de la definición tenía dos impedimentos: a) el razonamiento desde la perspectiva del eje de la *x* y b) su incapacidad para caracterizar adecuadamente el proceso infinito del límite.

La superación de los dos impedimentos necesitó de la modificación de la pregunta inicial. Se les pidió que caracterizaran el límite al infinito de una función. En esta situación los estudiantes representaron dos cotas de la función. Una cota inferior y otra superior, entre las cuales se encontraba el límite de la función cuando la *x* tendía a infinito. Esta situación les permitió la utilización de la perspectiva desde el eje de la *y*, así como la determinación de la "proximidad arbitraria" les dio el rigor matemático necesario para matematizar el proceso físico introduciendo valores absolutos, pero no la cuantificación. Aunque se pueda pensar que al inducir un cambio cognitivo para que los estudiantes modifiquen su perspectiva desde el eje de la *x*, noción dinámica de límite, hacia la perspectiva desde el eje de la *y*, aproximación arbitraria, se da más valor a esta perspectiva y se devalúa a la primera. Swinyard (2011) concluye que "*lo que se evidencia desde el experimento de enseñanza sugiere que es que la habilidad de emplear de forma flexible las dos perspectivas permite a los estudiantes desarrollar una rica y robusta comprensión del concepto de límite y de su definición formal*" (p. 21). Es decir, que el razonamiento desde la perspectiva del eje de la *x* de la noción dinámica de límite ayuda a los estudiantes a desarrollar la esencia de la noción de límite; sin embargo, el razonamiento desde la perspectiva del eje de la *y* con la aproximación arbitraria, en el sentido de aproximarse todo lo que se pueda, ayuda a los estudiantes a comprender las complejidades y sutilezas de la definición formal de límite.

El obstáculo lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño unido al *"Horror al infinito"* y las dificultades que presenta la percepción que del infinito tienen los estudiantes ha sido investigado en alumnos de segundo curso de bachillerato (16-17 años) por Garbin y Azcárate (2002), en estudiantes universitarios por Garbin (2005a) y en estudiantes de los últimos años de secundaria y primeros de universidad (Garbin, 2005b). También ha sido investigado en la práctica del profesor por Camacho y Aguirre (2001).

La noción de infinito actual muestra el infinito de forma estática y alcanzable, en contraposición a la noción de infinito potencial que lo presenta como un proceso dinámico sin fin. Garbin y Azcárate (2002) focalizaron su trabajo en el infinito actual y en las inconsistencias en los esquemas conceptuales de 80 estudiantes de segundo curso de bachillerato (16-17 años) a partir de las respuestas a dos cuestionarios. El primero constaba de cinco preguntas en las que estaba presente la idea de infinito actual en diferentes modos de representación: geométrico, verbal, analítico, gráfico y algebraico. El segundo era el mismo que habían resuelto días antes con el objetivo de que los estudiantes pudiesen repensar las tareas realizadas y corregir o matizar sus respuestas (con un color diferente al inicial). En esta investigación, un estudiante es considerado coherente si sus respuestas están en la misma línea de coherencia, es decir, un estudiante puede ser coherente con su pensamiento aunque sea inconsistente con el concepto matemático involucrado. Y es considerado inconsistente con relación al concepto matemático considerado si presenta contradicciones dentro de la teoría matemática. Garbin y Azcárate (2002) identificaron tres tipos de estudiantes: inconsistente e incoherente, coherente y consistente y coherente e inconsistente.

La percepción que del infinito tienen los estudiantes universitarios ha sido investigada con un doble objetivo: a) analizar los efectos que tiene en dichos estudiantes, con conocimientos previos de cálculo diferencial e integral, la presencia implícita del "infinito pequeño" en preguntas planteadas en distintos contextos matemáticos, a partir de los esquemas conceptuales de los estudiantes y b) estudiar qué tipo de conexiones y qué focos de atención presentan y establecen en las distintas cuestiones en que esté presente el "infinito pequeño". La experiencia se realizó con 89 estudiantes universitarios (entre 17 y 25 años) que resolvieron dos cuestionarios. El primero de ellos fue el de Garbin y Azcarate (2002) y el segundo estaba inspirado en la paradoja de la división de Zenón. En las conclusiones, Garbin (2005a) afirma que los estudiantes perciben y muestran en sus respuestas una concepción del infinito que no se mantiene a lo largo de todas las preguntas. En alguna de las respuestas el proceso infinito no se percibe como acabado, pero en otras sí que es aceptada la completitud del proceso. Un solo estudiante aceptó en todas sus respuestas que el proceso infinito implicado es acabado y dos de ellos mantuvieron en todas sus respuestas una concepción potencial del infinito. Los demás estudiantes dieron respuestas mixtas. La "imagen formal" de los conceptos asociados al límite entraron en conflicto con la "imagen informal", y está persistió en los esquemas conceptuales de los estudiantes después de haberles introducido ideas formales durante la enseñanza (Garbin, 2005a). Los modos de representación y los lenguajes matemáticos hacen que los estudiantes presenten ideas inconsistentes, incoherencias o respuestas inestables ante un mismo problema, pero presentado de forma distinta (Garbin, 2005b).

El obstáculo epistemológico y didáctico que representa la noción del infinito ha sido investigado a partir de la expresión $a/x=\infty$ (Camacho y Aguirre, 2001). Los autores elaboran una situación didáctica del concepto de límite infinito partiendo del análisis de libros de texto donde aparece dicho concepto y de la revisión de obras históricas donde surgen las ideas que le dieron origen. Los resultados de los cuestionarios aplicados a profesores y estudiantes reflejan una concepción intuitiva del límite en el infinito, sin encontrar evidencias de que usen argumentos formales.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Otros obstáculos epistemológicos sobre límite puestos de manifiesto por Tall (1992) al analizar las producciones de los estudiantes fueron:

(a) La tendencia a generalizar. En este tipo de obstáculo epistemológico se tiene la creencia de que una propiedad que sea común a todos los términos de una sucesión, también será una propiedad del límite. El autor la llamó "*propiedad genérica del límite*". Este obstáculo epistemológico, aplicado a la sucesión 0.9, 0.99, 0.999,… lleva a afirmar que como todos los términos de la sucesión son menores que 1, entonces el límite será menor que 1.

(b) Imagen del concepto. Otra de las dificultades con las que se encuentran los estudiantes al intentar comprender el concepto de límite es la imagen que de dicho concepto se han ido formando a través de los primeros ejemplos que han estudiado. Tall y Vinner (1981) definieron que "*la imagen de un concepto describe la estructura cognitiva que está asociada con el concepto, e incluye todas las representaciones mentales, las propiedades asociadas y los* *procesos*"(pág. 152). En este sentido, Tall (1992) afirmó que si los primeros ejemplos que tienen los estudiantes con el concepto de límite provienen de la idea de "*sucesión donde los términos vienen dados por una fórmula*" (p. 500), no debería sorprendernos que la imagen dominante del concepto de límite entre los estudiantes sea la de una "*sucesión monótona*" o que necesiten una "*fórmula*" como parte esencial en la comprensión del límite.

(c) El obstáculo verbal. La primera de las dificultades con las que se encuentran los estudiantes al intentar comprender el concepto de límite proviene del doble sentido del lenguaje coloquial o matemático. Está dificultad de comprensión del concepto de límite que los estudiantes presentan ha sido ampliamente estudiada. Algunos de los posibles orígenes de estas dificultades son debidos a que la palabra "*limite*" tiene "*diferentes significados en la vida cotidiana, algunos de ellos en manifiesta discrepancia con la idea matemática*" (p. 500). Así, por ejemplo, el límite en la vida cotidiana es algo que no se puede o no se debe sobrepasar, como es la "*velocidad límite*". De la misma forma, en el lenguaje coloquial se usan términos como "*tiende hacia*", "*se aproxima hacia*" o "*se acerca hacia*" que tienen un sentido distinto en contextos matemáticos.

El uso del lenguaje coloquial se transforma en obstáculo cuando usamos las mismas palabras como lenguaje matemático. En este sentido y con la finalidad de entender y clarificar la noción de obstáculo epistemológico, Moru (2007) analiza las producciones de tres investigadores. Su análisis se centra en el obstáculo epistemológico que representa la pregunta: ¿Puede una variable alcanzar (attain) el valor límite? Para ello se centra en el uso que tres investigadores dan a las palabras inglesas "reach" (acción de alcanzar), y "attain" (alcanzar un punto). El uso de las dos palabras es similar a las afirmaciones del lenguaje coloquial cuando decimos que "*hemos alcanzado (reached) nuestro destino cuando hemos caído de pies en él. Otras veces, decimos que hemos alcanzado (reached) un punto cuando estamos en su vecindad*" (p. 36). Al analizar la pregunta de si una variable puede alcanzar (attain) el valor límite, se plantea cuál es el significado de ¿alcanzar (attain) el valor límite? Y se pregunta si significará lo mismo que: ¿Pueden los valores de la función igualar el valor límite?, o significará lo mismo que: ¿Puede una variable alcanzar (reach) el valor límite? Para responder si las frases son o no equivalentes analiza:

a) Un problema y la respuesta dada por Taback (1975). El problema planteado es

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

que a lo largo de una línea AB un conejo va dando saltos. Empieza en A y recorre cada vez la mitad del camino que le queda por recorrer hasta llegar a B. La pregunta del problema en cuestión es: ¿Puede el conejo alcanzar (reach) el punto B? La respuesta depende de la interpretación de la palabra “alcanzar” (reach). El conejo ciertamente no alcanza (reach) el punto B en el sentido de ponerse encima del punto B, pero matemáticamente decir que el conejo alcanza (reach) el punto B significa que el límite converge hacia B como punto límite, es decir, que dada cualquier vecindad del punto B, el conejo puede permanecer dentro de ella.

b) Un problema y la respuesta dada por Tall (1991). Cuando utiliza la palabra alcanzar (attain) en el ejemplo de la sucesión convergente $1/n$ que tiende a 0. Su límite es 0 pero los términos de la sucesión nunca son iguales a 0. Los términos de la sucesión no pueden ser iguales (attain) al valor límite. Dicha observación se hace al considerar los términos de la sucesión mediante el proceso de “tender hacia” el límite.

c) Un problema y la respuesta dada por Juter (2005). Cuando pregunta a los estudiantes si la función $f(x)=x^5/2^x$ alcanza (attain), o no, el valor del límite, considera como correcta la respuesta que indica que cuando x tiende a 0, $f(0) = 0/1$. En este caso dice que se alcanza (attain) el valor del límite sin tener en cuenta el proceso de “tender hacia” porque se considera que el valor del límite es el valor de la función cuando ambos son iguales.

En su análisis Moru (2007) concluye que aunque cada investigador trabaja sobre problemas distintos, cuando hablan de la tendencia de la función usan la palabra “reach” con el mismo significado, estamos en la vecindad de un punto. Pero cuando la función toma el valor del límite de la función y no se habla de tendencia se usa la palabra “attain” en el sentido de que alcanza el límite. Finaliza su trabajo concluyendo que no puede dar una distinción clara entre el significado de las dos palabras inglesas y que ha encontrado diferentes interpretaciones de las dos palabras en investigadores que constituyen la comunidad matemática. Termina afirmando que si el contexto es el mismo, el significado que se dé a las dos palabras debiera ser el mismo y que la propia literatura sobre el tema genera obstáculos epistemológicos, por lo que concluye que “*hay una necesidad de clarificación del significado en la comunicación que no tenga en cuenta el contexto*” (p. 36).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Los obstáculos epistemológicos son una parte integral del conocimiento matemático. Su identificación es necesaria para analizar y elaborar situaciones didácticas con la finalidad de que los estudiantes puedan entenderlos y superarlos. Como ya hemos indicado, en el campo de la didáctica de las matemáticas los obstáculos epistemológicos han sido estudiados ampliamente por distintos autores. Sierpinska (1985) elaboró una listado de obstáculos relativos al concepto de límite al estudiar las producciones de los estudiantes cuando se les pedía que elaboraran una definición operatoria de dicho concepto. Entre los obstáculos encontrados está el lógico que va asociado al orden de los cuantificadores, dado que la función lleva del eje de la x al eje de la y; y la definición formal lleva del eje de la y al eje de la x. Este obstáculo lo encontró Swinyard (2011) al analizar las producciones de los estudiantes cuando intentaban formalizar la noción de límite. La forma que utilizó el autor para que los estudiantes superaran dicho obstáculo fue sugerirles que formalizaran primero la definición de límite cuando x tiende a más infinito, para que se centraran primero en el eje de la y. El obstáculo que representa la idea de lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño, o "*el horror*" que representan estas ideas, lo confirman las dificultades que tienen los estudiantes de bachillerato (Garbin y Azcarate, 2002) y los estudiantes universitarios (Garbin, 2005a) al resolver situaciones en las que aparecen las nociones relacionadas con el infinito. El obstáculo que representan las ideas sobre la noción del infinito también se observa al analizar la expresión $a/x=\infty$ en los libros de texto y revisar obras históricas como han puesto de manifiesto Camacho y Aguirre (2001). Cornu (1991) también elaboró un listado analizando los diferentes periodos del proceso histórico en el que se generó la definición de límite. Tall (1992) también puso de manifiesto diferentes obstáculos al analizar las producciones de los estudiantes, entre ellos se encuentra el verbal. El análisis del lenguaje coloquial ha sido ampliamente estudiado en diferentes investigaciones didácticas, de ahí que le dediquemos el próximo apartado.

1.5.2. El papel que las concepciones espontáneas tienen en las dificultades que presenta el concepto de límite

Los estudiantes antes de tomar contacto con el estudio de los límites ya tienen a través de las experiencias diarias y del significado coloquial de éste, ideas, intuiciones, imágenes y conocimientos sobre los términos que van a usarse en el proceso de aprendizaje del concepto de límite. A estas ideas, intuiciones, imágenes y conocimientos que los estudiantes tenían con anterioridad a la enseñanza formal de un determinado concepto se las define como "*concepciones espontáneas*" (Cornu, 1991) Estas concepciones espontáneas manifestadas por los alumnos varían de significado de un estudiante a otro, e incluso para alguno podrían tener distintos significados dependiendo de la problemática planteada. Las concepciones espontáneas no desaparecen a pesar de que los estudiantes participen en clases de matemáticas, sino que se mezclan con los conocimientos adquiridos en dichas clases, modificándose y adaptándose para formar la concepción personal del estudiante. Estas concepciones pueden perdurar durante mucho tiempo, incluso en niveles superiores, y son una fuente de dificultades para los estudiantes en el acceso al concepto de límite.

La existencia de las concepciones espontáneas sobre límite, y la durabilidad de estas, quedan perfectamente documentadas en las conclusiones de las investigaciones realizadas por Vinner (1991), Williams (1991, 2001), Monaghan (1991), Szydlik (2000), Mamona–Downs (2001), Przenioslo (2004), Kim, Sfard y Ferrini–Mundy (2005), Oehrtman (2009), Elia, Gagatssi, Panaoura, Zachariades y Zoulinaki, (2009), Sierra, González y López (2000), Fernández–Plaza, Rico y Ruíz–Hidalgo (2013a) y Fernández–Plaza, Rico y Ruíz–Hidalgo (2013b).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Con el objetivo de conocer qué recordaban 15 estudiantes (dotados matemáticamente y que habían sido instruidos sobre la idea de límite de una sucesión) sobre el concepto de límite de una sucesión, Vinner (1991) les pasó un test escrito el primer día de clase, después de las vacaciones. En el test se les pidió que dieran una descripción informal e intuitiva de límite de una sucesión, así como una definición formal. Solo uno de los 15 estudiantes dio una respuesta que podía considerarse como manifestación de haber comprendido el concepto de límite de una sucesión: "*El límite de una sucesión es el número al cual todos los términos de la sucesión, a partir de un cierto punto, varían solamente en un pequeño número épsilon*". Los 14 estudiantes restantes respondieron a través de "*típicas ideas falsas*", entre las que cita (pág. 78):

- *Una sucesión no puede alcanzar su límite (así, la sucesión 1, 1, 1, …podían decir que no converge a ningún límite),*

- *La sucesión puede ser monótona creciente o monótona decreciente (así, por ejemplo, la sucesión cuyo término general viene dado por $a_n=1+(-1)^n/n$ no tiende a ningún límite).*
- *El límite es el "último" término de la sucesión. Se llega al límite después de "ir a través" de infinitos elementos*.

Los resultados de la investigación muestran que a pesar del énfasis que se le dio a la definición formal de límite muchos estudiantes no la usaron cuando trabajaban en tareas en las que se podía utilizar. Los estudiantes persistían en sus concepciones erróneas de que el límite no se podía alcanzar o de que era el último término de la sucesión.

Asumiendo que muchos estudiantes universitarios de cálculo sostenían modelos rudimentarios sobre los límites y con la finalidad de producir un conflicto cognitivo en dichos estudiantes, Williams (1991) trabajó con estos alumnos con el objetivo de modificar sus concepciones personales sobre límites. La investigación constó de dos partes. En la primera parte, participaron 341 estudiantes universitarios de segundo semestre de cálculo, que respondieron a un cuestionario con tres preguntas sobre seis afirmaciones provenientes de las sugerencias realizadas, en investigaciones previas, sobre las creencias de los estudiantes sobre límites:

(a). *El límite describe cómo la función se mueve cuando x se mueve hacia un cierto punto.*

(b). *El límite es un número o punto al cual la función no puede llegar.*

(c). *El límite es un número al que los valores y de una función pueden hacerse arbitrariamente cercanos para valores restringidos de la x.*

(d). *El límite es un número o punto al que una función se acerca, pero nunca alcanza.*

(e). *El límite es una aproximación que se puede hacer tan cercana como se desee.*

(f). *El límite se determina sustituyendo números cada vez más próximos a un número dado hasta que se alcanza el límite*. (pág. 221)

Estas afirmaciones podían caracterizarse, respectivamente, como descripciones del límite (a) dinámico–teórico, (b) como una frontera, (c) formal, (d) inalcanzable, (e) como una aproximación y (f) dinámico–práctico.

En la primera cuestión, se les pedía que indicaran la falsedad o veracidad de las

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

seis afirmaciones. En la segunda cuestión, debían elegir cuál creían que era la que mejor describía su comprensión del límite. En la tercera, debían describir lo que entendían por límite. Las tres opciones más señaladas por los 341 estudiantes fueron la (a) dinámica – teórica, (d) el límite como inalcanzable y (c) la formal.

En la segunda parte de la investigación, se solicitaron voluntarios entre los estudiantes que habían respondido al cuestionario. Del total de voluntarios se eligieron 10 (7 hombres y 3 mujeres) de los cuales "*4 fueron elegidos por tener una idea dinámica de límite, 4 por tener una idea del límite como inalcanzable, 1 por tener una idea de límite como frontera y 1 por tener una idea de límite como aproximación. Ningún estudiante que había expresado una definición formal de límite participó voluntariamente en el estudio*" (p. 222). Estos 10 estudiantes tuvieron siete semanas de instrucción con el investigador. Uno de los objetivos de esta segunda fase fue "*producir un conflicto cognitivo con la idea dinámica de límite de los estudiantes para, entre otras cosas, mostrar que sustituyendo un número finito de valores en la función no siempre se conseguía una idea correcta del límite*" (p. 229). Las dificultades que encontró Williams (1991) para modificar las concepciones informales del límite le llevaron a concluir que "*los modelos informales del límite que tienen los estudiantes van en paralelo a los que tuvo la comunidad matemática anterior a Cauchy, y es posible que solamente si los estudiantes entendiesen la clase de problemas que motivó el trabajo de Cauchy podrían ser motivados para entender sus implicaciones. Con esto quiero decir que el verdadero contexto histórico y cultural que dio vitalidad al trabajo original es el mejor medio a partir del cual nos aproximemos a la comprensión de este trabajo*" (p.235).

En un trabajo posterior realizado con los 10 estudiantes Williams (2001) señala que el fundamento de la comprensión del límite en 2 de ellos era la de evaluar valores que estuviesen "cada vez más próximos" al límite. Sin embargo, y a pesar de que las sesiones experimentales fueron diseñadas para crear un conflicto cognitivo con esta idea dinámica, los dos continuaron creyendo en ella y reafirmaron que era su mejor fundamento para la comprensión del límite. Los dos comprendieron que las funciones continuas alcanzaban su límite, en el sentido de tomar el valor límite, pero los dos se sintieron inseguros, en el proceso de calcular el límite, sobre si era correcto decir que realmente se alcanzaba el límite. Según el autor, la idea de alcanzar o no el límite está

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

en la diferencia entre el límite potencial y el límite actual, y afirma que el infinito actual puede ser el mayor obstáculo cognitivo en el aprendizaje de la definición formal.

- *El lenguaje y las concepciones espontáneas*

La persistencia de las concepciones espontáneas de los estudiantes, aun después de haber recibido instrucción sobre el concepto de límite, también están relacionadas, según Monaghan (1991), con el lenguaje usado por los profesores al comunicar los conceptos del cálculo. El autor sostiene que las dificultades que tienen los estudiantes sobre el concepto del límite son debidas a las ambigüedades propias del lenguaje y las concreta en cuatro frases: "*tiende hacia, se aproxima a, converge a y su límite*" (p. 20). En sentido matemático, estas cuatro frases, al ser equivalentes, son usadas indistintamente por los profesores en los cursos de cálculo y los estudiantes les dan sentidos que provienen del lenguaje coloquial, como se muestra en la investigación realizada, en dos etapas, por el autor. En la primera etapa, participaron 54 estudiantes de nivel A, la mitad de ellos cursaban un curso de matemáticas y la otra mitad, no. Todos ellos contestaron un cuestionario que constaba de 37 preguntas. En una de las cuestiones se les pedía que escribieran cuatro sentencias utilizando cada una de las cuatro palabras. Los resultados de las cuatro frases, relacionadas con la pregunta planteada en el cuestionario de la primera etapa, fueron:

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- La palabra "*Limite*" se asoció a la *velocidad límite*- una convención legal que está prohibido sobrepasar, pero que sin embargo se sobrepasa algunas veces-; a *los límites físicos*- una barrera técnicamente difícil de sobrepasar, i.e. "*Los aviones tiene un límite (en el cielo), el radar tiene un límite en la detección, hay límites físicos a la velocidad de un coche*" (p. 21). Esta palabra también se asoció a los límites mentales, que implican una frontera que no tienen analogía en matemáticas, i.e.: "*límites convencionales (costumbres sociales) o restricciones (debes limitar la sal que tomas)*" (p. 21)
- La palabra "*Se aproxima a*" fue utilizada por 8 de cada 9 estudiantes del nivel A de matemáticas y 2 de cada 3 del otro grupo, en el sentido de "*acercarse*": "*el tren se acerca a la estación, el coche se acerca al semáforo, se acerca el invierno*" (p. 21). En los anteriores ejemplos, el objeto al que se acercan se puede alcanzar, pero no se ha alcanzado en el momento en que se está hablando. El resto de los estudiantes

utilizaban otros tres sentidos diferentes de aproximarse. Como método de hacer alguna cosa:”*diferentes aproximaciones a las matemáticas*”; como un camino a alguna parte: “*hay muchas formas de acercarse a Londres*”; como un parecido: “*su comportamiento se aproxima al ridículo*”.

- La palabra “*Converge a*”. Su utilización en el lenguaje coloquial tiene pocos sentidos, y los más utilizados, en tres situaciones distintas fueron: “*los rayos de luz convergen, las carreteras convergen, las líneas convergen*” En los tres ejemplos, dos objetos continuos se acercan y pueden en muchos casos tocarse. El resto de los estudiantes utilizaron ejemplos individuales, o algún ejemplo aislado:”*dos líneas convergen en un punto; dos objetos que convergen finalmente se encuentran*”.
- La palabra “*Tiende hacia*” fue utilizada por la mayoría de los estudiantes en dos sentidos, uno personal y otro general:”*tiende a beber mucho; el tiempo en vacaciones tiende a ser malo*”.

Como conclusiones Monaghan (1991) indica que de las respuestas a las cuestiones abiertas queda claro que las cuatro frases derivadas del lenguaje coloquial “*están reñidas con el significado matemático”* (p. 23). Además, los estudiantes interpretan como iguales las palabras “*tiende hacia*” y “*aproximarse a*”, y a ambas frases le dan una interpretación dinámica. Asimismo, los protocolos revelan que “*converge a*” se agrupa con palabras que indican “*creciendo muy próximo*”, aunque los estudiantes manifiestan que “*se sienten inseguros con el significado matemático de la palabra converge a*” (p. 23), pero el sentido coloquial del término es el “*de dos objetos continuos que van juntos y se tocan*” (p. 23). El término límite es visto como más específico que los otros términos, pero el sentido coloquial del término que manifiestan los estudiantes es el de “*frontera*”.

- *Las creencias y las concepciones espontáneas*

El dominio del concepto de límite de una función es atractivo para estudiar las conexiones entre las concepciones de los estudiantes sobre la matemática y su comprensión del límite. Szydlik (2000) realizó este estudio con el objetivo de documentar las creencias de los estudiantes universitarios en contenidos de cálculo y las fuentes de validación. Los 27 participantes fueron seleccionados en base a las respuestas que dieron a un cuestionario y a una entrevista sobre los números reales, infinito,

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

funciones e ítems sobre fuentes de convicción. Tres fueron las respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta sobre la definición de límite de una función en un punto:

1. *Estática intuitiva. El límite de una función es L si siempre que x este próximo al valor límite s, la función esta próxima a L. (5 de los 27 estudiantes)*
2. *Movimiento. El límite de una función es L si la función va aproximándose a L cuando la x se aproxima a s. (20 de los 27)*
3. *Incoherentes o inapropiadas. Unos pocos estudiantes fueron incapaces de aportar una definición*. (2 de los 27) (p. 268)

También se les presentaron distintas concepciones de hipotéticos estudiantes: "*inalcanzable, movimiento, frontera, y estático formal*" (p. 269), con la finalidad de que manifestaran sus preferencias. Dos estudiantes dieron más de una respuesta, 9 estudiantes prefirieron el límite como inalcanzable, 4 prefirieron el límite como movimiento, 9 prefirieron el límite como frontera y 7 manifestaron sus preferencias por el límite como estático formal. Todos los estudiantes de esta investigación utilizaron definiciones que implicaban movimiento al resolver problemas de límites, en particular los que contenían representaciones gráficas. Las conclusiones de este trabajo indican que los estudiantes, que ven el cálculo como una colección de hechos y de procedimientos que deben ser memorizados, son incapaces de dar una definición coherente de límite y de explicar porqué son válidas las fórmulas o los procedimientos que usan. Muchos de ellos tienen concepciones erróneas del límite como una frontera que no se puede sobrepasar o como inalcanzable. En el otro extremo estarían los estudiantes que ven el cálculo como lógico y consistente, estos serían capaces de dar definiciones coherentes de límite y mantendrían concepciones estáticas de límite. Este estudio confirma que existe una amplia gama de creencias sobre los contenidos de funciones, números reales y el infinito (incluso entre los estudiantes de cálculo de segundo semestre) y proporciona alguna evidencia de que la concepción que los estudiantes tienen de las funciones se relacionan con su comprensión del límite; mientras que sus creencias sobre las lagunas en la recta real no se relacionan con su comprensión del límite. Los resultados de este estudio indican que hay estudiantes que no están preparados para escuchar argumentos o pruebas porque no están convencidos de su importancia y no les prestan atención, sin embargo hay estudiantes que se sienten frustrados cuando no se les provee de una estructura formal y que necesitan definiciones rigurosas y argumentos matemáticos.

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

- *Las intuiciones y la compresión del límite*

Cuando los estudiantes han de trabajar con la definición formal del límite se encuentran con aspectos que se imponen a la intuición y a aspectos minimalistas en el estilo de la expresión por ser básica, breve y sin adornos. Mamona–Downs (2001) realizó esta investigación con el objetivo de presentar una secuencia didáctica para que los estudiantes discutieran sus intuiciones y, partiendo de ellas, avanzar en la comprensión de la definición formal del límite. Su estrategia es identificar el núcleo central de la definición y construir la comprensión del límite en los estudiantes, paso a paso, empezando por el núcleo central. Su sugerencia para la enseñanza introductoria del concepto de límite se basa en tres niveles didácticos:

i) Iniciar y desarrollar las intuiciones que se han producido como consecuencia de las discusiones promovidas en el entorno del aula. (Concepciones espontáneas).
ii) Introducir la definición formal y analizarla conjuntamente con las cuestiones que han aparecido en el primer nivel. Introducir una representación particular.
iii) Hacer suyas o revocar las opiniones dadas en el primer nivel mediante la comparación con la definición formal dada en la representación del segundo nivel.

En relación a las concepciones que los estudiantes manifiestan de forma espontánea, Mamona–Downs (2001) propuso distintas tareas con el objetivo de hacer emerger estas concepciones espontáneas:

i) La bola de ping pong: “Si se deja caer un bola de ping pong desde una determinada altura: (a) ¿Cuántos saltos dará? (b) ¿Cuál es la longitud que recorre la bola?” Una hipotética respuesta a la primera cuestión de la tarea podría ser que la bola salta un número finito de veces; o bien, otra respuesta y más significativa es que la bola salta un número grande (pero finito) de veces. La comprensión de que una sucesión finita de acciones tiene una única acción final implica que una sucesión infinita tendría que tener esa propiedad. Esto en la literatura se le llama **“***la metáfora básica del infinito***”.** Estas dos hipotéticas respuestas dadas por los estudiantes sirven para clasificarlos en dos grupos. Los que tratan a las sucesiones como procesos que continúan y no terminan, y los que ven a las sucesiones como entidades, como conjuntos y como funciones. Los primeros son más dependientes de las reglas que generan los términos. La respuesta que podrían dar los estudiantes a la segunda cuestión, según la autora, es que si aceptaran que la bola salta un número infinito de veces, le parecería razonable que asumieran que la longitud seria infinita tanto en distancia como en tiempo. Sin embargo, cuando sean conscientes de que tenemos un número infinito de saltos que son cada vez más pequeños, y estén convencidos de que físicamente la bola para, se podría iniciar un interesante debate.

ii) Dos excavadoras se aproximan entre sí de manera que se sabe exactamente cuándo y dónde van a chocar. El proceso infinito viene dado por las idas y venidas de una mosca entre ellas. Si la velocidad de la mosca se conoce con relación a la velocidad de aproximación de las dos excavadoras, entonces la distancia que recorrerá la mosca antes de su desaparición puede deducirse sin referencia al proceso infinito. Esta tarea puede propiciar un debate, dada la evidencia natural de que una serie infinita puede tener un límite finito. Este hecho puede pasar por alto la consideración de las sumas finitas.

iii) Imaginar una escalera con dos escalones de un metro de alto y de ancho. A partir de ella se construye otra escalera con el doble de escalones dividiendo por la mitad la altura y la anchura. Siguiendo el mismo procedimiento inductivamente podemos construir una sucesión de escaleras. ¿Qué podemos decir del perímetro de las escaleras? ¿Cuál es el resultado final del proceso inductivo? El proceso inductivo se puede ver como una secuencia de objetos geométricos o como una secuencia de números reales obtenida midiendo los objetos. También sirve para introducir una sucesión de términos constantes que aparentemente puede parecer que tengan por límite la hipotenusa del triangulo.

Con estas tareas u otras conteniendo paradojas similares, la autora considera completado el primer nivel de la secuencia didáctica y concluye que en lugar de negar las ideas ingenuas de los estudiantes, lo que se debe hacer es intentar que emerjan sus ideas preconcebidas y discutirlas para darles concepciones alternativas. E indica que en términos cognitivos la definición formal de límite no debería ser la primera expresión del concepto de límite.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

La influencia de las concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto de límite y el éxito o fracaso de estos en la resolución de problemas es la investigación que Przenioslo (2004) llevó a cabo con 238 estudiantes de tercer, cuarto y quinto curso de matemáticas de la Universidad de Kielce (Polonia) y con 182 estudiantes de primer curso. Las preferencias de los estudiantes cuando hablan de límites se centraron en:

a) términos de vecindad,
b) términos de gráfica aproximándose a algo,
c) función del comportamiento de los valores de la función,
d) el que x_o perteneciera al dominio,
e) el hecho de que el límite de f en x_o fue el valor de $f(x_o)$,
f) el conocimiento de los algoritmos para calcular límites.

Según la autora "*las concepciones centradas en la vecindad aparecían en unos pocos estudiantes, pero estos eran los más eficientes en la resolución de los problemas planteados*" (p.113). El grupo de estudiantes más numeroso fue el de los estudiantes que entendían el límite como "*el conjunto de puntos de una gráfica cuando se aproximan a algo. En el caso de que* $x_o \in R$*, esta concepción se usaba para determinar el límite por la derecha y por la izquierda como condición necesaria y suficiente para la existencia del límite en* x_o" (p.117). Para algunos estudiantes, este comportamiento se aceptaba "*solamente cuando los términos estaban encima o debajo de una línea recta* $y=g$" (p.118). Esta primera degeneración del concepto de límite podía ser una consecuencia de la asociación formada en la escuela secundaria y expresada en la convicción de que "*los términos tienden al límite, pueden alcanzarlo pero no sobrepasarlo*" (p.118). Respecto a los estudiantes que asociaban el límite de una función con la aproximación de sus valores, la autora nos muestra que "*eran más eficientes que los que se basaban en la idea gráfica de puntos aproximándose*" (p.122). Así pues, la concepción más completa y desarrollada conectaba con la aproximación de valores y resultaba completamente eficiente porque permitía resolver numerosos problemas. Sin embargo, para algunos de estos estudiantes, la idea de aproximación de valores presentaba alguna dificultad al intentar explicar que 0'99999... se aproximan a 1 pero no lo alcanzan. Para estos estudiantes era difícil reconocer que sus convicciones eran incorrectas. Para los estudiantes que centraban la idea del límite en la sentencia "*el límite de una función en un punto es igual al valor de la función en ese punto*" (p.125), la autora indica que "*pudo haberse formado a lo largo del primer encuentro con los* *límites en la escuela secundaria, porque fue expresada generalmente por los que comenzaban sus estudios*" (p.125). Los estudiantes cuyas ideas estaban centradas en la percepción del límite como el valor de la función en un punto resultaban "*no ser eficiente en la resolución de problemas*" (p.126). Los algoritmos, que pueden ser aplicados en situaciones diferentes, eran un elemento importante de algunas ideas del concepto. Su rol en la resolución de problemas, sin embargo, es constructivo solo hasta cierto punto, siempre que no sean usados más que como un conjunto de procedimientos a aplicar en alguna situación concreta. Según la autora, "e*ste grupo constituía solo el 40% de los participantes en el estudio, por lo tanto, parece que el esquema de resolución usando algoritmos fue debido no tanto a la forma de enseñanza que recibieron, como a las características específicas de sus mentes"* (p.127).

Los esquemas usados por los que comenzaban y los que terminaban sus estudios fueron a menudo similares, por lo tanto, pudieron haberse formado durante su primer encuentro con la noción de límite en la escuela secundaria. La conclusión más significativa que se extrae de esta investigación es la observación de que "*muchas concepciones relevantes de los estudiantes que terminan el curso académico de cálculo se pudieron haber formado en secundaria"* (p.129). Finalmente, la autora, reconoce que el aprendizaje de la noción de límite acarrea muchas dificultades, obstáculos y posibilidades de degeneración "*escondidas*" en su verdadera "*naturaleza*" y que la organización del proceso de aprendizaje requiere tener en cuenta niveles especiales (taking special steps).

Las concepciones del límite más comunes entre los estudiantes de secundaria fueron investigadas por Elia et al. (2009) a partir de un cuestionario cuyas preguntas versaban sobre el "*crecimiento de una planta en un invernadero*". El cuestionario fue respondido por 222 estudiantes de este nivel. Dando como información la altura de la planta en metros: 1,9, 1,99, 1,999, 1,9999,… Se les plantearon tres preguntas: a) si la altura de la planta tenía un límite, b) cual era el límite y c) si la planta alcanzaría el techo del invernadero si este se encontraba a 2 metros. Como resultado de la investigación indicaron que "*una amplia mayoría (86%) de los estudiantes manifestó que la altura de la planta tenía un límite, el 66% encuentra el límite. Sin embargo, no hay indicios de que hayan entendido toda la situación y el 76% sugiere que la planta nunca podría alcanzar el techo*". Si bien la mayoría de los estudiantes tiene la idea de que la planta no puede alcanzar el techo del invernadero, sus respuestas escritas ponen de manifiesto conceptos incorrectos tales como: "*Teóricamente no se puede alcanzar el techo, pero prácticamente sí*" o "*No podemos estar seguros: puede que sí, puede que no*". Por otra parte, una de las preguntas de la investigación era conocer cuáles eran las concepciones del límite más comunes entre los estudiantes de secundaria. En sus conclusiones indican que las concepciones más comunes entre los estudiantes eran:

1. El límite es un número que no se puede alcanzar.
2. El límite de una función en un punto "*a*" es *f(a).*
3. El punto "*a*" debe pertenecer al dominio, en caso contrario, el límite no tiene sentido.

Las concepciones de los estudiantes de bachillerato y COU (Curso de Orientación Universitaria) sobre el límite funcional y la continuidad han sido analizadas por Sierra, González y López (2000) partiendo de las producciones de los estudiantes al responder a un cuestionario. Entre sus conclusiones destacan que la definición formal fue utilizada esporádicamente y que los criterios más utilizados en la justificación de los límites estaban en:

1. La utilización de los límites laterales.
2. La aproximación numérica.
3. El cálculo del valor de la función en un punto.

Desde el marco interaccionista del razonamiento metafórico, Oehrtman (2009) estudió las concepciones espontáneas de los estudiantes de un curso introductorio de cálculo. Este estudio aporta los resultados de 11 estudiantes de los 120 a los que el autor dio clase. Estos estudiantes generaron los mejores resultados y evidencias para caracterizar el razonamiento de las metáforas sobre el concepto de límite, donde las mejores metáforas son creativas en virtud de su "*énfasis*" (confianza del estudiante que la pone de manifiesto) y de su "*resonancia*" (basada en el alto grado de elaboraciones implicativas). Una de las conclusiones del estudio es que la clase de metáfora más común que "*emerge del análisis de los datos, comprende ideas sobre aproximación. La fuerza y la frecuencia de estas ideas no nos sorprende, porque la aproximación incluye muchas de las motivaciones históricas del cálculo, e impregna las clases y los libros de texto*". (p. 416)

Las definiciones personales del concepto de límite de una función en un punto que tienen los estudiantes permiten analizar los aspectos estructurales, entendiendo por aspectos estructurales la dualidad objeto/proceso del límite y el carácter inalcanzable y/o irrebasable del valor del límite. El objetivo de la investigación realizada por Fernández et al. (2013a) era describir e identificar cómo las características estructurales derivadas de los usos particulares del lenguaje forman parte de las definiciones personales de los estudiantes. En sus conclusiones identifican las siguientes clases de definiciones personales del límite de una función: objeto/proceso, vinculación entre límite e imagen, descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, referencia explícita a un sistema de representación distinto del numérico o simbólico, evaluación en un punto, tablas de valores, condición de lateralidad y doble convergencia, alcanzabilidad y rebasabilidad y reproducción de la definición de referencia.

En resumen, el análisis de las investigaciones sobre las ideas que los estudiantes tienen sobre la noción de límite pone de manifiesto que las concepciones espontáneas que poseen, derivadas de la experiencia diaria y del significado coloquial de los términos usados al estudiar dicho concepto, no desaparecen con la instrucción recibida. Es decir, son persistentes, resurgen y se manifiestan bastante tiempo después de que el estudiante haya rechazado el modelo defectuoso de su sistema cognitivo consciente (Brousseau, 1983). Incluso entre estudiantes con buenos resultados, después de la instrucción, no se utiliza la definición formal en situaciones en que era posible su uso (Vinner, 1991). La utilización de diferentes palabras (tiende, se aproxima a, converge a, límite de) con diferentes significados en el ámbito coloquial y en el ámbito matemático dificulta la comprensión del concepto matemático (Monaghan, 1991). El uso coloquial del término límite, como algo inalcanzable, es una dificultad recurrente, además de ser un obstáculo epistemológico que aparece en diferentes investigaciones (Elia et al., 2009; Fernández et al., 2013a; Fernández et al., 2013b).

Además de las dificultades que el lenguaje coloquial representa para la comprensión de la definición formal, también debemos tener en consideración que la metáfora más persistente es la asociada a la idea de aproximación dinámica (Szydlik, 2000; Przenioslo, 2004; Sierra, González y López (2000; Oehrtman, 2009) aunque las concepciones más eficientes en la resolución de problemas eran las centradas en la

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

vecindad (Przenioslo, 2004). Además, los estudiantes tienen dificultades para discernir entre diferentes sentencias si entre ellas alguna implica ideas de movimiento, ideas que pueden haberse formado en la educación secundaria. Las evidencias empíricas que justifican las dificultades que tienen los estudiantes para obtener una sólida idea del concepto de límite son abundantes en la literatura, pero es muy difícil encontrar soluciones para esta situación. Las dificultades para sustituir las concepciones espontáneas sobre la noción de límite creando un conflicto cognitivo con la finalidad de evidenciar sus carencias y sustituirlos por la definición formal son una muestra de la profundidad y fortaleza de dichas concepciones espontaneas (Williams, 1991, 2001).

Finalmente, la necesidad de partir de los conocimientos previos que poseen los estudiantes para, a partir de ellos, intentar comprender el concepto formal de límite basándose en ejemplos históricos o motivadores es un buen medio para aproximarse al concepto formal (Williams, 1991; Mamona-Downs, 2001), porque "*la dificultad o el obstáculo están constituidos como un conocimiento con los objetos, con las relaciones, con los métodos de aprehensión, en las previsiones, con las evidencias, con consecuencias olvidadas, con ramificaciones imprevistas… Se resistirá a ser eliminado, probara a adaptarse localmente, a modificarse al menor coste, a optimizarse en un campo reducido, siguiendo un proceso conocido de acomodación*" (Brousseau, 1983, p. 175).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1.5.3. La influencia de las distintas representaciones en la comprensión del concepto de límite

El tercer ámbito de las investigaciones está relacionado con el papel que desempeñan los diferentes modos de representación en el desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función por parte de los estudiantes. En particular, se asume que el cambio de registros entre representaciones es el umbral de la comprensión matemática y que la comprensión depende de la coordinación en las distintas representaciones (Janvier, 1987; Duval, 2006).

La revisión de la literatura nos indica que las investigaciones realizadas sobre la influencia de las distintas representaciones hacen referencia a la necesidad de trabajar el concepto de límite con diferentes representaciones y a tener en cuenta el papel de estas representaciones en la comprensión del concepto de límite de una función por parte de los estudiantes (Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega, 2000, Blázquez y Ortega, 2001, Blázquez, Ortega, Gatiga y Benegas, 2006, Monaghan, 2001, Duval, 2006¸ Parameswaren, 2007, Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini, 2007, Moru, 2009, Lacasta y Wilhelmi, 2010, Espinosa y Azcárate, 2000, Kidron, 2010, Güçler, 2013 y Çetin, 2009).

La noción de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión, sea cual sea el modo de representación que se utilice, y el conocimiento de dichas dificultades, junto con las creencias que los alumnos tienen sobre el límite, es una herramienta eficaz para su enseñanza tal como pone de manifiesto en su tesis doctoral Blázquez (1999). Una interpretación excesivamente dinámica de la definición puede obstaculizar la comprensión del concepto, pero el uso excesivo del registro algebraico en la enseñanza lleva a los estudiantes a graves deficiencias en observación de conjuntos de números y a la búsqueda de aproximaciones a un número. Entre las conclusiones, Blázquez (1999) señala que la utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto.

La utilización de diferentes registros compensa las limitaciones de unas representaciones al utilizar otras alternativas (por ejemplo, las limitaciones de la tabla para proponer un posible valor en un punto donde una función no está definida se suplen con la gráfica, mientras que las limitaciones de ésta en el estudio de tendencias se suplen de forma numérica o algebraica). Blázquez y Ortega (2000) presentan una propuesta didáctica de definición de límite como aproximación óptima, como alternativa a la definición formal porque no abusa del formalismo y porque implica un mayor conocimiento de los conceptos de aproximación y error. Dicha conceptualización de límite como aproximación óptima la contrastaron con la conceptualización métrica de Weierstrass, con el objetivo de establecer cuál de las dos era la más sencilla y apropiada para la enseñanza-aprendizaje inicial de la noción de límite. El marco teórico utilizado fue el de las representaciones semióticas desarrollado por Duval. Se realizaron dos tipos de análisis. En el primero de ellos se realizaron tres entrevistas a tres parejas de estudiantes de Análisis Matemático I. En el segundo se dio un test a un grupo de estudiantes del CAP (Curso de Aptitud Pedagógica) que durante sus estudios solo habían trabajado con la conceptualización métrica. En las conclusiones apoyadas en las respuestas de los estudiantes afirman que la conceptualización basada en la

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

aproximación óptima debería ser más apta para los aprendizajes iniciales universitarios de análisis matemático que la conceptualización métrica (Blázquez et al., 2006).

La elección de los distintos sistemas de representación depende de los aspectos del límite que se quieran destacar. Blázquez y Ortega (2001) en su investigación sobre la importancia de los sistemas de representación en la comprensión del concepto de límite trabajaron con cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y algebraico. Los autores consideraron que en el *sistema verbal*, el concepto de límite de una función en un punto se representa como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto; en el *sistema numérico,* como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de éstos, en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés; en el *sistema gráfico,* el límite se representa como un punto del eje OY, tal que, a todo segmento que lo contiene le corresponde otro en torno al punto de interés, que se proyecta dentro de él; y finalmente, en el *sistema algebraico,* aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de ε–δ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones, o la definición topológica de entornos.

Consideraron que en un principio la representación a utilizar debería de ser numérica, puesto que este registro es el que muestra mejor los aspectos de la aproximación. La representación numérica se debería complementar con la gráfica y, en etapas avanzadas, se puede completar con la algebraica, como representación más formal y abstracta.

Por otra parte, para la comprensión del concepto de límite de una función es imprescindible la idea de función y, por lo tanto, se han de utilizar sus mismas representaciones. Esta fue una investigación cualitativa que se centró en la identificación de sistemas y en la traducción entre ellos y, en algunas tareas, se trabajaron aspectos de la modelización. Las tareas que resolvieron los estudiantes de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (17-18 años), de forma individual y colectiva, incluían los distintos sistemas de representación. Algunas de las tareas incluían varios sistemas con la finalidad de relacionarlos. Blázquez y Ortega (2001) indican que el excesivo dinamismo que sugiere la definición de límite como aproximación óptima en el sistema numérico se atenúa utilizando el registro gráfico, que sugiere menor dinamismo, y se pasa a una representación estática al traducir dicha

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

definición al sistema algebraico. Además, el sistema numérico se ve limitado, ya que una tabla de valores no proporciona suficientes valores para comprobar que un número es el límite de una función y la expresión algebraica de la función lleva consigo la potencialidad de extraer cualquier valor sin necesidad de acudir a la representación algebraica del límite. Para los estudiantes, la visión global del proceso de identificación del límite es más comprensible en forma gráfica y numérica que en la algebraica.

Respecto a la influencia de los diferentes modos de representación, los autores afirman que el sistema verbal muestra una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta. El sistema numérico muestra claramente el aspecto de aproximación del límite, sugiere una idea dinámica, local y vinculada con la realidad, pero muestra una cierta desvinculación de tendencias de x e y. El sistema gráfico es más estático que el numérico y menos formal que el algebraico, recoge el aspecto visual y ayuda a vincular las tendencias de ambas variables. Y el sistema algebraico muestra una concepción formal de límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, si bien muestra poca vinculación con fenómenos reales. Finalmente, los autores enunciaron dos conclusiones generales:

- *la utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser un obstáculo didáctico, puesto que en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos. Esta dificultad se subsana, en parte, si se utiliza el ordenador para traducir unos sistemas de representación a otros.*
- *en la secuencia de enseñanza se puso de manifiesto cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje, y lo hace de dos formas: por un lado, compensa las limitaciones de unas representaciones con otras, y, por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación (p. 231)*

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

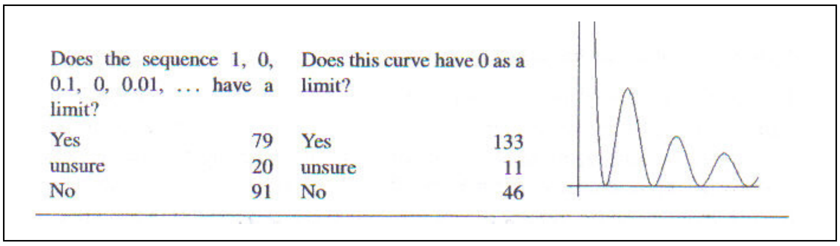
La influencia de los modos de representación en la comprensión del concepto de límite también se ha puesto de manifiesto de forma indirecta, por ejemplo, al estudiar las ideas que tienen los estudiantes del infinito (Monaghan, 2001); en la elaboración de una propuesta didáctica para la enseñanza del límite de una función (Engler et al., 2007); los obstáculos epistemológicos que aparecen en la comprensión del límite de una función (Moru, 2009); las preferencias del profesor en subrayar diferentes modos de representación en el presentación del límite de una función (Lacasta y Wilhelmi, 2010; Guçer, 2013); la práctica del profesor y la forma en que presenta el concepto de límite de una función (Espinosa y Azcárate, 2000); la imagen que del concepto de asíntota que tienen los estudiantes (Kidron, 2010); cálculo del valor aproximado de una función e influencia de las cantidades infinitesimales en la comprensión del límite (Çetin, 2009; Parameswaran, 2007).

- *La idea de infinito*

Las ideas que los estudiantes tienen del infinito han sido investigadas por Monaghan (2001) a través de distintas tareas en diferentes contextos, tales como: contexto numérico, situaciones que evocan principios aritméticos generales; contexto geométrico, situaciones que evocan consideraciones espaciales; contexto contable: situaciones que evocan consideraciones concretas, contexto medible, situaciones que evocan consideraciones continuas y, por último, contexto dinámico del infinito, proceso indefinido en el que se sugiere alguna clase de movimiento y cuando el contexto es estático no se sugiere movimiento. Detrás de las interpretaciones dinámicas del fenómeno del infinito, el autor sugiere que está la idea de infinito como proceso. Y nos sugiere dos ideas:

1. Las ideas sobre límites presentadas en una situación gráfica son más fuertes que las ideas sobre límites presentadas de forma numérica. Esta sugerencia la realiza partiendo de las respuestas que los estudiantes dieron a dos tareas (Figura 1.15) presentadas en contexto numérico y gráfico. Los estudiantes respondieron de forma mayoritaria en el contexto gráfico (133), frente a los que respondieron en contexto numérico (79).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Does the sequence 1, 0, 0.1, 0, 0.01, … have a limit?		Does this curve have 0 as a limit?	
Yes	79	Yes	133
unsure	20	unsure	11
No	91	No	46

Figura 1.15. Tareas presentadas en contexto numérico (izquierda) y contexto gráfico (derecha). Monaghan (2001, pág. 251)

2. La idea sobre el infinito presentada en una situación contable se comprende mejor que cuando se presenta en contexto medible. Esta sugerencia la realiza porque al comparar las sucesiones 1, 2, 3, 4,… y 2, 4, 6, 8,… los estudiantes responden mayoritariamente (86/187) que en las dos hay el mismo número de elementos, pero al preguntarles los decimales que hay entre 0 y 1, y los decimales que hay entre 0 y 10, los estudiantes responden mayoritariamente (79/187) que hay más decimales entre 0 y 10.

- *Propuesta didáctica para la enseñanza del límite de una función*

Engler et al. (2007) diseñaron y posteriormente analizaron una propuesta didáctica para la enseñanza de límite de una función de variable finita en los modos de representación verbal, tabular, numérico, analítico y gráfico. Los autores partieron de la hipótesis de que los diferentes papeles que desempeñan los modos de representación no son equivalentes y que un límite puede ser sugerido en una representación pero no en otra. Los resultados indicaron que los estudiantes:

- No tuvieron mayores inconvenientes para comprender los límites cuando la representación es tabular (numérica) o gráfica.
- Un alto porcentaje de ellos no interpretaron el significado al trabajar con la representación algebraica.
- Les resultaba más sencillo identificar la tendencia de una función, su límite, en forma numérica o gráfica que en la algebraica.
- Cometían más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa.
- El sistema algebraico muestra una concepción formal de límite estático y abstracto. En cambio, el numérico sugiere una forma dinámica vinculada con la realidad. Entre ambos tipos de representaciones se encuentra la gráfica que

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

es más estática que la numérica y menos formal que la algebraica.

- *Los obstáculos epistemológicos que aparecen en la comprensión del límite de una función*

Para investigar los obstáculos epistemológicos que aparecen en la comprensión del concepto de límite de una función Moru (2009) utilizaron diferentes modos de representación - algebraico, geométrico, descriptivo y numérico–. En esta investigación participaron 251 estudiantes, de primer curso de matemáticas, en la resolución de un cuestionario y, durante dos semanas quince de ellos fueron entrevistados. Los entrevistados fueron elegidos por haber cometido errores en un número considerable de cuestiones o por haber dado respuestas diferentes a las que dieron los otros miembros del grupo. Algunas de las conclusiones referidas a los diferentes modos de representación indicaban que para una función representada en:

- modo algebraico los estudiantes llegaban a una conclusión sobre la existencia o no existencia de límite en una situación indeterminada 0/0, simplificando bien a 1, a 0, a infinito o iba acompañado de frases como “es indefinido” o “el límite no existe”. El 52% de los estudiantes cometieron errores en la manipulación algebraica al intentar resolver la indeterminación y el 3.6 % construyó una tabla de valores.
- modo gráfico los estudiantes negaban la existencia de límite donde la función no estaba definida, ya que no podían dar una interpretación adecuada a la función definida a trozos (4%) y asumían que el valor del límite solo podía ser encontrado para funciones que estuviesen representadas algebraicamente. El 57% de los estudiantes hacían suya la afirmación de que para obtener el límite de la función no se trata de lo que ocurre en el punto sino de los valores que la función toma en la vecindad del punto.
- modo de representación descriptivo se les preguntaba cómo se podría conocer si una función tiene por límite L cuando x se aproxima a 0. El 12% de los estudiantes confundían el valor del límite con el valor de la función. El 8% substituiría valores muy próximos a 0 en la fórmula y observarían el valor de la función. Y el 48% de ellos hacían suya la afirmación de substituir valores muy próximos a 0 en la fórmula y observarían el valor al que se aproxima la función cuando los valores de x se aproximan a 0.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- modo numérico se les presentaba una tabla de valores de la variable independiente y de la función que se aproximan a 1.9 y 2.5 respectivamente. Un 24% de los estudiantes respondieron correctamente las aproximaciones en el dominio y en el rango. Un 35% de ellos indicó que los valores del dominio se aproximaban a 2 y que los valores del rango lo hacían a 1. También se indica que la frase "próximo a" fue interpretada de forma ambigua. En cuanto a la formalización simbólica, los estudiantes no veían que *lím f(x)=…* fuese alternativa al simbolismo de $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow a$.

- *Las preferencias del profesor en subrayar diferentes modos de representación en la presentación del límite de una función*

El tipo de presentación de la noción de límite de una función preferida por el profesorado español y francés fue analizada por Lacasta y Wiñhelmi, 2010 a partir de cuatro presentaciones diferentes extraídas de cuatro manuales distintos. Las diferentes presentaciones tenían que ordenarse por su interés didáctico, y por su facilidad de explicación o de comprensión de las representaciones. Las cuatro presentaciones obedecían a criterios de: utilización de representaciones gráfica, uso de tablas de valores, ostensión (al utilizar un ejemplo representativo) e idoneidad epistémica (presentación coherente con la definición de límite). La hipótesis de partida de los investigadores era que la ordenación de las preferencias se iniciase por la presentación gráfica. En sus conclusiones los autores indican que la presentación preferida por los profesores era la que utilizaba las tablas de valores, aunque no fuese idónea epistémicamente, porque representa un medio en el que el estudiante puede interactuar con la calculadora.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Por su parte, Güçer (2013) realizó una investigación sobre el tipo de discurso en la enseñanza de limite utiliza el profesor y los estudiantes en el nivel inicial de pregraduado de cálculo. Las categorías del lenguaje que se utilizaron fueron: coloquial, operacional y objetivada. Dos fueron las preguntas de la investigación: a) ¿Cuáles son las características del discurso sobre límites del profesor? y b) ¿Qué elementos del discurso del profesor son comparables y cuáles contrastan con el discurso de sus estudiantes?

Los resultados sugieren que el profesor dibuja gráficas en tres situaciones diferentes: a) cuando calcula el límite de una función, b) cuando explica una definición particular, teorema o hechos sobre un límite y c) cuando resuelve un problema en el que se pide expresamente la gráfica de una función. En el discurso del profesor, la metaregla dominante fue el uso de las representaciones simbólicas. La metaregla gráfica fue utilizada para evitar confusiones y como ayuda de las explicaciones formales. Sin embargo, los estudiantes no muestran señales de reconocer las diferencias entre la definición formal y la informal de límite. Las conclusiones sugieren que a pesar del instructor, la mayoría de los estudiantes solo respalda la narrativa del límite como un proceso y no han objetivado el límite como un número. La metáfora que usan de forma mayoritaria es la del movimiento continuo (continous motion). Las primeras medidas visuales del profesor fueron simbólicas, mientras que en los estudiantes fueron gráficas. El enfoque principal del profesor en la resolución de límites fue algebraico; sin embargo, el enfoque principal de los estudiantes fue gráfico.

A pesar de la instrucción del profesor, los estudiantes para hablar sobre el límite necesitaban la representación visual de las funciones. Durante las entrevistas, algún estudiante tuvo dificultades para encontrar el límite de funciones continuas porque frases como “moviéndose hacia” sugieren que el límite puede ser “aproximado pero nunca alcanzado”, así que el estudiante se sentía incómodo encontrando los límites de las funciones continuas, ya que alcanzan su valor límite. Estas dificultades sugieren que las dificultades en el cálculo de límites no pueden ser reducidas a un problema de lenguaje. Los resultados no sugieren que todos los estudiantes de cálculo puedan aprender la definición formal y pruebas relacionadas con el límite, tampoco sugieren que la visión dinámica de límite deba desecharse de clase, puesto que puede ser la herramienta más útil con la que iniciar y comprender el concepto. El exceso de confianza en la visión dinámica apoyó la materialización del límite como un proceso, pero no como un número.

- *La práctica del profesor y la forma en que presenta el concepto de límite de una función*

La práctica del profesor y la forma en que presenta el concepto de límite de una función ha sido investigado mediante el análisis de los libros de texto y de la observación de dos profesores de segundo curso de BUP (Bachillerato Unificado

Polivalente) (Espinosa y Azcárate, 2000). Los principales resultados de esta investigación son: a) en cuanto a la organización matemática escolar, encuentra dos organizaciones matemáticas incompletas. En una de ellas, el modelo matemático implícito es el de un operador algebraico que cumple con una determinada axiomática del álgebra de límites. Los tipos de problemas gráficos aparecen como un apéndice de la aplicación de las técnicas algebraicas. La insuficiencia de esta organización hace que la práctica se reduzca a técnicas aisladas para resolver problemas y que dichas técnicas sean en sí mismas el objetivo del estudio. En la segunda de ellas el modelo matemático explícito es formal, el típico del análisis en términos de ε-δ utilizados en espacios métricos o de entornos y vecindades. Las incoherencias de la segunda organización provocan que aparezcan como objetos decorativos, y a nivel práctico sin una teoría apropiada la actividad matemática que se realiza resulta arbitraria y formal; b) en cuanto al proceso de estudio de la organización matemática, afirma que en lo esencial los dos profesores presentan las mismas características al trabajar los límites. Las funciones con las que trabajan son racionales o irracionales simples y se presentan en modo algebraico o gráfico. Las técnicas matemáticas que utilizaron los dos profesores consistían en manipulaciones algebraicas como operar con polinomios, aplicar el método de Ruffini, etc. Uno de los profesores "*inició el cálculo de límites por aproximaciones sucesivas mediante la construcción de una tabla de valores*" (p. 364), pero no se hizo efectivamente operativa.

Este hecho constata la visión estática con la que se presenta y se estudia la noción de límite de una función. Dos profesores distintos con estrategias didácticas aparentemente diferentes elaboran organizaciones matemáticas equivalentes y con las mismas características que la organización oficial; c) en cuanto a la praxeología didáctica del profesor, Espinosa y Azcárate (2000) concluyen que han observado una uniformidad técnica en ambos profesores basada casi exclusivamente en un discurso en la pizarra, lección dictada y examen escrito.

- *La imagen del concepto de asíntota*

Con la finalidad de reflexionar sobre la imagen que del concepto de asíntota tienen los estudiantes, Kidron (2010) preguntó a la estudiante Nathalie *¿Qué es una asíntota*?, ésta respondió que no recordaba la definición exacta, pero que era como una recta a la que tiende la función sin tocarla, pero aproximándose. Partiendo de esta respuesta, el autor le plantea a la estudiante tres tareas con diferentes grados de dificultad en las que dada una función debe representarla y calcular su asíntota.

En la primera de las tareas, la función dada es $f(x)=2+(2–x^2)/(1–x^2)$. En esta tarea la estudiante no manifiesta ningún conflicto. Ella reconoce, calcula la asíntota horizontal y representa la gráfica de la función y de su asíntota.

En la segunda tarea, la función es $f(x) = (x+3)^2/(x +6)$. En este caso, a la estudiante se le crea un sentimiento de malestar (*unease*) y, como consecuencia, la necesidad de construir la definición de asíntota horizontal. En la tarea planteada, la asíntota horizontal interseca a la función en un punto. La estudiante, teniendo en cuenta que la función está definida para todos los números reales y no tiene ningún punto de discontinuidad, explora el comportamiento de la función analizando los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Este es el inicio de una nueva construcción, una nueva imagen de la asíntota horizontal: "*la gráfica de asíntota horizontal puede intersecar a la gráfica de la función*".

En la tercera tarea, la función presentada es $f(x) = 2+(sen\ x)/ x$. Esta función le crea a la estudiante una situación de conflicto en la que no habrá lugar para la imagen mental inicial. En la tarea planteada la asíntota horizontal interseca a la función en infinitos puntos. Después de una aproximación numérica, emerge una nueva construcción: "*la identificación de la noción de límite en la asíntota horizontal al centrarse en el número al que se aproxima más que en el proceso de estar cada vez más cerca*".

Kidron (2010) señala la persistencia de algunas partes de la imagen del concepto a pesar del razonamiento algebraico y analítico. Solamente cuando se añadió el razonamiento numérico, la estudiante pudo revisar su imagen del concepto. Solo mediante la flexibilidad entre los diferentes registros (gráfico, analítico, algebraico y numérico), la estudiante pudo visualizar la definición formal de asíntota.

- *Cálculo del valor aproximado de una función y la influencia de las cantidades infinitesimales en la comprensión del límite*

Con el doble objetivo de conocer si los estudiantes podían calcular el valor aproximado de una función en un punto utilizando la noción de límite y si podían calcular límites de funciones, Çetin (2009) trabajo con 63 estudiantes de primer curso de universidad. Los estudiantes tuvieron que resolver dos test. En el primero se les pedía que encontraran el valor aproximado de cuatro funciones en un punto sin el uso de la calculadora, en el segundo test tenían que calcular el límite de las cuatro funciones anteriores en un punto. Ambos valores eran próximos (el punto donde tenían que calcular el valor aproximado de la función y el punto en el que tenían que calcular el límite). Çetin (2009) afirma que muy pocos estudiantes en su estudio (1 de cada 6) fue capaz de utilizar el cálculo de límite para determinar el valor aproximado de una función en un punto cercano al punto al que tiende la variable independiente, aunque la mayoría eran capaces de encontrar correctamente el límite de la función en el punto.

Con la finalidad de explorar la influencia que en los estudiantes tienen las cantidades infinitesimales en la comprensión de la noción de límite, Parameswaran (2007) realizó un test sobre la idea de aproximación, utilizando dos muestras de estudiantes. Una de ellas, la constituían 68 estudiantes de educación secundaria que habían estudiado la noción de límite de un modo informal, con ejemplos de funciones algebraicas y con representaciones gráficas de funciones. Las propiedades básicas habían sido explicadas sin demostraciones. No conocían la definición formal de ε–δ. Al día siguiente de la realización del test, 10 de ellos participaron en entrevistas personalizadas. La segunda muestra, la constituían 11 estudiantes de primer curso de universidad con una sólida formación en matemáticas, habían estudiado la definición formal de límite. Al día siguiente, 6 de ellos participaron en una entrevista individualizada. El autor concluye que los estudiantes de la primera muestra perciben los “números grandes” como infinito y los “números pequeños” los asocian a cero. Es decir, perciben 10^{24} como igual a infinito y de la misma forma asocian $(0.1)^{10000}$ con el cero dado que usan “la aproximación aritmética”, es decir, realizan aproximaciones hasta un cierto número de dígitos significativos. No perciben los números anteriores como constantes porque los aproximan aritméticamente. Estos hábitos están integrados profundamente en la mente de los estudiantes, puesto que los de la segunda muestra, los que han estudiado la definición ε–δ, también cometen los mismos errores que los de la

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

primera muestra (Parameswaran, 2007).

- *A modo de síntesis*

Las investigaciones anteriores nos han mostrado la influencia de los distintos modos de representación en la comprensión de la noción de límite. Aunque las conclusiones pueden diferir según los diferentes investigadores. Así por ejemplo, la representación con la que se empezaría debería ser la numérica porque es la que más adecuada para comprender los aspectos de la aproximación; se debería complementar con la gráfica y se formalizaría con la algebraica (Blázquez y Ortega, 2001). Los profesores al ordenar las presentaciones que ofrecían los libros de texto para la presentación de la noción de límite mostraron preferencia por las tablas numéricas (Lacasta y Wilhelmi, 2010).

Sin embargo, también hay investigaciones que indican que la representación gráfica es más solida que la numérica en el sentido de que los estudiantes resuelven mejor situaciones gráficas (Monaghan, 2001). Aunque las prácticas del profesorado pueden ser distintas, porque utilicen bien el modo algebraico o bien el modo formal, éstos elaboran organizaciones matemáticas equivalentes (Espinosa y Azcárate, 2000). Sin embargo, en otras investigaciones se concluye que los errores de los estudiantes se producen cuando realizan manipulaciones algebraicas (Moru, 2009), porque estas manipulaciones pueden ser la llave o la cerradura en la comprensión del concepto de límite (Bergsten, 2006).

También se han analizado diferentes alternativas a la definición formal; una de ellas utiliza el modo de representación numérico y presenta la conceptualización del límite como aproximación óptima (Blázquez y Ortega, 2000), otra utiliza el modo de representación gráfico asociándolo a la definición formal (Mamona-Downs, 2001), aunque la conceptualización como aproximación óptima es más sencilla que la conceptualización formal (Blázquez et al., 2006). Sin embargo, los estudiantes, tanto los que utilizan la definición formal como los que utilizan la noción de límite de un modo informal, cuando trabajan con "números grandes" y con "números pequeños" cometen los mismos errores (Parameswaran, 2007).

Al referirnos al papel de los obstáculos epistemológicos, afirmábamos que el

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

acceso a un concepto como el de límite, tan rico y variado con sus versiones dinámica y estática, debe hacerse de forma flexible y emplear las dos perspectivas para desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión del concepto (Swinyard, 2011). Ahora, al referirnos a la influencia de los modos de representación, podemos indicar que la correcta comprensión del concepto de límite debería basarse en trabajar las diferentes representaciones de forma flexible como hemos podido observar en la comprensión del concepto de asíntota, puesto que solamente cuando se añadió el razonamiento numérico se revisó la imagen que se tenía de la misma (Kidron, 2010).

Evidencias de que la comprensión en un modo de representación no implica necesariamente la comprensión en otra representación nos la proporciona el hecho de que aunque la mayoría de los estudiantes podían ser capaces de calcular el límite de funciones en modo de representación algebraica, no fueron capaces de determinar el valor aproximado de las mismas funciones en puntos cercanos a los que tendían dichas funciones (Çetin, 2009). Esto indicaría la complejidad de la inversión como mecanismo cognitivo de la abstracción reflexiva.

Las investigaciones anteriores nos han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de límite en los estudiantes, en particular sobre el papel desempeñado por las traslaciones entre los diferentes modos de representación. Sin embargo, no aportan información sobre el papel relevante que desempeña la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango al establecer relaciones significativas entre la concepción dinámica y métrica del concepto de límite. Por lo tanto, estos resultados han puesto de manifiesto la necesidad de intentar comprender mejor cómo se desarrolla la coordinación de los procesos de aproximación, que deben darse en el rango y el dominio en la constitución del esquema de limite de una función y, en particular, del papel que desempeñan los diferentes modos de representación en el desarrollo de esta coordinación.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El problema de investigación que nos hemos planteado se centra en la comprensión que los estudiantes de bachillerato tienen de la idea/concepto de límite de una función y cómo la construyen. Centraremos este capítulo en los referentes teóricos que hablan de cómo llegan a conocer un concepto y en la forma en la que los estudiantes construyen el conocimiento. Presentaremos los referentes teóricos que nos permitan comprender la forma en que se produce por parte de los estudiantes la comprensión de la idea de límite de una función.

Lo que parece tener en común las diferentes teorías sobre el aprendizaje y que caracteriza al pensamiento matemático avanzado es la construcción de un objeto que puede ser manipulado mediante un proceso que se realiza paso a paso (Skemp, 1971; Mason y Jonston-Wilder, 2004).

Nuestra investigación estudia la construcción de la comprensión que los estudiantes de Bachillerato (16–18 años) tienen de la noción de límite de una función y nos situamos en el paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado. El paso del pensamiento matemático elemental al avanzado lleva asociado una transición significativa: de describir a definir, de convencer a probar mediante un razonamiento lógico fundamentado sobre las definiciones. En esta etapa un concepto puede ser descrito como la toma de conciencia mental de lo que una cierta clase de experiencias tienen en común (Garbin, 2005a). Un nuevo concepto no puede ser comunicado como una definición, los estudiantes necesitan una colección de ejemplos elegida cuidadosamente a partir de la cual hacen su propia abstracción (Skemp, 1971). En este sentido, el concepto de límite no debe ser comunicado por la definición formal que dio Weirsstrass, sino que se debe recurrir a una cuidadosa colección de ejemplos para que los estudiantes hagan su propia abstracción. Los estudiantes necesitan, previamente, una colección de ejemplos con la finalidad de formar su imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981). Un matemático suele coger una idea matemática compleja y la descompone en partes más pequeñas con la finalidad de enseñar una secuencia lógica. Desde el punto de vista del experto las partes pueden verse como una totalidad, pero el estudiante puede percibir cada una como piezas sueltas sin conexión entre ellas. Por ejemplo, un análisis matemático del concepto de límite requiere de las ideas de: función, entorno, cuantificadores y desigualdades. Así pues, matemáticamente el concepto de límite debe estar precedido de dichas ideas.

Al leer los libros de texto de Matemáticas relacionados con diferentes ideas y conceptos matemáticos tenemos la impresión de que estamos trabajando con diferentes clases de objetos. Ejemplos de estos objetos son: funciones, rectas tangentes a una curva… Los textos nombran a estos objetos, y se les atribuyen por definición o por su uso determinadas relaciones y propiedades. Muchas ideas o nociones matemáticas son consideradas como objetos matemáticos. Pero, ¿qué entendemos por objeto matemático?

El platonismo consideraba que los objetos matemáticos existen a priori fuera del tiempo y del espacio. Independientemente del pensamiento humano. La axiomática griega de Euclides desarrolló métodos, como las demostraciones, que se consideran legítimos para investigar estos objetos, y aprender no es otra cosa que recordar.

Otro punto de vista es el expuesto por Piaget y García (1982), según el cual el individuo, partiendo de los niveles más bajos con estructuras prelógicas, llegará a normas racionales. Comprender el mecanismo de la evolución desde las normas precientíficas hasta su fusión con las del pensamiento científico es un problema epistemológico. Los trabajos de Piaget han servido de base a otros trabajos relacionados con el pensamiento matemático avanzado. El objetivo de todos estos trabajos se pueden resumir en tres preguntas:

(i) ¿Cómo se construye el conocimiento en la mente de un estudiante?,

(ii) ¿Qué clase de mecanismos utiliza?,

(iii) ¿Qué clase de construcciones realiza?

A continuación, presentaremos tres puntos de vista que nos hablan de la forma en la que el estudiante construye el conocimiento: la reificación (Sfard 1991, 1992), los procepts (Gray y Tall, 1994; Tall, Thomas, Davis, Gray y Simpson, 2000), y los registros de representación semiótica (Duval, 1995, 1996 y 2006).

Estas teorías cognitivas consideran la construcción de un objeto matemático como un proceso cognitivo que implica la construcción por parte del estudiante de estructuras cognitivas adecuadas (Dörffler, 2002). Estas teorías consideran la cognición como parte de la actividad humana, y consideran al estudiante como una unidad inseparable de su contexto. Para Dörfler, tratar algo como un objeto matemático es un tipo de habilidad que ha de poder y tiene que ser adquirida por el estudiante. La construcción de objetos matemáticos puede ser experimentada como un esfuerzo personal que el estudiante debe realizar de forma espontánea. Esta construcción es un proceso cognitivo que usa significados lingüísticos, simbólicos y esquemáticos para expresar cambios de perspectiva y puntos de vista.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.1.La construcción de objetos matemáticos

Sfard (1991, 1992) distingue dos clases de conceptos matemáticos abstractos. Los operacionales en términos de proceso y los estructurales en términos de objetos. Los operacionales los concibe como acciones, algoritmos y procesos, y los estructurales como conceptos matemáticos considerados objetos abstractos. Estas dos concepciones que parecen incompatibles, de hecho son complementarias. El proceso de aprendizaje y de resolución de problemas consiste en una compleja interacción entre las concepciones operacionales y estructurales de la misma noción matemática. La autora conjetura que para muchos individuos la concepción operacional es el primer peldaño en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos, e identifica tres estadios diferentes en la construcción de conceptos matemáticos: interiorización, condensación y reificación.

En el estadio de interiorización, el estudiante entra en contacto con los procesos que eventualmente van a dar lugar a un nuevo concepto; estos procesos son operaciones realizadas con objetos matemáticos de un nivel elemental. Gradualmente, el estudiante va adquiriendo las habilidades propias de dicho proceso. El proceso ha sido interiorizado cuando lo puede llevar a cabo mediante representaciones mentales y puede ser analizado y comparado sin necesidad de realizarlo realmente. La condensación es el estado en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. En esta etapa el estudiante se siente cada vez más capaz de pensar sobre un determinado proceso en su conjunto, sin sentir necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. Este es el punto en el que nace el nuevo concepto y ya se le puede nombrar. Un avance en condensación se manifestaría también en el aumento de la facilidad para alternar entre diferentes representaciones del concepto. La reificación se produce cuando el estudiante es capaz de concebir la nueva noción como un objeto en sí mismo. La reificación se define como un cambio ontológico, una repentina habilidad para ver algo familiar desde una perspectiva totalmente nueva.

Los estadios de interiorización y condensación son procesos graduales y cuantitativos, mientras que la reificación es instantánea, es como un salto cuántico. El nuevo concepto es un proceso que se solidifica en un objeto, en una estructura estática. Diferentes representaciones del concepto comienzan a unificar este constructo abstracto e imaginario.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

En algún momento el estudiante tiene que tomar la decisión de si se debe considerar una noción determinada como un objeto en sí mismo (Dörfler, 2002). Esta decisión ha de combinarse con un cambio en su punto vista. En lugar de observar varios elementos individualmente, los debe observar como formando parte de un todo con sus propiedades y relaciones, centrando la atención en las cualidades emergentes del nuevo objeto. Este objeto es de tipo virtual, imaginado o supuesto. La construcción de los objetos matemáticos es interpretada como una decisión del estudiante de tratar algo como una entidad reificada, por lo que dicha decisión tiene que ser tomada por cada estudiante. También cabe la posibilidad de que el estudiante rehúse la decisión o adopte una nueva perspectiva solamente en el caso en el que pruebe que es útil y viable. Las construcciones matemáticas no son automáticas para los estudiantes, ellos han de aceptarlas y decidir usarlas.

Otro punto de vista en la construcción de objetos matemáticos es el expuesto por Gray y Tall (1994) y Tall et al. (2000). Gray y Tall (1994) mostraron la diferencia entre la imagen de un concepto y la definición formal de dicho concepto. Usaron el término imagen de un concepto para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Sin embargo, la definición formal del concepto serían las palabras que se usan para especificar dicho concepto.

Las formas en que se podían construir los objetos construidos en matemáticas, fueron analizadas por Tall et al. (2000), quienes distinguieron tres tipos de construcciones, cada una de las cuales es más sofisticada que la anterior: a) los objetos de la percepción, que surgen a través de la abstracción empírica de objetos físicos del entorno; b) los procepts, que implican procesos en los objetos del mundo real, después el uso de símbolos que pueden ser manipulados como objetos y sobre los cuales se pueden realizar operaciones y c) objetos axiomáticos (axiomas o definiciones), concebidos con criterios que especifican las propiedades que se deducen mediante la prueba formal.

La introducción del término "*procept*" proviene de la unión de los términos proceso y objeto. Para Gray y Tall (1994) un procepto elemental es una mezcla con tres componentes: un *proceso* que produce un *objeto* matemático y un *símbolo* que representa o bien al proceso o bien al objeto matemático. Estos autores encontraron que el pensamiento proceptual es necesario para progresar en matemáticas. Además caracterizaron el pensamiento procedimental por un enfoque en el procedimiento que se apoya en la ayuda física. La limitación de este tipo de pensamiento es el estrecho punto de vista que el niño tiene del simbolismo: los números son usados solo como entidades concretas para manipularlas mediante el proceso de contar. El énfasis en los procedimientos reduce la relación entre las entradas y las salidas. Y caracterizaron el pensamiento proceptual por la habilidad para reducir etapas en la manipulación de símbolos hasta el punto donde los símbolos se ven como objetos que pueden ser descompuestos y recompuestos de forma flexible. Para ellos, es la comprensión de las ideas matemáticas.

Por otra parte, el proceso de adquisición del conocimiento matemático es tan complejo que requiere diferentes enfoques, pero todos tienen en común el uso de la noción de ”*representación*” que permite caracterizar la clase de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de aprendizaje (Duval, 1995, 1996, 2006). Una representación es algo que está en lugar de “*otra cosa*”, pero reconoce que la naturaleza “*de otra cosa*” es difusa. Un sistema semiótico es un sistema de signos. Y las representaciones semióticas son representaciones donde la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico. Señala que los registros de representación semiótica son aquellos sistemas semióticos que permiten realizar tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: (i) la construcción de un conjunto de marcas visibles que pueden ser identificadas como una representación de algo en un sistema determinado, (ii) el tratamiento o transformación de una representación mediante las reglas internas propias para obtener otra transformación que pueda constituir una contribución al conocimiento de las representaciones iniciales y (iii) la conversión de las representaciones producidas en un sistema en representaciones de otro sistema, para que estas últimas permitan explicar otros significados relacionados con la representación inicial.

Toda conciencia individual moviliza diferentes registros de representaciones semióticas. Este hecho enfatiza el problema crucial de la comprensión matemática para los estudiantes, porque si para muchos objetos matemáticos podemos utilizar diferentes clases de representaciones semióticas, ¿cómo pueden reconocer los estudiantes el mismo objeto representado mediante representaciones semióticas que se producen dentro de diferentes sistemas de representación? El análisis del desarrollo del conocimiento matemático conlleva tres fenómenos estrechamente relacionados. El primero es la diversificación de los registros de representación semiótica. El segundo es la diferenciación entre la forma y el contenido de una representación semiótica. El tercero es el de la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica. La coordinación de los diferentes registros se manifiesta por la capacidad de reconocer entre dos representaciones diferentes del mismo objeto. Dicha coordinación constituye el umbral cuyo traspaso cambia radicalmente la actitud frente a una actividad o frente a una disciplina: la persona consciente de traspasar el umbral, adquiere un poder de iniciativa y de control en el desarrollo de los procesos. Por tanto, se necesita conocer cómo discriminar en cualquier contenido de una representación, sea cual sea el registro utilizado, lo que es matemáticamente relevante de lo que no lo es. Para ayudar a los estudiantes a desarrollar esta capacidad se debe oponer y dar importancia a las características básicas que son "*matemáticamente relevantes y significativamente cognitivas*".

2.2.Una aproximación piagetiana del desarrollo de un esquema

Piaget describe un modelo general de cómo se realizan los procesos de desarrollo cognitivo. Con dicho modelo pretende analizar cómo el individuo crea y forma las ideas mentales. El desarrollo mental del niño aparece como una sucesión de estadios donde cada uno prolonga el precedente, reconstruyéndolo en un nuevo plano para sobrepasarlo. La teoría de los estadios de Piaget considera que un niño crece hasta llegar a adulto mediante una serie de estados de equilibrio, cada uno más amplio que el anterior. Los cuatro estadios principales que identificó fueron: en primer lugar el senso-motor, en segundo lugar el preoperacional, en tercer lugar el de las operaciones concretas y las estructuras de cooperación, y finalmente el incipiente pensamiento formal que reestructura las operaciones concretas. Esta integración de estructuras sucesivas lleva implícito que cada una lleva a la construcción de la siguiente. Además, su orden de sucesión es constante; cada estadio se caracteriza por una estructura de conjunto, en función de la cual pueden explicarse las reacciones particulares y son integrativas es decir, no se sustituyen unas a otras, cada una resulta de la anterior, integrándola, y prepara la siguiente para integrarse posteriormente en ella (Piaget e Inherler, 1978). El comportamiento en el estadio senso-motor se caracteriza por las acciones y los reflejos espontáneos basados en hábitos adquiridos por investigación y exploración. En el estadio preoperacional las palabras denotan acciones, alguna manipulación de símbolos u otras representaciones. En el estadio de las operaciones concretas aparece el pensamiento lógico basado en la experiencia de las manipulaciones físicas. Finalmente, en el estadio de las operaciones formales el razonamiento hipotético deductivo usa ideas símbolos sin necesidad de manipulaciones físicas (Mason y Joston-Wilder, 2004).

Para Piaget y García (1982), la construcción de los sucesivos estadios del conocimiento son secuenciales, y cada nuevo estadio comienza por una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los estadios precedentes. Los momentos de reorganización del conocimiento se deben a la "*abstracción reflexiva*", en

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

oposición a la "*abstracción empírica*" que extrae sus informaciones directamente de los mismos objetos. La abstracción reflexiva procede, según Piaget y García (1982), de "*las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conduce a construir*" (p.247). Dicha abstracción reflexiva se produce en el sujeto en dos sentidos inseparables: "*por una parte, "un reflejamiento" hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a uno superior (por ejemplo de la acción a la representación) y, por otra parte, una "reflexión" en el sentido mental, que permite una reorganización sobre el nuevo plano de lo que ha sido extraído del plano precedente*" (p. 247). Es durante la reflexión que el conocimiento se reconstruye, se reorganiza, y también se amplía lo que se ha transferido durante el reflejamiento. A esta ampliación estos autores, la denominan "*generalizaciones completivas*" (p.162).

Piaget y García (1982) indican que el conocimiento crece mediante determinados mecanismos, llamados *"mecanismos de pasaje"*. De los dos mecanismos de pasaje a los que aluden los autores nos centraremos en el mecanismo que "*conduce de lo intra-objetal (o análisis de los objetos) a lo inter-objetal (o estudio de las relaciones o transformaciones) y de allí a lo trans-objetal (o construcción de las estructuras)"*. Estos autores indican que "*esta tríada dialéctica se encuentra a todos los niveles"* (p. 33), e incluso dentro de cada uno de los tres niveles, y que es aplicable a cualquier noción matemática. Así pues, tendremos que establecer lo que entenderemos por esquema y cómo caracterizaremos el desarrollo del mismo.

El término "*esquema"* no solamente incluye complejas estructuras conceptuales de matemáticas sino también simples estructuras para la coordinación de actividades senso–motoras. Para Skemp (1971) las funciones de un esquema son: la integración del conocimiento existente, el actuar como una herramienta para un futuro aprendizaje y hacer posible la comprensión. El esquema no es una estructura estable, pues organiza la experiencia pasada, "*asimila*" la nueva y se "*reconstruye*" para comprender las nuevas situaciones.

En el mismo sentido, Piaget (1971) reafirma la importancia del concepto de asimilación en un doble sentido. Por una parte, es una noción esencial porque todo conocimiento incide en el significado, y por otra parte, expresa el hecho fundamental de que cada pieza del conocimiento está conectada a una acción, y para conocer un objeto hay que hacer uso de la misma acción asimilándola a un esquema. Además, toda nueva relación está integrada en una estructura anterior, por lo que hay que considerar la acción organizadora que realiza el individuo para asimilarla a las estructuras ya construidas, que se modificarán y se enriquecerán en función de la nuevas asimilaciones (Piaget e Inherler ,1978).

Piaget e Inherler (1978), manifiestan que un esquema es la "*estructura o la organización de acciones, tales que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales*" (p. 20).

En relación al desarrollo del esquema, Piaget y García (1982) indican que un esquema se desarrolla pasando por tres fases o niveles: *inter, intra y trans*, denominadas tríada, que se suceden según un orden determinado. El desarrollo de un esquema es un proceso dinámico y en permanente evolución. Es un proceso influido por las etapas precedentes de desarrollo. Las tres fases del desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y García (1982) fueron definidas de la siguiente forma:

i. INTRA: "*lo propio de este periodo es el descubrimiento de una acción operatoria, y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además, el análisis interno de la operación en juego se acompaña de errores, que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse*" (p.163).

ii. INTER: "*una vez comprendida un operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras más o menos similares, hasta la constitución de sistemas que involucran ciertas transformaciones. Si bien hay aquí una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder con elementos, contiguos*" (p.165).

iii. TRANS: "*es fácil de definir en función de lo que precede, como involucrando, además de las transformaciones, síntesis entre ellas. Dichas síntesis llegan a la construcción de estructuras, aunque permaneciendo en el plano de las acciones, que aunque están interiorizadas no han sido tematizadas"* (p. 167).

Para estos autores, la síntesis son los procesos mediante los cuales, partiendo de algo que se conoce, y realizando operaciones sobre lo conocido, se llega a la comprensión de algo que no se conocía. Una vez que el sujeto ha construido un esquema, este puede ser tematizado.

Para Piaget y García (1982), las nociones abstractas de las matemáticas al principio fueron utilizadas de forma instrumental, la reflexión y la toma de conciencia de las mismas son "*un proceso más o menos prolongado a cuyo término la noción particular (que ya ha sido utilizada en numerosos casos de aplicación) se torna objeto de reflexión para de constituirse en concepto. Este pasaje del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización, constituye lo que hemos convenido en llamar tematización*" (p.103). La tematización de un esquema no es el punto final de los conceptos matemáticos, "*puesto que dichas estructuras, una vez elaboradas y convertidas por ese mismo hecho en intrínsecamente necesarias, pueden a su vez ser tratadas como "datos"*" (p. 132).

2.2.1. La Teoría APOS

La teoría APOS nos proporciona un marco teórico que integra tres componentes: 1) un análisis teórico, 2) el diseño y la implementación de la enseñanza, y 3) la recogida de datos. El resultado podría ser una revisión del análisis teórico que nos llevaría hacia una nueva iteración del estudio. Sus objetivos fueron: a) aumentar la comprensión de cómo tiene lugar el aprendizaje de las matemáticas, b) elaborar una teoría basada en la pedagogía para utilizarla en la educación matemática preuniversitaria, y c) desarrollar una base de información y de técnicas de evaluación que arrojen luz sobre la epistemología y la pedagogía asociada con conceptos particulares (Asiala et al., 1996). En definitiva, una de las finalidades de la elaboración del marco teórico es aislar pequeñas porciones de una estructura compleja y dar descripciones explícitas de las posibles relaciones entre ellas. La evolución del marco teórico ha permitido centrarse sobre la descripción de un modelo de construcción del conocimiento.

El marco teórico APOS, desarrollado por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores (RUMEC), está basado en el desarrollo de la noción de abstracción reflexiva para el pensamiento matemático avanzado. Para este autor la abstracción reflexiva tenía que ser un marco teórico general que "*podría usarse para describir* *cualquier concepto matemático junto con su adquisición"* (p.96). La abstracción reflexiva es, para este mismo autor, la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre esos objetos. El conocimiento de un concepto matemático individual es la capacidad de un estudiante para invocar un esquema con la finalidad de entender, tratar, organizar o dar sentido a la percepción de una situación problemática.

Pero no es posible observar directamente en un estudiante ningún esquema ni sus objetos o sus procesos. Solamente podemos inferir los esquemas desde las observaciones de las producciones de los estudiantes en situaciones problemáticas cuando están buscando una solución o cuando tratan de comprender un determinado fenómeno. Es en estos actos de reconocimiento y de resolución de problemas, de plantearse nuevas preguntas o creando nuevos problemas donde los estudiantes construyen nuevos conocimientos matemáticos. Esta es la forma en que se presenta la abstracción reflexiva, y si un estudiante tiene éxito, Dubinsky (1991) afirma que el problema ha sido asimilado por el esquema. En caso contrario, si el estudiante no tiene éxito, en condiciones favorables, su esquema se debe acomodar (accommodated) para manejar el nuevo fenómeno. Para Dubinsky un esquema es una colección de acciones, procesos, objetos, y otros esquemas (referidos a tipos de construcciones mentales).

En este modelo teórico hay dos ideas fundamentales que han sido referidas en la definición de esquema por Dubinsky (1991): *las construcciones mentales* (formas de conocer) y los *mecanismos* (actos cognitivos) mediante los que los estudiantes realizan las construcciones mentales.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.2.1.1.Las construcciones mentales

Las construcciones mentales caracterizadas por el grupo RUMEC (**R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity) son: acciones, procesos, objetos y esquemas. La teoría APOS corresponde a las iniciales en inglés de **A**cción, **P**rocesos, **O**bjetos y **S**chemas. Las construcciones mentales caracterizadas por Asiala et al. (1996) lo fueron de la siguiente forma:

- **Acción**

  Una acción es una transformación de objetos que el estudiante percibe como algo externo a él. Es decir, el estudiante cuya comprensión de una transformación se limita a una concepción de acción puede realizar la transformación solamente reaccionando a causas externas que le den detalles precisos sobre los pasos que se tienen que dar.

Esta característica implica, para Cottrill et al. (1996), que un estudiante tiene una concepción de *acción* de límite cuando una variable aproximándose a una cantidad fija, cuando no puede ir más allá de calcular un número finito de valores de la función en puntos cercanos a, *a*. La distinción entre preconcepción y acción se da cuando el estudiante solo es capaz de evaluar un único valor antes de concluir cual es el límite.

- **Proceso**

Cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella puede ser interiorizada en un proceso. Se produce una construcción interna que realiza la misma acción, pero ahora no está dirigida necesariamente por un estimulo externo. Un estudiante que ha construido un proceso puede reflexionar sobre él, describirlo, o reinvertir los pasos del proceso sin necesidad de volver a realizarlos. En contraste con una acción, un proceso es percibido por la persona como interno, y bajo su control, lo contrario de algo que se hace como respuesta a una causa externa.

Esta concepción implica, según Cottrill et al. (1996), que cuando un estudiante realiza un cálculo que incluye un número infinito de operaciones, ha interiorizado las acciones y su comprensión es de proceso.

- **Objeto**

Cuando una persona reflexiona sobre operaciones que se aplican a un proceso particular, toma conciencia del proceso como una totalidad, realiza transformaciones (ya sean acciones o procesos) que puedan actuar sobre él, y puede construir esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

Esta concepción implica, según Cottrill et al. (1996), que un estudiante tiene una concepción de *objeto* de límite cuando piensa en el límite en un punto de la suma de dos funciones como objetos, forma la suma coordinando los procesos de las dos funciones y encapsula el proceso resultante para obtener el límite de la función suma.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- **Esquema**

  Una colección de procesos y objetos pueden organizarse de una manera estructurada para formar un esquema. Estructurada en el sentido de proveer al estudiante con una forma de decidir qué estructura mental utilizar cuando trata con situaciones matemáticas problemáticas.

2.2.1.2. Los mecanismos

Dubinsky (1991) consideró seis tipos de abstracción reflexiva que permitían realizar las construcciones mentales. Estos seis tipos de abstracciones reflexivas o mecanismos son: la interiorización, la coordinación, la inversión, la generalización, la encapsulación, la desencapsulación, y la tematización (Figura 2.1).

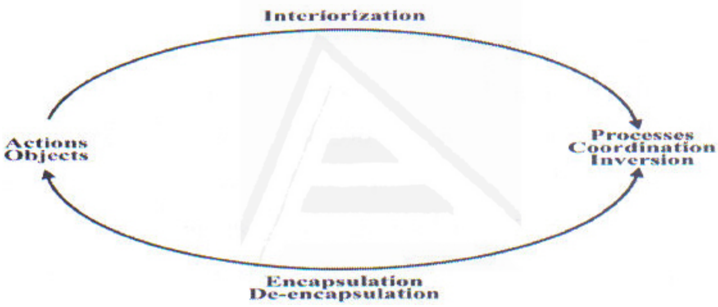


Figura 2.1. Esquema del marco teórico APOS según Dubinsky (1991)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- **Interiorización**

  Es la construcción mental de un proceso mediante una serie de acciones sobre objetos cognitivos. Las acciones son interiorizadas en un proceso. Dubinsky (1991) considera que cuando un estudiante que ha interiorizado la acción de derivar una función y es capaz de derivar muchas funciones usando diferentes técnicas, puede ser capaz de revertir el camino y resolver problemas en los cuales partiendo de una función se desea encontrar funciones cuya derivada sea la función original.

- **Coordinación**

  La coordinación es un acto cognitivo consistente en tomar dos o más procesos para construir un nuevo proceso. Este nuevo proceso puede ser encapsulado como un objeto.

- **Inversión**

  Cuando el proceso existe internamente, el estudiante es capaz de pensarlo de forma inversa (en el sentido de deshacerlo), con la creación de un nuevo proceso consistente en el inverso del proceso inicial. Para Dubinsky (1991), ejemplos de inversiones serian la resta y la división. La inversión permite obtener información gráfica sobre funciones a partir de información dada analíticamente sobre el límite.

- **Generalización**

  Cuando un estudiante utiliza un esquema en contextos diferentes a aquellos en los que previamente los utilizaba. Según Dubinsky (1991) se produce la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva. Cuando un estudiante utiliza el esquema de la factorización de números enteros, puede generalizar dicho esquema para factorizar polinomios.

- **Encapsulación, desencapsulación**

  Es la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo. Este objeto cognitivo puede ser considerado como un objeto (físico o mental) y a su vez ser transformado por acciones y procesos. En este caso decimos que el proceso inicial ha sido encapsulado en un objeto. Dubinsky (1991) considera como proceso el cálculo del área bajo un curva, y variar el límite superior para obtener una función sería el objeto cognitivo. Los estudiantes que son capaces de realizar dicha construcción mental, han encapsulado el proceso en un objeto. La complejidad de este proceso puede explicar las dificultades de los estudiantes con el teorema fundamental del cálculo. La desencapsulación es la construcción mental que permite retroceder desde el objeto cognitivo al proceso.

- **Tematización**

  La tematización de un esquema se refiere a que es posible actuar sobre dicho esquema para poder diseccionarlo, desglosarlo, examinar sus partes, reconstruirlo, y ejecutarlo como un objeto, y disponer de él en situaciones problemáticas apropiadas (Cooley, Trigueros y Baker, 2007). Cuando el esquema es tematizado se construyen otra clase de objetos, que pueden ser des-tematizados para obtener el contenido del esquema original.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

2.2.1.3.La descomposición genética

Desde la teoría APOS, el desarrollo de la comprensión de un objeto matemático puede explicarse desde las acciones, los procesos, los objetos y los esquemas que desarrollan los estudiantes. Las descomposiciones genéticas de un concepto son descripciones hipotéticas, basadas en datos empíricos, de la forma en que es posible que se construyan los conceptos matemáticos. No se sugiere que el concepto matemático tenga una única descomposición genética, sino que es la forma en que un estudiante puede aprenderla (Dubinsky, 1991).

La finalidad del análisis teórico de un concepto es proponer un modelo de cognición, es decir, una descripción de las construcciones mentales específicas que puede que un estudiante haga a fin de desarrollar su comprensión del concepto. Nos referiremos al resultado del análisis como a *la descomposición genética del concepto* (Asiala et al., 1996), y la definen como "*un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo el concepto se desarrolla en la mente de un estudiante*" (p.7). El análisis inicial se hace para aplicar una teoría general de aprendizaje y está influenciada por la compresión que los investigadores tienen del propio concepto, y por su experiencia previa en la enseñanza y el aprendizaje. También indican que los datos de una investigación pueden revisar incluyendo cambios, o incluso pueden rechazar, la descomposición genética inicialmente propuesta para un concepto.

La descomposición genética inicial dirige el análisis de los datos preguntándose, en la medida de sus posibilidades, cuáles de las construcciones mentales propuestas son de hecho realizadas por los estudiantes. Es el análisis de los datos el que indica si se necesitan cambios en la descomposición genética, y qué tipos de cambios son los necesarios (Clark et al., 1997), y ponen como ejemplo de revisión su investigación sobre la construcción del esquema de la regla de la cadena.

En el mismo sentido, Dubinsky (2000) indicó que "*los resultados proporcionaron un fuerte apoyo a nuestro paradigma de investigaciones, a nuestra perspectiva teórica y a nuestro acercamiento pedagógico. En muchos casos, la teoría APOS se probaba como una herramienta eficaz para describir y explicar el desarrollo de un concepto en la mente de los estudiantes. En varios casos el análisis de los datos nos condujo a revisar nuestra descripción teórica de dicho desarrollo. Incluso hubo, al* *menos un ejemplo, de esquemas, en nuestras investigaciones, que nos condujo a revisar la teoría APOS.*" (p. 68). Cottrill et al. (1996) plantean una descomposición genética del concepto de límite de una función mediante un análisis de la manera en que posiblemente los estudiantes podrían construir dicho concepto. Su descomposición genética revisada es:

1. La acción de evaluar f en un solo punto x que es considerado cercano, o a veces igual a a.

2. La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, estos puntos de forma sucesiva están cada vez más próximos a a.

3. Construcción de un esquema de coordinación como:

   a. Interiorización de la acción del Nivel 2 para construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a.

   b. Construcción de un proceso en el rango en el cual y se aproxime a L.

   c. Coordinación de (a), (b), mediante f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose a a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L.

4. Reconstruir el proceso de coordinación en términos de intervalos y de desigualdades. Esto se hace introduciendo estimaciones numéricas de la cercanía de las aproximaciones, en símbolos, $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$.

5. Aplicar el esquema de los cuantificadores para reconstruir el proceso de los niveles anteriores para obtener la definición formal de límite.

La descomposición genética del concepto de límite permite identificar las formas de conocer y los mecanismos que muestran los estudiantes del desarrollo del esquema de límite de una función.

En nuestra investigación nos planteamos una descomposición genética (Tabla 2.1) formada por los tres primeros apartados de la descomposición genética propuesta por Cottrill et al. (1996), la adaptación de su cuarto apartado como coordinación métrica en términos de desigualdades y un nuevo apartado sobre la formalización del concepto.

Tabla 2.1. Mecanismos cognitivos que configuran la Descomposición Genética de límite de una función propuesta

- Sea *f* una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$.
- Idea de aproximación
    - *x* se aproxima al número *a*.
    - *f(x)* se aproxima a *L*.
- Coordinación en la concepción dinámica: cuando *x* se aproxima al número *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L*.
- Coordinación en la concepción métrica: si se puede encontrar para cada ocasión *un x suficientemente cerca de a* tal que el valor de *f(x) sea tan próximo a L* como se desee.
- Formalización como una manifestación de la existencia del límite *L* de la función *f(x)* en el punto *a*, $\text{lím } f(x) = L$.

2.2.2. El desarrollo de un esquema en la teoría APOS

Diferentes trabajos de investigación han utilizado la Teoría APOS como marco teórico para analizar la comprensión que los estudiantes tienen de diferentes conceptos matemáticos. El desarrollo de un esquema mediante la tríada piagetiana ha sido y es una forma útil de caracterizar la construcción y el desarrollo de los esquemas de conceptos matemáticos tal como se muestra en distintas investigaciones. Por ejemplo, sobre la regla de la cadena (Clark et al., 1997); sobre las propiedades de la gráfica de la función (Baker, Cooley y Trigueros, 2000); sobre la derivada (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006); sobre la divisibilidad (Bodí, 2006); y sobre la integral definida (Boigues, Llinares y Estruch, 2010).

- *Esquema de la regla de la cadena*

Para analizar la comprensión que tenían 41 estudiante de primer curso de Cálculo, Clark y sus colaboradores (1997) propusieron una descomposición genética compuesta de tres tipos de esquemas. En ellos describían la forma en la que los estudiantes podían llegar a comprender como proceso el esquema de función, de composición de funciones y el de diferenciación y cómo debían coordinarse estos tres esquemas para definir la regla de la cadena. La coordinación consistía en reconocer en primer lugar una función como composición de dos funciones y después derivarlas de forma separada en dos puntos. En el punto *x* para la función *g* y en el punto *g(x)* para la función *f,* y después multiplicar dichos valores Finalmente cómo podían reconocer y aplicar la regla de la cadena en situaciones específicas. Clark et al. (1997) caracterizaron los tres niveles de desarrollo del esquema de la regla de la cadena de la siguiente forma:

- Nivel INTRA: el estudiante "*tiene una colección de reglas para encontrar derivadas incluyendo algunos casos especiales de la regla de la cadena como la potenciación y puede que la regla general, pero no reconoce la relación entre ellas*", (p. 354). Por tanto, el estudiante se centra en un único objeto, asilado de otras acciones, procesos u objetos.
- Nivel INTER: "*la habilidad del estudiante empieza a acumular todos los casos diferentes y a reconocer que están relacionados de alguna forma. La colección de elementos de la regla de la cadena se estaría formando, y en este nivel la colección sería un preesquema*" (p. 354). En consecuencia, el estudiante reorganiza las relaciones entre diferentes acciones, procesos, objetos y/o esquemas.
- Nivel TRANS. el estudiante "*puede construir la estructura subyacente de la regla de la cadena enlazando la composición de funciones y la diferenciación. Pueden reconocer diversas instancias de la regla de la cadena vinculadas a que sigan la misma regla general que la composición de funciones. Los elementos del esquema pueden ser descritos por una lista o ser descritos por una simple regla*" (p. 354), en definitiva, el estudiante construye una estructura coherente a través de las relaciones descubiertas en el nivel Inter de desarrollo.

La caracterización de los distintos niveles y el paso de uno a otro está basada en la clase de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que forman parte de la regla de la cadena (esquema de función, esquema de composición de funciones y el esquema de diferenciación).

- *Esquema de las propiedades gráficas de una función y su derivada*

Por otra parte, Baker et al. (2000) caracterizaron el esquema de las propiedades de la gráfica de la función a partir de dos componentes: el desarrollo del esquema de las propiedades y el desarrollo del esquema de los intervalos, es decir, los diferentes niveles

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

de habilidad para coordinar (a) las propiedades de la gráfica de la función dadas por las condiciones, y (b) las propiedades de la gráfica de la función en intervalos contiguos, caracterizando los niveles de desarrollo del esquema de las propiedades de la gráfica de la función como sigue:

- Nivel INTRA: "*el estudiante puede interpretar una condición aislada y relacionarla con la propiedad gráfica de una función. Es característico de este nivel que un estudiante utilice solamente la condición de la primera derivada y a menudo sea consciente de otras propiedades pero no puede coordinarlas representando la gráfica de la función. Si dos propiedades se solapan, el estudiante describe el comportamiento de la gráfica usando solamente una de ellas. Si él o ella intentan utilizar más de una propiedad, el estudiante no puede completar su descripción y recurre al uso de una propiedad solamente*" (p. 559). Es decir, se analizan casos particulares u objetos en términos de sus propiedades. En este nivel las explicaciones son locales y particulares. Un objeto, en el nivel intra, no es reconocido por el aprendiz como necesario, y su forma es similar a la de una simple generalización.
- Nivel INTER: "*el estudiante empieza a coordinar de forma simultánea dos o más condiciones. Sin embargo, esta coordinación no se aplica a lo largo de todo el solapamiento de condiciones*" (p. 559). En este nivel el uso, la comparación y la reflexión del estudiante sobre ideas aisladas le lleva a construir relaciones y transformaciones, siendo consciente de las relaciones presentes y pudiendo deducir a partir de la operación inicial, una vez que esto es entendido, otras operaciones que estén implicadas en ella o que puedan coordinarse con operaciones similares.
- Nivel TRANS: el estudiante "*puede coordinar todas las condiciones analíticas de las propiedades gráficas de una función en un intervalo. En este punto, el estudiante expresa o demuestra su coherencia del esquema. Es decir, el estudiante reconoce que comportamientos de la función pueden ser incluidos en la representación gráfica, y cuáles no*" (p. 559). Los estudiantes de este nivel, mediante la síntesis de las transformaciones del nivel inter, toman conciencia de la completitud del esquema pudiendo percibir propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles.

Lo que caracteriza los distintos niveles descritos y el paso de uno a otro es el tipo de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que forman parte del esquema de las propiedades de la gráfica de la función.

- *Esquema de derivada*

La tríada también fue utilizada por Sánchez-Matamoros et al. (2006) para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de la derivada. Caracterización que se describe a continuación:

- Nivel INTRA: los estudiantes situados en este nivel podían "*usar los elementos matemáticos para inferir informaciones o para interpretar la situación dada, pero no establecen ninguna relación entre dichos elementos. Suelen usar algunos elementos matemáticos (pocos) de forma correcta y, generalmente, vinculados a un modo de representación*" (p. 91). Un comportamiento característico de los estudiantes era que no podían identificar cuál era el significado de derivada en un punto, ni como límite del cociente incremental (TVI), ni como pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.
- Nivel INTER: la característica principal de este nivel de desarrollo es que los estudiantes "*empiezan a establecer relaciones entre los elementos matemáticos. Un aspecto característico de este nivel es que los estudiantes sólo son capaces de establecer relaciones entre elementos para inferir nueva información en determinados casos*" (p. 93). Un comportamiento característico de los estudiantes eran las dificultades para identificar los puntos de inflexión en una tarea dada en forma gráfica. Sin embargo en una tarea dada en forma analítica relaciona mediante la "*y lógica*", los elementos matemáticos que relacionan el signo de *f'* con el crecimiento de *f*, y el signo de *f''* con la concavidad de *f*, y el elemento que relaciona los puntos en los que *f'* se anula con la existencia de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.
- Nivel TRANS: la característica de este nivel es que los estudiantes "*son capaces de establecer diferentes relaciones entre los elementos de esquema sin demasiadas restricciones y estableciendo la síntesis"* (p. 94). Sánchez-Matamoros et al. (2006) consideraron que "*la manera en que un estudiante pasa*

de un nivel de desarrollo del esquema de derivada al siguiente viene caracterizado por la forma en la que realiza la síntesis de los modos de representación", entendiendo el significado de síntesis "*como una actividad mental del estudiante que no está vinculado en sí mismo a la cantidad de "elementos" que conoce sobre la noción de derivada, sino en función del tipo de información que los estudiantes son capaces de generar a partir de lo que conocen para intentar resolver el problema que se les presenta*" (p. 96).

Nuevamente, el tipo de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos, que en este caso forman parte del esquema de derivada, es lo que ha permitido caracterizar los distintos niveles y en lo que se basa el paso de un nivel a otro.

- *Esquema de la divisiblidad en N^**

El uso que hacían 371 estudiantes, distribuidos en los tres ciclos de enseñanza secundaria, de los modos de representación (decimal o factorial) de los números naturales para determinar múltiplos o divisores, cómo coordinaban los criterios de divisibilidad para discernir si un número era divisible o no por otro, o cómo calculaban el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en distintas situaciones contextuales fueron utilizados por Bodí (2006) para caracterizar el grado de desarrollo del esquema de divisibilidad tal como se describe a continuación:

- Nivel INTRA: los estudiantes suelen "*desconocer o usar los elementos matemáticos múltiplo y divisor de manera inconexa o errónea sin establecer relaciones entre las diferentes acepciones; establecer relaciones condicionales entre las operaciones de multiplicar y dividir; usar parcialmente las relaciones: a es divisor de b ↔ b es múltiplo de a ↔ b es divisible entre a ↔ a es un factor de b, sólo cuando los números están expresados en la representación decimal; desconocer los elementos mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos números o usar de forma mecánica los algoritmos de cálculo de estos elementos"* (p. 222).
- Nivel INTER: los estudiantes pueden "*usar correctamente los elementos matemáticos múltiplo y divisor de un número natural y establecer relaciones entre las diferentes acepciones; vincular los elementos ser divisible, múltiplo y*

divisor a la representación factorial del número, siendo capaces de establecer que un número es múltiplo de sus factores primos pero no todos sus factores compuestos. Esta característica está vinculada a la dificultad en reconocer la unicidad de la descomposición en factores de un número natural; utilizar los criterios elementales de divisibilidad (por 2, por 3 y por 5) y, en algunos casos, poder coordinar dos criterios; y usar adecuadamente algunos de los algoritmos de obtención de los elementos matemáticos mínimo común múltiplo y máximo común divisor y aplicarlos en contextos de situaciones reales" (p. 230).

- Nivel TRANS: los estudiantes son capaces de "*emplear con coherencia los elementos matemáticos de divisibilidad, estableciendo relaciones entre ellos, independientemente del modo de representación, asumiendo la unicidad de la descomposición en factores primos de los números; aplicar distintos criterios de divisibilidad y coordinarlos para obtener nuevas informaciones; y usar los diferentes algoritmos de obtención de los elementos matemáticos máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números, aplicándolos en contextos reales y empezando a establecer alguna relación entre ellos"* (p. 240).

- *Esquema de la integral*

Boigues et al. (2010) para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de la integral definida utilizaron la triada y una métrica fuzzy o borrosa que les permitió una caracterización más precisa de los niveles de desarrollo. La lógica fuzzy permitió conocer, a través de la función de pertenencia- asignación a cada elemento de un universo de referencia un valor en el intervalo [0, 1] (Conjunto fuzzy)-, en qué medida un estudiante había desarrollado el esquema de integral definida, teniendo en cuenta la manera en que el estudiante había resuelto una colección de problemas. En su propuesta de descomposición genética de la integral definida consideraron tres esquemas: el de partición de un intervalo [a,b], el de sumas de Riemann para una función continua *f(x)* en un intervalo real [a,b] y con una partición, y el de la integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Boigues et al. (2010) caracterizaron los niveles de desarrollo del esquema de integral definida de la siguiente forma:

- Nivel INTRA: los estudiantes suelen "*usar la idea de sucesión ó de límite de una sucesión, siendo capaz de identificar la suma de Riemann a nivel gráfico y* *analítico pero teniendo ciertas dificultades para construir la sucesión de sumas de Riemann y aplicar la idea de límite de una sucesión de sumas de Riemann y poder asignarle un valor al área bajo una curva"* (p. 20).

- Nivel INTER: un estudiante empieza a "*establecer algún tipo de relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el área bajo la curva de la función, habiendo manifestaciones de la construcción de la idea de integral definida como área bajo la curva de la función a partir de la idea de límite de una sucesión de sumas de Riemann"* (p. 20).
- Nivel TRANS: los estudiantes fueron capaces de "*construir todos los elementos del esquema de suma de Riemann y establecer dos relaciones: (1) relacionar analítica y gráficamente la idea de partición de un intervalo cualquiera, (2) relacionar analítica y gráficamente la obtención de la suma de las áreas de los rectángulos para un intervalo y una partición cualquiera"* (p. 21). Son estudiantes que durante la resolución muestran la vinculación entre el área bajo la curva y el límite de una sucesión de sumas de Riemann, o su aproximación a través de una sucesión de sumas de Riemann.

La caracterización de los niveles de desarrollo del esquema de la integral definida está fundamentada en el tipo de relaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que forman parte de la integral definida (esquema de partición, esquema de sumas de Riemann para un función continua y el esquema de integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann).

- *A modo de síntesis*

A partir de las anteriores investigaciones podemos observar que en todas ellas se mencionan el tipo de relaciones lógicas o de coordinación cognitiva (coordinación de dos esquemas o elementos matemáticos) que los estudiantes pueden establecer entre los elementos matemáticos con la finalidad de construir la estructura subyacente del esquema considerado (Tabla 2.2.).

Tabla 2.2. Elementos matemáticos y relaciones considerados en distintos esquemas

Elementos matemáticos	**Relaciones**	**Investigaciones**
• función • composición de funciones • derivada	• coordinación cognitiva	Clark et al. (1997)
• límite de una función • continuidad de una función • condiciones analíticas 1ª y 2ª derivada	• coordinación cognitiva	Baker et al. (2000)
• recta tangente a la curva en un punto • derivada en un punto como límite de la tasa de variación media • condiciones para que una función tenga un extremo relativo o un punto de inflexión • condiciones para que una función sea creciente, decreciente o constante • condiciones de concavidad y convexidad	• conjunción lógica • contrarrecíproco • equivalencia lógica	Sánchez-Matamoros et al. (2006)
• divisor, múltiplo y divisible • máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números (modos de representación: decimal y factorial)	• bicondicional • conjunción lógica • condicional • contrarrecíproca	Bodí (2006)
• partición de un intervalo real cerrado • sumas de Riemann para una función continua en un intervalo real con una partición • integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann	• coordinación cognitiva	Boigues et al. (2010)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Vistas globalmente las caracterizaciones que hemos presentado en los párrafos anteriores del desarrollo de un esquema a través de los niveles Intra, Inter, Trans, podemos afirmar que para caracterizar los distintos niveles de desarrollo del esquema de cualquier concepto debemos centrar nuestra atención en

– el "*tipo de relaciones*" que son capaces de establecer entre
– los "*elementos matemáticos*" del concepto matemático comprendidos de una manera determinada (acción, proceso, objeto)

2.2.3. El mecanismo de la tríada para describir el desarrollo del esquema de límite de una función real

A la información obtenida en el apartado anterior sobre los aspectos que se han tenido en cuenta para caracterizar los distintos niveles de desarrollo del esquema de un determinado concepto, elementos matemáticos y relaciones, vamos a considerar la información procedente de las investigaciones relativas a la construcción del significado de límite de una función presentadas en el capítulo 1. Estas investigaciones han aportado información sobre la influencia de las distintas representaciones en la comprensión del concepto. Por tanto, consideramos que en nuestro estudio debemos basar el desarrollo del esquema de límite de una función en tres aspectos: los elementos matemáticos, las relaciones entre ellos y los modos de representación.

Los elementos matemáticos, entendidos como producto de una disociación o de una segregación en el interior del concepto o la noción matemática (Piaget, 1963), están fundamentados en las cuatro construcciones mentales que conforman la descomposición genética del significado del límite de una función (concepción dinámica y métrica) que hemos generado a partir de la de Cottrill et al. (1996).

La concepción dinámica de límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual ***x*** **se aproxima a** ***a***, construir otro proceso en el rango en el cual ***f(x)*** **se aproxima a** ***L*** y utilizar la **función** para **coordinarlos**. Por tanto, de esta noción matemática podemos segregar los siguientes elementos matemáticos:

a) idea de función (definición de Cauchy (1821))

b) idea de aproximación, al ser el primer encuentro que los estudiantes tienen con el concepto de límite a través de la noción dinámica (Cornu, 1991), y por sus motivaciones históricas (Oehrtman, 2009)

c) coordinación de los dos procesos de aproximación en el dominio y en el rango (Cottrill et al, 1996; Blázques y Ortega, 2001),

En idéntico sentido hemos considerado como concepción métrica en términos de desigualdades aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x–a$ en valor absoluto se aproxima a 0, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x –L$ en valor absoluto se aproxima a 0, y coordinarlos. En este caso el elemento matemático segregado es la coordinación métrica (coordinación en términos de desigualdades).

En consecuencia, los elementos que hemos tenido en cuenta en esta investigación son:

a. la idea de función,

b. la aproximación numérica,

c. la coordinación dinámica (la coordinación de la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango),

d. la coordinación métrica (coordinación en términos de desigualdades).

e. la manifestación formal del límite

Respecto a los modos de representación, hemos considerado el modo gráfico, el algebraico-numérico y el numérico dado que la noción de límite en sus elementos constituyentes tiene componentes gráficas, algebraicas y numéricas tal como se ha mostrado en las investigaciones presentadas en el capítulo 1.

Por último, las relaciones que debemos considerar en el esquema de límite de una función en un punto son: la coincidencia y no coincidencia de las aproximaciones laterales y la coordinación cognitiva, entendida de la siguiente forma:

- Coincidencia de las aproximaciones laterales entendida como la relación que se da entre los elementos matemáticos (aproximación numérica, coordinación dinámica y manifestación formal del límite) al diferenciar que tanto por la izquierda como por la derecha las aproximaciones laterales son las mismas.
- No coincidencia de las aproximaciones laterales entendida como la relación que

se da entre los elementos matemáticos (aproximación numérica y coordinación dinámica) al diferenciar que tanto por la izquierda como por la derecha las aproximaciones laterales no son las mismas.

- Coordinación cognitiva entendida como la relación que se da entre la aproximación en el dominio con la aproximación en el rango.

Por tanto, la caracterización general del desarrollo del esquema de límite de una función deberá estar en función de los elementos matemáticos, las relaciones de coincidencia y no coincidencia establecidas entre ellos, y los diferentes modos de representación tal como se indica a continuación:

- **Nivel INTRA**: No se establecen relaciones entre los elementos.
- **Nivel INTER**: Se establecen relaciones entre los elementos pero con limitaciones en relación a los modos de representación.
- **Nivel TRANS**: En este nivel se establecen relaciones sin que los modos de representación sea un obstáculo para ello.

2.2.4. La tematización de un esquema

Como ya hemos dicho anteriormente, para Piaget y García (1982) las nociones abstractas de las matemáticas al principio fueron utilizadas de forma instrumental, la reflexión y la toma de conciencia de las mismas es un proceso mediante el cual partiendo de una noción matemática concreta se construye un concepto. El paso de la utilización implícita a la conceptualización es lo que los autores denominan "*tematización*".

Para Clark y colaboradores (1997) un esquema puede ser tematizado para convertirse en otra clase de objeto cognitivo al que se le pueden aplicar acciones y procesos. Cuando se es consciente de desempaquetar un esquema es posible obtener los procesos, u objetos originales sobre los que se construyó el esquema. Para Cooley, Trigueros y Baker (2007) la tematización de un esquema se refiere a una construcción mental de un esquema que puede ser diseccionado, desglosado, examinado por sus partes, reconstruido, y ejecutado como un objeto, y se dispone en situaciones apropiadas. Por otra parte, García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2010) sugieren que los dos sentidos de la abstracción reflexiva (la proyección y la reorientación y reconstrucción) que constituyen la tematización de un esquema así como la construcción de nuevas estructuras matemáticas, vienen determinadas por las relaciones que los estudiantes de forma consciente son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático.

Desde el marco teórico especificado, APOS, relativo al desarrollo de un esquema estamos en condiciones de formular las preguntas de la investigación que queremos acometer.

2.3.Preguntas de investigación

Los objetivos planteados en esta investigación van dirigidos a profundizar en la comprensión que los estudiantes de enseñanza postobligatoria tienen del concepto de límite de una función.

Concretando, las preguntas a las que pretendemos dar respuesta en este trabajo son:

- ¿Cómo podemos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función en un punto?
- ¿Cómo se da el paso de un nivel de desarrollo al siguiente?
- ¿Qué papel desempeña la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango en la construcción de la relación entre la concepción dinámica y métrica del límite?
- ¿Cómo influyen las distintas representaciones en la comprensión de la concepción dinámica de límite de una función?
- ¿Cómo podemos caracterizar los diferentes momentos de la tematización del esquema de límite de una función?

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el diseño de la investigación llevada a cabo. En primer lugar, indicaremos quiénes son los participantes. En segundo lugar, cómo diseñamos los instrumentos de recogida de datos teniendo en cuenta los elementos matemáticos que favorecen la comprensión del concepto de límite de una función; presentaremos las tareas que componen el cuestionario teniendo en cuenta los objetivos que se persiguen en cada uno de los ítems y el modo de representación del enunciado. Finalmente, presentaremos el proceso de análisis de los datos que realizamos en tres fases: la evaluación de las respuestas de los estudiantes; el análisis cualitativo y el análisis estadístico implicativo.

3.1. Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación han sido 129 estudiantes de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, durante el curso 2010/11. De ellos, 66 eran estudiantes de primer curso, y 63 eran estudiantes de segundo curso.

Los estudiantes participantes provienen de siete institutos públicos de los municipios de Mutxamel (2), Sant Joan (1), El Campello (2), Sant Vicent del Raspeig

(2). Todos estos centros están aproximadamente a unos 10 kilómetros de la ciudad de Alicante. Los estudiantes no reúnen ninguna característica especial y su participación fue voluntaria. El nexo de unión entre los centros radica en la relación personal que el autor de la memoria, y profesor en el Instituto de Educación Secundaria Mutxamel, tiene con el profesorado de Matemáticas de dichos centros.

Para todos los estudiantes participantes, las Matemáticas son una asignatura obligatoria. Sin embargo solo una parte de los estudiantes de 1º eligen la asignatura de Matemáticas en 2º curso. A los estudiantes de 1º de Bachillerato se les había introducido la noción de límite de una función en un punto dos semanas antes de contestar el cuestionario y a los de 2º de Bachillerato seis meses antes de que realizaran el cuestionario.

La finalidad de esta elección se basó en el interés por observar el desarrollo del pensamiento en estudiantes de primero de bachillerato de "*la aproximación al concepto de límite*" dos semanas después de haber recibido instrucción sobre dicho concepto y, por otra parte, observar el desarrollo del pensamiento en estudiantes de segundo de bachillerato, seis meses después de haber recibido la instrucción, y habiendo tenido durante ese tiempo las vacaciones del verano. Las características de la muestra nos aseguraban tener un amplio rango de respuestas a las tareas del cuestionario que nos permitirían identificar diferentes momentos en el proceso de construcción del significado de límite.

3.2. Instrumentos de recogida de datos

La elaboración de los instrumentos de recogida de datos (cuestionario y entrevista) se llevó a cabo en tres etapas:

a. En la primera etapa –curso 2009/10 durante la obtención del DEA (Diploma de Estudios Avanzados) por el doctorando– se analizó la noción de límite de una función desde la perspectiva de qué elementos matemáticos se consideraban necesarios para la comprensión del concepto (Tabla 3.1). Posteriormente se elaboró un cuestionario con siete tareas, que fueron resueltas por 63 estudiantes de 2º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, de cuyo resultado y carencias detectadas se dio cuenta en la memoria final del Curso de doctorado DEA en un

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

artículo publicado en la revista Enseñanza de las Ciencias (Valls, Pons y Llinares, 2011) y en una comunicación realizada en el PME 35 (Pons, Valls y Llinares, 2011).

Tabla 3.1. Elementos matemáticos y mecanismos cognitivos considerados en la descomposición genética de límite de una función propuesta

- Sea *f* una función y x_0 un número real. El valor de la función *f* en $x=x_0$, $f(x_0)$, (E0)
- Idea de aproximación
  - *x* se aproxima al número *a* (E1)
  - *f(x)* se aproxima a *L* (E1)
- Coordinación en la concepción dinámica: cuando *x* se aproxima al número *a*, sus imágenes *f(x)* se aproximan a *L* (E2)
- Coordinación en la concepción métrica: si se puede encontrar para cada ocasión *un x suficientemente cerca de a* tal que el valor de *f(x) sea tan próximo a L* como se desee (E4)
- Formalización como una manifestación de la existencia del límite *L* de la función *f(x)* en el punto *a*, *lím f(x)=L* (E3)

b. En la segunda etapa –curso 2010/2011– se revisó el cuestionario piloto, así como los artículos publicados en las revistas de investigación de didáctica de la matemática relacionados con la comprensión del límite, y realizamos una consulta de diferentes libros de texto de primero y segundo de bachillerato.

Teniendo en cuenta nuestra hipótesis de partida –la construcción del concepto de límite de una función en un punto se realiza de forma gradual tal como muestra la descomposición genética generada y descrita en el capítulo 2– elaboramos una lista de tareas en las que se incorporaron las del primer cuestionario y otras nuevas con el objetivo de aportar información que nos ayudara a comprender la construcción del significado de límite.

Las tareas se presentaron en tres modos diferentes de representación: numérico (N), gráfico (G), y algebraico-numérico (AN). Seguidamente, las tareas fueron resueltas por varios investigadores, aportando información sobre: (a) la forma de presentación de los elementos matemáticos asociados a los diferentes modos de representación, como medios que ayudan a los estudiantes en la comprensión del concepto de límite; (b) la forma en que estaban redactadas y (c) los objetivos que se pretendían alcanzar.

Como conclusión de dicho proceso se elaboró un cuestionario con 10 tareas que se implementó a los alumnos de segundo curso a finales del primer trimestre y a los de primer curso a finales del tercer trimestre del curso 2010/11; en ambos casos con una duración entre 45 y 75 minutos (ver anexo 1, pp. 1-11).

c. En la tercera etapa –curso 2010/2011– se seleccionaron 21 estudiantes (11 estudiantes de primero y 10 de segundo de bachillerato) para entrevistarlos a fin de profundizar en los aspectos que podían determinar la comprensión que tenían estos estudiantes del concepto de límite de una función en un punto.

En la elección de los estudiantes que íbamos a entrevistar se tuvieron en cuenta dos variables una organizativa y la otra relacionada con las respuestas que los estudiantes habían dado a las tareas del cuestionario. Organizativamente se tuvo en cuenta: a) la limitación horaria del investigador debido a su jornada laboral; b) la disponibilidad de los estudiantes; c) el tiempo entre la realización del cuestionario por parte de los estudiantes de primero de bachillerato y el fin del curso; d) el tiempo que disponían los estudiantes de segundo de bachillerato entre la realización del cuestionario y la instrucción sobre la idea de límite y e) la distancia geográfica entre los centros.

Al tener en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes a las tareas del cuestionario elegimos estudiantes cuyas respuestas abarcasen un amplio rango de éxitos (Tabla 3.2):

a) respuestas con errores en las aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes (nivel bajo);
b) respuestas con errores al coordinar las aproximaciones laterales no coincidentes (nivel medio);
c) respuestas adecuadas en la mayoría de las tareas del cuestionario (nivel alto).

Tabla 3.2. Selección de estudiantes entrevistados

Características de los estudiantes seleccionados para las entrevistas		
Niveles de respuesta	**1º de bachillerato**	**2º de bachillerato**
Bajo	3	1
Medio	3	6
Alto	5	3
TOTAL	**11**	**10**

Las entrevistas fueron transcritas y se analizaron junto con las respuestas dadas a las distintas tareas del cuestionario (ver anexo 2, pp. 13-157).

3.2.1. Las tareas del cuestionario

Las tareas del cuestionario tenían distintas características. Para su elaboración nos inspiramos en Blázquez y Ortega (2001), en Przenioslo (2004), en Engler et al. (2007), en Moru (2009), y en Elia et al. (2009); pero las tareas 4 y 9 fueron elaboradas para esta investigación.

Los criterios que se siguieron para la elección definitiva de las distintas tareas del cuestionario fueron los siguientes:

1. Hacer referencia a los elementos matemáticos implicados en la compresión de la concepción dinámica del límite de una función en un punto: idea de función (E0); idea de aproximación numérica (E1) bien en el dominio ($x \rightarrow a$) o bien en el rango ($f(x) \rightarrow L$); coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango (E2); y manifestación de la formalización (E3). Tareas 1, 2, 3, 6, 7, y 8.
2. Hacer referencia a la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4). Tareas 4 y 9.
3. Obtener información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre: el límite en un punto (T5), o el límite en el infinito y el límite infinito (T10) y la gráfica de una función. Están pensadas para observar si los estudiantes han encapsulado la noción dinámica de límite y son capaces de desencapsular dicho proceso revirtiéndolo.
4. Estar presentadas en diferentes modos de representación: numérico (N), gráfico (G), y algebraico-numérico (A-N).

5. Plantear distintas situaciones relacionadas con la lateralidad, es decir que hacen referencia tanto a las aproximaciones laterales coincidentes como a las no coincidentes.

Para presentar las diez tareas se han utilizado tres modos de representación diferentes: 4 tareas en modo numérico (tareas 1, 4, 6, 9), 4 en modo gráfico (tareas 2, 5, 7, 10) y 2 en modo algebraico-numérico (tareas 3, 8).

A continuación pasamos a presentar un análisis pormenorizado de las tareas describiendo las características que conforman el cuestionario y lo que se exige en cada una de ellas a los estudiantes en referencia a los elementos matemáticos considerados. Las tareas las presentaremos agrupadas por el modo de representación usado y examinándolas dentro de cada una de las categorías anteriores.

Las tareas 1 y 6 (Figura 3.1), se presentan en modo numérico y se diferencian en la coincidencia (Tarea 1) o no coincidencia (Tarea 6) de los límites laterales.

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a. ¿A qué número a se aproxima x?

b. ¿A qué número se aproxima la función, f(x)?

c. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

d. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a. ¿A qué número a se aproxima x?

b. ¿A qué número se aproxima la función, f(x)?

c. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

d. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

Figura 3.1. Tareas 1 y 6

Los objetivos de estas tareas son evaluar si los estudiantes:

a) Asocian (o no) la aproximación en el dominio de una secuencia numérica a un número natural, 3 (Tarea 1, ítem a), o 4 (Tarea 6, ítem a) (E1).

b) Asocian (o no) la aproximación en el rango de una secuencia numérica a un número natural, 15 (Tarea 1, ítem b), o por la izquierda a 15.5, y a 14 por la derecha (Tarea 6, ítem a) (E1).

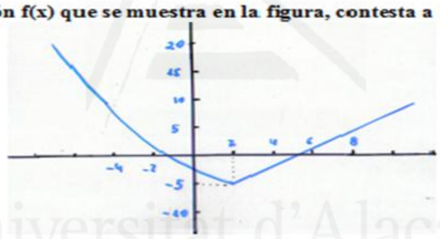
c) Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 3, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 15 (Tarea 1, ítem c) (E2). Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la izquierda, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 15.5, o en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la derecha, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 14 (Tarea 6, ítem c) (E2).

d) Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite, afirmando que cuando *x* tiende a 3, el límite de la función *f(x)* es 15, (Tarea 1, ítem d) (E3). Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite, afirmando que el límite de la función *f(x)* no existe, cuando *x* tiende a 3, o manifiestan la existencia de los límites laterales indicándolos expresamente (Tarea 6, ítem, d) (E3)

Las tareas 2 y 7 (Figura 3.2), se presentan en modo gráfico y se diferencian en la coincidencia (Tarea 2) o no coincidencia (Tarea 7) de los límites laterales

Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a. Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

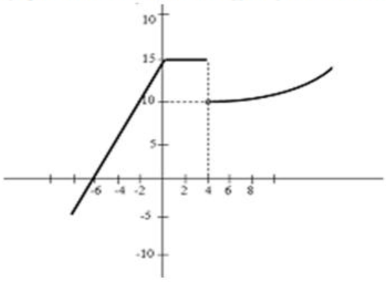
c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál el límite de la función en x = 2

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a. Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación con comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

Figura 3.2. Tareas 2 y 7

Los objetivos de estas tareas son evaluar si los estudiantes:

a) Son capaces de determinar (o no) el valor de la función en un punto. (E0)
b) Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 2 por la izquierda con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a –5 (Tarea 2, ítem b) (E2). Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 15 (Tarea 7, ítem b) (E2).
c) Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 2 por la derecha, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a –5 (Tarea 2, ítem c). Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 por la derecha, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 10 (Tarea 7, ítem c) (E2)
d) Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 2, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a –5 (Tarea 2, ítem d) (E2). Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando x tiende a 4 por la izquierda, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 15, o en el dominio cuando x tiende a 4 por la derecha, con el proceso de aproximación en el rango cuando $f(x)$ tiende a 10 (Tarea 7, ítem d) (E2)
e) Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite afirmando que cuando x tiende a 2, el límite de la función $f(x)$ es –5 (Tarea 2, ítem e) (E3). Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite, afirmando que cuando x tiende a 4, el límite de la función $f(x)$ no existe, o manifiestan la existencia de los límites laterales indicándolos expresamente (Tarea 7, ítem e) (E3)

En ambas tareas evaluaremos las respuestas correctas, pero consideraremos que un estudiante es capaz de coordinar los procesos de aproximación en modo gráfico siempre que realicen dicha coordinación por la izquierda y por la derecha o en el punto. También se debe tener en cuenta que sólo se pregunta a qué se aproxima la función cuando la x toma determinados valores. Por lo tanto, no se plantea la idea de aproximación gráfica, lo que hay es una coordinación de dos aproximaciones.

Las tareas 3 y 8 (Figura 3.3) se presentan en modo algebraico-numérico. Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico porque los datos que necesita el estudiante para responder a la pregunta *b,* están expresados en una tabla. Y se diferencian en la coincidencia (Tarea 3) o no coincidencia (Tarea 8) de los límites laterales.

Tarea 3

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... → ← x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)								

f(x) tiende a .... → ← f(x) tiende a ....

a. **Completa la tabla**
b. **¿A qué número a se aproxima x?**
c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?**
d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**
e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2**

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001 ...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)								

a. **Completa la tabla**
b. **¿A qué número a se aproxima x?**
c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?**
d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**
e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0**

Figura 3.3. Tareas 3 y 8

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Los objetivos de estas tareas son evaluar si los estudiantes:

a) Son capaces de determinar (o no) el valor de la función en más de seis puntos (E0).

b) Asocian (o no) la aproximación en el dominio de una secuencia numérica a un número natural, 2 (Tarea 3, ítem b), o a 0 (Tarea 8, ítem b) (E1)

c) Asocian (o no) el proceso de aproximación en el rango a partir del cual los valores de *f(x)* se aproximan cada vez más a 0.25, o al valor que previamente han calculado (Tarea 3, ítem c) (E1). Asocian (o no) la aproximación en el rango de una secuencia numérica a un número, por la izquierda a 1, y a –3 por la derecha o a los valores que previamente hayan calculado (Tarea 8, ítem c) (E1).

d) Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 2, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende al valor de 0.25, o al valor que previamente hayan calculado (Tarea 3, ítem d) (E2). Coordinan (o no) el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 0 por la izquierda, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 1, o al valor que previamente hayan calculado; o en el dominio cuando *x* tiende a 0 por la derecha, con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a –3, o al valor que previamente hayan calculado (Tarea 8, ítem d) (E2).

e) Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite afirmando que cuando *x* tiende a 2, el límite de la función *f(x)* es 0.25, o al valor que previamente hayan calculado (Tarea 3, ítem e) (E3). Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite, afirmando que cuando *x* tiende a 0, el límite de la función *f(x)* no existe, o manifiestan la existencia de los límites laterales indicándolos expresamente (Tarea 8, ítem d) (E3).

En ambas tareas evaluaremos las respuestas correctamente siempre que, en el caso que los errores en los cálculos de la función, no comporten una modificación de la idea inicial de que las aproximaciones laterales han de ser coincidentes (Tarea 3) o no coincidentes (Tarea 8).

Las tareas 5 y 10 (Figura 3.4) se presentan en modo gráfico. Estas tareas como ya hemos dicho en párrafos anteriores tienen como objetivo principal evaluar si los estudiantes son capaces de *"invertir"* (en el sentido piagetiano de mecanismo de construcción del conocimiento descrito en el capítulo anterior) el significado dado en forma analítica del límite de una función en un punto.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

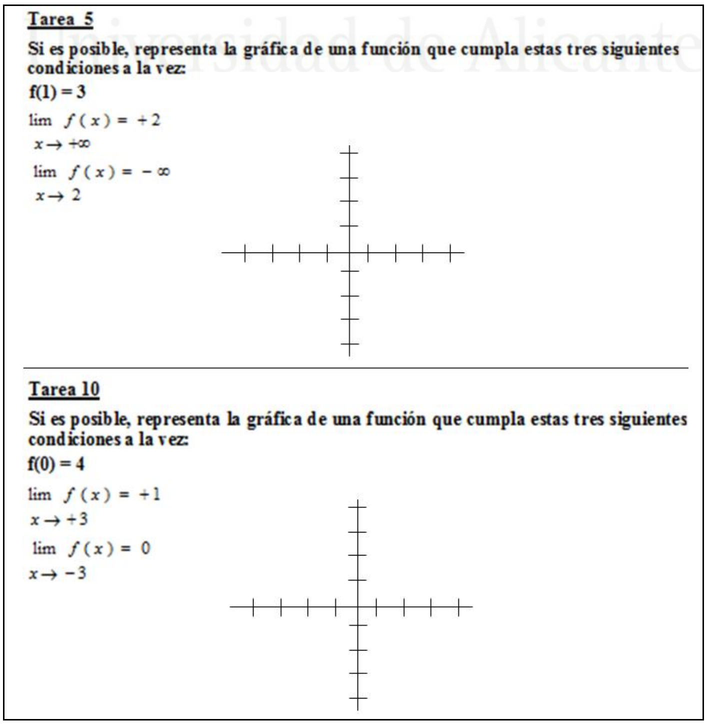


Figura 3.4. Tareas 5 y 10

Su objetivo es evaluar si los estudiantes son capaces de invertir el significado de límite dado de forma analítica coordinando los procesos de aproximación en el dominio con la aproximación en el rango y coordinando las dos inversiones, representando la gráfica de una función que cumpla las tres siguientes condiciones:

1. Representan el valor de la función en un punto (E0).
2. Coordinan los procesos de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a infinito positivo (Tarea 5) o cuando tiende a 3 (Tarea 10), con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 2 (Tarea 5) o cuando *f(x)* tiende a 1 (Tarea 10) (E2).
3. Coordinan el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 2 (Tarea 5) o cuando *x* tiende a –3 (Tarea 10) con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a infinito negativo (Tarea 5) o cuando *f(x)* tiende a 0 (Tarea 10) (E2).

En la tarea 10, para evitar que se confundiera el valor de la función en un punto con el valor del límite de una función, el valor de la función en el punto lo pusimos expresamente entre los dos límites. En ambas tareas evaluaremos conjuntamente la respuesta a los tres apartados, es decir, no los consideraremos individualmente.

Las tareas 4 y 9 (Figura 3.5) se presentan en modo numérico y hacen referencia a la coordinación métrica en términos de desigualdades del límite de una función en un punto.

Su objetivo es evaluar si los estudiantes:

a) Son capaces de reconocer las nuevas sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto entre 0.5 y *x* por una parte y de 1.5 y *f(x)* por otra.
b) Coordinan (o no) las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en el rango en términos de desigualdades, afirmando que los valores de *x* han de estar a 0.0001 de 0,5, o los valores de *x* han de ser mayores que 0.4999 y menores que 0.5001 (Tarea 4); o que los valores de *x* han de estar a 0.0001 de 2.5 por la izquierda, o los valores de *x* han de ser mayores que 2.4999, y que por la derecha la diferencia nunca puede ser menor que 0.001 (Tarea 9) (E4).
c) Manifiestan (o no) formalmente la existencia del límite afirmando que teniendo en cuenta que cuando los valores de las diferencia en valor absoluto entre los valores (a) de *x* y 0.5 se aproximan a 0, los valores de las diferencia en valor absoluto entre los valores de *f(x)* y 1.5 también se aproximan a 0, entonces cuando *x* tiende a 0.5, el límite de la función *f(x)* es 1.5 (Tarea 4); o (b) de *x* y 2.5 se aproximan a 0, los

valores de las diferencia en valor absoluto entre los valores de f(x) y 1.5 también se aproximan a 0 por la izquierda, pero no por la derecha, entonces cuando *x* tiende a 2.5, el límite de la función *f(x)* no existe, o manifiestan la existencia del límite por la izquierda (Tarea 9) (E3).

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

X	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	...	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	...	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
|0,5 - x|	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	...	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
|1,5 - f(x)|	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001?

b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x = 0,5?

Tarea 9

Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido substituyendo valores en una función y ha obtenido las dos primeras columnas de la tabla. Después ha construido dos columnas más de diferencias en valor absoluto

X	f(x)	|2,5 - x|	|3,5 - f(x)|
2,45	3,35000000	0,05	0,15
2,49	3,47000000	0,01	0,03
2,499	3,49700000	0,001	0,003
2,4999	3,49970000	0,0001	0,0003
2,49999	3,49997000	0,00001	0,00003
2,499999	3,49999700	0,000001	0,000003
...	...	...	...
2,500001	2,00000200	0,000001	1,499998
2,50001	2,00002000	0,00001	1,49998
2,5001	2,00020000	0,0001	1,4998
2,501	2,00200000	0,001	1,498
2,51	2,02000000	0,01	1,48
2,55	2,10000000	0,05	1,4

a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 2,5 para que la diferencia 3,5 – f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001.

b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x = 2,5?

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 3.5. Tareas 4 y 9

A continuación, presentamos en qué tareas se hace referencia a los elementos matemáticos que conforman el límite tanto como aproximación dinámica como concepción métrica, así como a los elementos considerados para evidenciar el mecanismo cognitivo de la inversión. En función de los elementos matemáticos, que asociaremos con el modo de representación, las tareas las presentamos divididas en tres grupos.

En un primer grupo las tareas hacen referencia a los elementos que conforman la aproximación dinámica de límite de una función en un punto (Tabla 3.3), donde se encuentran las tareas 1, 2, 3, 6, 7, y 8, y tienen como objetivo obtener información sobre cómo el estudiante comprende el concepto de aproximación dinámica de límite de una función en un punto. Estas tareas permiten saber si los estudiantes tienen una concepción *acción o proceso* de límite de una función en un punto. Los estudiantes que solo realizan un número finito de cálculos, de forma externa, utilizando una función algebraica o una función gráfica, según indican Cottrill et al. (1996), tendrán una forma de conocer acción. Por el contrario, si el estudiante va más allá del cálculo de un número finito de valores aproximándose a un valor fijo, es decir, si es capaz de realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de pasos, entonces, tendrán una concepción proceso. En este caso, según Dubinsky (1991), podrían crear nuevos procesos al "*coordinar dos o más procesos*". Las tareas propuestas nos permiten analizar el tipo de concepción que tienen los estudiantes al exigirles que respondan a preguntas como "Completa la tabla" o "Elige un valor de la x, y calcula el valor de la función f(x) en ese punto" (E0), donde al estudiante solo se le exige hacer un cálculo simple y diremos que tiene una concepción de *acción*. O preguntas como "¿A qué número se aproxima x?" (E1), "¿A qué número se aproxima la función f(x)?" (E1), donde al estudiante se le exige hacer un cálculo que va más allá de calcular un número finito de valores de la función, diremos que el estudiante tiene una concepción de *proceso* (Cottrill et al., 1996). O preguntas del tipo "Describe el comportamiento de la función f(x) en relación al comportamiento de la variable x" (E2), donde se exige al estudiante que construya un doble proceso, un proceso en el dominio y otro en el rango, y utilice la función para coordinarlos mentalmente. En este caso el estudiante tendría un conocimiento como *proceso* si es capaz, por una parte, de comprender la idea de aproximación, y por otra cuando sea capaz de comprender y coordinar dos aproximaciones (la aproximación en el dominio, con la aproximación en el rango).

Tabla 3.3. Elementos matemáticos que conforman el límite como concepción dinámica y modos de representación implicados en cada una de las tareas 1, 2, 3, 6, 7, 8

	Ítem	Elementos matemáticos					Representación
		E0	E1	E2	E3	E4	
Tarea 1	1a		X				N
	1b		X				N
	1c			X			N
	1d				X		N
Tarea 2	2a	X					G
	2b			X			G
	2c			X			G
	2d			X			G
	2e				X		G
Tarea 3	3a	X					AN
	3b		X				N
	3c		X				AN
	3d			X			AN
	3e				X		AN
Tarea 6	6a		X				N
	6b		X				N
	6c			X			N
	6d				X		N
Tarea 7	7a	X					G
	7b			X			G
	7c			X			G
	7d			X			G
	7e				X		G
Tarea 8	8a	X					AN
	8b		X				N
	8c		X				AN
	8d			X			AN
	8e				X		AN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

El segundo grupo lo constituyen las tareas 4 y 9 que hacen referencia a los elementos de la aproximación métrica del límite (Tabla 3.4) de una función en un punto y pretenden obtener información sobre la capacidad que tienen los estudiantes de coordinar (o no) las aproximaciones en términos de desigualdades al presentarse estas tareas a través de estimaciones numéricas de la proximidad (vecindad) de las aproximaciones (E4).

Tabla 3.4. Elementos matemáticos que conforman el límite como concepción métrica y modo de representación implicado en las tareas 4 y 9

	Ítem	Elementos matemáticos					Representación
		E0	E1	E2	E3	E4	
T4	4a					X	N
	4b				X		N
T9	9b					X	N
	9b				X		N

Por último, el tercer grupo lo constituyen las tareas 5 y 10 (Tabla 3.5) pensadas para identificar si los estudiantes que han encapsulado la noción dinámica de límite son capaces de desencapsular dicho proceso revirtiéndolo. Es decir, pretendemos analizar si los estudiantes que conozcan el límite de una función en un punto como proceso, (Dubinsky, 1991), son capaces de resolver estas tareas, en las que partiendo de unos límites conocidos, deben encontrar la gráfica de la función que cumpla las condiciones, poniendo en funcionamiento el mecanismo cognitivo de *"inversión"* en el sentido de desempaquetar la información dada por la representación analítica del límite para obtener información del comportamiento de la gráfica de la función.

Las tareas 5 y 10 exigen a los estudiantes representar la gráfica de una función que debe cumplir tres condiciones. Para representar la gráfica de la función, el estudiante debería coordinar las tres condiciones después de haber desempaquetado (inversión) el significado del límite y manejarlo como *proceso*. Es decir, coordinar el valor de la función en un punto con la doble coordinación de la aproximación en el dominio y con la aproximación en el rango.

Tabla 3.5. Elementos matemáticos considerados y modo de representación implicado en las tareas 5 y 10

	Ítem	Elementos matemáticos					Representación
		E0	E1	E2	E3	E4	
Tarea 5	5a	X					G
	5b			X			G
	5c			X			G
Tarea 10	10a	X					G
	10b			X			G
	10c			X			G

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3.2.2. Entrevistas

Con posterioridad a la realización del cuestionario por parte de los estudiantes, y a la revisión de las respuestas por parte del investigador, se entrevistaron a los 21 estudiantes seleccionados. La duración media de las entrevistas fue de 30 minutos.

Antes de iniciar las entrevistas, el investigador pedía a cada uno de los estudiantes que leyera las respuestas que había dado al cuestionario. Posteriormente, les preguntaba si tenían alguna dificultad con la comprensión del enunciado, después de un tiempo prudencial, se le explicaba el procedimiento que se iba a seguir: tendrían la posibilidad de contestar verbalmente, o por escrito a cualquiera de las tareas; podrían contestar por escrito en hojas auxiliares y no debían hacer anotaciones en las hojas del cuestionario. Explicado el procedimiento a seguir se iniciaba la entrevista pidiendo a los alumnos que intentaran justificar, dando alguna explicación:

1. del por qué de las respuestas dadas a las preguntas del cuestionario.
2. de por qué no habían contestado a alguno de los apartados, o a alguna de las tareas.

Las entrevistas, permitieron:

- ampliar la información sobre cómo los estudiantes resuelven los diferentes ítems del cuestionario;
- conocer el uso que los estudiantes hacen de los distintos elementos matemáticos, y de los diferentes modos de representación;
- obtener información de las justificaciones que los estudiantes podían dar a la forma en que resolvían las tareas;
- permitir hacer inferencias sobre el nivel de desarrollo del esquema;
- permitir hacer inferencias sobre características de la tematización del esquema;
- determinar si las exigencias cognitivas de los diferentes ítems se correspondía con los objetivos previstos en dichos ítems.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3.3. Análisis de los datos

El análisis llevado a cabo para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función y analizar en qué medida los estudiantes han construido el concepto de límite de una función desde la aproximación dinámica y métrica, se ha realizado en tres fases.

3.3.1. Fase I. Evaluación de las respuestas del cuestionario

En esta fase, cada estudiante fue identificado como EST seguido de un número. Tres investigadores analizaron conjuntamente una muestra de respuestas dadas por los estudiantes con el objetivo de generar criterios y unificar la codificación dicotómica, 1, respuesta correcta, 0, incorrecta para cada ítem. Posteriormente, se codificaron todas las respuestas como 0 y 1.

A continuación, ejemplificamos el proceso seguido en la fase I a partir de las respuestas dadas por la estudiante EST74 a la tarea 1 (Figura 3.6). La respuesta de la estudiante fue codificada como (1,1,1,0) ya que responde de forma correcta al ítem 1a- aproximación a un número (*x=3*) en el dominio-; al ítem 1b- aproximación a un número en el rango (*f(x) =15*)-; al ítem 1c- coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, (*Cuando más se acerca x al 3, más se acercará f(x) al 15*). Finalmente, el ítem 1d se codificó 0 al no haber sido contestado.

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	…	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	…	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? 3

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

cuanto más se acerca x al 3, más se acercará f(x) a 15.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

$\lim_{x \to 3} =$ ______

Figura 3.6. Respuesta de la estudiante EST74 a la Tarea 1

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3.3.2. Fase II. Análisis cualitativo desde la perspectiva APOS

En esta fase se ha realizado un análisis cualitativo desde la perspectiva teórica APOS con el objetivo de caracterizar los diferentes niveles de desarrollo del esquema de límite de una función en un punto: intra, inter y trans y la tematización.

Para obtener las características generales de los niveles de desarrollo del esquema de límite se analizaron las respuestas dadas a los ítems de las tareas del cuestionario y a las entrevistas en función de aquellos aspectos que no se mostraban en el cuestionario. Dicho análisis se centró en los ítems relativos a la aproximación a un número (E1), a la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2), a la manifestación formal del límite (E3) y a la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4) (Figura 3.7).

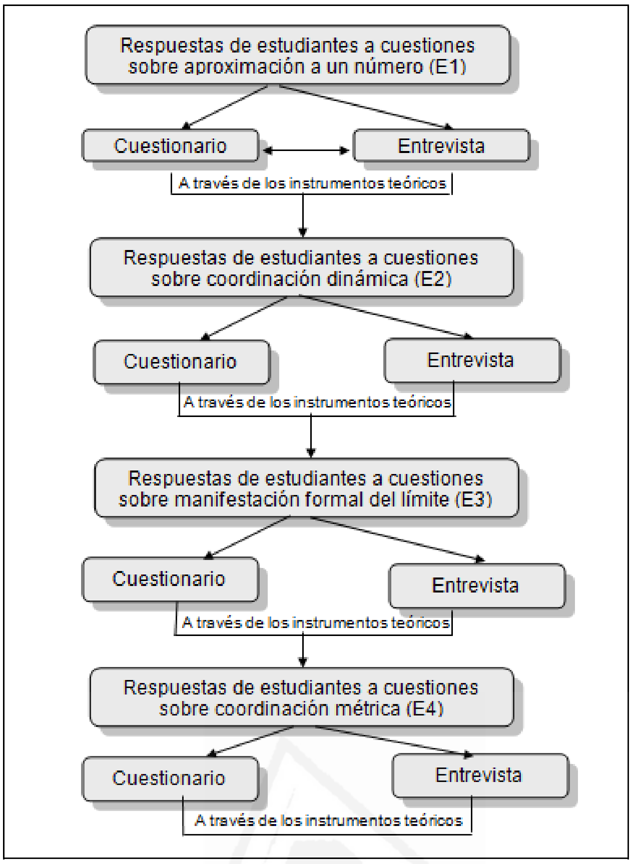


Figura 3.7. Fases II del análisis

Al analizar las respuestas de los ítems del cuestionario relativos a la aproximación a un número (E1) y las entrevistas realizadas a los estudiantes sobre estos ítems (E1) (Figura 3.8) observamos que **todos** los estudiantes habían usado el elemento matemático **aproximación a un número** (E1). Por tanto, para discriminar a los estudiantes, tomamos como criterio de análisis la **coincidencia o no de las aproximaciones laterales.** Este análisis permitió separar a los alumnos en dos grupos, 1) alumnos que responden a los ítems de aproximación a un número desde aproximaciones coincidentes y 2) alumnos que responden a los ítems de aproximación desde las aproximaciones coincidentes y no coincidentes indistintamente. A continuación, para refinar la agrupación realizada, tuvimos en cuenta **el número de modos de representación** usados. En este caso, obtuvimos cuatro grupos de estudiantes: 1) los que respondían solamente en modo de representación numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden; 2) los que respondían en los dos modos de representación (numérico y algebraico-numérico) cuando las aproximaciones laterales coinciden; 3) los que respondían en los dos modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden y en un modo cuando no coinciden; y 4) los que respondían en los dos modos de representación, cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no.

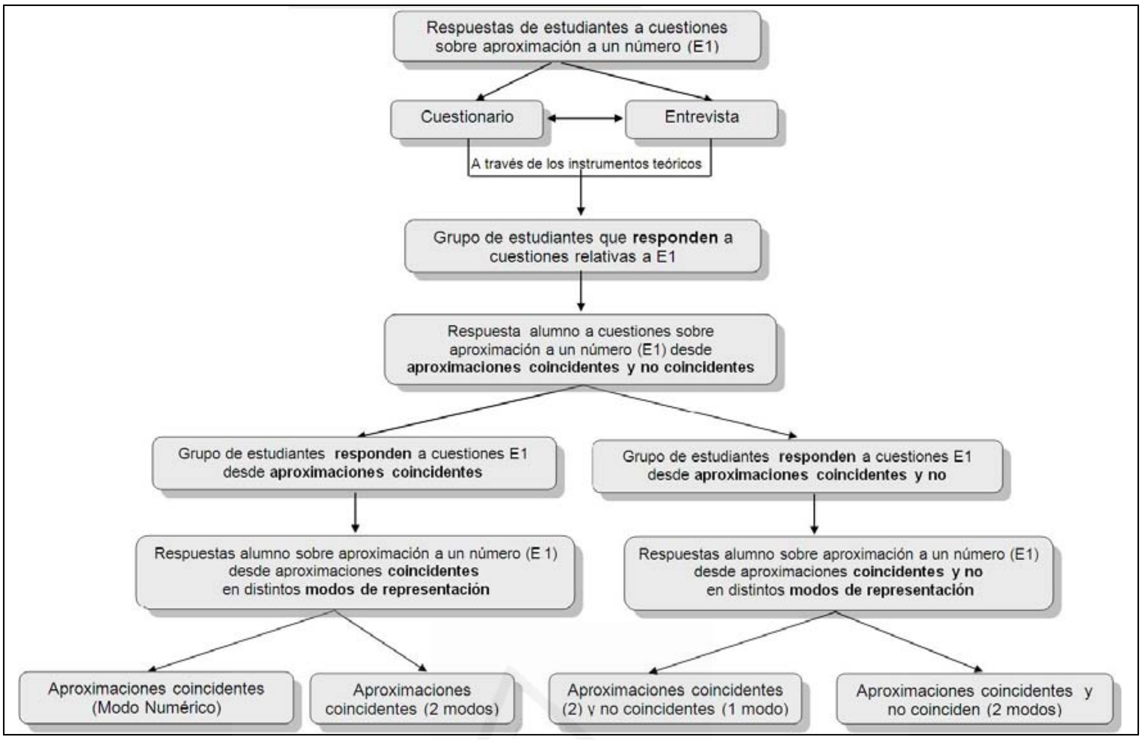


Figura 3.8. Características esquemáticas del uso de la aproximación a un número (E1)

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la aproximación a un número (E1), analizamos las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la **coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango** (E2, coordinación dinámica) (Figura 3.9). Este primer análisis dio lugar a dos grupos diferenciados: a) estudiantes que no respondían a ninguna cuestión relativa a la coordinación dinámica; y b) estudiantes que sí respondían a cuestiones relativas a la coordinación dinámica. En segundo lugar, analizamos las respuestas de los estudiantes que respondían a cuestiones relativas a la coordinación dinámica fijándonos en la **coincidencia o no de las aproximaciones laterales**, que dio lugar a dos grupos, a1) estudiantes que solo responden a ítems relativos a la coordinación de las aproximaciones laterales coincidentes y a2) estudiantes que responden a ítems relativos a la coordinación de las aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes indistintamente. A continuación, tuvimos en cuenta el **número de modos de representación** en los que eran capaces de coordinar las aproximaciones laterales coincidentes o no. Obtuvimos tres grupos de estudiantes: b1) los que respondían en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden; b2) los que respondían en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden y en uno o dos modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden; y b3) los que respondían en dos o tres modos de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden y en tres modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden.

Este proceso de análisis realizado con los ítems de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) nos permitió establecer las características de los tres niveles de desarrollo del esquema y fijar el paso de un nivel de desarrollo al siguiente.

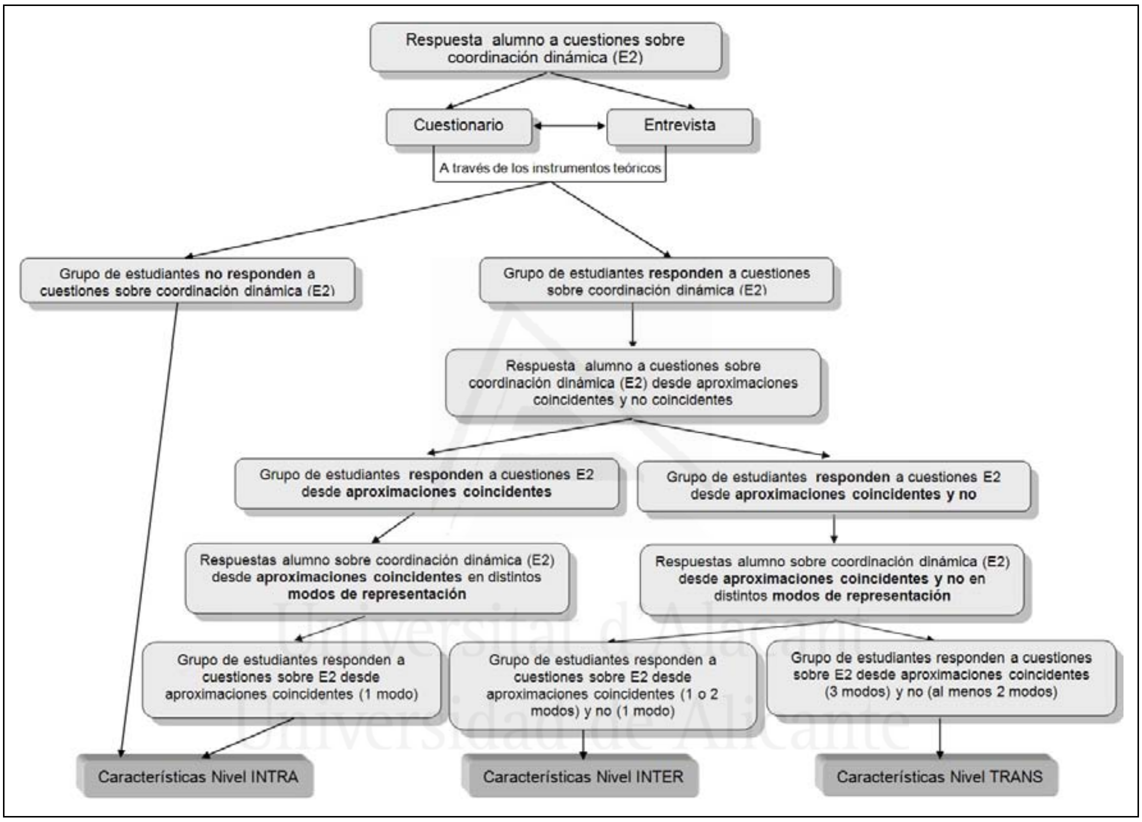


Figura 3.9.Características esquemáticas del uso de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2)

Para ejemplificar el proceso seguido, presentamos el análisis de los protocolos correspondientes a los estudiantes EST26, EST67, y EST50. Estos protocolos evidencian cada uno de los grupos de estudiantes que se fueron formando en función del análisis realizado a sus respuestas.

EST 26 pertenece al grupo de estudiantes que no fueron capaces de responder a cuestiones relativas sobre coordinación dinámica (E2), los estudiantes EST67 y EST50 se encuentran en el grupo de estudiantes que sí respondieron a cuestiones relativas a E2. A su vez, estos dos estudiantes se encuentran en distinto grupo en función de la coincidencia o no de las aproximaciones laterales y del número de modos de representación en los que realizaron la coordinación.

EST26, en la tarea 1 y en la tarea 6 (Figura 3.10) en modo numérico, no fue capaz de coordinar las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden (Tarea 1) al indicar que "*Por cada decimal que se pone en la x la función f(x) aumenta dos decimales*"; ni cuando no coinciden (Tarea 6) al indicar que "*cuantos más decimales aumenta x menos disminuye la función f(x)*".

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	…	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	…	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4) 3

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15.00000000

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

Por cada decimal que se pone en la x la función f(x) aumenta dos decimales.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15'5 y 14

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

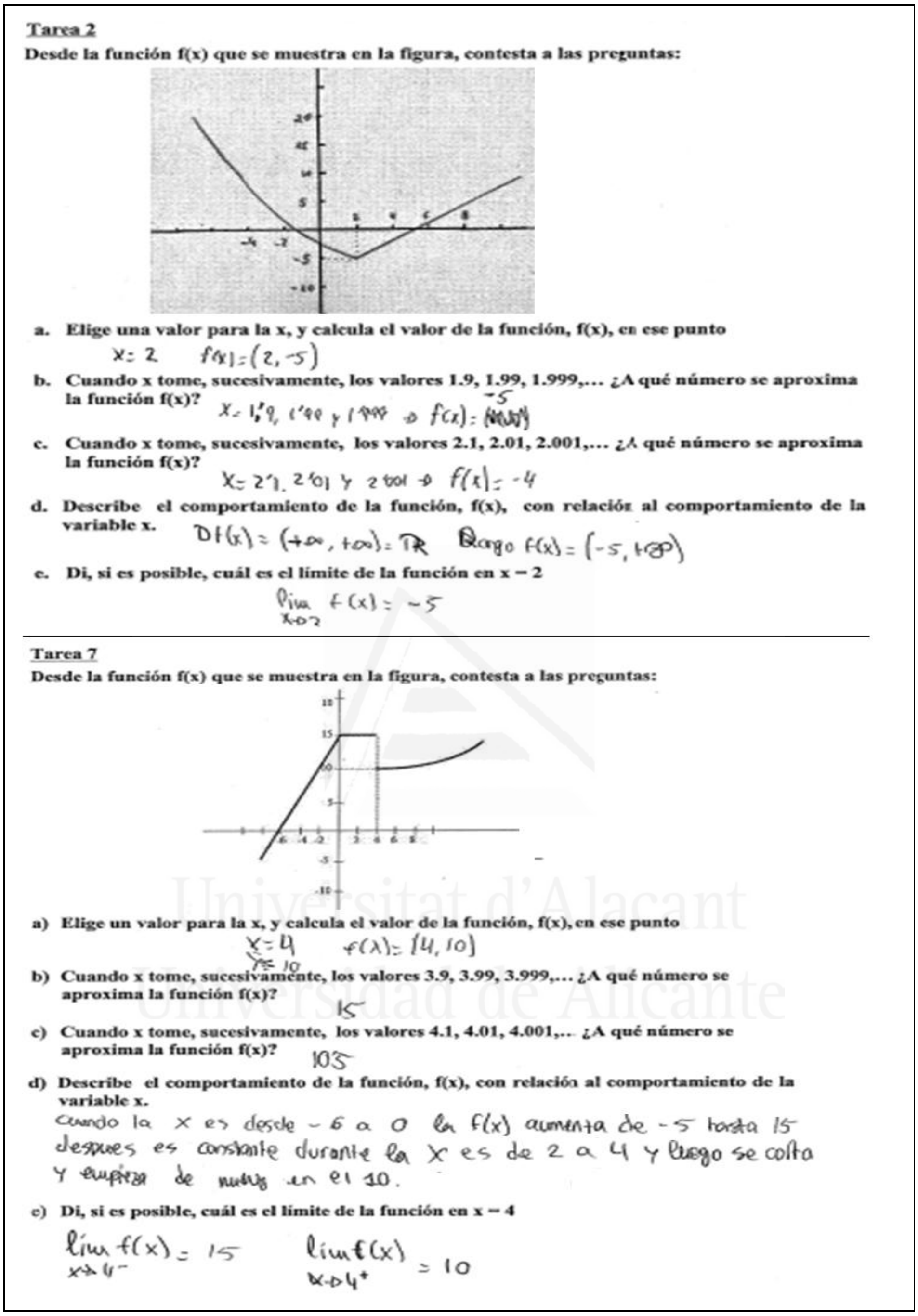
cuantos más decimales aumenta X menos disminuye la función f(x)

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

Figura 3.10. Respuesta del estudiante EST26 a las tareas 1 y 6

De la misma manera en la tarea 2 y en la tarea 7 (Figura 3.11) en modo gráfico, EST26 tampoco fue capaz de coordinar las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden ni cuando no coinciden (aunque en ambas tareas sí que fue capaz de realizar dicha coordinación por la izquierda). En la tarea 2 (aproximaciones coincidentes) indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1.99, 1.999,…, la función se aproxima "*f(x)= –5*" y que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…, la función se aproxima "*f(x)= –4*". En la tarea 7 (aproximaciones no coincidentes) indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999,…, la función se aproxima "*a 15*" y que cuando la variable independiente toma los valores 4.1, 4.01, 4.001,…, la función se aproxima "*a 10'5*".



Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a. **Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

x: 2 f(x): (2, -5)

b. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

x: 1'9, 1'99 y 1'999 → f(x): -5

c. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

x: 2'1, 2'01 y 2'001 → f(x): -4

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

Df(x) = (-∞, +∞) = R Rango f(x) = [-5, +∞)

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2**

lim x→2 f(x) = -5

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a) **Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

x = 4 f(x) = (4, 10)

b) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

15

c) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

10'5

d) **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

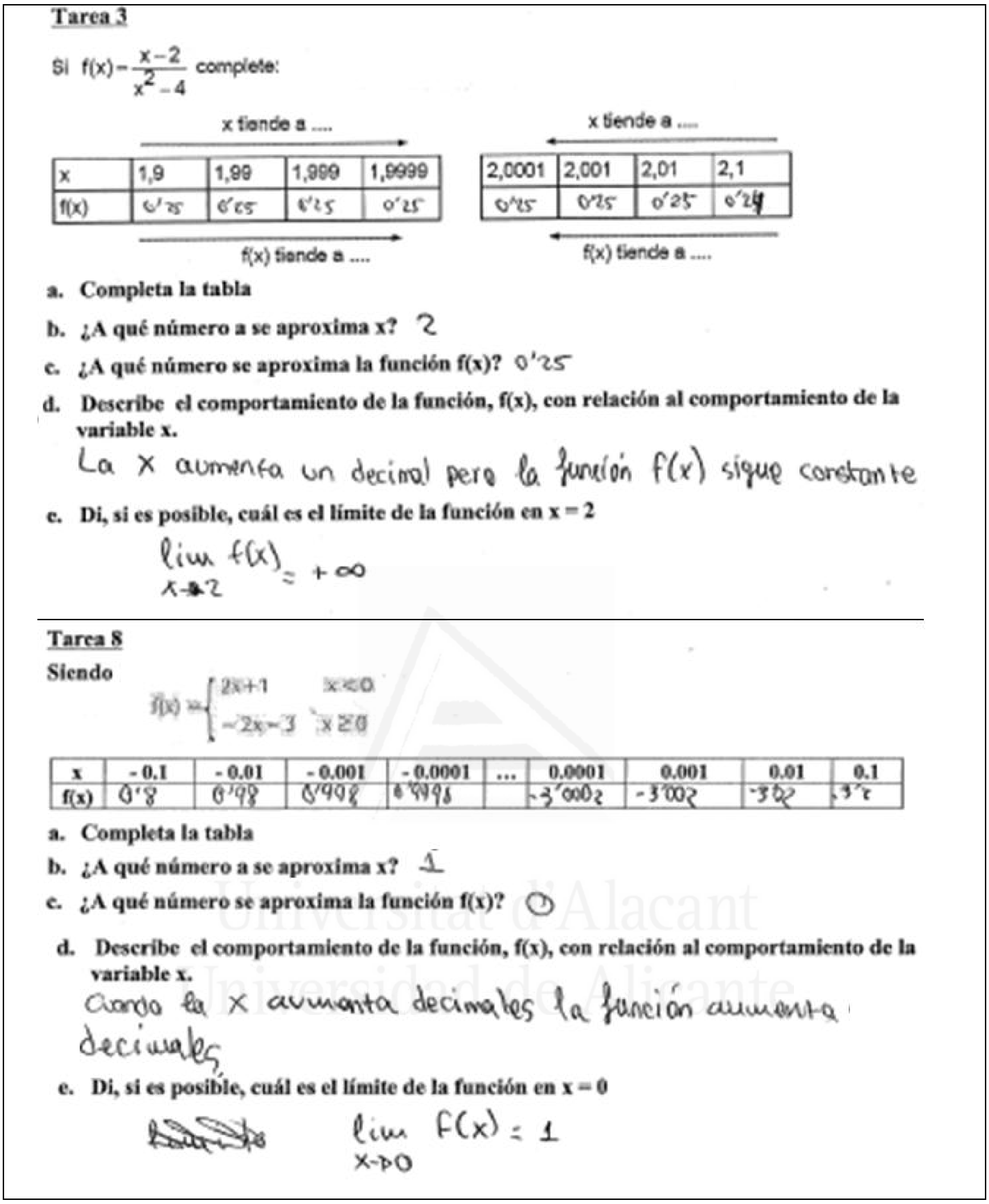
Cuando la x es desde -6 a 0 la f(x) aumenta de -5 hasta 15 despues es constante durante la x es de 2 a 4 y luego se corta y empieza de nuevo en el 10.

e) **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4**

lim x→4⁻ f(x) = 15 lim x→4⁺ f(x) = 10

Figura 3.11. Respuesta del estudiante EST26 a las tareas 2 y 7

EST26, tampoco fue capaz de coordinar las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden, ni cuando no coinciden, en modo algebraico-numérico como muestran sus respuestas a la tarea 3 y a la tarea 8 (Figura 3.12). En la tarea 3 (aproximaciones laterales coincidentes) indica que "*la x aumenta un decimal pero la función f(x) sigue constante*". En la tarea 8 (aproximaciones laterales no coincidentes) indica que "*cuando la x aumenta decimales la función aumenta* *decimales*".



Tarea 3

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0'25	0'25	0'25	0'25

f(x) tiende a ....

x tiende a ....

2,0001	2,001	2,01	2,1
0'25	0'25	0'25	0'24

f(x) tiende a ....

a. **Completa la tabla**

b. **¿A qué número a se aproxima x?** 2

c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 0'25

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

La x aumenta un decimal pero la función f(x) sigue constante

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2**

$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$

Tarea 8

Siendo

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x\geq 0 \end{cases}$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998		-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. **Completa la tabla**

b. **¿A qué número a se aproxima x?** 1

c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 0

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

Cuando la x aumenta decimales la función aumenta decimales

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0**

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

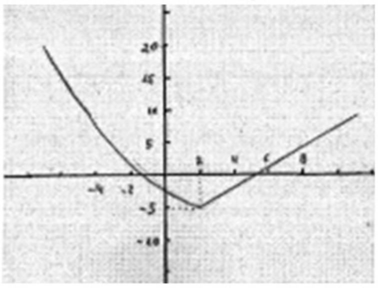
Figura 3.12. Respuesta del estudiante EST26 a las tareas 3 y 8

El estudiante EST26 no fue capaz de realizar la coordinación dinámica en ningún modo de representación ni cuando las aproximaciones laterales coinciden ni cuando no coinciden.

Por otra parte, EST67 sí fue capaz de capaz de coordinar en modo gráfico las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden, tarea 2, y cuando no coinciden, tarea 7, (Figura 3.13).

Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a. **Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

$f(x)=0$
$x=5,5$

b. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** –5 por la izquierda

c. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** –5 por la derecha

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.**

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2**

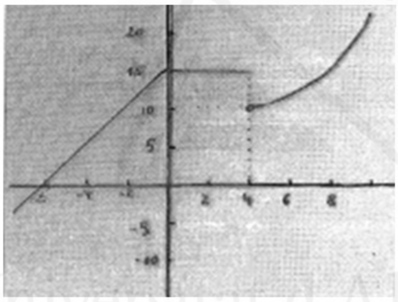
$$\lim_{x \to 2} f(x) = -5$$

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

$f(x)=0$
$x=-6$

$f(x)=5$
$x=-4$



a) **Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

$f(x)=15$
$x=0$

b) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 15

c) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 10

d) **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.**

$$f(x) = \begin{cases} 15 & 0<x<4 \end{cases}$$

e) **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4**

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 15 \qquad \lim_{x \to 4^+} f(x) = 4$$

Figura 3.13. Respuesta de la estudiante EST67 a las tareas 2 y 7

En la tarea 2 EST67 indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1.99, 1.999,…, la función se aproxima "*a –5 por la izquierda*" y que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…, la función se aproxima "*a –5 por la derecha*". En la Tarea 7 indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999,…, la función se aproxima "*a 15*" y que cuando la variable independiente toma los valores 4.1, 4.01, 4.001,…, la función se aproxima "*a 10*".

Sin embargo, EST67 no es capaz de coordinar las aproximaciones laterales cuando estas coinciden, ni en modo numérico (Figura 3.14) ni en algebraico-numérico (Figura 3.15) como pone de manifiesto el hecho de que dejara en blanco las respuestas relativas a "*Describe el comportamiento de la función f(x) en relación al comportamiento de la variable x*" en las tareas 1 y 6 (modo numérico) y en las tareas 3 y 8 (algebraico-numérico).

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	…	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	…	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x?

A 3.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

A 15.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

$\lim_{x=3} f(x) = 15$

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x?

4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

A 15,5 por la izquierda y a 14 por la derecha

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 15{,}5$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 14$

Figura 3.14. Respuesta del estudiante EST67 a las tareas 1 y 6

Tarea 3

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,256	0,2506	0,25006	0,250006

f(x) tiende a ....

x tiende a ....

2,0001	2,001	2,01	2,1
0,249993	0,24993	0,2493	0,2439

f(x) tiende a ....

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x?

2

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

0,25

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2

$\lim_{x=2} f(x) = 0{,}25$

Tarea 8

Siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x\geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0,8	0,98	0,998	0,9998		-3,0002	-3,002	-3,02	-3,2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x?

0

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

-3

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

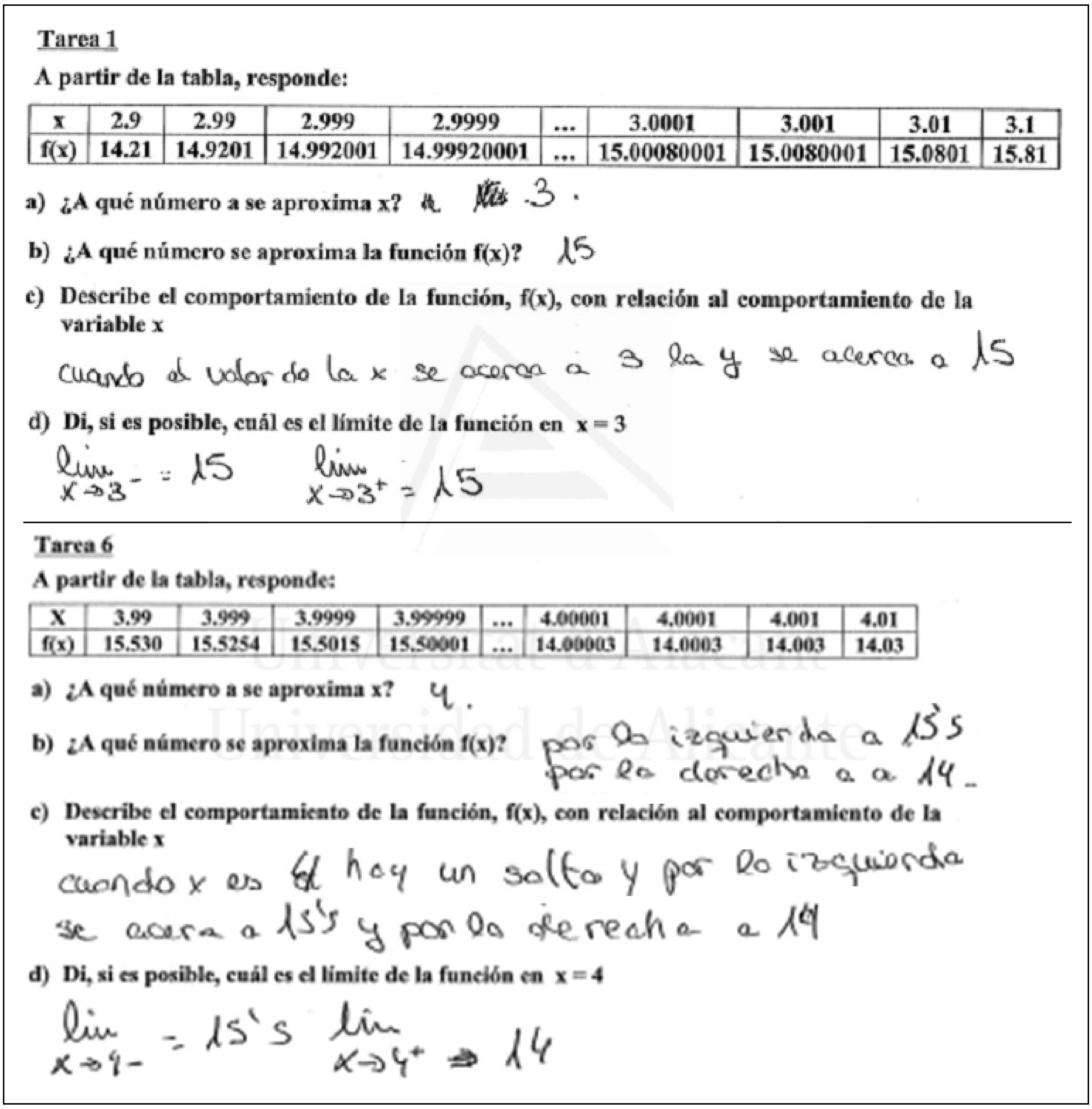
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 3.15. Respuesta del estudiante EST67 a las tareas 3 y 8

El estudiante EST67 fue capaz de realizar la coordinación dinámica, en un modo de representación, cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no coinciden. Pero tuvo dificultades en los otros modos de representación.

Finalmente, EST50 es capaz de coordinar las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden en los tres modos de representación, y cuando no coinciden en dos modos de representación. En modo numérico (Figura 3.16) fue capaz de coordinar las aproximaciones cuando las aproximaciones laterales coinciden (Tarea 1) al indicar que "*cuando el valor de x se acerca a 3 la y se acerca a 15*", y cuando no coinciden (Tarea 6) al indicar que "*cuando x es 4 hay un salto y por la izquierda se acerca a 15'5 y por la derecha a 14*".



Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? 3.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

cuando el valor de la x se acerca a 3 la y se acerca a 15

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

$\lim_{x\to 3^-} = 15$ $\lim_{x\to 3^+} = 15$

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? por la izquierda a 15'5 por la derecha a a 14.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

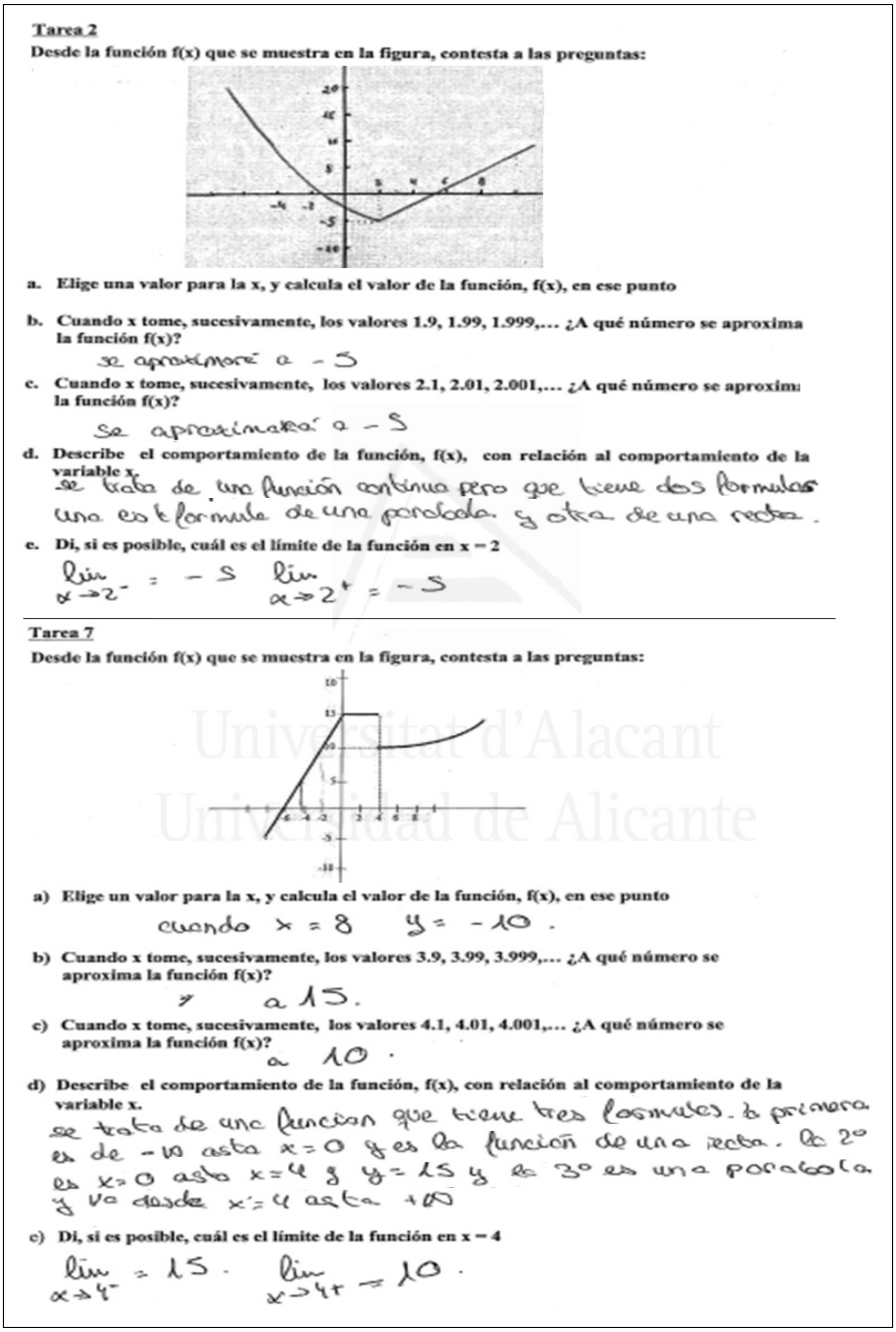
cuando x es 4 hay un salto y por la izquierda se acerca a 15'5 y por la derecha a 14

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x\to 4^-} = 15'5$ $\lim_{x\to 4^+} \Rightarrow 14$

Figura 3.16. Respuesta de la estudiante EST50 a las tareas 1 y 6

EST50 también es capaz de coordinar las aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes en modo gráfico (Figura 3.17). Indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1.99, 1.999,…, la función se aproxima "*se aproximará a –5*" y que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…, la función se aproxima "*se aproximará a –5*" (Tarea 2). En el caso de la no coincidencia de las aproximaciones laterales (Tarea 7) indica que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999,…, la función se aproxima "*a 15*" y que cuando la variable independiente toma los valores 4.1, 4.01, 4.001,…, la función se aproxima "*a 10*".



Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a. Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

se aproximará a -5

c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

se aproximará a -5

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

se trata de una función continua pero que tiene dos formulas una es la formula de una parabola y otra de una recta.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2

$\lim_{x \to 2^-} = -5$ $\lim_{x \to 2^+} = -5$

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

cuando $x = 8$ $y = -10$.

b) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

a 15.

c) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

a 10.

d) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

se trata de una funcion que tiene tres formulas. la primera es de $-\infty$ asta $x=0$ y es la función de una recta. la 2º es $x=0$ asta $x=4$ y $y=15$ y la 3º es una parabola y va desde $x=4$ asta $+\infty$

e) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x \to 4^-} = 15$. $\lim_{x \to 4^+} = 10$.

Figura 3.17. Respuesta de la estudiante EST50 a las tareas 2 y 7

También EST50 fue capaz de coordinar las aproximaciones laterales coincidentes en modo algebraico-numérico (Figura 3.18) al indicar que "*cuando se acerca a 2 su y se acerca a 0'25"* (Tarea 3). Sin embargo, no fue capaz de coordinar las aproximaciones laterales no coincidentes en este modo (Figura 3.16) ya que en la tarea 8 indica que "*la función pega un salto en x = 0 y es continua*".

Tarea 3

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

0'1. 0'01. 0'001. 0'0001.

x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0'256	0'25	0'25	0'25

f(x) tiende a ....

x tiende a ....

2,0001	2,001	2,01	2,1
0'25	0'25	0'249	0'244

f(x) tiende a ....

a. **Completa la tabla**

b. **¿A qué número a se aproxima x?** a 2.

c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 0'25.

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

cuando se acerca a 2 su y se acerca a 0'25

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2**

su límite es 0'25 por la izquierda y por la derecha

Tarea 8

Siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x\geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998		-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. **Completa la tabla**

b. **¿A qué número a se aproxima x?** a 0.

c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** por la izquierda 1.
Por la derecha = -3

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.**

la función pega un "salto" en x = 0 y es continua.

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0**

$\lim_{x\to 0^-} = 1$. $\lim_{x\to 0^+} = -3$

Figura 3.18. Respuesta de la estudiante EST50 a las tareas 3 y 8

Por lo tanto, la estudiante EST50 fue capaz de realizar la coordinación dinámica en los tres modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden, y en dos modos de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la aproximación a un número (E1), y a la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2), analizamos las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la **manifestación formal del límite** (E3) (Figura 3.19). Este análisis ha dado lugar a dos grupos diferenciados: a) estudiantes que no respondían a ninguna cuestión relativa a la manifestación formal del límite; y b) estudiantes que sí que respondían a cuestiones relativas a la manifestación formal del límite. En segundo lugar, analizamos las respuestas de los estudiantes que respondían a cuestiones relativas a la manifestación formal del límite fijándonos en la **coincidencia o no de las aproximaciones** laterales. En este caso también se agruparon los estudiantes en dos grupos, a) el de los estudiantes que responden a la manifestación formal de límite desde aproximaciones laterales coincidentes y b) el de los que responden desde coincidentes y no coincidentes indistintamente. A continuación, tuvimos en cuenta en el **número de modos de representación** en los que eran capaces de manifestar formalmente el límite y obtuvimos seis grupos diferentes.

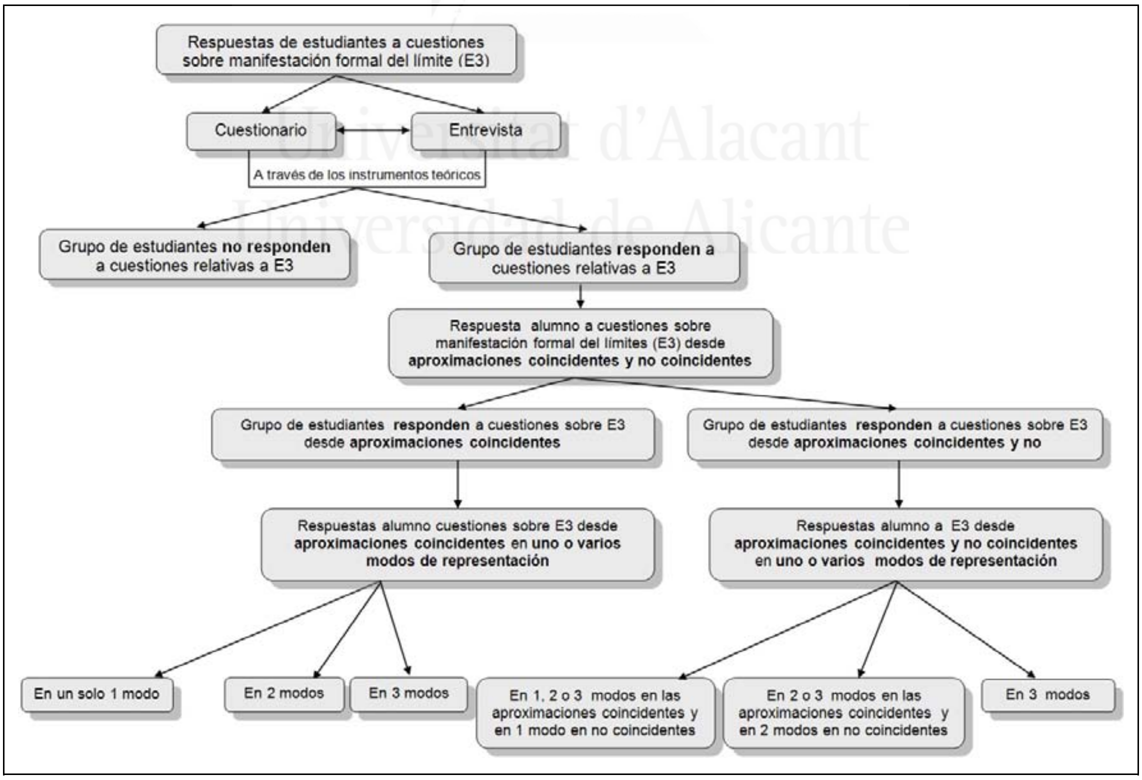


Figura 3.19. Características esquemáticas del uso de la manifestación formal del límite (E3)

Una vez analizadas las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

aproximación a un número (E1), a la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) y a la manifestación formal el límite (E3), analizamos las respuestas de los estudiantes a los ítems relativos a la **coordinación métrica en términos de desigualdades** (E4, coordinación métrica) (Figura 3.20). Este análisis ha dado lugar a dos grupos diferenciados: a) estudiantes que no respondían a ninguna cuestión relativa a la coordinación métrica en términos de desigualdades; y b) estudiantes que sí que respondían a cuestiones relativas a la coordinación métrica en términos de desigualdades. En segundo lugar, analizamos las respuestas de los estudiantes que respondían a cuestiones relativas a la coordinación dinámica fijándonos en la **coincidencia o no de las aproximaciones laterales** y obtuvimos dos grupos de estudiantes: b1) los que respondían cuando las aproximaciones laterales coinciden; y b2) los que respondían cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

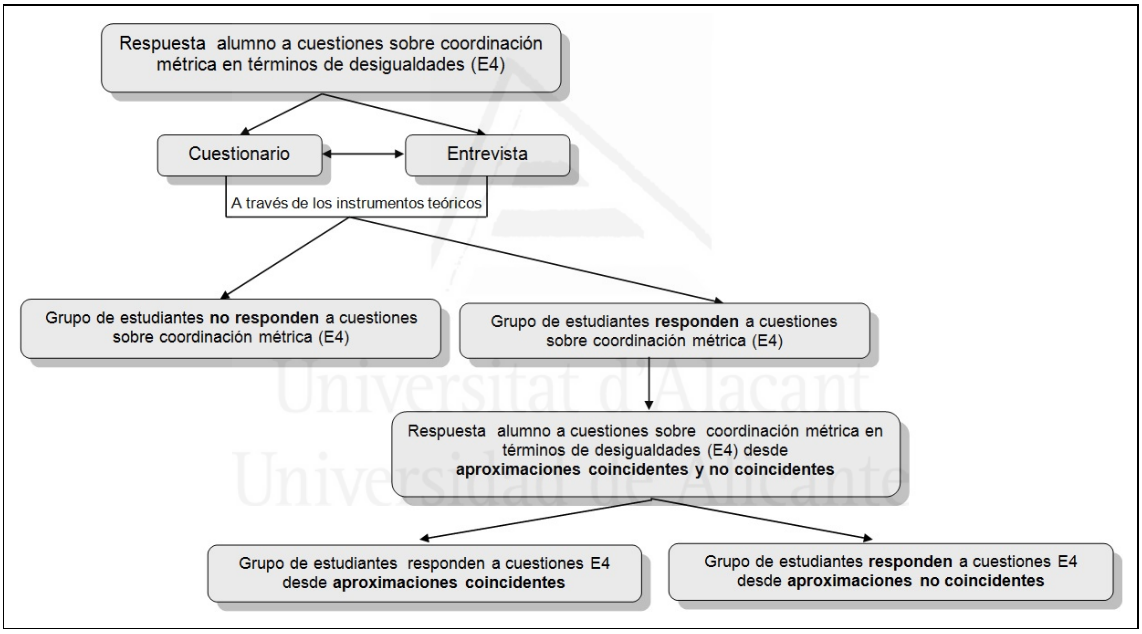


Figura 3.20. Características esquemáticas del uso de la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4)

Finalmente, para validar las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems 4b y 9b sobre cuál era el límite de la función en el punto $x=0.5$, recurrimos a las entrevistas. A partir de las justificaciones que daban los estudiantes a sus respuesta pudimos observar que para dar la respuesta solo habían observado las dos primeras filas de la tabla y no habían tenido en cuenta la pregunta que pedía explícitamente "*Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto …*" Este hecho nos llevó a analizar la redacción de la tarea. Al analizar detenidamente los valores de la tabla observamos que las dos primeras filas de la tarea 4 eran similares a las de la tarea 1. Es decir, que la exigencia cognitiva del ítem b de la tarea 4 podría ser la misma que la exigencia cognitiva de la tarea 1. Para determinar si había o no una exigencia cognitiva diferente en ambos ítems, observamos la respuesta del EST 58 a la segunda pregunta de la tarea 4 (Figura 3.21) del cuestionario. EST58 responde que el "*lím f(x) = 1'5 ja que (1`5 – f(x)) tendeix a 0 conforme x tendeix a 0'5*" ("lím f(x) = 1'5 ya que (1`5 – f(x)) tiende a 0 conforme x tiende a 0'5").

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función, f(x), y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	...	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	...	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
□ 0,5 - x□	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	...	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
□1,5 - f(x)□	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001? 1'5 − f(x) < 0'01

x que sea próxima a 0'5001

b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x = 0,5?

~~lím = 1'5~~ lím f(x) = 1'5

ya que (1'5 − f(x)) tendeix a 0 conforme x

tendeix a 0'5

Universitat d'Alacant

Figura 3.21. Respuesta de la estudiante EST58 a la Tarea 4

Universidad de Alicante

La respuesta al cuestionario no dio ningún tipo de información. Sin embargo, durante la entrevista pudimos valorar la exigencia cognitiva que para los estudiantes representaba el cálculo del límite de la función en el punto *x=0.5*. En la entrevista EST58 al justificar su respuesta al ítem relativo al cálculo del límite- *"la verdad esa fila no la considere"* (filas de las diferencias)-, puso de manifiesto que la exigencia cognitiva de los ítems 4b y 9b era la misma que los de la tarea 1. En consecuencia, decidimos no considerar dichos ítems para analizar el desarrollo del esquema de límite de una función.

Inv: De acuerdo. Vamos a la pregunta b. La respuesta que has dado a la pregunta es que el límite es 1.5 ya que 1.5–f(x), tiende a cero. ¿Qué quieres decir o qué intentas decir?
EST58: Cuando x tiende a 0.5.
Inv: Para decir lo que dices, ¿qué fila miras?
EST58: Estaba mirando, estaba intuyendo la de...

Inv: De acuerdo. A mí me interesaría que me dijeras en qué fila miras para decir que el límite es 1.5
EST58: Más que en una fila, yo miré la fórmula
Inv: Si. Cuando dices la fórmula, estás señalándome 1.5–f(x).
EST58: La verdad que esa fila no la consideré.
(Entrevista a EST58 sobre la tarea 4, en catalán en el original)

Con esta forma de proceder pudimos **inferir** características del desarrollo del esquema de límite de una función en términos de los niveles: Intra, Inter y Trans, propuestos en el marco teórico. Para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función nos centramos en el análisis realizado a la coordinación dinámica (E2), incluyendo las características del resto de elementos analizados.

No obstante, cabe señalar que cuando intentamos encajar las caracterizaciones de los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función obtenidas con el análisis de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) con las agrupaciones obtenidas con las respuestas a la aproximación a un número (E1), a la manifestación formal del límite (E3) y a la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4) , determinamos que dichos elementos no eran discriminatorios para la caracterización de los niveles al presentar dichos elementos diferentes casuísticas en relación al elemento E2:

1. En los niveles de desarrollo intra e inter encontramos a estudiantes que responden a cuestiones sobre aproximación a un número (E1), de formas similares, teniendo comportamientos diferentes al responder a cuestiones sobre coordinación dinámica (E2) cuando las aproximaciones laterales no coinciden. En los niveles de desarrollo inter y trans los estudiantes que responden a cuestiones sobre aproximación a un número (E1), coincidentes y no coincidentes, en los dos modos de representación, tienen comportamientos dispares al responder a cuestiones sobre coordinación dinámica (E2).

2. En los niveles de desarrollo intra e inter encontramos a estudiantes que responden a cuestiones sobre la manifestación formal del límite (E3), de formas similares, teniendo comportamientos diferentes al responder a cuestiones sobre coordinación dinámica (E2) cuando las aproximaciones laterales no coinciden. En los niveles de desarrollo inter y trans los estudiantes que responden a cuestiones sobre la manifestación formal del límite (E3), coincidentes y no coincidentes, en los tres modos de

representación, tienen comportamientos dispares al responder a cuestiones sobre coordinación dinámica (E2).

3. En el nivel intra los estudiantes no responden a la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4), solamente algunos de los estudiantes agrupados en los niveles inter y trans responden a dicha coordinación y en esos dos niveles responden de forma dispar a cuestiones sobre coordinación dinámica (E2).

Finalmente, analizamos las respuestas dadas por los estudiantes del nivel Trans a las tareas 5 y 10 y a las entrevistas realizadas sobre estas resoluciones (Figura 3.22) con la finalidad de identificar diferentes momentos en el proceso de tematizar el esquema de límite de una función.

En un primer análisis obtuvimos dos grupos diferenciados: a) estudiantes que no respondían ni a la tarea 5, ni a la tarea 10; y b) estudiantes que si respondían a las tareas 5 o/y 10. Dichos grupos nos permitieron describir e identificar las fases del proceso de tematización (Pons, Valls y Llinares, 2013). Que serán descritas en la sección de resultados.

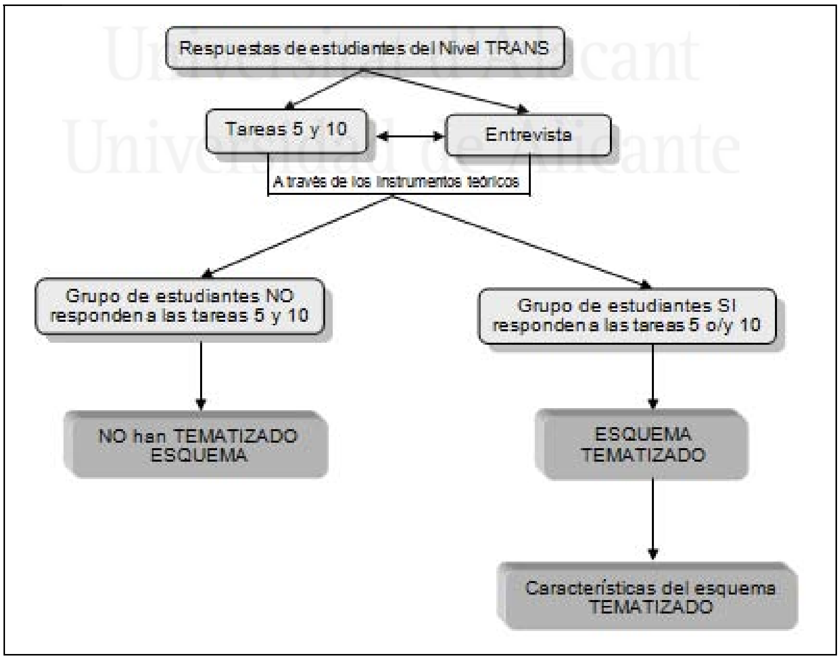


Figura 3.22. Características tematización esquema

3.3.3. Fase III. Análisis estadístico implicativo

Para confirmar y perfilar las características de los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función obtenidas en la fase de análisis cualitativo, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008).

Trigueros y Escandon (2008) señalan que, en la estadística implicativa, partiendo de una población E, los estudiantes, y de un conjunto de variables, los ítems del cuestionario, el análisis implicativo "*busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta* $a \Rightarrow b$" (pág.66). En esta metodología, "*la implicación* $a \Rightarrow b$ *será admisible si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que A, conjunto de las observaciones que satisfacen la característica a, está "casi" contenido en B, conjunto de observaciones que satisfacen la característica b"* (pág.67).

Para realizar el análisis estadístico implicativo se usó el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Gras et al., 2008). Este análisis traduce gráficamente el conjunto de las relaciones cuasi-implicativas entre las variables en distintos niveles de significación. Las implicaciones en forma de flechas indican de qué manera se articula la comprensión de las ideas (variables). Dichas implicaciones no cumplen la propiedad transitiva. Las flechas en color rojo indican relaciones implicativas al 99% de significación, en color azul cuando las relaciones implicativas son al 95% de significación y en color verde cuando el nivel de significación es del 90%.

Además, las variables que inician las ramas de los gráficos implicativos conllevan que se respondan acertadamente a la mayoría de los ítems que aparecen en la parte inferior del gráfico (Bodi, Valls, y Llinares, 2009; Zamora, Gregori y Orús, 2009).

Esto significa que los gráficos implicativos nos permiten identificar el papel de las diferentes variables (elementos) en la resolución de las tareas. Es decir, las variables que ocupan las posiciones inferiores en el gráfico implicativo son más fáciles que las que ocupan posiciones superiores por lo que nos indican cuáles son las variables que inician el acceso al significado de la concepción dinámica del límite. Y por otra parte, las variables que inician las ramas de las implicaciones del gráfico implicativo son más difíciles que las que ocupan posiciones inferiores en el gráfico implicativo por lo que tienen más importancia en el proceso de consolidación del significado de la concepción dinámica de límite.

El análisis implicativo se realizó en dos etapas y lo aplicamos a todas las tareas (excluidas la T5 y la T10 y los ítems 4b y 9b) ya que queríamos identificar los diferentes momentos en el proceso de construcción del significado de límite mediante los elementos matemáticos que conforman la concepción dinámica y el elemento de la coordinación métrica en términos de desigualdades. Y las tareas 5 y 10 tenían como objetivo aportar información sobre la tematización del esquema.

En la primera etapa del análisis cuantitativo se configuraron las variables. A partir de los elementos matemáticos del esquema del límite de una función (Tabla 3.1) en cada ítem y el modo de representación usado en la redacción de los problemas 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9 se conformaron 30 variables que simbolizamos mediante un código. El código estaba formado por la letra E seguido de un subíndice, i (i = 0, 1, 2, 3, 4), que indica el elemento matemático que se pone de manifiesto en el ítem, por ejemplo E2 que hace referencia a la coordinación dinámica. A Ei le sigue una letra que hace referencia a la inicial del modo de representación usado en la presentación del problema (Gráfico (G), Numérico (N), Algebraico-Numérico(AN)) y, por último, el número y la letra en minúscula hacen referencia, respectivamente, a la tarea y al ítem. Por ejemplo, en la tarea 1, el ítem a- *¿A qué número se aproxima?*- (Figura 3.1) fue codificado como "E1N1a" indicando: E1, el elemento "aproximación a un número"; N, el modo numérico en que se ha presentado la tarea; 1, la tarea 1; a, el ítem. Las respuestas de los 129 estudiantes evaluadas de forma dicotómica, 1 y 0, fueron organizadas en una tabla de doble entrada, 30x129. Esta primera etapa finalizó con la obtención del gráfico implicativo general al 99% de significación (Figura 3.23).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

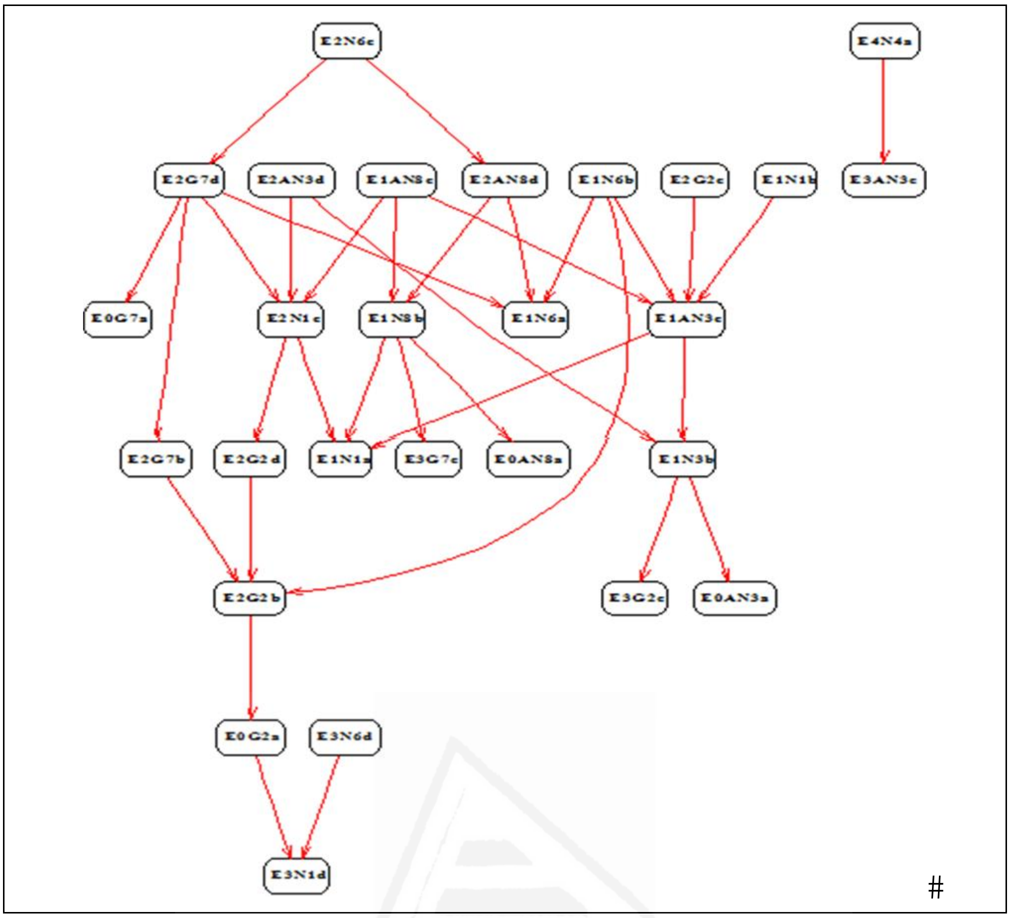


Figura 3.23. Gráfico implicativo general al 99%

En la segunda etapa, usamos una de las posibilidades del programa CHIC para "*suprimir o centrarse*" solamente en determinadas variables (Gras y Kuntz, 2009; Coutuier, 2009). Establecimos gráficos implicativos al 99%, o al 95%, o al 90% de significación centrándonos en diferentes elementos matemáticos.

Así pues, una vez obtenido el gráfico implicativo general, y puesto que en el análisis cualitativo previo habíamos inferido que el elemento central para caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite era el elemento E2 (coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango) junto con las relaciones de coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales, pudimos utilizar la posibilidad de centrarnos solo en algunos elementos matemáticos con la finalidad de confirmar, refinar y mejorar el análisis cualitativo realizado con anterioridad. Por lo tanto en esta fase del análisis generamos un:

1) Gráfico implicativo usando los elementos E0 y E1.

2) Un gráfico implicativo usando el elemento E1.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

3) Gráfico implicativo usando el elemento E2 (Figura 3.24).

4) Gráfico implicativo usando los elementos E1 y E2.

5) Gráfico implicativo usando los elementos E2 y E4 (Figura 3.25).

El gráfico implicativo generado al seleccionar el elemento matemático E2 (coordinación dinámica) (Figura 3.24) nos permitió diferentes lecturas con el objetivo de identificar y jerarquizar la influencia de diferentes variables en relación a la idea de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango. Pudimos leer el gráfico teniendo en cuenta a: i) los modos de representación; y ii) las relaciones de coincidencia o no de las aproximaciones laterales, en el proceso de construcción del significado de límite como concepción dinámica.

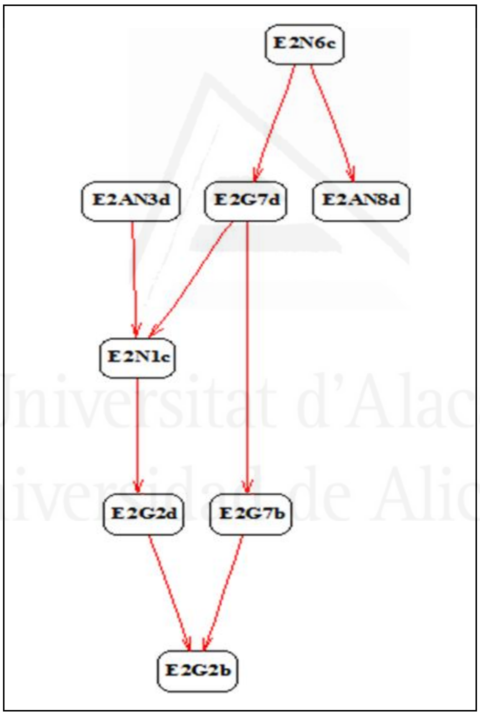


Figura 3.24. Gráfico implicativo al 99% en el que hemos seleccionado el elemento E2

El gráfico implicativo generado al seleccionar conjuntamente los elementos matemático E2 (coordinación dinámica) y E4 (coordinación métrica en términos de desigualdades) (Figura 3.25) nos permitió inferir qué imágenes dinámicas son compatibles con la coordinación métrica en términos de desigualdades. Las diferentes lecturas y la jerarquización de la influencia de diferentes variables la pudimos realizar teniendo en cuenta a: i) los elementos matemáticos seleccionados; ii) los modos de representación y iii) las relaciones de coincidencia o no de las aproximaciones laterales.

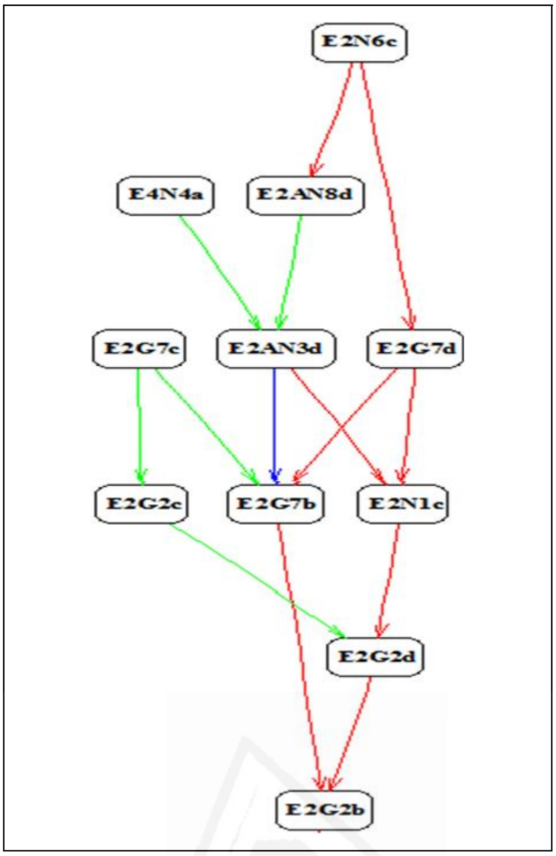


Figura 3.25. Gráfico implicativo al 90% seleccionando los elementos E2 y E4

La descripción de los resultados de este análisis se realizará en la segunda sección del capítulo de resultados.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Este capítulo está organizado en tres secciones. En la primera se caracterizan, por una parte, los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función de variable real desde la teoría APOS inferidos a partir del análisis cualitativo de la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2); y, por otra, se caracteriza el paso de un nivel de desarrollo del esquema al siguiente. En la segunda, estas características se complementan considerando las relaciones implicativas entre los elementos del esquema. Identificaremos las influencias de los diferentes modos de representación y de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el acceso a la concepción dinámica de límite, y el papel que desempeña la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, en la comprensión métrica de límite. Finalmente, en la tercera, se presentan las características de la tematización del esquema de límite de una función obtenidas a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema.

4.1. Características de los niveles de desarrollo del esquema de límite desde la teoría APOS

Los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función se han caracterizado a partir de la idea de coordinación dinámica, de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden o no teniendo en cuenta los modos de representación ya que la idea de aproximación, por sí sola, no ha supuesto un elemento discriminatorio.

En el nivel INTRA del desarrollo del esquema los estudiantes a lo sumo establecen la coordinación en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales son coincidentes.

En el nivel INTER los estudiantes ya son capaces de establecer la coordinación cuando las aproximaciones laterales no son coincidentes en algún modo de representación, pero cuando son coincidentes, son capaces de establecer la coordinación en uno o dos modos de representación. Los estudiantes en este nivel empiezan a usar las relaciones de lateralidad cuando las aproximaciones laterales no son coincidentes.

Finalmente, en el nivel TRANS los estudiantes coordinan las aproximaciones laterales no coincidentes al menos en dos modos de representación pero cuando las aproximaciones laterales son coincidentes, son capaces de establecer la coordinación en los tres modos de representación.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

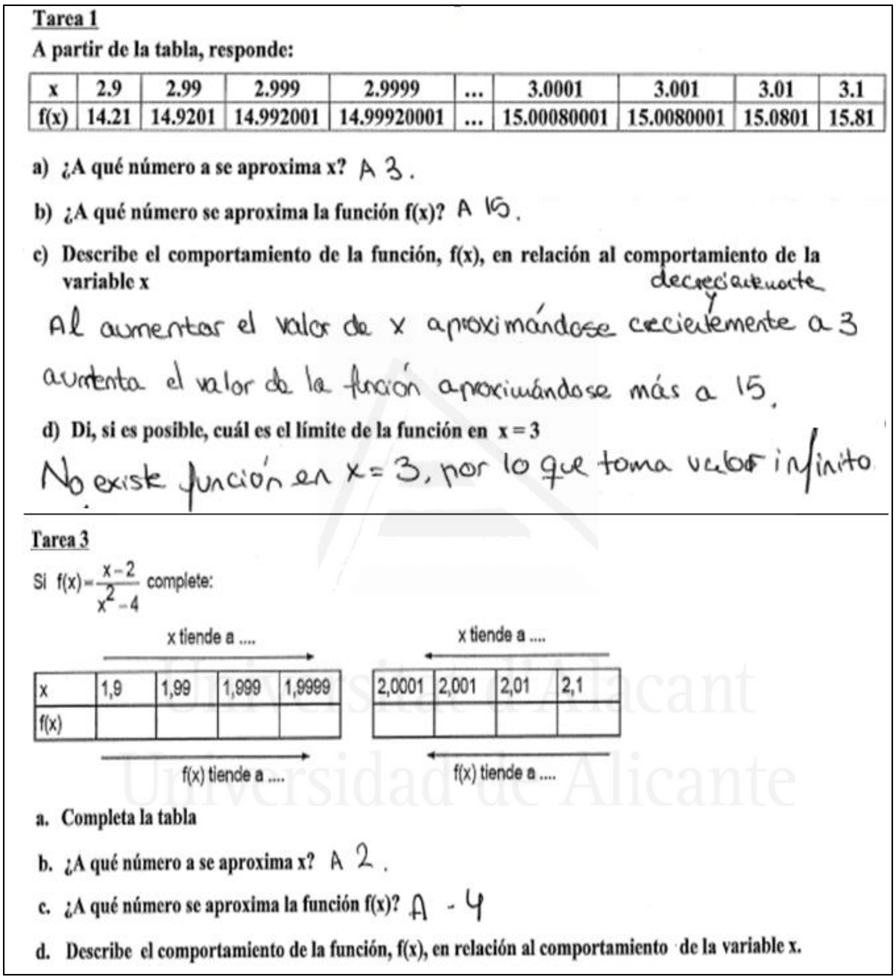
4.1.1. Características del nivel INTRA de desarrollo del esquema de límite

En este nivel, la idea de aproximación a un número viene determinada por la capacidad para construir la sucesión de valores de la función (los valores en rango) a partir de los valores del dominio y por la capacidad para leer gráficas de funciones. Estas dos ideas se convierten en prerrequisitos, respectivamente, para el desarrollo de la idea de aproximación numérica y para la coordinación gráfica de las aproximaciones en el esquema de límite de una función.

En este nivel están situados los estudiantes que tienen dificultades para construir la sucesión de valores de la función a partir de los valores de la variable independiente.

Una característica del comportamiento de los estudiantes en este nivel es que son capaces de resolver los ítems con aproximaciones laterales coincidentes en modo numérico.

Una evidencia de cómo se manifiesta la comprensión de la idea de aproximación la encontramos en los protocolos de la estudiante EST100 referentes a las tareas 1 y 3 (Figura 4.1).


Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? A 3.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A 15.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

decrecientemente

Al aumentar el valor de x aproximándose crecientemente a 3 aumenta el valor de la función aproximándose más a 15.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

No exist función en x = 3, por lo que toma valor infinito

Tarea 3

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... → ← x tiende a ....

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)								

f(x) tiende a .... → ← f(x) tiende a ....

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? A 2.

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A -4

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

Figura 4.1. Respuesta de la estudiante EST100 a las tareas 1 y 3

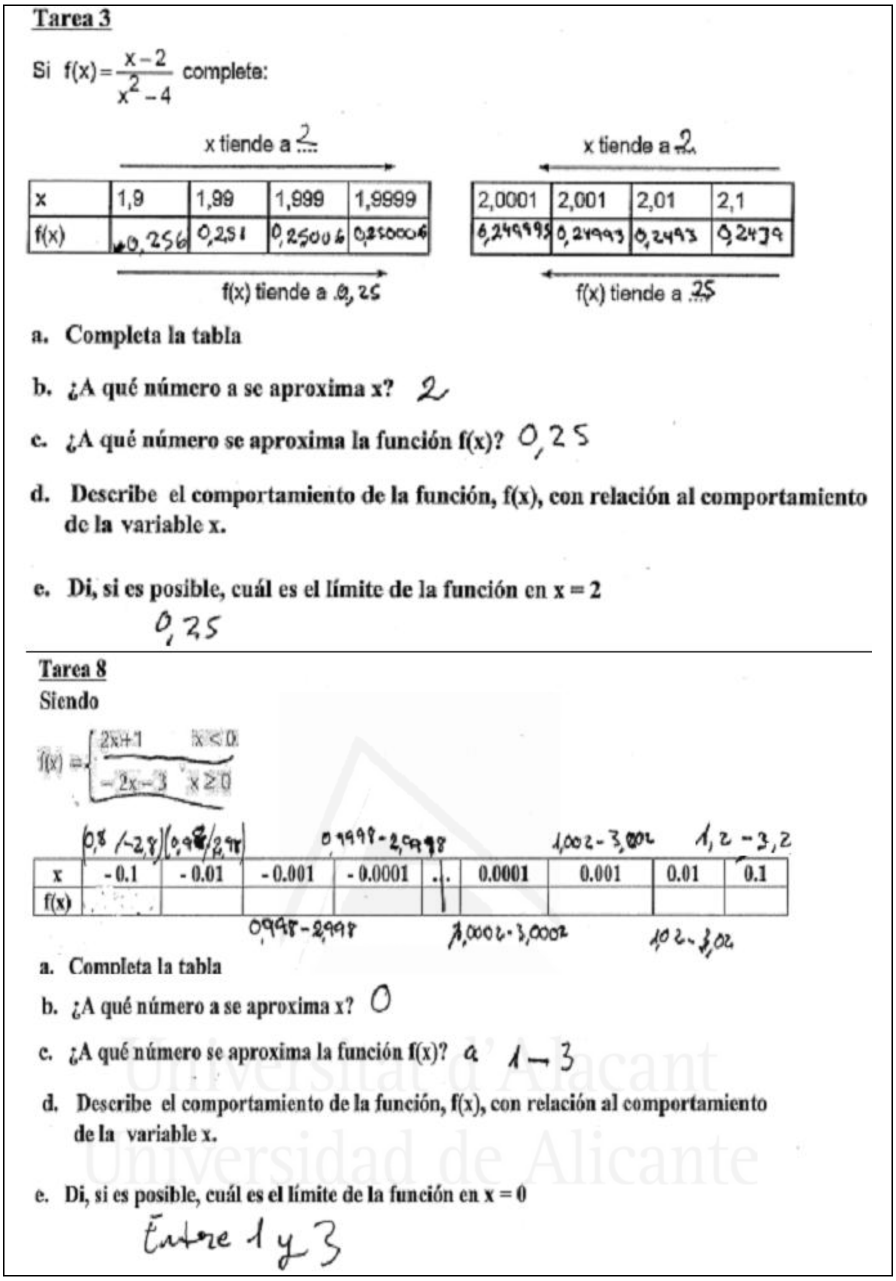
La tarea 1 presenta las dos sucesiones en el dominio y en el rango en modo numérico, y la estudiante indica correctamente que la variable independiente se aproxima a "*3*" y los valores de la función a "*15*". Sin embargo, en la tarea 3 la estudiante debe construir la sucesión en el rango a partir de la fórmula de la función y la sucesión de valores de *x*. En esta tarea la estudiante EST100 no calcula los valores de la función (deja la tabla vacía) y como consecuencia da una respuesta equivocada en relación a la aproximación de la función *(-4*).

Cuando los estudiantes son capaces de calcular los valores de la función desde la fórmula, pueden utilizar la idea de aproximación (en modo algebraico-numérico) tal como observamos en la respuesta dada por el estudiante EST64 a la tarea 3 (Figura 4.2). EST64 es capaz de usar la idea de aproximación en el rango en modo algebraico-numérico al no tener dificultades para construir la sucesión de valores de la función en la tarea 3. Este estudiante, una vez construida la sucesión de valores, da una respuesta correcta a la idea de aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (0,25).

No obstante, cabe señalar la influencia de la expresión algebraica de la función en el cálculo de valores de la función. El estudiante EST64, que en la tarea 3 ha sido capaz de construir la sucesión de valores de la función al sustituir los valores de la variable independiente en una función dada por un cociente de polinomios, tiene dificultades para construir las dos sucesiones de valores de la función cuando esta viene dada por dos expresiones distintas a la derecha y a la izquierda del valor al que se aproxima *x,* tal como se presenta en la tarea 8 (Figura 4.2).

En el caso de la tarea 8 (Figura 4.2) EST64 sustituye el mismo valor de *x* en las dos expresiones algebraicas generando una sucesión de valores de *f(x)* no adecuada. Al completar de forma incorrecta los valores de la función, este estudiante no ha construido las dos sucesiones de valores de *f(x)* sobre las cuales determinar a qué se aproxima dicha función.

Estos datos nos muestran que un prerrequisito para el uso de la idea de aproximación a un número en el concepto de límite es la comprensión de la expresión algebraica que da la fórmula. En particular, si la función está definida a trozos, se plantean dificultades para la construcción de la sucesión de valores en el rango.


Tarea 3

Si $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a 2 → ← x tiende a 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0,256	0,251	0,25006	0,250006

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,249995	0,24993	0,2493	0,2439

f(x) tiende a 0,25 → ← f(x) tiende a 25

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? 2

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 0,25

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2

0,25

Tarea 8

Siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x\geq 0 \end{cases}$$

0,8 /-2,8 | 0,98/2,98 | 0,9998-2,9998 | 1,002-3,002 | 1,2 -3,2

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)									

0,998-2,998 | 1,0002-3,0002 | 1,02-3,02

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? 0

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 1 → 3

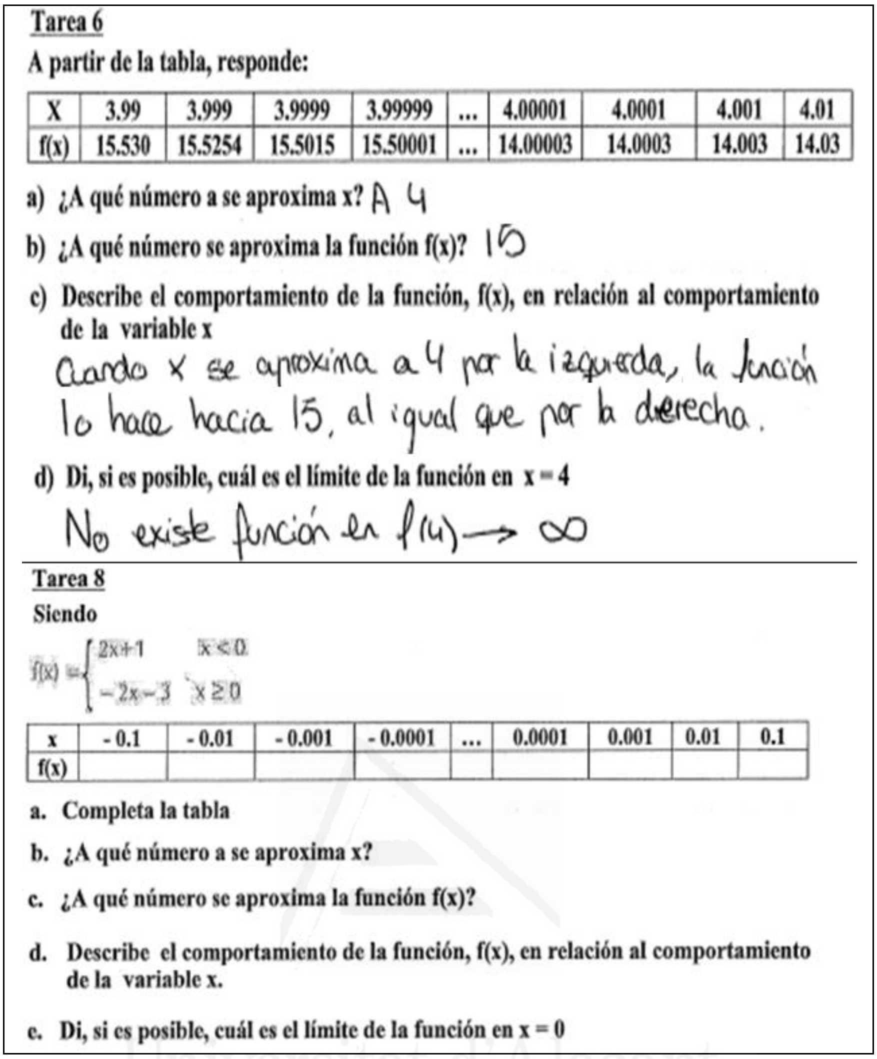
d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

Entre 1 y 3

Figura 4.2. Respuesta del estudiante EST64 a las tareas 3 y 8

Otra característica del nivel INTRA es que los estudiantes manifiestan dificultades para manejar adecuadamente las situaciones en las que los límites laterales no coinciden, independientemente del modo de representación utilizado (numérico o algebraico-numérico). Una evidencia de esta característica es el comportamiento de la estudiante EST100 en la tarea 6 (modo numérico) (Figura 4.3) en la que indica incorrectamente que la función se aproxima "*15*", y en la tarea 8 la deja en blanco.



Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? A 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

Cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, la función lo hace hacia 15, al igual que por la derecha.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

No existe función en $f(4) \rightarrow \infty$

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)									

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x?

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

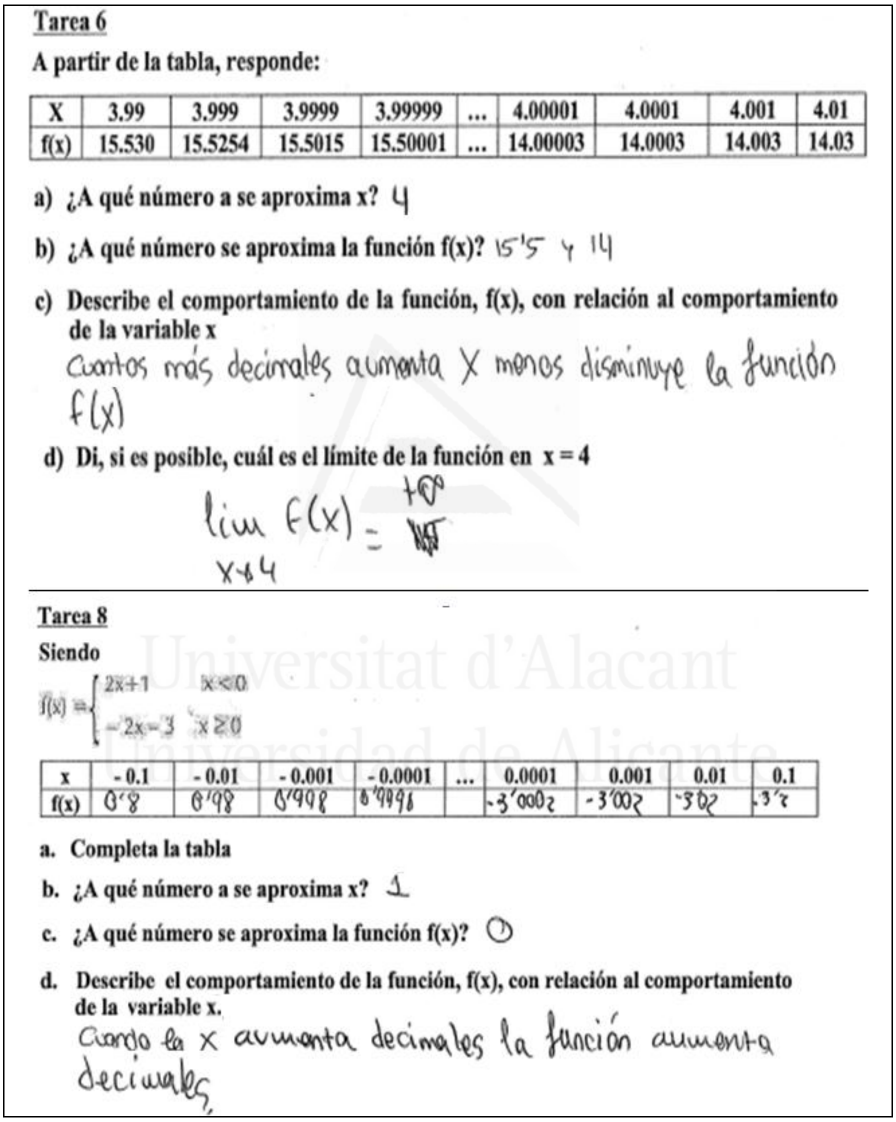
d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

Figura 4.3. Respuesta de la estudiante EST100 a la tareas 6 y 8

La aplicación de la idea de aproximación se apoya previamente en que sean capaces de construir la sucesión de valores de la función. Un aspecto que parece dificultar la construcción de los valores de la función es que las sucesiones del rango y el dominio tengan o no el mismo signo.

Por ejemplo, el estudiante EST26 en la tarea 6 (Figura 4.4) en modo numérico indica que la función se aproxima a "*15'5 y 14*" poniendo de manifiesto que ha identificado las dos aproximaciones diferentes en el rango, pero no proporciona una respuesta completa al no indicar expresamente la lateralidad. Los estudiantes de este nivel manejan por separado las aproximaciones por la izquierda y por la derecha. Esta forma de comportarse hace que, aunque la respuesta parezca correcta, el estudiante ponga de manifiesto claramente el uso independiente de las dos sucesiones (por la izquierda y por la derecha) no considerándola una sola aproximación. Sin embargo, en la tarea 8 (Figura 4.4) en modo algebraico-numérico, aunque es capaz de calcular los valores de la función definida a trozos, no es capaz de indicar de manera correcta a qué se aproximan los valores de la variable independiente (el alumno da como respuesta *x=1*; cuando los valores de la *x* se aproximan a *0*). Pero además, no es capaz de identificar las dos aproximaciones diferentes en el rango al indicar incorrectamente que la función se aproxima a "*0*". Lo que tienen en común estas sucesiones y lo que las diferencian de las sucesiones de la tarea 6 es que los elementos de la sucesión tienen signos diferentes.



Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15'5 y 14

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

Cuantos más decimales aumenta X menos disminuye la función f(x)

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998		-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? 1

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 0

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

Cuando la x aumenta decimales la función aumenta decimales

Figura 4.4. Respuesta del estudiante EST26 a las tareas 6 y 8

Por otra parte, el estudiante EST128 en la tarea 6 (Figura 4.5) indica incorrectamente que la función se aproxima a "*15'5*" y en la tarea 8 (Figura 4.5), después de construirse las sucesiones en el rango a partir de la definición de la función como una función a trozos, es capaz de indicar correctamente que la función "*se aproxima a 1 por la izquierda y a –3 por la derecha*".

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15'5

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

lim f(4) = 15'5

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998	...	-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? 0

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

Se aproxima a 1 por la izquierda y a -3 por la derecha.

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

lim f(0) = -2x-3 = -3

Figura 4.5. Respuesta del estudiante EST128 a las tareas 6 y 8

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Estos comportamientos diferentes cuando los límites laterales no coinciden pueden ser considerados como una manifestación del proceso de construcción cognitiva de la idea de aproximación por parte del estudiante.

Otra característica del nivel INTRA son las dificultades en manejar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango. En este nivel los estudiantes, o no coordinan las aproximaciones, o solamente realizan dicha coordinación en un único modo de representación (numérico o gráfico) cuando las aproximaciones laterales coinciden.

Una manifestación de dichas dificultades la encontramos en los protocolos de la estudiante EST100, que en la tarea 1 (Figura 4.1) en modo numérico es capaz de indicar correctamente la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando coinciden las aproximaciones laterales afirmando que "*al aumentar el valor de x aproximándose creciente y decrecientemente a 3, aumenta el valor de la función aproximándose más a 15*". Esta misma estudiante en la tarea 6 (Figura 4.3) aunque, aparentemente, no tiene dificultades en la comprensión de la lateralidad al indicar "*por la izquierda*" o "*por la derecha*", no es capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden, puesto que indica incorrectamente que "*cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, la función lo hace hacia 15, al igual que por la derecha*".

Por otro lado, esta estudiante tampoco es capaz de coordinar las aproximaciones en modo gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no coinciden. La manifestación de esta incapacidad la podemos observar en los protocolos correspondientes a las tareas 2 y 7 (Figura 4.6).

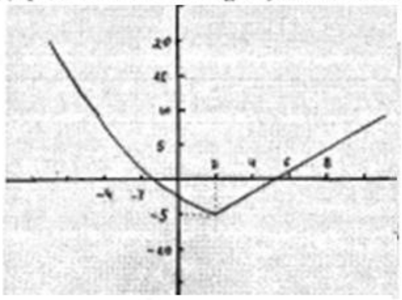
En la tarea 2 la estudiante EST 100 no interpreta adecuadamente la pregunta de los ítems *b* y *c* y contesta en ambos que "se *aproxima a 2*". Confunde la aproximación de la función con la aproximación de la variable independiente. En la tarea 7 no es capaz de usar la coordinación de las aproximaciones porque por la izquierda indica incorrectamente que la función se aproxima a "*10*", y por la derecha confunde la aproximación de la función con la aproximación de la variable independiente al decidir que se aproxima a "*4*".

Estos comportamientos pueden ser interpretados como manifestaciones de que la lectura de gráficas debe ser considerada un prerrequisito del desarrollo de la coordinación de las aproximaciones en el modo gráfico.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a. **Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

b. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

Se aproxima a 2.

c. **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?**

Se aproxima a 2.

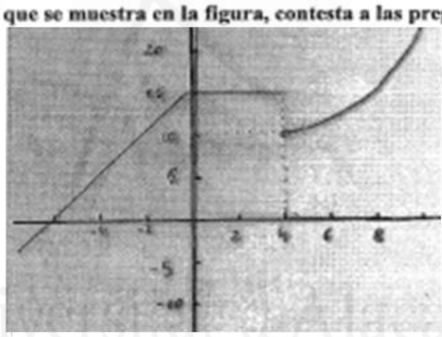
d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.**

Conforme aumenta el valor de x lo hace la función.

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x – 2**

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:



a) **Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto**

x=4 f(x) = 10

b) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** A 10.

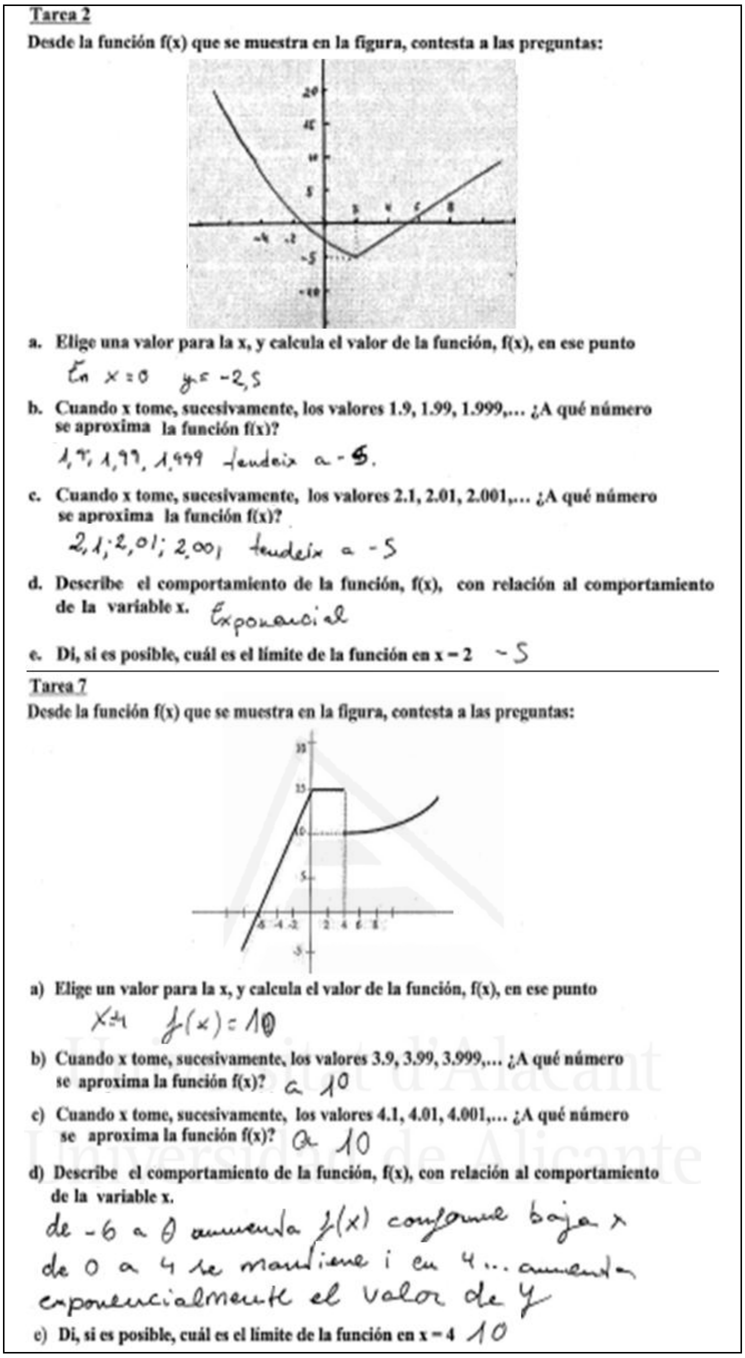
c) **Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?** A 4.

d) **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.**

e) **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x – 4** lim f(x) = 10

Figura 4.6. Respuesta de la estudiante EST100 a las tareas 2 y 7

Sin embargo, cuando los estudiantes son capaces de interpretar adecuadamente la gráfica de la función en este nivel, pueden coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango si coinciden las aproximaciones laterales. Una manifestación de esta característica es el protocolo del estudiante EST64 referente a la tarea 2 (Figura 4.7).



Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a. Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

En x = 0 y = -2,5

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

1,9; 1,99, 1,999 tendeix a -5.

c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

2,1; 2,01; 2,001 tendeix a -5

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x. Exponencial

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2 -5

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

X=4 f(x) = 10

b) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 10

c) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 10

d) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

de -6 a 0 aumenta f(x) conforme baja x
de 0 a 4 se mantiene i en 4... aumenta
exponencialmente el valor de y

e) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4 10

Figura 4.7. Respuesta del estudiante EST64 a las tareas 2 y 7

En la tarea 2 el estudiante EST64 coordina las aproximaciones al indicar que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1,99, 1.999,..., la función tiende "*tendeix a –5*". De la misma forma establece que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…la función tiende a "*tendeix a –5*". Sin embargo, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, no es capaz de establecer la coordinación. La manifestación de esta incapacidad la tenemos en el protocolo correspondiente a la tarea 7 (Figura 4.7) donde el estudiante indica incorrectamente que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores

3.9, 3,99, 3.999,..., la función se aproxima a "*10*" (en vez de a 15), aunque sí es capaz de coordinar por la derecha al indicar que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 4.1, 4,01, 4.001,..., la función se aproxima a "*10*" (Recordar que EST64 tiene dificultades con la representación analítica en la tarea 8 (Figura 4.2)).

Otra característica del nivel Intra son las dificultades en manifestar formalmente el límite. En este nivel los estudiantes, o no manifiestan formalmente el límite, o solamente realizan dicha manifestación cuando las aproximaciones laterales coinciden. Por ejemplo, en los ítems en los que las aproximaciones laterales no coinciden, la EST100, en la tarea 1 (Figura 4.1) en modo numérico, no es capaz de indicar correctamente la manifestación formal del límite al afirmar que "*no existe función en x=3, por lo que toma el valor infinito*", y en la tarea 6 (Figura 4.3) tampoco es capaz de indicar correctamente la manifestación formal del límite al afirmar que "*no existe función en f(4) → ∞*". Esta misma estudiante tampoco es capaz de manifestar formalmente el límite en modo algebraico-numérico porque deja en blanco las tareas 3 (Figura 4.1) y 8 (Figura 4.3), ni es capaz de hacerlo en modo gráfico porque deja en blanco la tarea 2 (Figura 4.6), y en la tarea 7 (Figura 4.6) indica incorrectamente que el límite de la función es "*lím f(4)=10*".

Sin embargo, cuando las aproximaciones laterales coinciden estos estudiantes si son capaces de manifestar formalmente el límite. Así en la tarea 2 en modo gráfico y en la tarea 3 en modo algebraico-numérico EST64 es capaz de manifestar formalmente el límite al indicar correctamente que es "*–5*", y que es "*0'25*" respectivamente.

En los protocolos anteriores hemos podido observar la dificultad que tienen los estudiantes en coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango. Dicha dificultad proviene de la necesidad de comprender los prerrequisitos y los aspectos que hemos considerado como características del Nivel INTRA. Consideramos como prerrequisitos para ser capaz de coordinar las aproximaciones:

- cálculo de los valores de la función cuando está definida a trozos;
- lectura de las gráficas;
- manejar las situaciones en las que las sucesiones de los valores de la función tengan diferentes signos a la izquierda y a la derecha del valor de la variable independiente donde queremos calcular el límite, no coincidiendo dichas aproximaciones laterales;

- manejar situaciones donde el número al que se aproximan las aproximaciones laterales son diferentes en el rango (existencia de un salto en la continuidad de la función).

En la tabla 4.1 explicitamos las características del nivel INTRA de desarrollo del esquema de límite.

Tabla 4.1. Características del nivel INTRA de desarrollo del esquema de límite

NIVEL INTRA	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en modo numérico y algunos en los dos modos, numérico y algebraico-numérico y cuando las aproximaciones laterales no coinciden a lo sumo se es capaz de realizar aproximaciones en un modo de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación c) En algunos casos empezar a manifestar formalmente el límite cuando las aproximaciones laterales coinciden

La tabla 4.2 nos muestra cómo se distribuyen los 59 estudiantes que hemos situado en el Nivel INTRA en relación a cómo coordinan las aproximaciones coincidentes en el modo de representación correspondiente.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tabla 4.2. Estudiantes del nivel INTRA

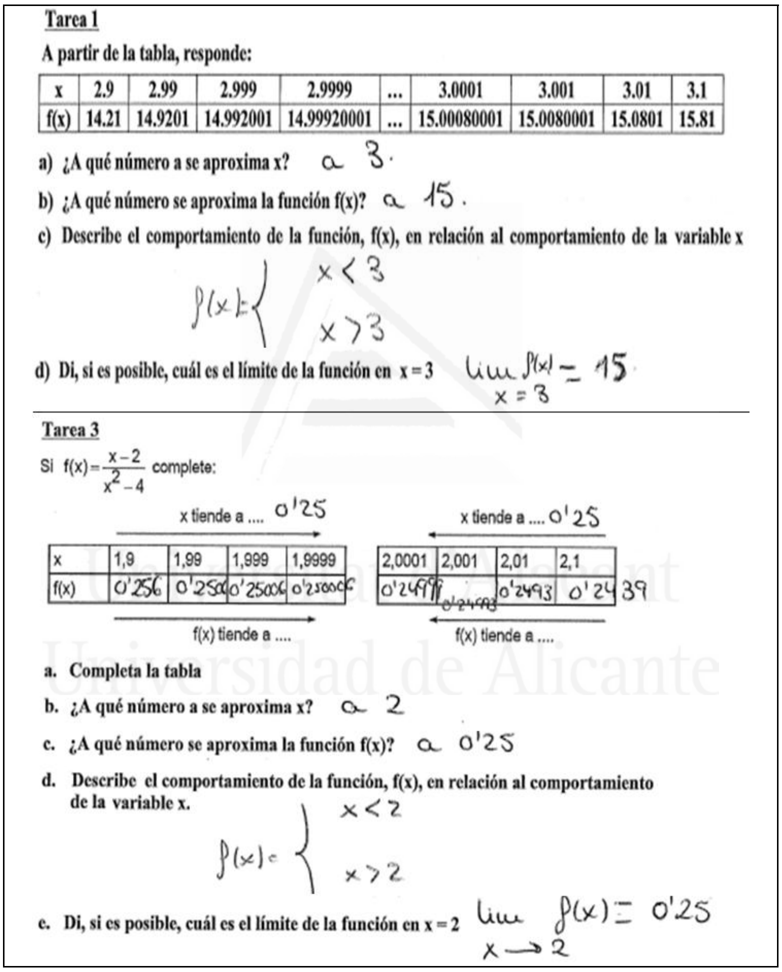
	Numérico		Algebraico-Numérico		Gráfico	
	Coinciden		Coinciden		Coinciden	
	SI (T1)	NO (T6)	SI (T3)	NO (T8)	SI (T2)	NO (T7)
Coordinación dinámica	2	0	0	0	18	0

4.1.2. Características del nivel INTER de desarrollo del esquema de límite

En este nivel los estudiantes no tienen dificultades en construir la sucesión de valores de la función a partir de los valores de la variable independiente, pero pueden tener dificultades para leer gráficas de funciones.

El comportamiento de los estudiantes en el nivel INTER viene caracterizado porque coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Cuando coinciden, coordinan en uno o dos modos de representación. Usan la idea de aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales son coincidentes en los modos de representación numérico y algebraico-numérico, y empiezan a establecer en algunos casos la coordinación métrica en términos de desigualdades.

Una evidencia de la comprensión de la idea de aproximación es la respuesta de la estudiante EST68 a la tarea 1 y a la tarea 3 (Figura 4.8).



Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? a 3.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 15.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

$f(x) = \begin{cases} x < 3 \\ x > 3 \end{cases}$

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3 $\lim_{x=3} f(x) = 15$

Tarea 3

Si $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... 0'25 x tiende a .... 0'25

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0'256	0'2500	0'25006	0'250006	0'24999	0'24993	0'2493	0'2439

f(x) tiende a .... f(x) tiende a ....

a. **Completa la tabla**

b. **¿A qué número a se aproxima x?** a 2

c. **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** a 0'25

d. **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.**

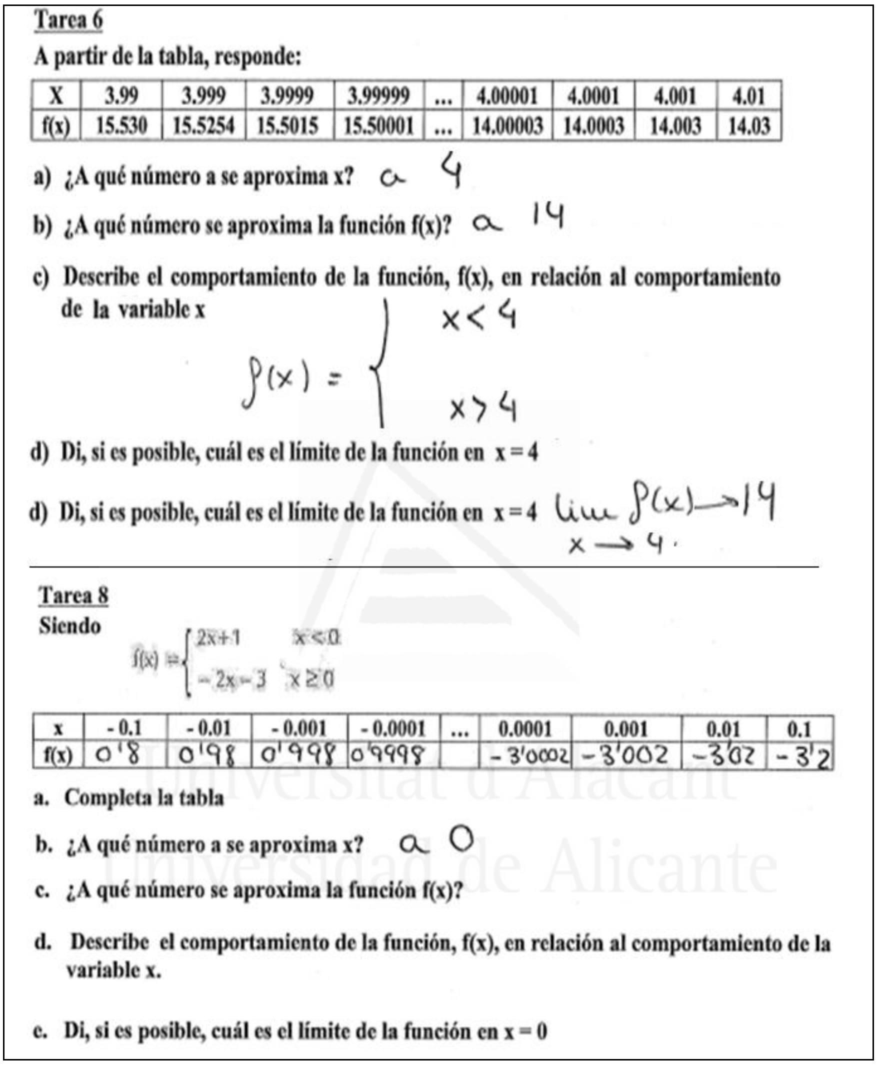
$f(x) = \begin{cases} x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$

e. **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2** $\lim_{x \to 2} f(x) = 0'25$

Figura 4.8. Respuesta de la estudiante EST68 a las tareas 1 y 3

La tarea 1 presenta las dos sucesiones (en el dominio y en el rango) en modo numérico y la estudiante indica correctamente que la variable independiente se aproxima a "*3*" y los valores de la función a "*15*". Por otra parte, en la tarea 3 la estudiante construye la sucesión en el rango a partir de la fórmula de la función y la sucesión de valores de *x,* y responde correctamente sobre la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (0,25) en modo algebraico-numérico.

Una característica del nivel INTER es que los estudiantes responden de forma dispar a los ítems que exigen coordinar las aproximaciones laterales no coincidentes. Evidencias de este comportamiento son las respuestas de las estudiantes EST68 (Figura 4.9), EST76 (Figura 4.10) y EST85 (Figura 4.11) a la tarea 6 (modo numérico) y a la tarea 8 (modo algebraico-numérico).



Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? a 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 14

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

$$f(x) = \begin{cases} & x < 4 \\ & x > 4 \end{cases}$$

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4 $\lim_{x \to 4.} f(x) \to 14$

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998		- 3'0002	- 3'002	- 3'02	- 3'2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? a 0

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 4.9. Respuesta de la estudiante EST68 a las tareas 6 y 8

A la estudiante EST68, le resulta difícil manejar la idea de aproximación cuando las aproximaciones laterales no coinciden, por ejemplo, en la tarea 6 EST68 (Figura 4.9) indica incorrectamente que los valores de la función se aproximan a "*14*", no reconociendo que las sucesiones de valores de la función por la derecha e izquierda se aproximan a valores diferentes. De la misma manera, en la tarea 8, aunque construye la sucesión de valores en el rango a partir de la fórmula de la función, deja en blanco el resto de ítems de la tarea. En la entrevista realizada posteriormente sobre los ítems que dejó en blanco en la tarea 8, EST68 diferencia las aproximaciones por la izquierda y por la derecha, pero nos indica que dejó en blanco el ítem *c* porque "*al tener diferentes valores no sabría decir*" a qué se aproximaba la función.

> *EST68: Sí, es la misma, pero lo que pasa es que tiene diferentes valores, pero,…, oh,…, es que cuando, por la izquierda tiende a 0, la función tiende a 1, y cuando por la derecha tiende a 0, la función tiende a -3. Entonces, no sabría decir cuando x es 0, si es 1 o –3, por eso lo dejé en blanco, igual que el límite.*
>
> (EST68. Entrevista sobre la tarea 8)

Por otra parte, la estudiante EST76 en la tarea 6 (Figura 4.10) indica incorrectamente que la función se aproxima a "*15*", pero en la tarea 8 (Figura 4.10), después de construirse las sucesiones en el rango a partir de la definición de la función como una función a trozos indica correctamente que "*Quan* $x < 0$ $f(x) \approx 1$. *Quan* $x \geq 0$ $f(x) \approx -3$" ("cuando $x < 0$ $f(x) \approx 1$. *Cuando* $x \geq 0$ $f(x) \approx -3$").

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? 15

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

Tarea 8

Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x\geq 0 \end{cases}$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0,8	0,98	0,998	0,9998		-3,0002	-3,002	-3,02	-3,2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? 0

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

Quan $x<0$ $f(x) \simeq 1$ Quan $x \geq 0$ $f(x) \approx -3$

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

Quan x és negativa f(x) tendeix a 1 que és positiu, mentres que quan x és positiva f(x) tendeix a -3 que és negatiu

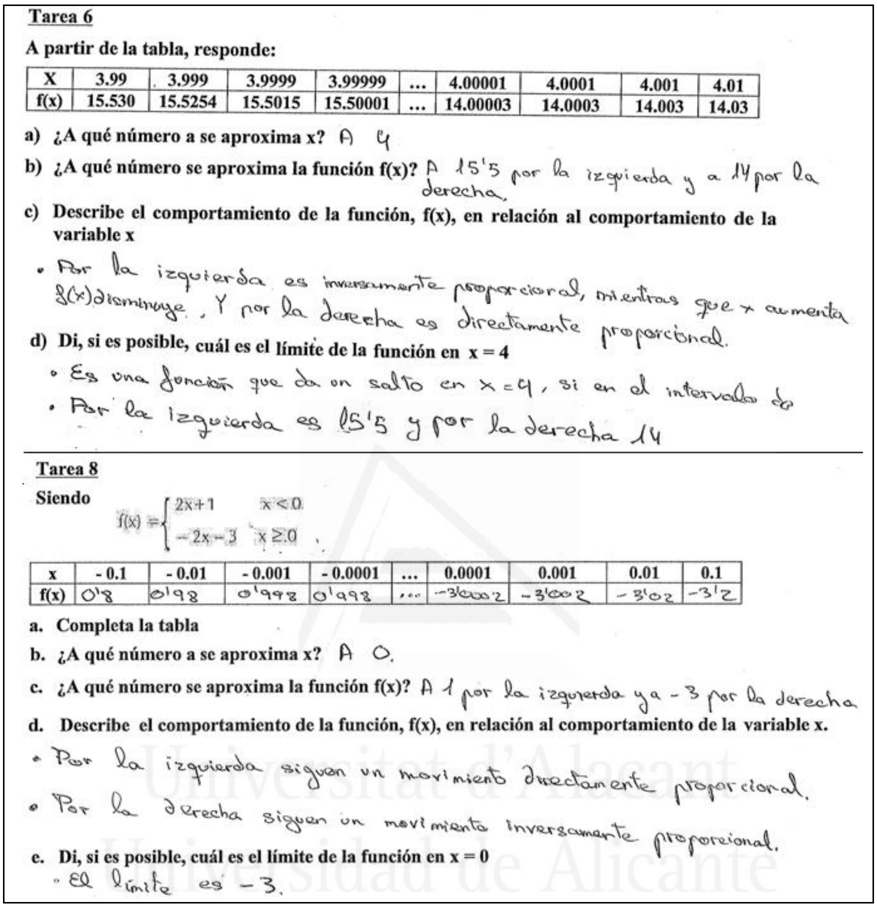
e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

El límit quan x=0 és -3, degut a la fórmula de $f(x) = -2x-3$ quan $x \geq 0$.

Figura 4.10. Respuesta de la estudiante EST76 a las tareas 6 y 8

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Finalmente, la estudiante EST85 en la tarea 6, en modo numérico, (Figura 4.11) indica correctamente que la función se aproxima "*a 15'5 por la izquierda y a 14 por la derecha*" y en la tarea 8 (Figura 4.11), después de construirse las sucesiones en el rango a partir de la definición de la función como una función definida a trozos, indica correctamente que la función se aproxima "*a 1 por la izquierda y a –3 por la derecha*".



Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? A 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A 15'5 por la izquierda y a 14 por la derecha.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

• Por la izquierda es inversamente proporcional, mientras que x aumenta f(x) disminuye. Y por la derecha es directamente proporcional.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

• Es una función que da un salto en x = 4, si en el intervalo de
• Por la izquierda es 15'5 y por la derecha 14

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	…	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'998	...	-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? A 0.

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A 1 por la izquierda y a -3 por la derecha

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

• Por la izquierda siguen un movimiento directamente proporcional.
• Por la derecha siguen un movimiento inversamente proporcional.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

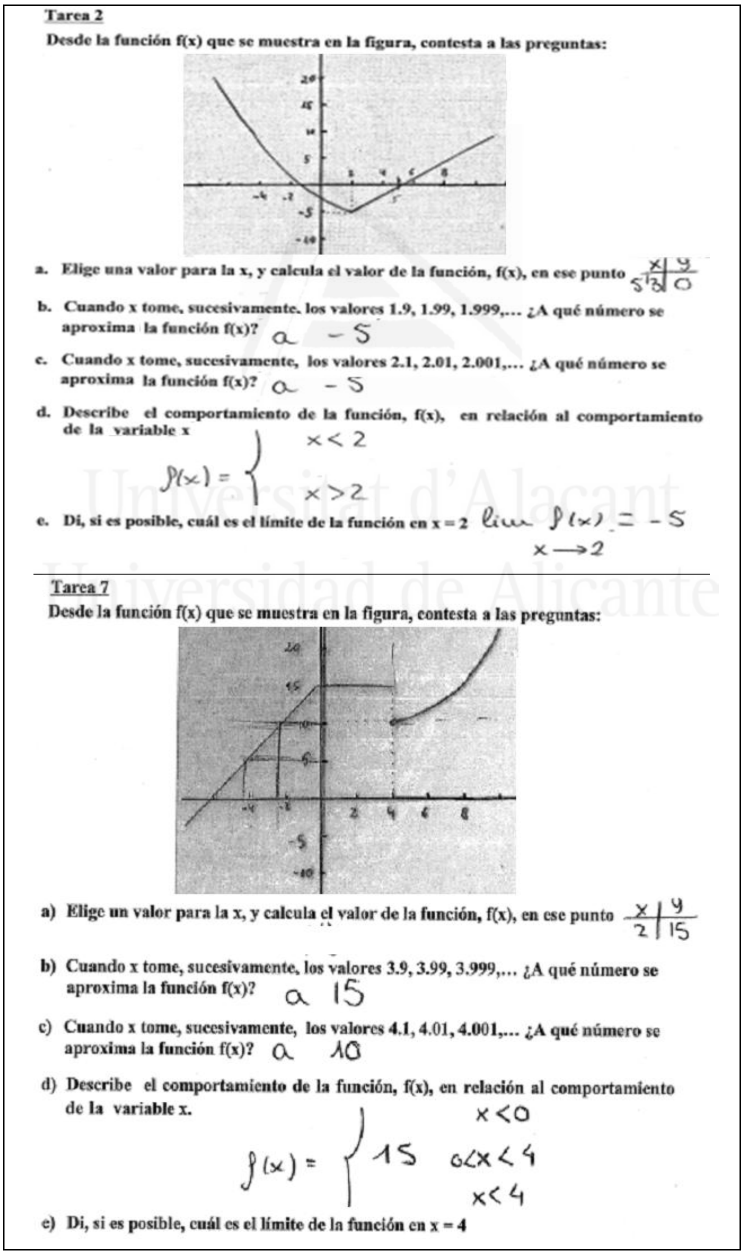
• El límite es -3.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 4.11. Respuesta de la estudiante EST85 a las tareas 6 y 8

Estos datos indican que un prerrequisito para el uso de la idea de aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales no coinciden es la comprensión de la lateralidad. Es decir, comprender que puede haber aproximación por la izquierda o por la derecha, aunque sean distintas y que ha de ser manipulada como una sola idea cognitiva.

Otra de las características del nivel INTER es que los estudiantes coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango solo en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden y cuando las aproximaciones laterales coinciden, coordinan las aproximaciones a lo sumo en dos modos de representación. Este comportamiento se da mayoritariamente en modo gráfico, en menor medida en modo algebraico-numérico, y en mucha menor medida en modo numérico. Por ejemplo, las respuestas de EST68 son una evidencia de la coordinación en modo gráfico, cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no. En las tareas 1 y 3 (Figura 4.8) así como en la tarea 6 (Figura 4.9) al describir el comportamiento de la función intenta escribir una función definida a trozos. En la tarea 8 (Figura 4.9) deja la respuesta en blanco. Sin embargo, esta misma estudiante es capaz de coordinar las aproximaciones en modo gráfico, tanto cuando las aproximaciones laterales coinciden como cuando no coinciden en los casos en que la pregunta indique claramente la sucesión de valores en el dominio. La evidencia de esta capacidad la podemos observar en los protocolos correspondientes a las tareas 2 y 7 (Figura 4.12).


Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a. Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto x | y; 5'3 | 0

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a −5

c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a −5

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x

f(x) = { x < 2; x > 2

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2 $\lim_{x \to 2} f(x) = -5$

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto x | y; 2 | 15

b) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 15

c) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,... ¿A qué número se aproxima la función f(x)? a 10

d) Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x.

f(x) = { x<0; 15 0<x<4; x<4

e) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

Figura 4.12. Respuesta de la estudiante EST68 a las tareas 2 y 7

En la tarea 2 la estudiante EST68 coordina las aproximaciones gráficas coincidentes al indicar que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1.99, 1.999,…, la función se aproxima "*a –5*". De la misma forma establece que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…, la función se aproxima a *" –5*". Por otra parte en la tarea 7 (Figura 4.12) esta estudiante coordina las aproximaciones gráficas no coincidentes al indicar que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999,…, la función se aproxima "*a 15*" y que cuando la variable independiente toma los valores 4.1, 4.01, 4.001,…, la función se aproxima "*a 10*".

En los protocolos anteriores hemos podido observar el comportamiento de estudiantes que realizan la coordinación de los procesos cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no coinciden en modo gráfico y que sin embargo no son capaces de realizar dicha coordinación en modo numérico ni en modo algebraico-numérico.

Estos comportamientos pueden ser interpretados como una doble manifestación de la comprensión alcanzada. Por una parte, cuando los estudiantes son capaces de leer la gráfica de una función, y se les indica la sucesión de valores en el dominio, entonces son capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango. Por otra parte, los estudiantes tienen dificultades en comprender en los tres modos (numérico, gráfico y algebraico-numérico) la pregunta "*Describe el comportamiento de la función f(x), en relación al comportamiento de la variable x"*, que representa la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango. Esta dificultad se evidenció durante las entrevistas realizadas, por ejemplo, al estudiante EST67 sobre la tarea 3:

> *EST67: Es veu que la x s'aproxima per l'esquerra al 2, i per la dreta també, i es demana omplir la funció de la x i substituint en la fórmula que hi ha al principi es poden obtindre els valors, però per a descriure el comportament de la funció en relació al comportament de la x, no sé com hauria d'expressar-ho, ..., utilitzant una fórmula, o la gràfica, o escrivint alguna cosa.*
>
> (EST67. Entrevista sobre la tarea 3)

En el protocolo anterior EST67 indica que no sabe cómo describir el comportamiento de la función en relación al comportamiento de la *x*. Si debe utilizar una formula, o una gráfica, o escribir alguna cosa.

Otra de las características del nivel INTER son las dificultades en manejar la coordinación métrica en términos de desigualdades. Solamente algunos de los estudiantes de este nivel son capaces de utilizar la coordinación métrica. Por ejemplo, la estudiante EST68 en la tarea 4 (Figura 4.13) que presenta las cuatro sucesiones (en el dominio, en el rango, y las diferencias en valor absoluto en el dominio y en el rango) en modo numérico, indica correctamente que "*han de ser majors que 0'4999 i menors que 0'5001. 0'4999<x<0'5001*" ("han de ser mayores que 0'4999 y menores que 0'5001. *0'4999< x< 0'5001*"). De la misma forma establece que "*El límite f(x) cuando x→ 0,5 es 1,5*".

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función, f(x), y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	…	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	…	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
I 0,5 - xI	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	…	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
I1,5 - f(x)I	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

a. ¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001?

han de ser mayors que 0'4999 i
menors que 0'5001 $\boxed{0'4999 < x < 0'5001}$

b. Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x = 0,5?

$\lim_{x \to 0'5} f(x) = 1'5$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 4.13. Respuesta de la estudiante EST68 a la tarea 4

Ha sido durante la entrevista donde hemos podido entender la comprensión que los estudiantes tienen de la coordinación métrica en términos de desigualdades, y de cómo calculan el límite de la función. En la entrevista EST68 justifica la forma en que resuelve el ítem *a*, "¿Cómo de próximos han de estar los valores de *x* de 0.5 para que la diferencia *1,5-f(x),* en valor absoluto, sea menor que 0,001?", de la tarea 4, indicando:

EST68: Han de ser "majors que 0.4999 i menors que 0.5001".
Inv: ¿Dónde miras, qué observas para dar esa respuesta?
EST68: A ver,…, pues, hum, lo estuve mirando en la tabla, pero ahora no sé por qué, tienen que ser mayores que 0.4999 y menores que 0.5001, tienen que estar entre estos para que te dé. Porque la diferencia dice que tiene que ser menor que 0.001.
Inv: ¿La diferencia entre quién?
EST68: 1.5–f(x).
Inv: ¿Por qué dices que el límite de la función cuando x tiende a 0.5

> *es 1.5?*
> *EST68: Cuando x tiende a 0.5, la función se va acercando a 1.5, y por la derecha, cuando tiende a 0.5 la x, la función tiende a 1.5.*
> *Inv: Para esa respuesta última que me estás dando, ¿dónde estás mirando? ¿En qué filas estás mirando?*
> *EST68: En la primera y en la segunda.*
> *Inv: En la primera y en la segunda.*
> *EST68: En la de x y en la de f(x).*
>
> (EST68. Entrevista sobre la tarea 4)

En la entrevista EST68 indica de forma clara que en la respuesta al ítem *b*, sobre el límite de la función, ha observado las dos primeras filas "*En la de x y en la de f(x)*". No se estaba considerando la sucesión de las diferencias sino en los valores de las sucesiones de x y f(x).

En resumen los prerrequisitos para coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango en el Nivel INTER:

- la lectura de las gráficas ;
- la comprensión de la lateralidad en el sentido de diferenciar las aproximaciones por la derecha y las aproximaciones por la izquierda. En particular, si la función tiene límites laterales no coincidentes plantea dificultades para construir la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango;
- el papel determinante que para la comprensión de la coordinación de las aproximaciones juega de manera progresiva los distintos modos de representación (el modo gráfico; el modo algebraico-numérico; y en menor medida el modo numérico). Estos comportamientos en tareas que se presentan en distintos modos de representación pueden ser considerados como una manifestación del proceso de construcción cognitivo de la coordinación de las aproximaciones por parte de los estudiantes.

En la tabla 4.3 explicitamos las características del nivel INTER de desarrollo del esquema de límite a partir de las evidencias empíricas anteriores.

Tabla 4.3. Características del nivel INTER de desarrollo del esquema de límite

NIVEL INTER	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en los dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden ser capaz de considerar las aproximaciones a lo sumo en dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en uno o dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden la coordinación solo se realiza en un modo de representación c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades

La tabla 4.4 nos muestra la distribución de los 47 estudiantes asignados al Nivel INTRA considerando cuando son capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no teniendo en cuenta los modos de representación. En relación a la coordinación observamos que en las celdas correspondientes a la no coincidencia están los 47 (6+16+25) estudiantes de este nivel, y en las celdas correspondientes a la coincidencia hay más de 47 estudiantes (8+16+36) porque algunos de ellos coordinan las aproximaciones en dos modos de representación (13).

Tabla 4.4. Estudiantes del nivel INTER

	Numérico		Algebraico-Numérico		Gráfico	
	Coinciden		Coinciden		Coinciden	
	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Coordinación dinámica	8	6	16	16	36	25
Coordinación métrica	9	3	-	-	-	-

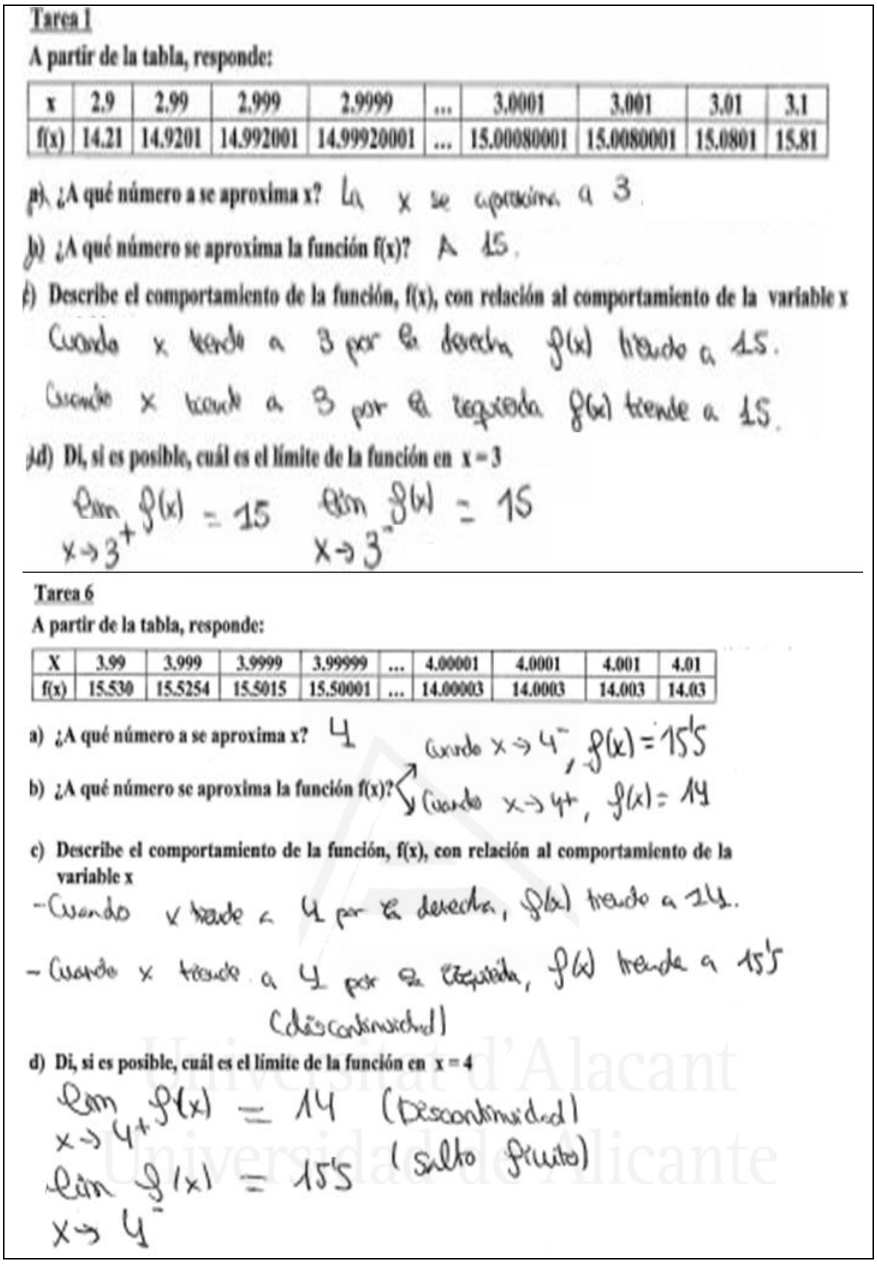
4.1.3. Características del nivel TRANS de desarrollo del esquema de límite

En este nivel los estudiantes no tienen dificultades en construir la sucesión de valores de la función a partir de los valores de la variable independiente, ni tienen dificultades en leer gráficas de funciones.

El comportamiento de los estudiantes en el nivel TRANS viene caracterizado porque coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango, en los tres modos de representación, cuando las aproximaciones laterales coinciden. Cuando las aproximaciones laterales no coinciden, coordinan al menos en dos modos de representación. También empiezan a establecer en algunos casos la coordinación métrica en términos de desigualdades.

A continuación, pasamos a mostrar evidencias que justifican las características del nivel TRANS. Por ejemplo, el estudiante EST47 coordina las aproximaciones coincidentes y no coincidentes en todos los modos de representación. En la tarea 1 (Figura 4.14) indica correctamente la coordinación de las aproximaciones coincidentes en modo numérico, afirmando que "*Cuando x tiende a 3 por la derecha f(x) tiende a 15. Cuando x tiende a 3 por la izquierda f(x) tiende a 15*". De la misma forma en la tarea 6 (Figura 4.14) indica correctamente la coordinación de las aproximaciones no coincidentes señalando que "*Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) tiende a 14. Cuando x tiende a 4 por la izquierda, f(x) tiende a 15'5*".

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) ¿A qué número a se aproxima x? La x se aproxima a 3.

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A 15.

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

Cuando x tiende a 3 por la derecha f(x) tiende a 15.

Cuando x tiende a 3 por la izquierda f(x) tiende a 15.

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 15$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 15$

Tarea 6

A partir de la tabla, responde:

X	3.99	3.999	3.9999	3.99999	...	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	...	14.00003	14.0003	14.003	14.03

a) ¿A qué número a se aproxima x? 4

b) ¿A qué número se aproxima la función f(x)? Cuando $x \to 4^-$, $f(x) = 15'5$ Cuando $x \to 4^+$, $f(x) = 14$

c) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

-Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) tiende a 14.

- Cuando x tiende a 4 por la izquierda, f(x) tiende a 15'5 (discontinuidad)

d) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

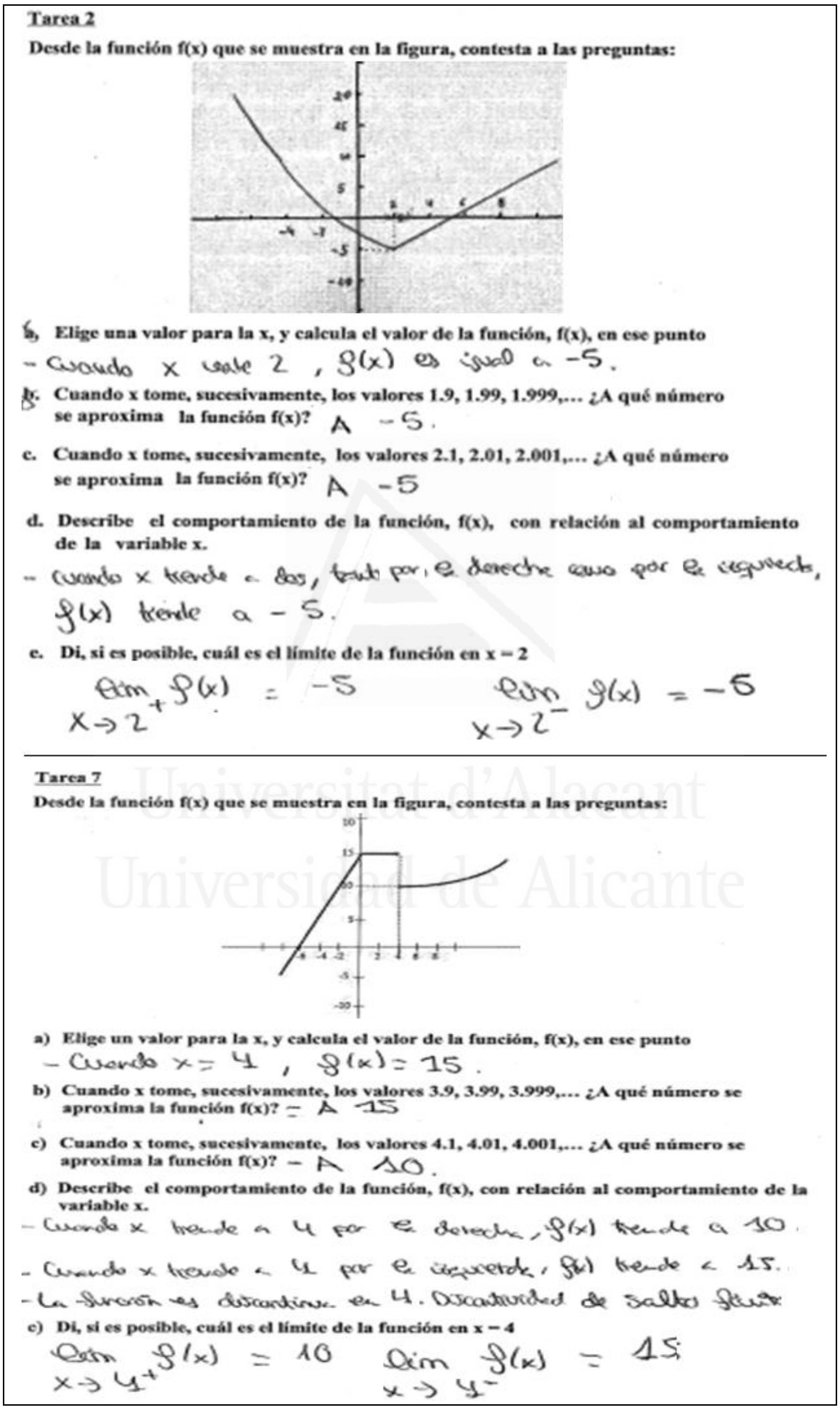
$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 14$ (Discontinuidad) (salto finito)

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 15'5$

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

Figura 4.14. Respuesta de la estudiante EST47 a las tareas 1 y 6

EST47 también es capaz de coordinar las aproximaciones en modo gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden y cuando no. En la tarea 2 (Figura 4.15) coordina las aproximaciones coincidentes al indicar que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 1.9, 1.99, 1.999,…, la función se aproxima "*A –5*". De la misma forma establece que cuando la variable independiente toma los valores 2.1, 2.01, 2.001,…, la función se aproxima "*A –5*". También describe el comportamiento de la función al manifestar que "*Cuando x tiende a dos, tanto por la derecha como por la izquierda, f(x) tiende a –5*". Por otra parte en la tarea 7 (Figura 4.15) coordina las aproximaciones no coincidentes al indicar correctamente que cuando la variable independiente toma sucesivamente los valores 3.9, 3.99, 3.999,…, la función se aproxima "*A 15*", y cuando toma los valores 4.1, 4.01, 4.001,…, la función se aproxima "*A 10*", describiendo el comportamiento de la función al manifestar que "*Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) tiende a 10. Cuando x tiende a 4 por la izquierda, f(x) tiende a 15*".



Tarea 2

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a. Elige una valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

- Cuando x vale 2, f(x) es igual a −5.

b. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 1.9, 1.99, 1.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A −5.

c. Cuando x tome, sucesivamente, los valores 2.1, 2.01, 2.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A −5

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

- Cuando x tiende a dos, tanto por la derecha como por la izquierda, f(x) tiende a −5.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -5$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -5$

Tarea 7

Desde la función f(x) que se muestra en la figura, contesta a las preguntas:

a) Elige un valor para la x, y calcula el valor de la función, f(x), en ese punto

- Cuando x = 4, f(x) = 15.

b) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 3.9, 3.99, 3.999,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)? − A 15

c) Cuando x tome, sucesivamente, los valores 4.1, 4.01, 4.001,… ¿A qué número se aproxima la función f(x)? − A 10.

d) Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

- Cuando x tiende a 4 por la derecha, f(x) tiende a 10.
- Cuando x tiende a 4 por la izquierda, f(x) tiende a 15.
- La función es discontinua en 4. Discontinuidad de salto finito

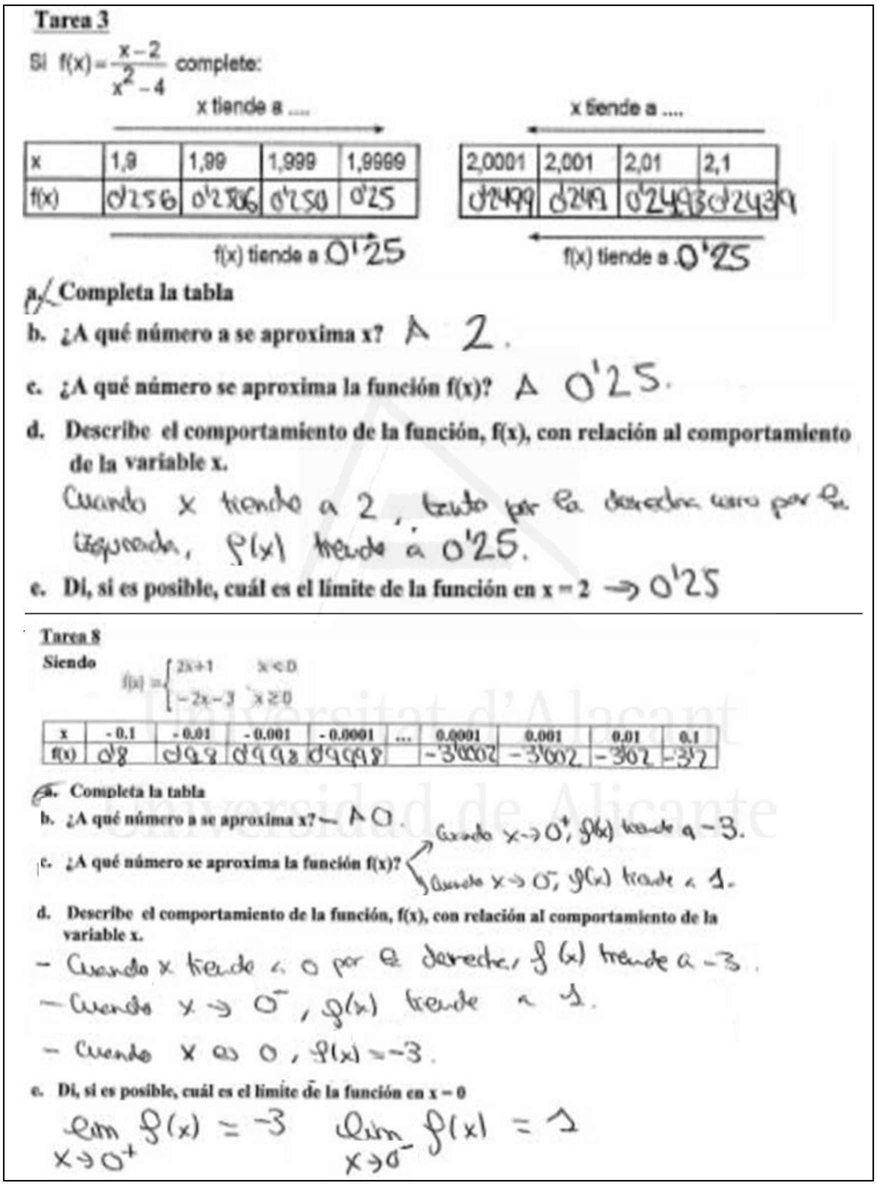
e) Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 4

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 10$ $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 15$

Figura 4.15. Respuesta de la estudiante EST47 a las tareas 2 y7

Finalmente, EST47 también coordina las aproximaciones en modo algebraico-numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden, y cuando no. En la tarea 3

(Figura 4.16) indica correctamente la coordinación de las aproximaciones cuando coinciden las aproximaciones laterales, afirmando que "*Cuando x tiende a 2 tanto por la derecha como por la izquierda, f(x) tiende a 0'25*", y en la tarea 8 (Figura 4.16) indica correctamente la coordinación cuando no coinciden las aproximaciones laterales señalando que "*Cuando x tiende a 0 por la derecha, f(x) tiende a –3. Cuando x tiende a* 0^-*, f(x) tiende a 1*".


Tarea 3

Si $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... (→) x tiende a .... (←)

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	0'256	0'2506	0'250	0'25

f(x) tiende a 0'25

x	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x)	0'2499	0'249	0'2493	0'2439

f(x) tiende a 0'25

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? A 2.

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? A 0'25.

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

Cuando x tiende a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, f(x) tiende a 0'25.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 2 → 0'25

Tarea 8

Siendo $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ -2x-3 & x\geq 0\end{cases}$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0'8	0'98	0'998	0'9998		-3'0002	-3'002	-3'02	-3'2

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x? A 0.

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)? Cuando $x\to 0^+$, f(x) tiende a -3. Cuando $x\to 0^-$, f(x) tiende a 1.

d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

- Cuando x tiende a 0 por la derecha, f(x) tiende a -3.
- Cuando $x\to 0^-$, f(x) tiende a 1.
- Cuando x es 0, f(x) = -3.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

Figura 4.16. Respuesta de la estudiante EST47 a las tareas 3 y 8

Otra de las características del nivel TRANS es la forma de manejar la coordinación métrica en términos de desigualdades. Los estudiantes de este nivel empiezan a utilizar la coordinación métrica. Una evidencia de esta característica es el protocolo de la estudiante EST47, referente a la tarea 4, en modo numérico, (Figura 4.17), que presenta las cuatro sucesiones (en el dominio, en el rango, y las diferencias en valor absoluto en el dominio y en el rango) y la estudiante indica correctamente que "*Han de estar a una distancia menor que 0,0001*".

Tarea 4

Alba, una estudiante de primero de bachillerato con la ayuda de una hoja de cálculo, ha ido sustituyendo valores en una función, f(x), y ha obtenido las dos primeras filas de la tabla. Después, ha construido dos filas más de diferencias en valor absoluto

x	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	…	0,500001	0,50001	0,5001	0,501
f(x)	1,497003	1,499700	1,499970	1,499997	…	1,500003	1,500030	1,500300	1,503003
|0,5 - x|	0,00100	0,00010	0,00001	0,000001	…	0,00000	0,00001	0,00010	0,00100
|1,5 - f(x)|	0,0029973	0,0003000	0,0000300	0,0000030	..	0,0000030	0,0000300	0,0003000	0,0030027

0'001

a. **¿Cómo de próximos han de estar los valores de x de 0.5 para que la diferencia 1,5 – f(x), en valor absoluto, sea menor que 0,001?**

– Han de estar a una distancia menor que 0'0001.

b. **Con la información del apartado anterior, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f(x) en el punto x = 0,5?**

$\lim_{x \to 0'5} f(x) = 1'5$

Figura 4.17. Respuesta de la estudiante EST47 a la tarea 4

En los protocolos anteriores hemos podido observar las características de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango que han definido el nivel TRANS. En la tabla 4.5 explicitamos estas características.

Tabla 4.5. Características del nivel TRANS de desarrollo del esquema de límite

NIVEL TRANS	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes en los dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en los tres modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan al menos en dos modos de representación c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades

La tabla 4.6 nos muestra cómo se distribuyen los 23 estudiantes asignados al Nivel TRANS. Hemos de observar que en cada celda hemos colocado el número de estudiantes que resuelven la coordinación de las aproximaciones en el modo de representación correspondiente y a los que resuelven la coordinación métrica en términos de desigualdades en modo numérico.

Tabla 4.6.Estudiantes del nivel TRANS

	Numérico		Algebraico-Numérico		Gráfico	
	Coinciden		Coinciden		Coinciden	
	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
Coordinación Dinámica	23	19	23	19	23	21
Coordinación métrica	8	4	-	-	-	-

4.1.4. Características de la transición entre niveles

En los apartados anteriores hemos caracterizado los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función centrándonos en la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2). La tabla 4.7 sintetiza estas características y recoge la distribución de los estudiantes en los diferentes niveles.

Tabla 4.7. Características niveles y estudiantes asignados

	Características	**Estudiantes**
INTRA	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en modo numérico y algunos en los dos modos, numérico y algebraico-numérico y cuando las aproximaciones laterales no coinciden a lo sumo se es capaz de realizar aproximaciones en un modo de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación c) En algunos casos empezar a manifestar formalmente el límite cuando las aproximaciones laterales coinciden	**59 (45.74%)**

INTER	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes en los dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden ser capaz de considerar las aproximaciones a lo sumo en dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en uno o dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden la coordinación solo se realiza en un modo de representación c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades	**47 (36.43%)**
TRANS	a) Realizar aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes en los dos modos de representación b) Coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en los tres modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan al menos en dos modos c) Algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades	**23 (17.83%)**

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Estas características indican que **la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden** es el factor discriminatorio y el que nos marca el paso de un nivel al siguiente.

La figura 4.18 describe esta idea de transición entre los niveles.

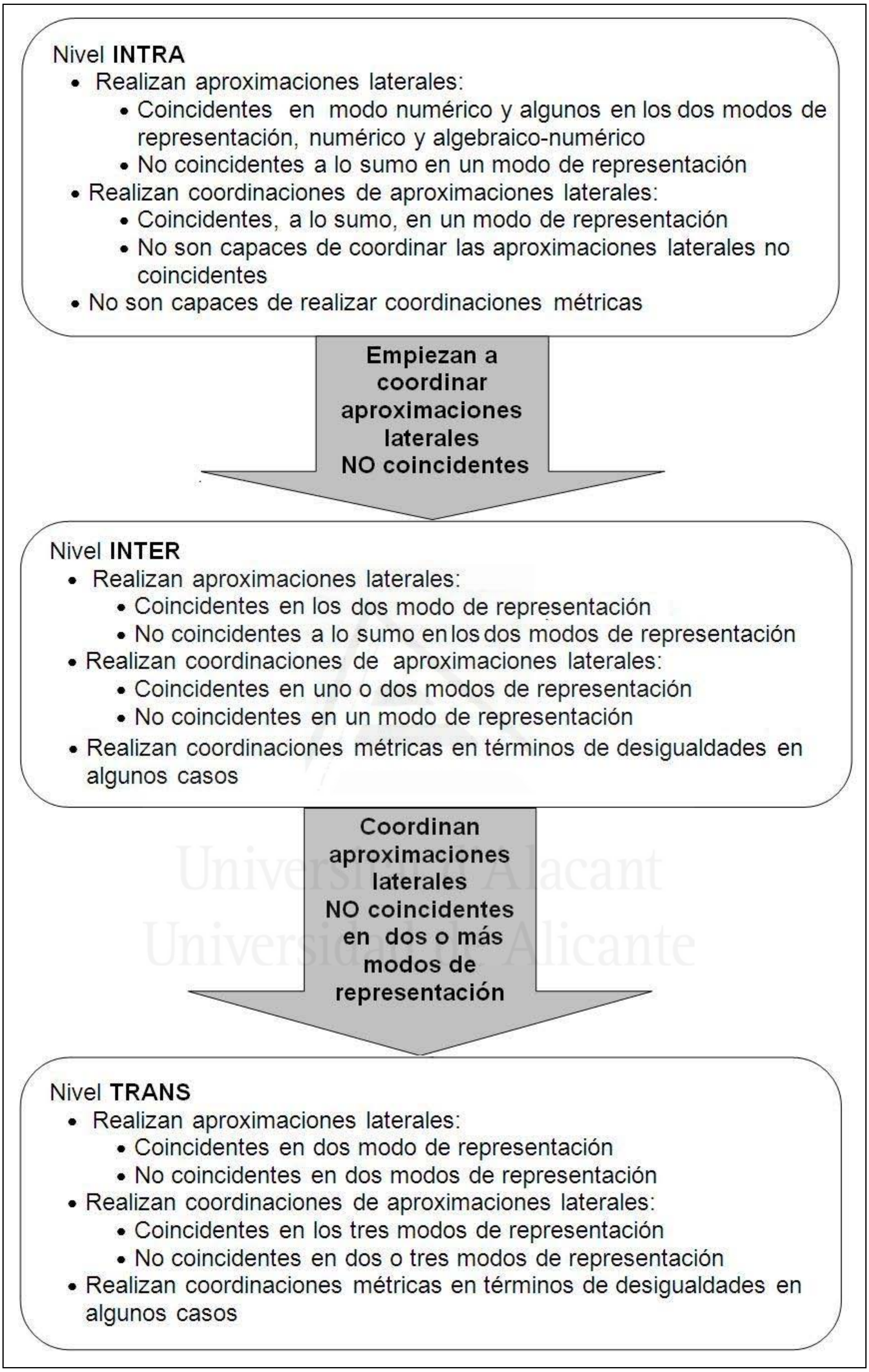


Figura 4.18. Paso de un nivel de desarrollo a otro nivel

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

4.2. Las características de los niveles de desarrollo de límite desde el análisis implicativo

Las características de los niveles de desarrollo del esquema de límite inferidas desde el análisis cualitativo fueron apoyadas a partir de gráficos implicativos al 99% y al 90% de significación. Con el objetivo de identificar la influencia de los distintos modos de representación y de la coincidencia o no de las aproximaciones laterales en el proceso de construcción del significado de la noción de límite, hemos utilizado una de las posibilidades del programa CHIC que permite centrarse solamente en determinadas variables (Gras y Kuntz, 2009; Coutuier, 2009). Esta forma de proceder nos ha permitido identificar características de:

a) La comprensión de la idea de aproximación a un número (E1).

b) La comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2).

c) La coordinación de las aproximaciones (E2) y la comprensión de la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4).

4.2.1. La comprensión de la idea de aproximación a un número (E1)

El análisis de la comprensión que los estudiantes tienen de la idea de aproximación (E1) lo hemos realizado centrándonos en tres clases de relaciones implicativas: (a) las relacionadas con la idea de función, (b) con la idea de aproximación (E1); y (c) con la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) (Pons, Valls y Llinares, 2012).

- Centrémonos en **la idea de función**. Para poner de manifiesto la influencia de la idea de función en la comprensión de la aproximación a un número seleccionamos las variables “idea de función” (E0) e “idea de aproximación” (E1). En la parte inferior del gráfico implicativo generado al 99% de significación (Figura 4.19) podemos observar las siguientes relaciones implicativas:

  E1N8b $\Rightarrow$ E0AN8a; y

E1N3b$\Rightarrow$ E0AN3a

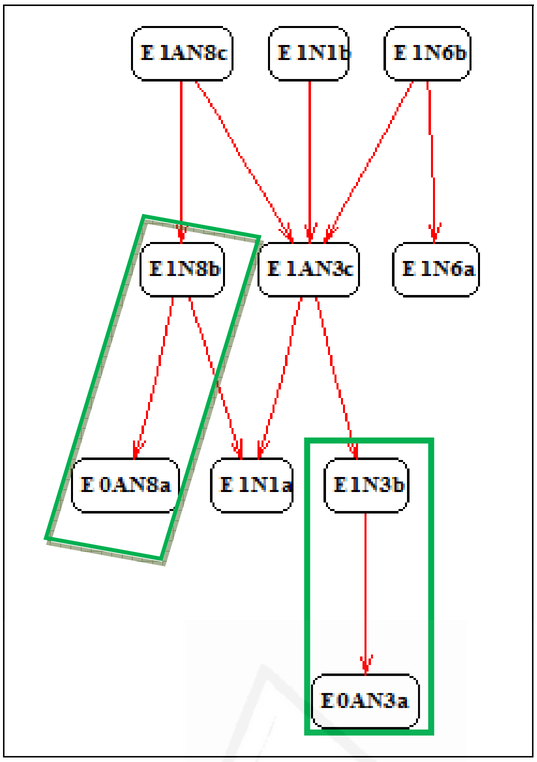


Figura 4.19. Gráfico implicativo al 99% seleccionando los elementos E0 y E1

Las dos relaciones implicativas señaladas ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en el dominio en modo numérico (E1N3b y E1N8b) implica ser capaz de calcular el valor de la función en un punto en modo algebraico-numérico (E0AN3a y E0AN8a). Estas dos relaciones implicativas deben ser entendidas en el contexto de ítems que constituían el cuestionario presentado a los estudiantes.

Por tanto, esta relación implicativa apoya la inferencia realizada desde el análisis cualitativo en el sentido de que cuando la función se da en términos analíticos "*la construcción de la sucesión de valores de la función a partir de los valores de la variable independiente*" es un prerrequisito para establecer la aproximación a un número.

- Centrémonos en **la idea de aproximación**. Para poner de manifiesto la influencia de los modos de representación y de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en la comprensión de la aproximación a un número (E1) seleccionamos las variables que hacen referencia a este elemento en los distintos modos de representación, numérico y algebraico-numérico. Esta selección dio lugar al gráfico implicativo generado al 99% de significación que se muestra en la figura 4.20.

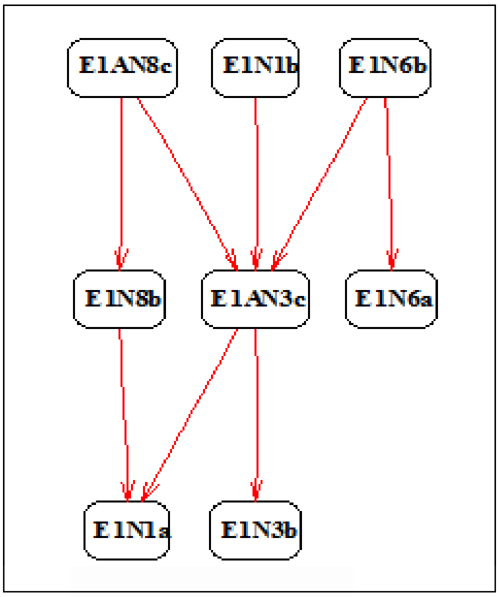


Figura 4.20. Gráfico implicativo al 99% seleccionando el elemento E1

Las relaciones implicativas que se encuentran en la parte inferior del gráfico implicativo generado (Figura 4.20):

E1AN3c ⇒ E1N1a; y

E1AN3c ⇒ E1N3b

confirman un rasgo característico del desarrollo del esquema en el Nivel Inter obtenido a partir del análisis cualitativo definido como “*realizar aproximaciones laterales coincidentes en modos numérico y algebraico-numérico*”. Estas dos implicaciones ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en el rango en modo algebraico-numérico (E1AN3c), cuando las aproximaciones laterales coinciden, implica ser capaz de establecer la aproximación a un número en el dominio en modo numérico (E1N1a, y E1N3b). En cierta manera lo que subyace a estas relaciones implicativas es el papel que desempeña la idea de función al relacionar la variable independiente (dominio) y la variable dependiente (rango).

Por su parte, las relaciones implicativas que se encuentran en la parte superior de la figura 4.20:

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

E1AN8c ⇒ E1N8b;

E1AN8c ⇒ E1AN3c;

E1N6b ⇒ E1N6a; y

E1N6b ⇒ E1AN3c

reafirman la característica del desarrollo del esquema en el Nivel Trans *"realizar aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes en modos numérico y algebraico-numérico"*, obtenida a partir del análisis cualitativo. Estas cuatro implicaciones ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en el rango en los modos algebraico-numérico (E1AN8c) y numérico (E1N6b), cuando las aproximaciones laterales no coinciden, implican establecer la aproximación en el dominio en modo numérico (E1N8b, y E1N6a). Además, también realizan las aproximaciones en el rango en modo algebraico-numérico (E1AN3c) cuando las aproximaciones laterales coinciden.

En cierto sentido el análisis implicativo indica que el desarrollo del esquema se manifiesta incorporando nuevos elementos a la red de relaciones que lo constituyen. En este sentido los resultados del análisis implicativo apoyan las características del paso de un nivel a otro descrito en la figura 4.18 y la característica teórica de los niveles propuestos por Piaget y García en el sentido de establecer un mayor número de relaciones entre los elementos como una característica de la idea de desarrollo del esquema.

- Consideremos el papel que **los modos de representación** determinan en el acceso a la idea de aproximación a un número (E1). Para ello analizaremos dos ideas relevantes extraídas de la figura 4.20. La primera la inferiremos a partir de las relaciones implicativas (parte superior derecha de la figura 4.20):

E1N1b ⇒ E1AN3c; y

E1N6b ⇒ E1AN3c

Estas dos implicaciones indican que la comprensión de la aproximación a un número en modo numérico (E1N1b) cuando las aproximaciones laterales coinciden implica ser capaz de identificar esta misma aproximación en modo algebraico-numérico (E1AN3c). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo numérico (E1N6b⇒ E1AN3c) no coinciden.

La segunda la inferiremos a partir de las relaciones implicativas (partes superior derecha y central de la figura 4.20):

E1AN3c⇒E1N1a;

E1AN3c⇒E1N3b; y

E1AN8c⇒E1N8b

Estas tres implicaciones ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en modo algebraico-numérico (E1AN3c) cuando las aproximaciones laterales coinciden implica ser capaz de identificar esta misma aproximación en modo numérico (E1N1a y E1N3b). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo algebraico-numérico (E1AN8c⇒E1N8b) no coinciden.

Estas dos ideas nos permiten inferir que **los modos de representación numérico y algebraico-numérico** desempeñan el mismo papel en el acceso a la idea de aproximación a un número.

- Consideremos la idea de **aproximación a un número (E1)** diferenciando las del dominio de las del rango. Para ello analicemos las relaciones implicativas en las que toman parte las cuatro variables que hacen referencia a la idea de aproximación en el rango E1N1b, E1AN3c, E1AN8c, y E1N6b (Figura 4.21, triángulo verde) que presentan, entre otras, las siguientes relaciones implicativas:

E1AN8c⇒E1AN3c; y

E1N6b⇒E1AN3c

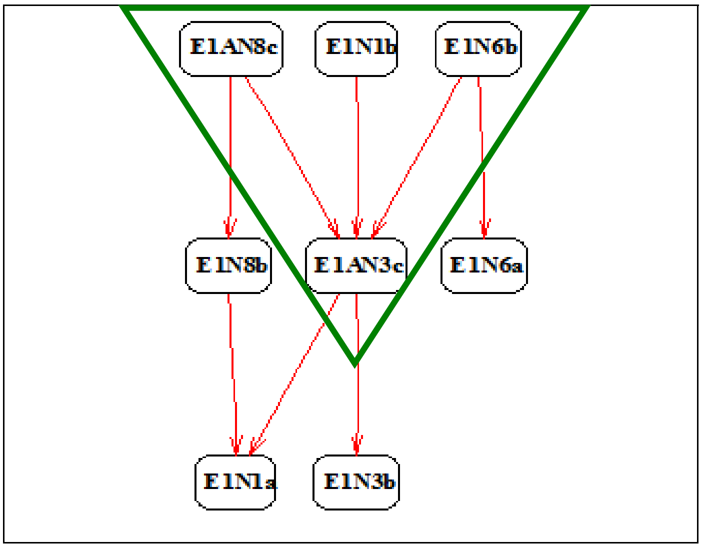


Figura 4.21. Gráfico implicativo al 99% relativas al elemento E1diferenciando las del dominio de las del rango (en el triángulo verde)

Estas dos implicaciones ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E1AN8c, y E1N6b) se apoya en la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (E1AN3c). Es decir, **la comprensión de la aproximación a un número en el rango se inicia en modo algebraico-numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden y se consolida en este mismo modo, y en el numérico cuando las aproximaciones laterales no coinciden.**

Además, si consideramos la subestructura de la figura 4.21 (triángulo verde) en función del resto de variables, podemos inferir dos ideas. La primera nos indicaría que la comprensión de la aproximación en el rango (E1AN8c, E1N1b, E1N6b y E1AN3c) está vinculada a la idea de aproximación a un número en el dominio (E1N8b, E1N6a, E1N1a y E1N3b). La segunda nos indicaría que la comprensión de la aproximación a un número en el dominio no implica necesariamente la comprensión de la aproximación a un número en el rango. Este hecho establece **una diferencia cognitiva** entre los procesos de aproximación en el dominio y en el rango.

- Centrémonos en la influencia que **la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales** determinan entre la idea de aproximación a un número (E1) y la comprensión de la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango (E2), seleccionando todas las variables que hacen referencia a estos dos elementos. El análisis del gráfico implicativo, generado al 99% de significación (Figura 4.22), permite identificar el papel que desempeña en la comprensión dinámica de límite la idea de aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

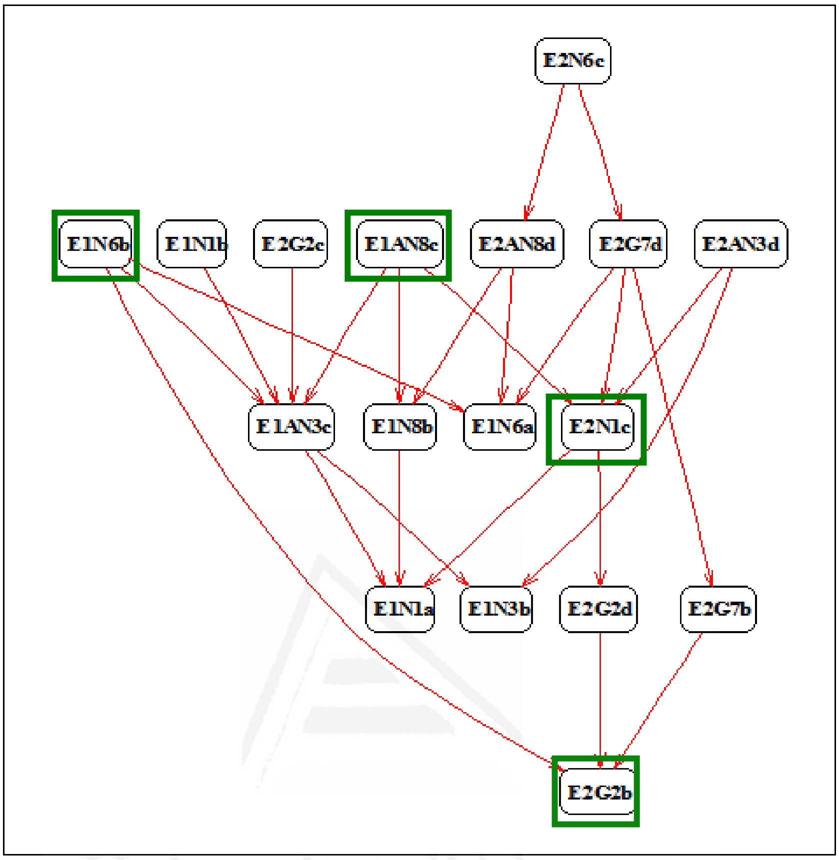


Figura 4.22. Gráfico implicativo al 99% entre los elementos E1 y E2

En el gráfico solo se observan dos relaciones implicativas entre la aproximación a un número y la coordinación de las aproximaciones:

E1N6b ⇒ E2G2b; y

E1AN8c ⇒ E2N1c

Estas dos implicaciones ponen de manifiesto que la comprensión de la aproximación a un número en el rango, en los modos algebraico-numérico (E1AN8c) y numérico (E1N6b), cuando las aproximaciones laterales no coinciden, implica ser capaz de establecer respectivamente (a) la coordinación de las aproximaciones laterales coincidentes en el dominio y en el rango, en modo numérico (E2N1c), y (b) por la izquierda en modo gráfico (E2G2b).

Estos datos indican que **comprender la aproximación a un número cuando las**

aproximaciones laterales no coinciden, implica ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, la no coincidencia de las aproximaciones laterales a un número en el rango es un elemento clave en la generación de relaciones implicativas y por tanto generando características de la transición entre niveles.

4.2.2. La comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2)

Para poner de manifiesto la influencia de los modos de representación y de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2), seleccionamos las variables relativas a la coordinación (E2) en los distintos modos de representación (numérico, gráfico y algebraico-numérico). El gráfico implicativo generado al 99% de significación se muestra en la figura 4.23.

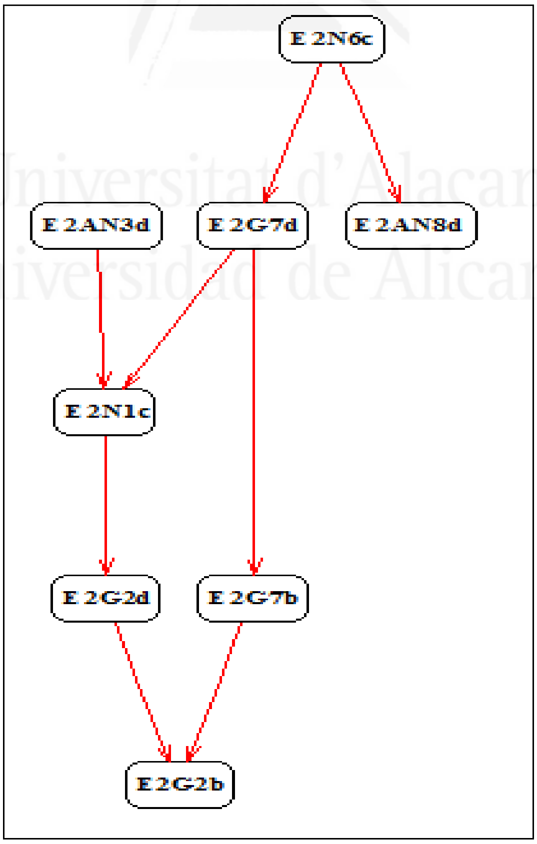


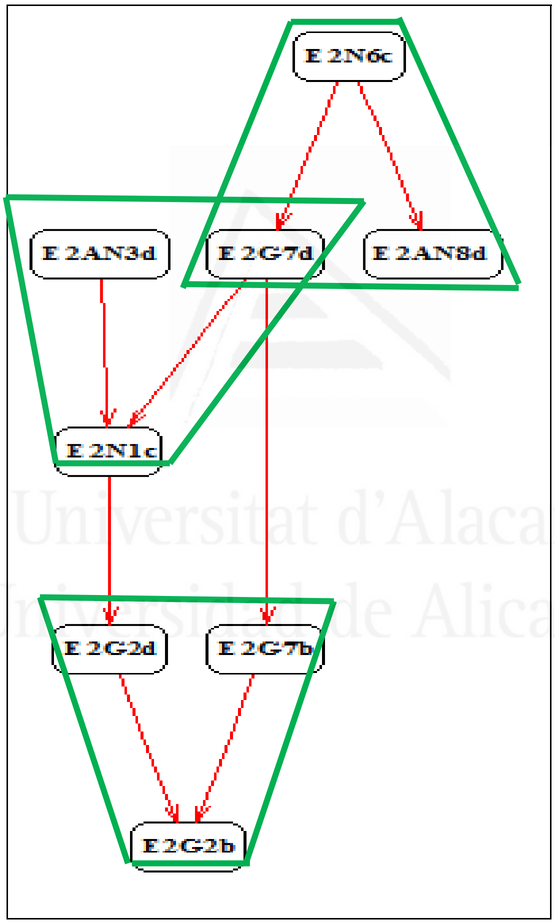
Figura 4.23. Gráfico implicativo al 99% seleccionando el elemento E2

El análisis de este gráfico lo hemos realizado centrándonos en dos aspectos. En

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

primer lugar, en qué medida las relaciones implicativas generadas confirmaban ciertas características de los niveles de desarrollo del esquema relativas al modo o modos de representación en que se realizaba la coordinación de las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango (E2). En segundo lugar, en la influencia que los modos de representación y la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales tienen en dicha comprensión.

- El análisis implicativo nos ha permitido corroborar tres características de los niveles de desarrollo del esquema en relación al número de modos de representación en los que se coordinan las aproximaciones en cada nivel (Figura 4.23a).



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 4.23a. Gráfico implicativo al 99% seleccionando el elemento E2

Las relaciones implicativas de la parte inferior de la figura 4.23a:

E2G2d $\Rightarrow$ E2G2b; y

E2G7b $\Rightarrow$ E2G2b

apoyan la característica del nivel Intra del desarrollo del esquema *"coordinar las* *aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación”*, dado que nos muestran en qué medida la coordinación de las aproximaciones se inicia en modo gráfico.

Por otra parte, las relaciones implicativas de la parte central de la figura 4.23a:

E2G7d $\Rightarrow$ E2N1c; y

E2AN3d $\Rightarrow$ E2N1c; y

confirman una de las características del nivel Inter de desarrollo del esquema “*coordinar las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en uno o dos modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan en un solo modo de representación*”. Estas dos relaciones implicativas indican que la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en modo gráfico (E2G7d), cuando las aproximaciones laterales no coinciden, y en modo algebraico-numérico (E2AN3d), cuando las aproximaciones laterales coinciden, implican ser capaz de establecer dicha coordinación en modo numérico (E2N1c) cuando las aproximaciones laterales coinciden.

Finalmente, las relaciones implicativas de la parte superior de la figura 4.23a:

E2N6c $\Rightarrow$ E2G7d; y

E2N6c $\Rightarrow$ E2AN8d

corroboran como rasgo característico del nivel Trans de desarrollo del esquema la idea de que los estudiantes de este nivel “*coordinan las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en los tres modos de representación y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan al menos en dos modos de representación*”. Estas dos relaciones muestran que la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en modo numérico (E2N6c) cuando las aproximaciones laterales no coinciden, implica ser capaz de establecer dicha coordinación en el modo algebraico-numérico (E2AN8d) y en el gráfico (E2G7d).

- Consideremos la influencia que **los modos de representación y la coincidencia o no**

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

coincidencia de las aproximaciones laterales determinan en la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2). Para ello analizaremos tres ideas relevantes extraídas de la figura 4.23b.

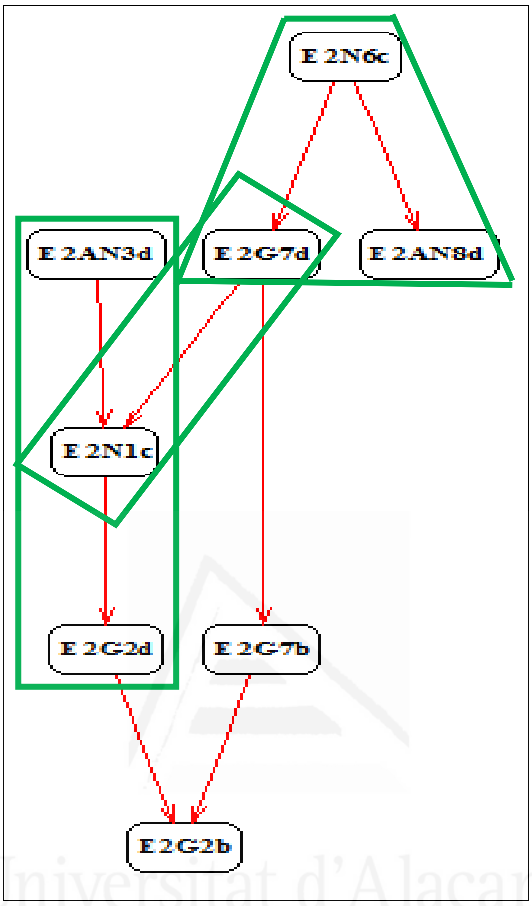


Figura 4.23b. Gráfico implicativo al 99% seleccionando el elemento E2

La primera la inferimos a partir de las relaciones implicativas que se encuentran en la parte izquierda de la Figura 4.23b:

E2AN3d $\Rightarrow$ E2N1c; y

E2N1c $\Rightarrow$ E2G2d

Estas dos relaciones implicativas muestran que **el acceso a la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando estas coinciden se inicia en modo gráfico (E2G2d), se progresa en modo numérico (E2N1c), y se consolida en modo algebraico-numérico (E2AN3d).**

La segunda la inferimos a partir de las relaciones implicativas que se encuentran en la parte superior de la figura 4.23b:

E2N6c $\Rightarrow$ E2AN8d; y

E2N6c $\Rightarrow$ E2G7d

Estas dos relaciones implicativas muestran que **el acceso a la coordinación de las aproximaciones cuando estas no coinciden se inicia indistintamente en modos gráfico (E2G7d) y algebraico-numérico (E2AN8d), y se consolida en modo numérico (E2N6c).**

La tercera la inferimos a partir de la relación implicativas que se encuentra en la parte central de la figura 4.23b:

E2G7d $\Rightarrow$ E2N1c

Esta relación implicativa muestran que **el nexo de unión entre la coordinación de las aproximaciones no coincidentes y coincidentes se realiza con los modos gráfico (G) y numérico (N).**

El análisis implicativo nos muestra en qué medida el desarrollo del esquema se manifiesta incorporando la coordinación de las aproximaciones en modo numérico o/y en modo algebraico-numérico cuando las aproximaciones laterales coinciden y la coordinación de las aproximaciones en modo gráfico cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Esto confirma las características del esquema descrito en la figura 4.18 poniendo de manifiesto la importancia de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden como elemento "determinante" para realizar el paso de un nivel a otro. Estos resultados apoyan la característica teórica de los niveles propuestos por Piaget y García, en el sentido de empezar a reorganizar el conocimiento aislado y establecer un mayor número de relaciones entre los elementos como una característica de la idea de desarrollo del esquema.

4.2.3. La coordinación de las aproximaciones (E2) y la comprensión de la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4)

Con la finalidad de analizar la influencia de la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) en la comprensión de la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4), seleccionamos todas las variables que hacen referencia a estos dos elementos generándose el gráfico implicativo al 90% de significación que se muestra en la figura 4.24.

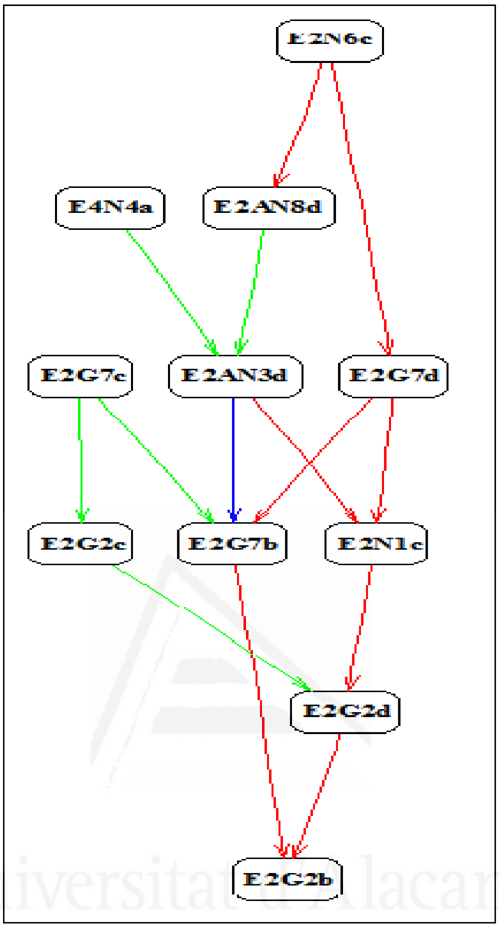


Figura 4.24. Gráfico implicativo al 90% seleccionando los elementos E2 y E4

En la parte izquierda de este gráfico se encuentra la relación implicativa:

E4N4a ⇒ E2AN3d

que pone de manifiesto que, cuando las aproximaciones laterales coinciden, la comprensión de la coordinación métrica del límite en términos de desigualdades en modo numérico (E4N4a) se apoya en ser capaz de establecer la coordinación de las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en modo algebraico-numérico (E2AN3d). Esta implicación confirma la característica de niveles Inter y Trans de que se "*algunos establecen la coordinación métrica en términos de desigualdades*"

El análisis implicativo realizado nos muestra en qué medida el desarrollo del esquema se manifiesta incorporando, cuando las aproximaciones laterales coinciden, la coordinación métrica en términos de desigualdades, confirmando las características del esquema de desarrollo del concepto de límite (Figura 4.18) e indicando la importancia relativa de la coordinación métrica en términos de desigualdades para realizar el paso de un nivel a otro.

Finalmente, esta relación implicativa indica que la comprensión de la coordinación métrica en términos de desigualdades (E4) se apoya en la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (E2) cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente la comprensión de dicha coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. La importancia de este hecho radica en que señala la diferencia cognitiva que para el estudiante resulta tener que coordinar las aproximaciones en el dominio y el rango, coincidan o no las aproximaciones laterales, y que la comprensión métrica del límite se podría iniciar con la construcción previa de la concepción dinámica pero en el caso de la coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango.

4.3. La tematización del esquema de límite de una función

Algunos estudiantes que se encuentran en el nivel TRANS manifiestan haber tematizado el esquema de límite de una función. Esta tematización se pone de manifiesto cuando el estudiante es capaz de revertir (Dubinsky, 1991) la coordinación de los procesos de aproximación al resolver problemas en los que dados valores de una función y unos determinados límites son capaces de descubrir la gráfica de la función que cumple esas condiciones como se propone en las tareas 5 y 10 del cuestionario (Figura 3.4). Estas tareas se plantearon con el objetivo de evaluar el papel desempeñado por los mecanismos de inversión y coordinación.

Para que un estudiante sea capaz de representar una función que cumplan las condiciones exigidas en las tareas 5 y 10 debe invertir los significados dados por la expresión analítica del límite y "desempaquetar" el significado de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango relacionando la coordinación de los procesos de aproximación y además considerar el punto indicado. Así mismo, tiene que establecer relaciones entre elementos analíticos y gráficos del concepto de límite de una función. Las diferentes formas en las que los estudiantes generan información mediante el mecanismo de inversión y la coordinan con las otras condiciones del problema pueden ser observadas en las respuestas escritas y en el discurso generado durante la entrevista.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos considerar que los 23 estudiantes que se encuentran en el nivel TRANS diez han tematizado el esquema. No obstante, cabe señalar que entre ellos existen diferencias que conjeturamos provienen de la consciencia que tienen de las relaciones usadas y por tanto de las diferentes estructuras subyacentes del esquema de límite de una función que a continuación describimos.

Inicialmente, la manera en la que los estudiantes coordinaban la información sobre las aproximaciones a un punto o al infinito permitió identificar características de cómo los mecanismos de inversión y coordinación les permitían relacionar la idea de límite con el comportamiento asintótico de la función. Este proceso permitió generar hipótesis sobre el razonamiento de los estudiantes que eran refinadas posteriormente al analizar las respuestas de otros estudiantes. Para ello, mirábamos diferencias y semejanzas en la forma en la que los estudiantes parecían resolver las dificultades generadas al tener que invertir y coordinar la información sobre la gráfica de la función. Siguiendo este proceso identificamos tres momentos en la tematización del esquema y una característica de cómo considerar el esquema de límite tematizado. Estas características son:

(a) Dificultades en invertir el significado de límite para generar información sobre la gráfica de la función.

(b) Dificultades en coordinar las diferentes condiciones.

(c) Coordinación de la información.

(d) Característica del esquema de límite tematizado: establecer relaciones con otras ideas matemáticas.

Estas características emergidas al comparar las respuestas de los estudiantes a las dos tareas podemos considerarlas casos paradigmáticos en la tematización del esquema de límite y las describiremos a partir de las respuestas de 4 estudiantes.

4.3.1. Dificultades en invertir el significado de límite para generar información sobre la gráfica de la función

Desempaquetar el significado de límite en un punto para representar gráficamente la función plantea desafíos a algunos de los estudiantes. Por ejemplo, EST74 tiene dificultades en invertir el significado del límite y generar información para representar la gráfica de la función en la tarea 10 a partir de las condiciones $\underset{x\to+3}{lím} f(x) = +1$ y $\underset{x\to-3}{lím} f(x) = 0$. EST74 marcó el punto *(0,4)* y los puntos *(3,1)* y *(–3, 0),* pero no fue capaz de representar la gráfica (Figura 4.25).

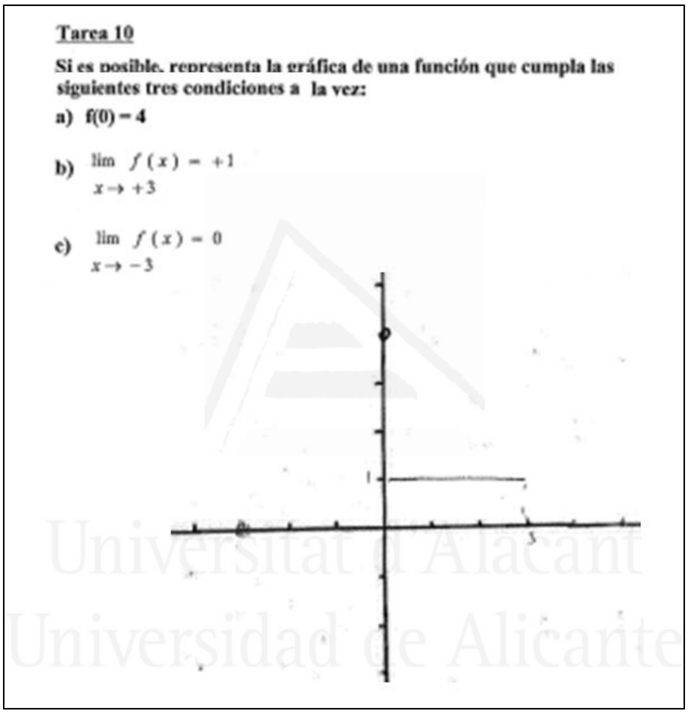


Figura 4.25. Respuesta de EST74 a la tarea 10 del cuestionario

Durante la entrevista esta estudiante reconoce que cuando *x* es 0, la función vale 4; cuando *x* es 3, la función sería 1, y para *x=–3*, la función vale 0, pero no hay ninguna evidencia de que sea capaz de desempaquetar los significados del límite como coordinación de aproximaciones en el dominio (eje x) y en el rango (eje y):

Inv: Pero no has indicado ningún límite.
EST74: No he sabido.
Inv: Tienes otros puntos marcados, ¿dónde?
EST74: Aquí he puesto que si la x es 3 la y sería 1, sería el b, ¿no? Y aquí, si la x es 3 la y vale 1. La x vale –3 (Figura 4.26).

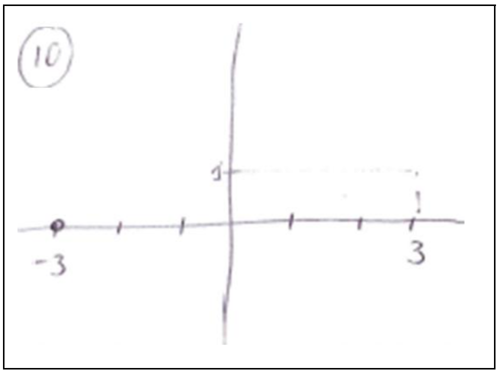


Figura 4.26. Respuesta de EST74 a la tarea 10 durante la entrevista

Inv: Pero no has dibujado ninguna gráfica.
EST74: No.
Inv: ¿Podrías dibujar una? Inténtalo, por favor.
EST74: ¿Una gráfica?…, Del b,…, x es –3. Voy a hacer el c, x es –3,…, es que yo creo que aquí intenté imitar lo que había aquí, pero…

(EST74. Entrevista sobre la tarea 10)

De la misma forma, en la tarea 5 (Figura 4.27) no es capaz de representar la gráfica de la función cuando los límites son infinitos. En este caso, EST74 marca +∞ (a la derecha de la figura), dibuja una línea discontinua vertical en *x=2*, e intenta representar una rama infinita a la izquierda de la figura en la que indica un –∞. Este comportamiento muestra la dificultad en usar el significado de la idea de límite para inferir información sobre el comportamiento asintótico de la gráfica de la función en esos puntos.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

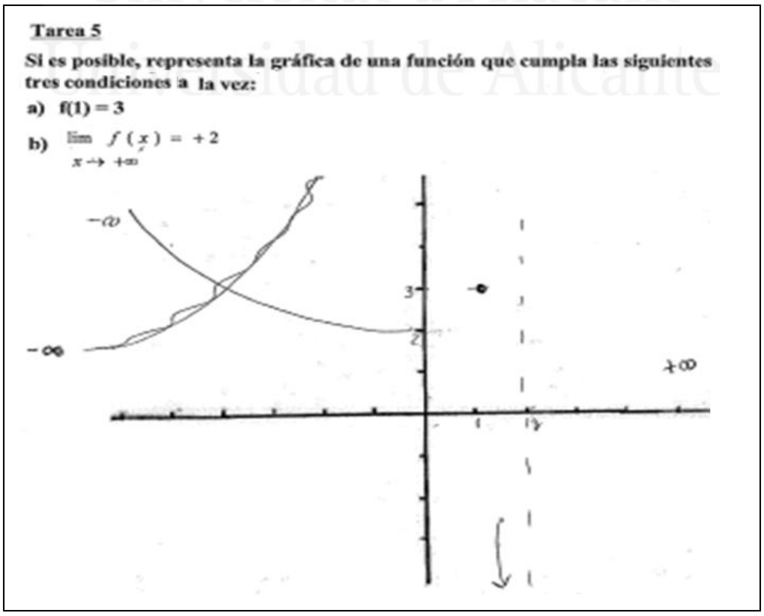


Figura 4.27. Respuesta de EST74 a la tarea 5 del cuestionario

La entrevista pone en evidencia la dificultad que debe superar la estudiante para desempaquetar los significados del límite finito de *f(x)* cuando la *x* tiende a más infinito. En este caso, EST74, al intentar expresar la información que puede inferir desde el $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$, confunde el valor al que tiende la función con el valor al que tiende *x*. EST74 marca suavemente una línea y escribe en la parte inferior el símbolo $+\infty$. Este comportamiento evidencia el desafío que implica considerar la información procedente de la coordinación entre la aproximación en el rango y en el dominio en los comportamientos asintóticos. Cuando EST74 intenta representar la tercera condición, marca una flecha indicando que tiende a menos infinito a la izquierda de *x=2*. Al sugerirle el entrevistador que también ha de cumplir la primera condición es incapaz de coordinar su flecha con el punto.

Inv: Podrías poner una gráfica.
EST74: Sí, lo tengo mal todo, todo lo que está marcado. 3, a ver, 1. Sí, pero, yo lo tengo aquí marcado, pero está mal. A ver, si límite de f(x), x va hacia más infinito, va hacia acá (Figura 28)

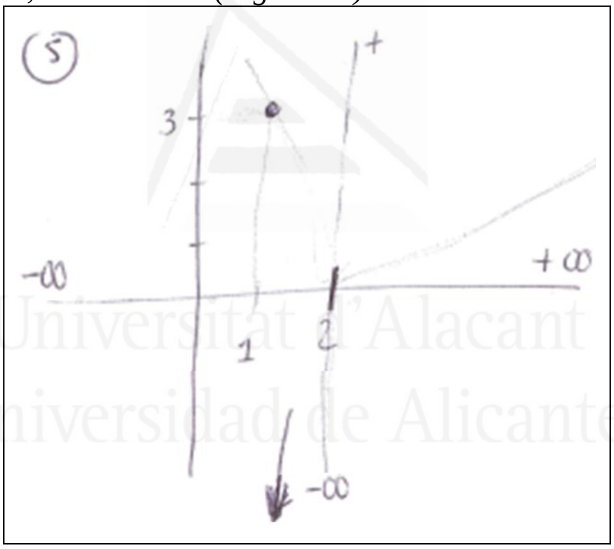


Figura 4.28. Respuesta de EST74 a la tarea 5 durante la entrevista

Inv: De acuerdo.
EST74: f(x) es +2… aquí,…, entonces debería ir hacia acá, es qué. Es el 2,…
Inv: ¿Ese es el 2 de quién?
EST74: De f(x).
Inv: ¿Dónde has puesto el 2?
EST74: En el eje de las x.
Inv: Ese 2 corresponde, ¿a qué letra?
EST74: A la x. Pero, si tiende a más infinito.
Inv: La x tiende hacia más infinito.
EST74: ¿La x?, o sea esta.
Inv: Esa, sí, y la función tiende…
EST74: A 2. ¿Entonces?, dice aquí, no me acuerdo mucho, más infinito.
Inv: ¿Quieres que cambiemos de límite?

Inv: ¿Esa flecha qué significa? (indicando la flecha hacia abajo)
EST74: Esta flecha, que tiende hacia menos infinito. .., x esto, tiende hacia aquí.
Inv: También tiene que cumplir la primera condición.
EST74: ¿Cuál es la primera condición?
Inv: La a. Esa es la primera condición, ¿cuánto vale el punto x?
EST74: Que f… esa es la primera condición.
Inv: ¿Cuánto vale x?
EST74: 1.
Inv: Y, ¿cuánto vale y?
EST74: 3, y el límite tiene que pasar por… Cómo va a pasar, si tiene que pasar por aquí, por el 2, también por aquí. No tiene que ser complicado, no sé,…, esto que hice aquí, no, ¿pero esto está bien? …
(EST74. Entrevista sobre la tarea 5)

Este comportamiento evidencia el desafío al que se enfrentan los estudiantes para desempaquetar los significados de las condiciones relacionadas con el infinito, tanto de la *x* como de la función, no siendo capaz de considerar al mismo tiempo varias condiciones. Esta forma de proceder caracteriza los intentos de los estudiantes para generar mecanismos de inversión y de coordinación de la información. En este sentido, desempaquetar los significados dados por la expresión simbólica de límite de una función mediante el mecanismo de inversión es el primer paso para poder realizar la coordinación. El comportamiento ejemplificado por la actividad de EST74 muestra de qué manera la realización de una coordinación entre dos objetos para producir un tercero (en este caso la grafica de la función) pasa por el hecho de que el estudiante debe desempaquetar previamente los significados de estos objetos. La manera en la que se realiza esta acción con éxito se describe en la siguiente sección.

4.3.2. Dificultades en coordinar diferentes condiciones

Hay estudiantes que son capaces de desempaquetar los significados de límite de una función a partir de la ayuda del investigador durante la entrevista. Por ejemplo, en la tarea 10, EST58 intenta usar la información de las condiciones al tratar de representar una gráfica de la función, pero al no ser capaz de coordinar la información generada no puede representar la gráfica de una función (Figura 4.29). En el esbozo que EST58 realiza de la función ha marcado el punto *(0,4),* y teniendo en cuenta la lateralidad ha señalado que cuando *x* se aproxima a 3, la función se aproxima a 1, y que cuando la *x* se aproxima a –3, la función se aproxima a 0. Sin embargo, tiene dificultades en

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

considerarlas conjuntamente lo que le impide representar la gráfica de la función.

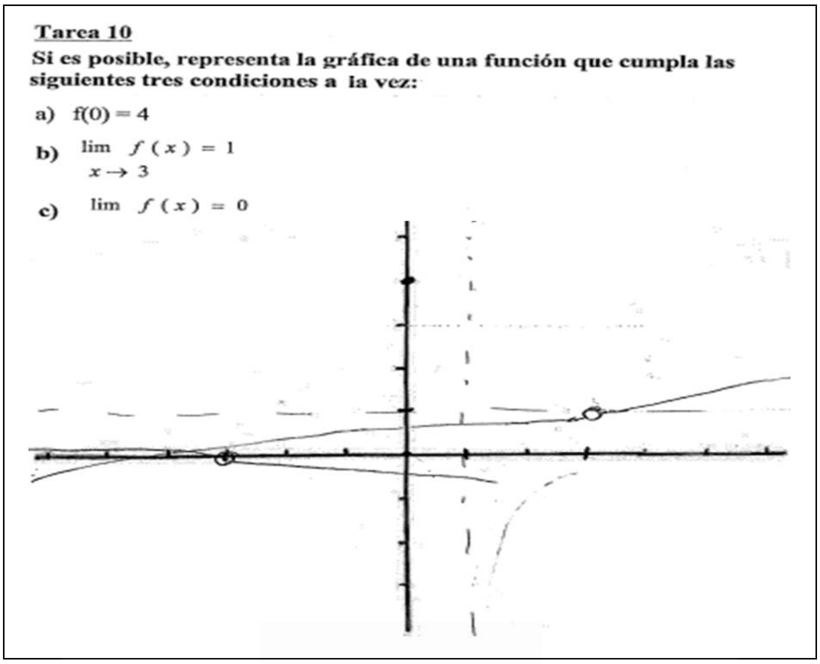


Figura 4.29. Respuesta de EST58 a la tarea 10 del cuestionario

Durante la entrevista (en catalán en el original) reconoce que no fue capaz de coordinar las tres condiciones, pero al preguntarle el entrevistador, empieza a coordinarlas lo que le permite realizar una gráfica de la función que cumple las tres condiciones modificando la respuesta dada en el cuestionario. En este caso, EST58 menciona explícitamente que el punto *(-3,0)* es el límite, y que la función no puede llegar a ese punto y dibuja una flecha para indicar que cuando *x* se aproxima a 3, la función se aproxima a 1. Las flechas dibujadas parecen indicar que reconoce explícitamente la lateralidad en el sentido de aproximaciones laterales coincidentes.

EST58:.... Una condición nos dice que x tiende a 3, y la otra que x tiende a – 3, ..., cuando, ... Uf, si es por arriba, ese punto es el 4, ..., ese punto es el 0, ... Cuando x tiende a 3, el límite es 1, lo tengo que poner así. Después cuando x tiende a –3, el límite es 0, ... Sería una recta, sería una semi-parábola, o una cosa así ... Cuando x tiende a –3, es 0, y cuando, a no, está recta primero,..., uf!
Inv: ¿Qué punto estás marcando?
EST58: El –3 de la x, y el 0 de la y,..., eso sería el límite,..., Creo que sería una cosa así. Pero no puede llegar a ase punto.
Inv: ¿Por qué no?
EST58:... Es que, cuando x es igual a 0, no,..., es y,..., mm, creo que ya está bien, continua, ..., en estas condiciones ya tengo el punto 4, cuando x tiende a 3, la función tiende a 1,..., mm.
Inv: ¿..., esa flecha que estás poniendo, qué significa?
EST58: Que tiende, es que no puedo marcarlos... creo que si, porque ahora no se me ocurre otra. Esta sería la forma, y al otro lado sería lo

mismo (Figura 4.30).

(EST58. Entrevista sobre la tarea 10)

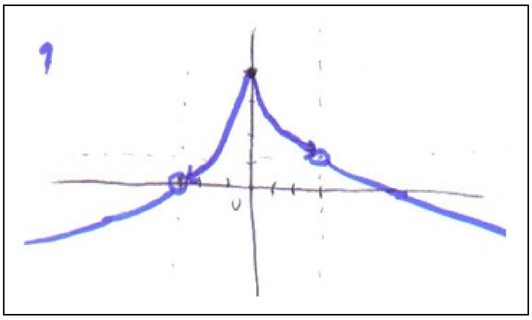


Figura 4.30. Respuesta 1 de EST58 a la tarea 10 durante la entrevista

A continuación, cuando se le sugiere que busque otra solución termina dibujando lo que podría ser una parábola dando evidencias de que coordina la información proporcionada por las tres condiciones de la tarea, reconociendo la existencia de varias gráficas que cumplan las tres condiciones.

Inv: ¿Me pondrías otra solución?
EST58: Mm, otra, pero... haré otra gráfica.
Inv: Estás marcando el punto, la primera condición [f(0)=4].
EST58: Sí, una solución diferente, después,..., estoy pensando en hacerlo,..., me acuerdo de otra pero, no sé si pueden cruzarse, la función tiende a 1, cuando la x tiende a 3,...
Inv: Ahora estás marcando un punto, ¿qué es el…?
EST58: El punto (3,1). Estos puntos los he de marcar porque continúan siendo los límites, continuamos haciendo los límites, este por la izquierda o por la derecha, este sale desde el 4,..., también puede ser... Como no específica la forma de la función... Podría ser,..., una parábola, pero... El dibujo sería,..., ahora bien, el dibujo continuaría… (Figura 4.31)

(EST58. Entrevista sobre la tarea 10)

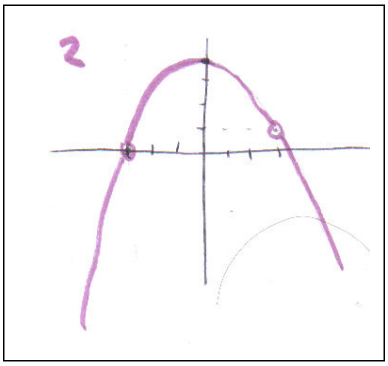


Figura 4.31. Respuesta 2 de EST58 a la tarea 10 durante la entrevista

Después de hacer esta segunda gráfica, se le pide si podría dar otra solución, y en esta ocasión piensa en una recta (Figura 4.32), indicando que podría haber infinitas soluciones.

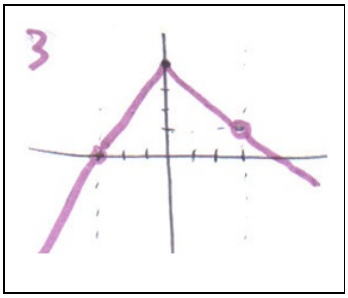
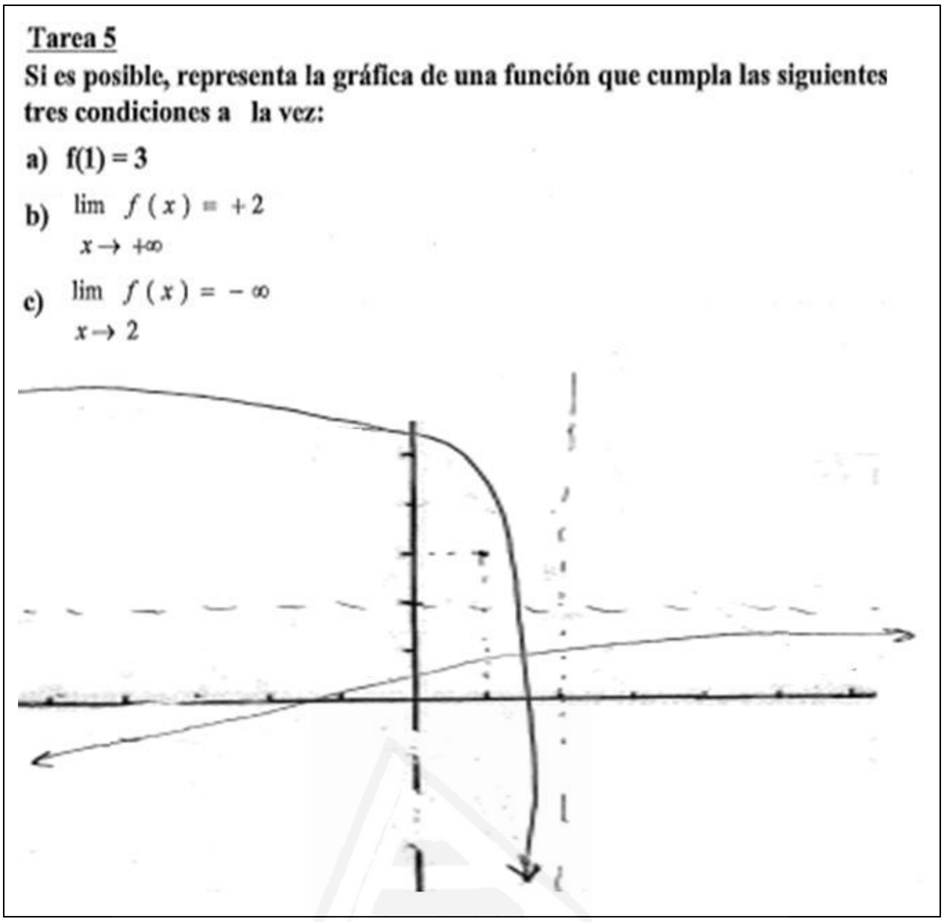


Figura 4.32. Respuesta 3 de EST58 a la tarea 10 durante la entrevista

Este comportamiento indica que EST58 es capaz de generar y coordinar la información procedente de las tres condiciones al trasladar la información desde la expresión analítica a la gráfica, después de las intervenciones del entrevistador; también pone de manifiesto que es capaz de coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango con el significado de límite en un contexto gráfico, al admitir que la gráfica se aproxima al punto tanto por la izquierda, como por la derecha, pero sin llegar al punto. Sin embargo, cuando las condiciones del problema consideraban una aproximación al infinito (Tarea 5) tuvo dificultades y no fue capaz de coordinar las tres condiciones. En este caso, EST58 marca el punto *(1,3)* y usa los significados de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango cuando x tiende a $+\infty$ (la función se aproxima a 2) pero no usa los significados de los límites laterales en la tercera condición puesto que solo indica que cuando la x se aproxima a 2 por la izquierda, la función tiende a $-\infty$. Al no considerar los límites laterales (el comportamiento de la función alrededor del punto $x=2$) la gráfica que dibuja no es correcta porque no tiene en cuenta las tres condiciones (Figura 4.33).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante



Tarea 5

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla las siguientes tres condiciones a la vez:

a) $f(1) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +2$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$

Figura 4.33. Respuesta de EST58 a la tarea 5 del cuestionario

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Durante la entrevista EST58 reconoce que no fue capaz de relacionar las tres condiciones y cuando se le propone buscar otra solución, identifica el punto *f(1)=3*, y que cuando la *x* tiende a más infinito el límite es 2 (considerando la asíntota horizontal que ya había dibujado en la resolución del cuestionario). Considera los límites laterales cuando *x* tiende a 2 al indicar que la función tiende a menos infinito, dibujando una línea vertical que pasa por *x=2*. Posteriormente, representa la gráfica de una función que pasa por el punto (1,3) y que tiende a menos infinito cuando *x* tiende a 2 por la izquierda, indicando explícitamente que la gráfica no puede cruzar la línea *x=2*. Sin embargo tiene dificultades en considerar el comportamiento de la gráfica de la función alrededor del punto *x=2* al tener solo en cuenta el límite lateral por la izquierda, por lo que no es capaz de realizar correctamente la gráfica de la función.

> *EST58: En la tarea 5 hay tres… La primera, cuando x=1,..., la f(x)=3. Es un punto. El apartado b, el límite es 2, cuando la x tiende a más infinito, supongo que sí..., 2 es así.*
> *Inv: Estás dibujando en estos momentos una línea discontinua. ¿A la altura de la y igual a cuánto?*
> *EST58: y=2, f(x) tiende a menos infinito, cuando x tiende a 2.*

Inv: Estas dibujando también una línea discontinua, ahora vertical, ¿qué pasa por x igual a cuánto?
EST58: A 2.... Sería, estas dos serían así, mm, no hago el dibujo bien. Cuando la x tiende a más infinito, por aquí, la función tiende a 2. Sería una gráfica así. Que no puede cruzar la x=2, pero sería una cosa así, pero no puede llegar hasta el punto 3, tendría que cruzar la función por aquí supongo,..., creo que sería una como esta,..., mm, no puede ser,... (Figura 4.34).

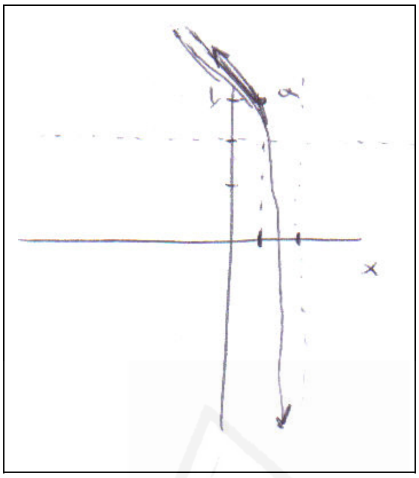


Figura 4.34. Respuesta de EST58 a la tarea 5 durante la entrevista

Inv: ¿Quieres que lo dejemos y más tarde volvemos?
EST58: Sí, porque ahora estoy atascado.

(EST58. Entrevista sobre la tarea 5)

El comportamiento descrito en este extracto indica que algunos estudiantes durante la entrevista inician la coordinación de la información que sí pueden considerar de manera aislada. Sin embargo, como muestra el caso de EST58, la entrevista no es suficiente para que los estudiantes realicen la coordinación de las condiciones que reflejan el comportamiento asintótico de la función.

4.3.3. Coordinación de la información

Una característica relevante de la tematización se evidencia cuando los estudiantes son capaces de coordinar la información dada por las condiciones del problema para dibujar una gráfica de la función. Es decir, cuando los estudiantes son capaces de desempaquetar la información dada por la expresión del límite mediante un mecanismo de inversión y coordinarla para obtener información sobre el comportamiento gráfico de la función, independientemente de si las aproximaciones en el dominio y el rango son a un número o al infinito. Un ejemplo de este tipo de

Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

comportamiento fue el estudiante EST98 (Figura 4.35). Este estudiante coordinó las tres condiciones en la tarea 10 lo que le permitió representar correctamente una gráfica de la función. A diferencia del comportamiento del EST58 anterior, la gráfica de la función dibujada por EST98 pasa por los puntos *(–3,0)* y *(3,1)* marcados sin diferenciarlos del resto de puntos de la gráfica y en concreto del punto *(0,4)*.

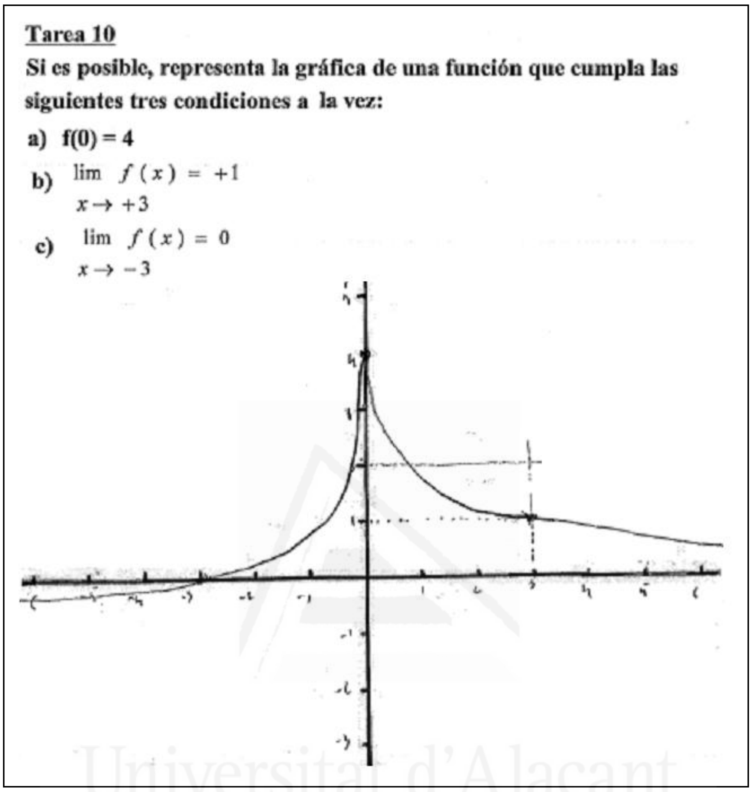


Figura 4.35. Respuesta de EST98 a la tarea 10 del cuestionario

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Durante la entrevista EST98 asume que el valor del límite es el valor de la función y que hay infinitas soluciones por lo que representa otra posible solución.

EST98: f(0) = 4, hago la primera condición. Cuando la x es 0, la función es 4. Cuando x tiende a 3, el límite de la función es 1,…, a ver, entiendo que pasa por el punto x=3 y 1. Y a ver, la c es que cuando x tiende a –3, f(x) tiende a 0, entiendo que me están diciendo que cuando la x es – 3, la función es 0, el punto este, – 3,… (Figura 4.36)

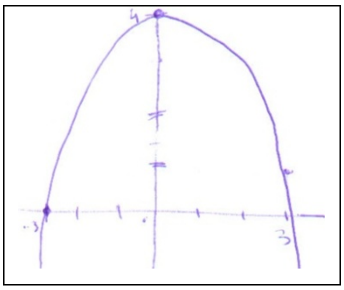


Figura 4.36. Respuesta 1 de EST98 a la tarea 10 durante la entrevista

[…]

Inv: ¿Cuántas funciones cumplen esas tres condiciones?
EST98: …, creo que infinitas.
Inv: ¿Podrías poner otra solución?
EST98: [dibuja la siguiente gráfica] (Figura 4.37)

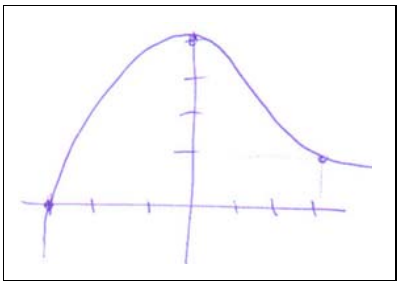
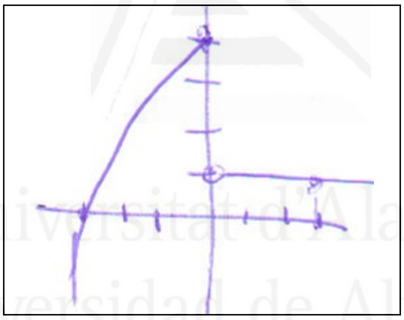


Figura 4.37. Respuesta 2 de EST98 a la tarea 10 durante la entrevista
(EST98. Entrevista sobre la tarea 10)

Después de que EST98 ha representado la última gráfica se le hace observar que tanto la gráfica que hizo en el cuestionario como las dos soluciones representadas durante la entrevista son gráficas continuas. Al indicarle el entrevistador que represente la gráfica de una función que cumpla las tres condiciones pero que no sea continua, proporciona la respuesta que aparece en la figura 4.38.



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Figura 4.38. Respuesta 3 de EST98 a la tarea 10 durante la entrevista

Este comportamiento indica que EST98 genera y coordina la información procedente de las tres condiciones al trasladar la información desde la expresión analítica a la gráfica. Además, a propuesta del entrevistador, es capaz de incorporar la idea de función no continua para proporcionar gráficas alternativas lo que indica el establecimiento de relaciones entre los conceptos de función no continua y límite para generar gráficas de la función. En relación a la tarea 5, en la que las condiciones, consideraban aproximaciones al infinito (una en el rango y la otra en el dominio), EST98 (Figura 4.39) también es capaz de coordinar las tres condiciones lo que le permite representar correctamente la gráfica de una función, coordinando la información procedente del comportamiento asintótico de la función.

Tarea 5

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla las siguientes tres condiciones a la vez:

a) $f(1) = 3$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +2$

c) $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

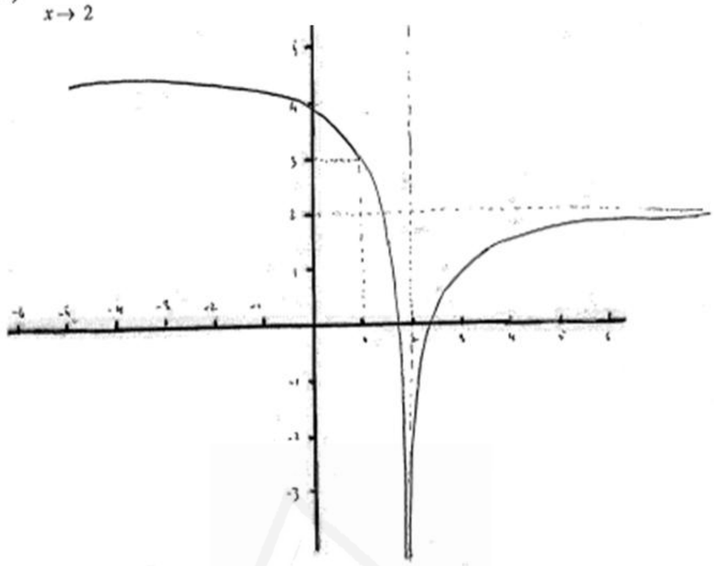


Figura 4.39. Respuesta de EST98 a la tarea 5 del cuestionario

Durante la entrevista este estudiante distingue explícitamente las tres condiciones (Figura 4.40). Al realizar la figura 4.40-1 coordina la aproximación en el dominio, cuando la *x* se aproxima a 2 por la izquierda, con la aproximación en el rango, cuando la función tiende a menos infinito. Al realizar la figura 4.40-2 coordina la aproximación en el dominio, cuando *x* tiende a más infinito, con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 2. Después de distinguir las tres condiciones, indica explícitamente que la gráfica de la figura 4.40-3 corresponde a la gráfica final y que pasa por el punto *(1,3)* que ha marcado con un punto. Aunque el estudiante no utiliza nunca la palabra "asíntota" sí que indica que se tiene que aproximar, pero nunca llegaría a ese valor.

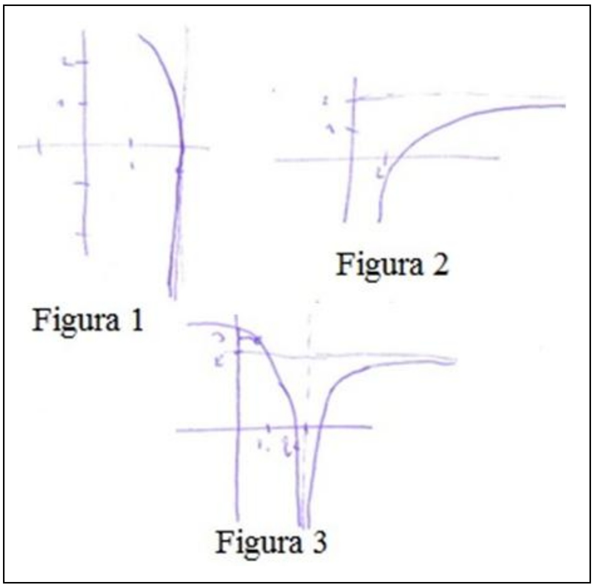


Figura 4.40. Respuesta 1 de EST98 a la tarea 5 durante la entrevista

Cuando el entrevistador le sugiere que haga otra representación (Figura 4.41) EST98 dibuja una recta auxiliar vertical, con trazo suave, que pasa por $x=2$, y una recta horizontal, con trazo suave, que pasa por $y=2$, marca el punto *(1,3),* y sobre las dos rectas auxiliares representa la tercera gráfica de la función.

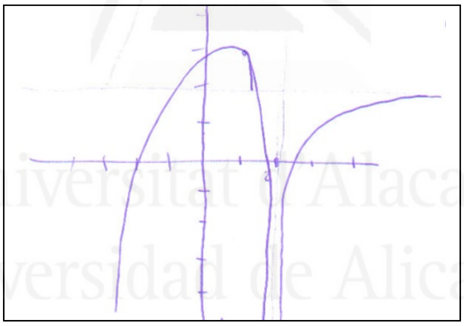


Figura 4.41. Respuesta 2 de EST98 a la tarea 5 durante la entrevista

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

EST98 relaciona el significado del límite cuando x se aproxima a un número y la función tiende a infinito y el límite cuando x tiende a infinito y la función se aproxima a un número para inferir nueva información (la forma de la gráfica que cumple esas condiciones). Este comportamiento marca una diferencia con el EST58 descrito en la sección anterior, el cual no relacionaba los significados de límite en el infinito para inferir nueva información.

4.3.4. Característica del esquema tematizado de límite: establecer relaciones con otras ideas matemáticas

Finalmente, hay estudiantes capaces de coordinar la información procedente de la inversión e introducir nuevas ideas matemáticas de manera espontánea para resolver la tarea. Estos estudiantes muestran cierta reorganización y reconstrucción del conocimiento de la idea de límite en el contexto gráfico cuando la información procede del modo analítico. Una característica del comportamiento de estos estudiantes es la manera en la que incorporan la idea de asíntota al proceso de resolución. Es decir, cuando los estudiantes son capaces de desempaquetar la información dada por la expresión del límite en el modo analítico y coordinarla para obtener información sobre el comportamiento gráfico de la función independientemente de si las aproximaciones son a un número o al infinito en el dominio o en el rango. Y, además, estos estudiantes introducen la idea de asíntota vertical (que no está en el enunciado del problema) con la finalidad de encontrar diferentes soluciones.

Por ejemplo, EST117 introduce sin ninguna indicación por parte del entrevistador la idea de asíntota vertical con la finalidad de argumentar que hay infinitas soluciones que resuelven las tareas. Así, en la tarea 10, EST117 relaciona las tres condiciones para representar una gráfica de la función (Figura 4.42)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Tarea 10

Si es posible, representa la gráfica de una función que cumpla las siguientes tres condiciones a la vez:

a) $f(0) = 4$

b) $\lim_{x \to +3} f(x) = +1$

c) $\lim_{x \to -3} f(x) = 0$

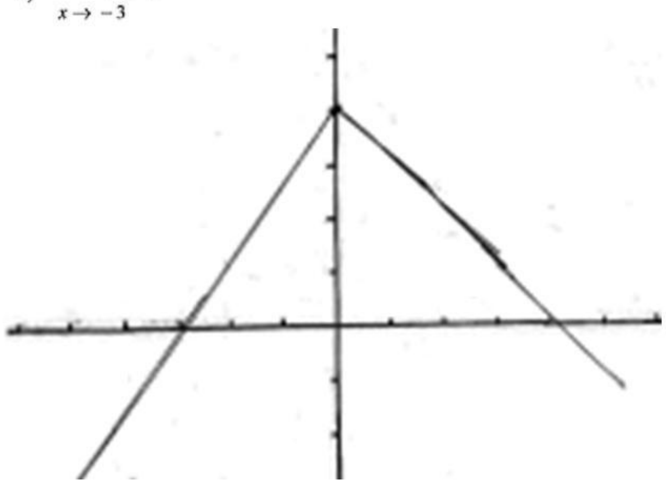


Figura 4.42. Respuesta de EST117 en la tarea 10 del cuestionario

Durante la entrevista (en catalán en el original), EST117 justifica la solución que dio en el cuestionario e indica que puede haber muchas gráficas que cumplen las tres condiciones. Cuando el entrevistador le propone que dé una solución diferente, EST117 marca los tres puntos en la gráfica y representa dos asíntotas verticales próximas a *x=2*, y a *x=–2*. En las dos representaciones que realizó durante la entrevista (Figura 4.43 y 4.44) no mencionó explícitamente la lateralidad, pero siempre representa la gráfica de una función que pasaba por el punto marcado previamente como representación del límite.

> *Inv: Vamos a la tarea 10, tú tienes una gráfica. ¿Me darías soluciones diferentes a la que tienes, cumpliendo las tres condiciones?*
> *EST117: …, sí, también, yo pienso que esta también tiene infinitas soluciones, ahí, mientras se cumplan las condiciones.*
> *Inv: Estás marcando la primera condición, que es el punto. ¿Qué punto es ese?*
> *EST117: El (0,4)… mientras cumpla que pase por estos tres puntos, puede haber muchas soluciones. Puedo hacer también asíntotas, también, no sé,…, no me acuerdo muy bien del pasado curso, pero,... ¿puede haber curvas?,... ¿puedo poner una parábola?... Yo diría también que infinitas, como la de antes,…, no dibujo muy bien … tú entiendes, más o menos lo que estoy dibujando* (Figura 4.43)

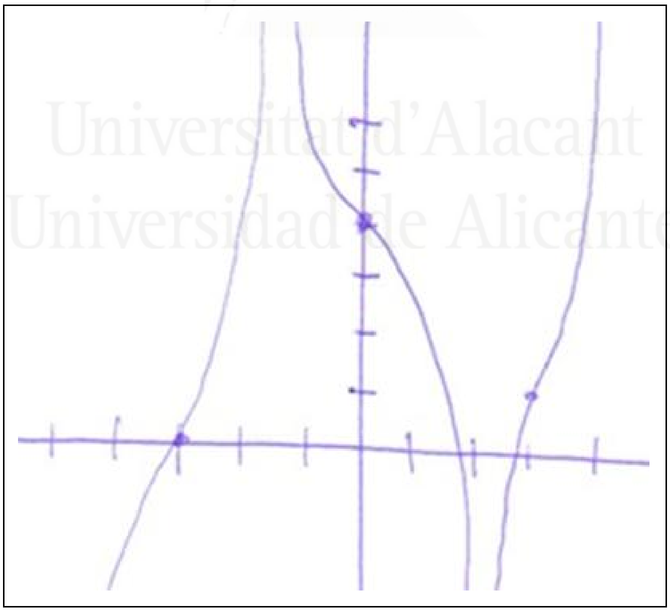


Figura 4.43. Respuesta 1 de EST117 a la tarea 10 durante la entrevista

> *Inv: ¿Cuántos puntos acabas de poner?*
> *EST117: Tres…, um, bueno, podría ser, … cualquier gráfica …*(Figura 4.44)

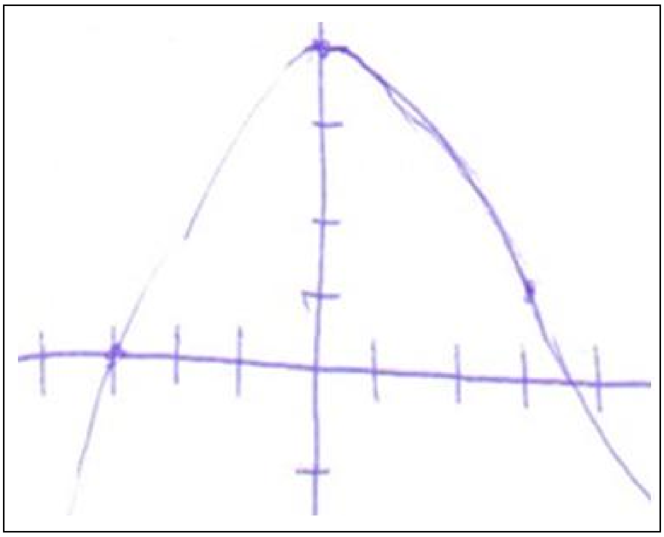


Figura 4.44. Respuesta 2 de EST117 a la tarea 10 durante la entrevista
(EST117. Entrevista sobre la tarea 10)

Este comportamiento evidencia que es capaz de coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango con el significado de límite en un contexto gráfico al admitir que la gráfica se aproxima al punto tanto por la izquierda como por la derecha, pero llegando al punto. No obstante, a diferencia del EST98, el estudiante EST117 añade a esta caracterización, de manera espontánea, la idea de asíntota vertical con la finalidad de argumentar que hay infinitas soluciones que resuelven la tarea en cuestión.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

De la misma manera, al resolver la tarea 5 el estudiante EST117 (Figura 4.45) considera que cuando *x* toma valores cada vez mayores, la función se aproxima a 2 (asíntota horizontal) ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = +2$), y entiende que $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ significa que cuando la *x* se aproxima a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, la función toma valores cada vez más pequeños (condición tercera) (asíntota vertical). Esto último le permite asumir la existencia de una asíntota vertical en *x=2*.

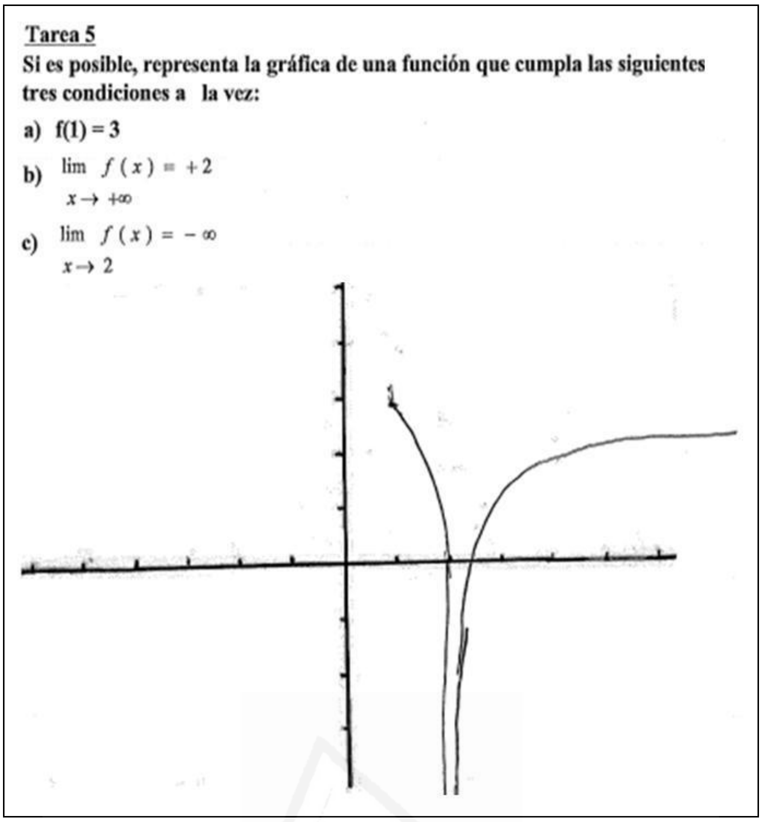


Figura 4.45. Respuesta de EST117 a la tarea 5 del cuestionario

Este comportamiento muestra indicios de las relaciones con otras ideas matemáticas que son usadas para resolver la tarea. El uso de la idea de asíntota en la demanda de dibujar una nueva gráfica puede ser entendido como indicios de reorganización y reconstrucción del conocimiento sobre el límite, con la finalidad de establecer nuevas estructuras cognitivas (relacionar de manera explícita el significado de asíntota y límite). Esta reorganización del conocimiento le permite discriminar el comportamiento de la gráfica de la función a partir de la otra condición ($\underset{x\to+\infty}{lím}\ f(x) = +2$) indicando que "*la gráfica de la función podría venir desde arriba*". La versatilidad en la que EST117 usa los significados de las rectas asíntotas para justificar la existencia de infinidad de soluciones indica que su comportamiento es distinto al de EST98.

Esta característica del comportamiento de estos estudiantes se evidenció cuando el entrevistador le preguntó a EST117 si podría representar otra función que cumpliera las tres condiciones (Figura 4.46). EST117 indica que podría haber más asíntotas y con esas condiciones podría haber muchas gráficas. El concepto de asíntota vertical indeterminada que EST117 introduce tampoco está en el enunciado del problema y es la

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

misma idea que ya ha utilizado en la resolución de la tarea 10, lo que permite suponer que EST117 ha establecido de manera explícita la relación entre el significado de límite y de asíntota en estos casos.

Inv: ¿Me podrías dibujar otra gráfica que cumpliera esas tres condiciones?
EST117: Podría haber más asíntotas, con estas condiciones puede haber muchas gráficas, pero,...
Inv: ¿Podrías representar alguna más?
EST117: Podría, por ejemplo, podría haber aquí una asíntota
Inv: ¿Qué estas marcando ahora?
EST117: Un punto. Sería..., esto está claro (hace referencia a la rama de la izquierda). Podría haber más asíntotas, que no te las dan y seguirían cumpliendo estas tres condiciones. Podría ser aquí una asíntota, y aquí otra asíntota y que subieran. … No es recto, no. Podría hacer así. Bueno, no lo he dibujado muy bien, porque dibujando soy un poco malo, ¿no sé si me entiendes?... Ya cumple estas condiciones (Figura 4.46).

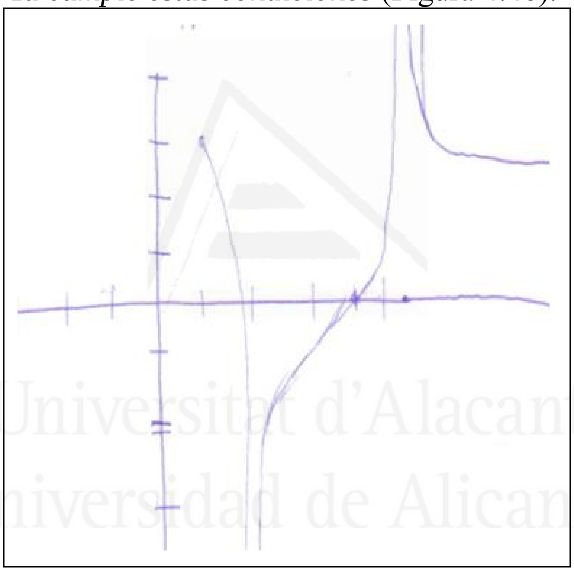


Figura 4.46. Respuesta 1 de EST117 a la tarea 5 durante la entrevista

Inv: Tú en estos momentos estás dibujando tres trozos de gráfica.
EST117: …, sería como,… um, bueno,…, sería poner otra asíntota vertical.
Inv: ¿La estás poniendo en x igual a cuánto?
EST117: A…, um
Inv: Sí, no, aproximadamente.
EST117: Um,…, no sé, eso da igual donde estuviera, daría igual.
Inv: Ahí estarías poniendo una asíntota vertical en x igual a...
EST117: …, no he puesto ningún número. Podría ser 4, por poner alguno, podría ser cuatro coma cuatro por… Se ha de entender el concepto.
EST117: Y también podría ser el mismo en el otro lado, bueno…
(EST117. Entrevista sobre la tarea 5)

Finalizada la explicación de la segunda gráfica el entrevistador le sugiere hacer una nueva representación (Figura 4.47).

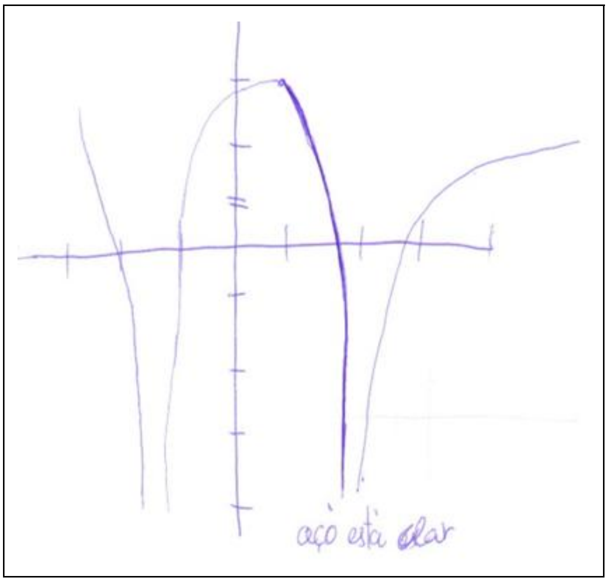


Figura 4.47. Respuesta 2 de EST117 a la tarea 5 durante la entrevista

Inv: No te preocupes, así está claro. Es que necesito constatar que lo que dices está claro.
EST117: …, En poner el 2 y el infinito y cumplir estas dos condiciones pueden haber más asíntotas, esto podría…, um, bueno es que no sé cómo ponerte que esto está claro después de haber puesto la gráfica sin poner a qué me refería
Inv: ¿Cuántas soluciones tiene el problema?
EST117: Infinitas.

(EST117. Entrevista sobre la tarea 5)

El comportamiento de EST117 ilustra una característica del esquema tematizado de límite al establecer de manera explícita relaciones entre el significado de límite (comportamientos alrededor de un punto y en el infinito) y el significado de asíntota como una manifestación de reorganización y reconstrucción de su conocimiento durante la resolución de los problemas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este capítulo se ha organizado en cuatro secciones. En la primera de ellas, formularemos algunas consideraciones sobre el papel relevante que los diferentes modos de representación tienen sobre la concepción dinámica de límite y la coincidencia o no de las aproximaciones laterales. En la segunda, examinaremos la construcción progresiva del conocimiento partiendo de la coordinación de los procesos de aproximación y la incorporación gradual en los diferentes modos de representación. En la tercera, discutiremos sobre la tematización del esquema de límite. Finalmente, en la cuarta, reflexionamos sobre las limitaciones e implicaciones para futuras investigaciones.

5.1. Sobre la comprensión del límite de una función y los modos de representación

Las características del desarrollo del esquema han puesto de manifiesto el papel relevante de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango según el modo de representación numérico (N), algebraico-numérico (AN) y gráfico (G). Dicha relevancia está en función de las relaciones de coincidencia y no coincidencia de las aproximaciones laterales. Los estudiantes acceden al significado dinámico de límite mediante la utilización del modo de representación gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden, se progresa en modo numérico y se consolida en modo algebraico–numérico. Nuestros resultados apoyan los presentados por Monaghan (2001), Blázquez y Ortega (2001) y Engler et al. (2007) en el sentido de que los límites presentados en modo gráfico son más fuertes que las ideas de límite mostradas en modo numérico. Esto es así ya que hay más estudiantes que resuelven la tarea presentada en modo gráfico que la presentada en modo numérico (Monagan, 2001), o al considerar que el proceso de identificación del límite es más comprensible en forma gráfica y numérica que en la algebraica (Blázquez y Ortega, 2001), o en el sentido de que los estudiantes no tuvieron problemas cuando resolvían tareas en modos de representación tabular (numérica) y gráfico si bien algunos de ellos no interpretaban adecuadamente el significado de límite al trabajar con la representación algebraica (Engler et al., 2007). La fortaleza del modo de representación también la evidencia Güçler (2013) cuando al examinar el discurso que se produce sobre el concepto de límite, indica que mientras los mediadores visuales (objetos creados y dirigidos a mejorar la comunicación matemática) que utilizaba el profesor eran principalmente simbólicos, los que utilizaban los estudiantes eran gráficos, lo que puede suponer dificultades en el aprendizaje. De la misma forma, cuando el profesor en el cálculo de límites utilizaba principalmente el enfoque algebraico - o el gráfico-, los estudiantes utilizaban el enfoque gráfico a fin de dar sentido a las funciones.

Nuestros resultados indican que cuando las aproximaciones laterales no coinciden, el acceso al concepto se realiza indistintamente en modo gráfico y algebraico-numérico, y se consolida en modo numérico. Una implicación de este hecho es que al proyectar un proceso de enseñanza–aprendizaje de la noción dinámica de límite de una función debemos ser conscientes del papel que determinan los diferentes modos de representación, y de que la habilidad para emplearlos de forma flexible puede ayudar a los estudiantes a visualizar y a construir una sólida imagen de dicho concepto.

Las dificultades de comprensión de la coordinación de las aproximaciones que tuvieron los estudiantes en relación con los modos de representación en nuestra investigación también han sido identificadas por otros autores. Desde nuestro punto de vista la concepción dinámica de límite de una función es una idea vinculada a los modos de representación: gráfico, algebraico-numérico y numérico, de ahí que una de las características del nivel Trans sea ser capaces de usar la coordinación de las aproximaciones tanto cuando coinciden como cuando no coinciden en los diferentes modos de representación: gráfico, algebraico-numérico y numérico. Podemos decir que hay prioridad de un modo de representación sobre otro, tanto cuando las aproximaciones laterales coinciden como cuando no coinciden.

En relación a la comprensión del concepto de límite de una función nuestros resultados estarían es sintonía con los presentados por Ortega (1999) y Blázquez y Ortega (2001) cuando afirman que la utilización de distintos registros de representación (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora esta comprensión. En el mismo sentido, pero en relación a la comprensión que una estudiante tenía del concepto de asíntota, Kidron (2010) indicó, que la persistencia de algunas partes de la imagen del concepto de asíntota a pesar del razonamiento algebraico y analítico, solamente fue revisada cuando se añadió el razonamiento numérico. Para estos autores un estudiante que utilice indistintamente diferentes modos de representación tendrá una sólida comprensión de la noción de límite de una función. Ello nos ha llevado a hacernos la siguiente pregunta: ¿influye el tipo de enseñanza recibida en que se desarrolle un modo de representación más que otro?

Al analizar el rol que desempeña el algebra en el razonamiento matemático sobre el límite de funciones Bergsten (2006) indica que cuando los estudiantes resuelven problemas de límites, el álgebra es al mismo tiempo una llave y una cerradura para alcanzar el límite, en el sentido de que el álgebra inicia o bloquea el acceso al concepto. En nuestra investigación los estudiantes asignados al nivel Intra manifiestan dificultades con la idea de aproximación a un número. La idea de aproximación a un número viene determinada por su capacidad para construir la sucesión de valores de la función (los valores en rango) a partir de los valores del dominio. Los estudiantes que tienen dificultades en construir la sucesión de valores de la función a partir de los valores de la variable independiente tienen una "cerradura", coincidiendo con Bergsten (2006), en su camino hacia la resolución de tareas que involucren el cálculo de límites. En el mismo sentido se entienden los resultados de Moru (2009) al concluir que los estudiantes cometen errores en la manipulación algebraica. De esta manera la idea de función se convierte en prerrequisito para el desarrollo de las ideas de aproximación y coordinación de las aproximaciones en el esquema de límite de una función. El prerrequisito que representa la idea de función apoya los resultados presentados por Engler et al. (2007) al indicar que los estudiantes cometen más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa.

La coordinación de los diferentes registros de representación que avala Duval (1996, 2006) se manifiesta por la capacidad de reconocer entre dos representaciones diferentes del mismo objeto. Dicha coordinación de diferentes registros da poder de iniciativa y de control en el desarrollo de los procesos, siendo esta coordinación el umbral de los mismos. Los estudiantes asignados al nivel Inter son capaces de coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango solo en un modo de representación cuando las aproximaciones laterales no coinciden, pero son los estudiantes asignados al nivel Trans los que estarían pasando el "umbral" al coordinar las aproximaciones en dos o tres modos de representación, es decir, al reconocer diferentes representaciones del mismo objeto, en este caso, la concepción dinámica del límite.

5.2. Sobre el desarrollo del esquema de límite de una función

En el capítulo anterior, una vez caracterizado los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función, hemos podido observar que la construcción del conocimiento es progresiva y que el paso de un nivel a otro se pone de manifiesto mediante el tipo de relaciones que los estudiantes establecen entre los diferentes elementos matemáticos. La primera relación que los estudiantes utilizan hace referencia a la "**coincidencia de las aproximaciones laterales**", y la que más dificultades presenta es la "**no coincidencia de las aproximaciones laterales**". Por tanto, para los estudiantes lo que es matemáticamente relevante y una característica significativamente cognitiva para la comprensión de la noción de límite, en el sentido de Duval (1996), es la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Por consiguiente, la capacidad que nuestros estudiantes deben desarrollar es la de oponer y dar importancia a la coordinación de los procesos de aproximación cuando las aproximaciones laterales no coinciden, que es lo matemáticamente relevante y una de las características significativamente cognitivas.

El uso que los estudiantes hacen de la "**coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango**" en diferentes modos de representación es lo que ha permitido caracterizar el desarrollo del esquema. Para determinar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función ha sido fundamental el uso que los estudiantes hacen de: i) la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, ii) las relaciones de coincidencia (o no) de las aproximaciones laterales, y iii) los diferentes modos de representación (gráficos, algebraico–numérico y numéricos).

Al igual que otros autores (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2006; Bodi, 2006; Boigues et al., 2010) el nivel Intra se caracteriza porque los estudiantes son capaces de usar e identificar elementos del esquema de forma aislada, pero tienen dificultades cuando intentan establecer relaciones. En el caso del límite de una función los estudiantes inicialmente coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango (concepción dinámica de límite) solo cuando las aproximaciones laterales coinciden, en un único modo de representación (mayoritariamente el modo gráfico), pero tienen dificultades en coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden.

Posteriormente, en el nivel Inter los estudiantes son capaces de usar la no coincidencia en un modo de representación, mayoritariamente el gráfico. Todos los estudiantes de este nivel coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en uno o dos modos de representación, mayoritariamente en modo gráfico y en menor medida en modo algebraico–numérico y numérico. Esta caracterización se corresponde con la realizada por otros autores para otros conceptos (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros et al., 2006; Bodi, 2006) que basan la caracterización de este nivel en que los estudiantes son capaces de usar e identificar elementos del esquema y empiezan a establecer relaciones de no coincidencia en las aproximaciones laterales. Los estudiantes del nivel Inter comienzan a ser competentes para indicar que cuando la variable independiente se acerca a un número, la función se aproxima a puntos distintos por la derecha y por la izquierda en un modo de representación. También son capaces de calcular los valores de la función dada en modo algebraico y posteriormente diferenciar que la función se aproxima a valores diferentes por la izquierda y por la derecha, si bien no son capaces de realizar la misma diferenciación cuando se les presenta idéntica tarea en modo numérico. Es decir, sin necesidad de realizar el cálculo de los valores de la función. De alguna forma la realización del cálculo para la obtención de los valores de la función les posibilita la comprensión de que la función se aproxima a distintos números según nos aproximemos por la izquierda y la derecha lo cual parece indicar que el estudiante tiene una concepción limitada de la idea de número real (Moru, 2009). Esta caracterización del nivel Inter también se corresponde con la realizada por los autores anteriores al establecer los estudiantes relaciones de forma incompleta, es decir, sin haber construido la estructura del esquema.

Establecer relaciones entre los elementos del esquema sin demasiadas restricciones y usar dicho esquema construido en las situaciones en las que hay que realizar operaciones sobre los distintos elementos matemáticos que se conocen para deducir nuevas informaciones son las características que conforman el nivel Trans de desarrollo del esquema. Todos los estudiantes son capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, independientemente del modo de representación. Cuando las aproximaciones laterales no coinciden la mayoría es capaz de establecer la coordinación de las aproximaciones en los tres modos de representación.

Piaget y García (1982) indican que las etapas de construcción de los conceptos son secuenciales. Cada nueva etapa comienza con una reorganización a otro nivel de las adquisiciones que se habían conseguido en los niveles anteriores. Los mecanismos sobre los que se fundamenta la asimilación son las abstracciones y la generalización. Estos autores consideran que la abstracción debe ser reflexiva (en contraposición a la abstracción empírica), porque lo que se abstrae ha de pasar de un nivel inferior a uno superior, pero al mismo tiempo se debe producir una reflexión mental que reorganice el nuevo estado del conocimiento. Baker et al. (2000), en su investigación sobre el esquema gráfico de cálculo indican que cualquier esquema puede variar de un estudiante a otro y puede desarrollarse por diferentes caminos, pero el esquema desarrollado por cada estudiante ha de pasar de alguna forma por los tres niveles piagetianos de desarrollo. Nuestros datos indican que los estudiantes pasan a través de los diferentes niveles de desarrollo, cada esquema individual progresa paulatinamente mediante la capacidad de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Los estudiantes en un primer

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

momento no son capaces de realizar dicha coordinación, en otro momento empezarán a coordinar dicha aproximación en un único modo de representación, y finalmente serán capaces de realizar dicha coordinación en cualquier modo de representación.

Finalmente, nuestros resultados indican que los estudiantes tienen dificultades para realizar la coordinación métrica en términos de desigualdades. Solo en los niveles inter (apoyándose en la sucesión de valores de x y f(x)) y trans (haciendo uso de las diferencias $|x - a|$ y $|f(x) - f(a)|$) algunos estudiantes empiezan a establecerla. En términos parecidos Cottrill et al. (1996) señalaron que solo unos pocos estudiantes iban más allá de la coordinación de los dos procesos de aproximación debido a la problemática utilización de las desigualdades.

5.3. Sobre la tematización del esquema de límite

La tematización de un esquema para Piaget y García (1982) es el paso que se produce al pasar de usar implícitamente una noción a usarla conscientemente, es decir, conceptualizarla. Asiala et al. (1996) consideran que los esquemas han sido tematizados cuando pueden ser tratados como objetos e incluirse en la organización de esquemas de "niveles superiores" de estructuras matemáticas. Clark et al. (1997) consideran que se ha tematizado el esquema cuando el estudiante ha construido una estructura subyacente que proporciona la coherencia necesaria para identificar y decidir lo que hay en el ámbito del esquema y lo que no. Cooley et al. (2007) afirman que la tematización de un esquema se refiere a una construcción mental de dicho esquema que puede ser utilizado por partes en las situaciones apropiadas. Un estudiante ha tematizado el esquema cuando es capaz de demostrar que es consciente de este, y puede reflexionar y actuar en consecuencia durante la resolución de problema. García et al. (2010) basan la tematización en un uso consciente de los elementos matemáticos y relaciones. Reconocen este uso consciente en la proyección del conocimiento que hace el estudiante a un plano superior y en la reorganización de dicho conocimiento.

En nuestra investigación hemos caracterizado diferentes momentos en la tematización del esquema. En un primer momento, hemos caracterizado la dificultad en invertir el significado de límite (no desempaquetar) para generar información sobre la gráfica de la función; en un segundo momento, hemos caracterizado la dificultad en coordinar diferentes condiciones después de invertir el significado de límite generando información sobre la gráfica de la función, en un tercer momento, hemos caracterizado la coordinación de la información. La tematización del esquema la hemos caracterizado cuando los estudiantes coordinan toda la información y establecen relaciones con otras ideas matemáticas. Es decir, hemos considerado que los estudiantes han tematizado el esquema de límite de una función cuando pueden invertir el significado de límite (desempaquetar) para generar la información sobre la gráfica de la función y han coordinado la información generada desde las inversiones del significado de límite para representar la gráfica de la función y han establecido al mismo tiempo relaciones con otras ideas matemáticas. Estas características sugieren que los estudiantes construyen diferentes estructuras subyacentes al esquema debido a las relaciones que establecen entre el límite de una función en un punto y su representación gráfica al admitir que la gráfica se aproxima al punto tanto por la izquierda como por la derecha pero sin llegar al punto o cuando afirman que sí toma el punto.

Además, las características identificadas proceden de tener en cuenta las dos ideas que constituye la abstracción reflexiva. Estas ideas las hemos usado en la caracterización de la tematización (proyección del conocimiento a un nuevo plano, entendida como establecer relaciones entre los significados del límite en situaciones particulares para dibujar gráficas) y la construcción de nuevas estructuras matemáticas (al establecerse relaciones entre diferentes ideas matemáticas como límite y asíntota). La introducción de otras ideas matemáticas sería la forma de reconocer que un estudiante ha proyectado el conocimiento a un nivel superior de comprensión al construir una estructura subyacente que puede generar múltiples soluciones a la situación problemática, en nuestro caso, al relacionar el límite con otros conceptos matemáticos como la continuidad y la idea de asíntota. El hecho de relacionar los diferentes conceptos matemáticos es lo que puede ser interpretado como que el estudiante realiza acciones sobre el objeto cognitivo esquema de límite. Para Cooley et al. (2007) esta sería la evidencia de que los estudiantes utilizan el esquema como un objeto, que según la teoría APOS es lo que se necesita para considerar que un estudiante ha tematizado el esquema.

Los estudiantes que hemos considerado que han tematizado el esquema fueron capaces de explicar con bastante detalle su razonamiento dando diferentes soluciones a la misma tarea (Cooley et al., 2007), y obtuvieron información sobre el comportamiento de la gráfica de la función que no estaba presente en la tarea inicial, coordinando información sobre la representación analítica (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006), lo que les llevó a encontrar diferentes soluciones a la misma tarea, siempre con unas características comunes.

5.4. Limitaciones. Implicaciones para futuras investigaciones

El estudio que hemos realizado presenta limitaciones y cuestiones que pueden servir para futuras investigaciones:

- La investigación realizada se fundamenta en las respuestas que los estudiantes de educación post-obligatoria dieron a un cuestionario en el que habíamos seleccionado 10 tareas sobre la idea de límite de una función. Una de las limitaciones de nuestro trabajo está en las características del cuestionario, ¿qué resultados obtendríamos si fuesen otras las tareas del cuestionario? ¿Y si modificáramos las funciones presentadas en las tareas?
- En nuestra investigación, en las tareas 4 y 9 los correspondientes ítems 4b y 9b no consiguieron el objetivo para el que habían sido diseñados. Una pregunta para futuras investigaciones sería, ¿cómo presentar las tareas anteriores con la finalidad de obtener el límite de una función partiendo de las diferencias métricas en términos de desigualdades?
- El estudio que hemos presentado ha tenido en cuenta dos años consecutivos de enseñanza, y nos ha aportado información sobre el desarrollo en la construcción de la idea de límite de una función. Unas preguntas que nos podríamos plantear: ¿es independiente del curso en que se encuentran los estudiantes? ¿Cómo se caracterizarían los niveles de desarrollo del esquema si consideráramos a los estudiantes de primero de bachillerato independientemente de los de segundo de bachillerato?
- Hemos focalizado nuestra investigación en la comprensión del esquema de límite de una función que muestran los estudiantes a través de los niveles de desarrollo del esquema, ¿podríamos determinar subniveles del esquema de límite?

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- Nos planteamos cómo los resultados de la investigación sobre el desarrollo del esquema de límite pueden emplearse en los procesos de enseñanza en las aulas y en el desarrollo curricular de la enseñanza postobligatoria del bachillerato.
- Hemos descrito los niveles de desarrollo del esquema de límite mediante los elementos matemáticos, las relaciones que se establecen y los modos de representación, ¿cómo se modificaría la caracterización realizada si utilizáramos tareas diferentes a las realizadas?
- Nosotros hemos focalizado el desarrollo de la comprensión de la idea de límite, pero podríamos preguntarnos: ¿qué potencialidad tienen las relaciones de coincidencia y no coincidencia en el desarrollo de la comprensión de un concepto matemático distinto al de límite?
- Nos podríamos centrar en el desarrollo metodológico, y en concreto en la eficacia de la entrevista, y plantearnos las siguientes preguntas: ¿cómo deberían ser las entrevistas para que tuvieran valor informativo por sí mismas? ¿Qué papel debe jugar el entrevistador? Si en vez de presentar a los estudiantes sus producciones para que nos aclararan las razones de sus respuestas, si las tareas presentadas hubiesen sido nuevas, diferentes a las realizadas en la resolución del cuestionario, ¿cómo hubieran respondido?

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

REFERENCIAS

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld & E. Dubinsly (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*, pp. 1–32.

Bachelard, G. (1974). *La formación del espíritu científico*. Argentina: Editorial Siglo XXI.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for research in mathematics education, 31* (5), pp. 557–578.

Bergsten, C. (2006). Trying to reach the limit – The role of algebra in mathematical reasoning. *Proceedings of the 30nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2* (2) pp. 153–160.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid. España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la Educación Secundaria. *En El futuro del cálculo infinitesimal.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (3), pp. 219–236.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* pp. 67–83.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (2), pp. 189–209.

Biosca, A., Espinet, M.J., Fandos, M.J. y Jimeno, M. (1998). *Matemáticas I.* Barcelona: Editorial Edebé.

Bodi, S.D. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.* Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Bodi, S.D., Valls, J. y Llinares, S. (2009). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 215–233). Castellón, España: Innovació Digital Castelló.

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (3), pp.129–158.

Boyer, C.B. (1987). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial Textos.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathemátiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4* (2), pp. 165–198.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (3), pp. 237–265.

Cauchy, A. (1821): *Cours d'Analyse de l'École Royale Politechnyque, (Primer Partie. Analyse Algébraique).* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Edición facsímil.

Clark, J., Cordero, F., Cotrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidakovic, D. (1997). Constructin a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16* (4), pp. 345–364.

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas I.* Madrid: Siglo XXI de España Editores S.A.

Collette, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas II.* Madrid: Siglo XXI de España Editores S.A.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema tematization: A framework and a exemple. *Journal for Research in Mathematics Education, 38* (4), pp. 370–392.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153 – 166). Dordrecht: Kluver.

Coutuier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 51–63). Castellón, España: Innovacio Digital Castelló.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* pp. 167–192.

Çetin, N. (2009). The performance of undergraduate students in the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(3), 323–330. DOI: 10.1080/00207390802568119.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning, 4* (4), pp. 337–350.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–126). Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(1), 47–70.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Nuchatel: Peter Lang.

Duval, R (1996). Quel cognitive retenir en didactique des Mathématiques. *Researches en Didactique des Mathématiques, 16* (3), pp. 349–382.

Duval, R (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, pp. 103–131

Elia, A., Gagatssi, A., Panaoura, A., Zachariades, T. y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "Limit" and the impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education.* Published online: 20 de February 2009.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D. y Gregorini, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN*, *11*, pp. 113–132.

Espinosa, L. y Azcarate, C (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de "límite de función": Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (3), pp. 355–368.

Euclides: Elementos; Libros X-XIII. Traducción y notas de M.L.Puertas. Editorial Gredos, 1996.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Fernández-Plaza, J.A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2013a). Variación de las concepciones individuales sobre límite finito de una función en un punto. En A: Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.) Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 253–261). Bilbao: SEIEM.

Fernández-Plaza, J.A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2013b). Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 699–710.

Garbin, S. y Azcarate, C, (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16–17 años. *Enseñanza de las Ciencias, 20* (1), pp. 87–113.

Garbin, S. (2005a). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: El caso de estudiantes con conocimientos de cálculos. *Enseñanza de las Ciencias, 23* (1), pp. 61–80.

Garbin, S. (2005b). ¿Cómo piensan los alumnos de 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lengujes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (2),* 169–193.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International of Journal of Science and Mathematics Education*. Doi: 10.1007/s10763-010–9227–2.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (F.) (eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications.* London: Springer.

Gras, R. y Kuntz, P. (2009). El análisis estadístico implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 3–49). Castellón, España: Innovació Digital Castelló.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of a simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), pp. 115–141.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics.* 82:439–453. DOI 10.1007/s10649–012–9438–2.

Janvier, C. (1987). *The interpretation of complex cartesian graph representing situations, studies and teaching experiments*. Tesis doctoral. Universidad de Québec.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763–010–9258–8

Kim, D., Sfard, A. y Fferrini-Mundy, J. (2005). Students' colloquial and mathematical discourses on infinity and limit. *Proceedings of the 29nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 2, 201–208.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 134–174.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, II.* Madrid: Alianza Editorial.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379–394). Lleida. SEIEM.

Mamona–Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal: A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48,* pp. 259–288.

Mason J. y Jonston-Wilder S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: RouthledgerFalmer – The Open University.

Monaghan, J. (1991). Problems whit the language of limits. *For the learning of Mathematics*, *11* (3), pp. 20–21.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* pp. 239–257.

Moru, E. K. (2007). Talking with the literature on epistemological obstacles. *For the learning of Mathematics, 27* (3), pp. 34–37.

Moru, E.K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* pp. 431–454.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other students metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (4), pp. 396–426.

Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 193–216.

Piaget, J. (1963). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En la colección Psicología y Educación. *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Editorial Aguilar, pp. 3–28.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: an essay on the relations between organic regulations and cognitive processes*. University of Chicago Press, Chicago. (Originally published in French, 1963)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Piaget, J. y Inhelder, B. (1978). *Psicología del niño*. Madrid, 8ª edición: Ediciones Morata.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2011). Coordination of approximations in secondary school students' understanding of limit concept. *Proceedings of the 35nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (3) pp. 393–400.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). Jaén: SEIEM.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Características de la tematización del esquema de límite de una función. En A: Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 449–457). Bilbao: SEIEM,

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of a function in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, pp. 103–132.

Ríbnikov, (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69,* pp. 217–233. DOI 10.1007/s10649–008-9128–2.

Sánchez – Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión de los alumnos de bachillerato y primer curso de la universidad sobre la noción matemática de derivada. (Desarrollo del concepto).* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla

Sánchez–Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 24* (1), pp. 85–98.

Sfard, A (1991). On the dual natura of mathematical conception: Refletions on processes and objects as diferents side of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function. En Harel G. y Dubinsky E. (eds.) *The Concept Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59–84). Washinton D.C.: Mathematical Association of America, *Notes Series* Vol. 25.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatives a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6* (1), pp. 5–67.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940–1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17* (3), pp. 463–476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre el Límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3* (1), pp. 71–85.

Skemp R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. London: Penguin Books.

Spivak, M (1977). *Calculus. Cálculo infinitesimal.* Barcelona: editorial reverté s.a.

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (3), pp. 258–276.

Swinyard,C (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior* (2011), doi: 10.1016/j.jmathb.2011.01.001

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43* (4), pp. 465–493.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12, pp.* 151–169.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D.Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3–21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Researches on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan,.

Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. y Simpson A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18* (2), pp. 223–241.

Trigueros, M. y Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 13* (36), pp. 59–85.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática +Educativa, 11* (3), pp. 413–450.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29* (3), pp. 325–338.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluver.

Williams, S.R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (3), pp. 219–236.
Williams, S.R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (4), pp. 341–367.

Zamora, L., Gregori, P. y Orús, P. (2009). Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 65–101). Castellón, España: Innovació Digital Castelló.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha acordó otorgar, por a la Tesis Doctoral de Don/Doña. la calificación de

Alicante de de

El Secretario,

El Presidente,

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

UNIVERSIDAD DE ALICANTE
EDUA

La presente Tesis de D. ha sido registrada con el nº del registro de entrada correspondiente.

Alicante, de de

El Encargado del Registro

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante