T5. Contrastos per als paràmetres d’una població normal

Universitat d’Alacant
Universidad de Alicante

Departament de Ciències del Mar i Biologia Aplicada

Interval de confiança per a la mitjana poblacional

Intervals de confiança

Intervals de confiança: serveixen per a estimar el valor d'un paràmetre de la població.

Un **interval de confiança de l'**$1\text{-}\alpha$ **%** per a un paràmetre és un interval de valors calculat a partir de les dades de la mostra.

Probabilitat $1\text{-}\alpha$ que continga el vertader valor del paràmetre.
El nivell de confiança sol ser 0,90 (90%), 0,95 (95%) ó 0,99 (99%).

Interpretació pràctica.

Interval de confiança per a la mitjana poblacional

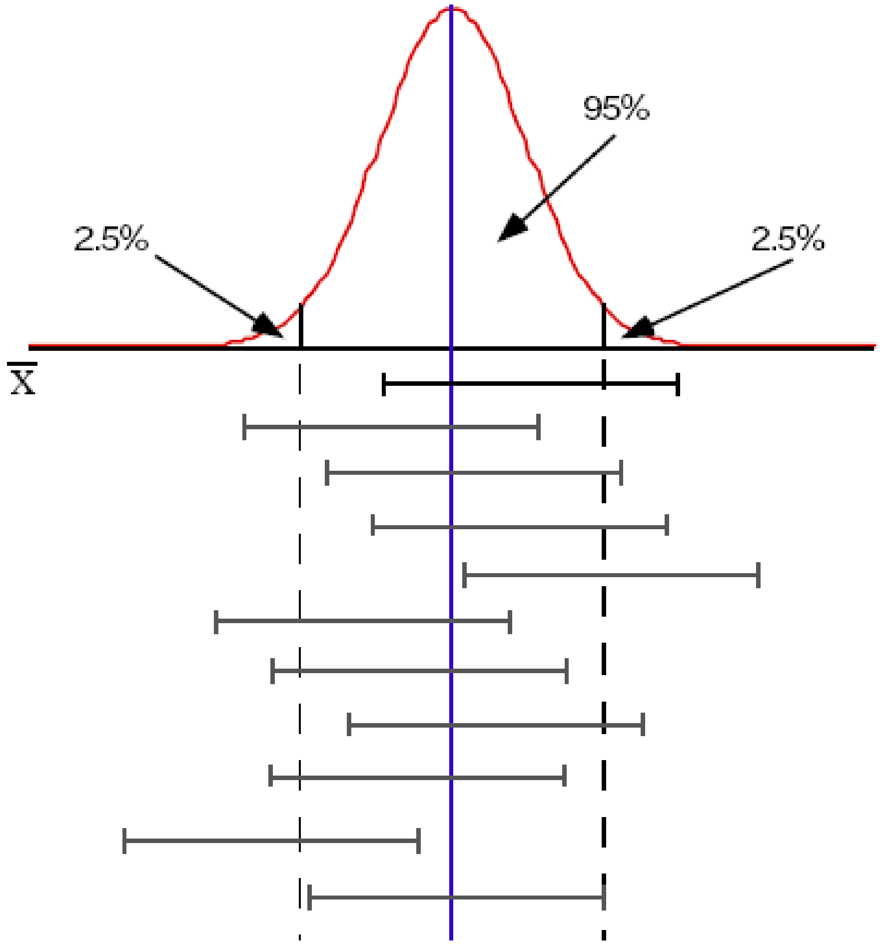


Figura 2: Interpretació del nivell de confiança en l'interval per a la mitjana d'una distribució normal

Interval de confiança per a la mitjana poblacional

La mitjana mostral i la desviació estàndard són bons estimadors

Aquests estimadors són alhora variables aleatòries.
Tenen una determinada distribució, en el cas de la mitjana és normal.

Així doncs, podem calcular un interval de valors [*a*,*b*] tals que

$$P(a \leq \overline{X} \leq b) = 1 - \alpha$$

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Suposem que disposem d'una població en la qual tenim una v.a. amb distribució N(μ,σ) amb σ coneguda.

Obtenim una mostra de grandària n i desitgem estimar la mitjana μ de la població.

El seu estimador puntual és la mitjana mostral la distribució mostral de la qual és coneguda

$$\bar{x} \equiv \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

L'estadístic és $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tindrà distribució normal estàndard

Avantatge: Valors tabulats

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Sobre la distribució $N(0,1)$ podrem seleccionar dos punts simètrics $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$, tals que

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

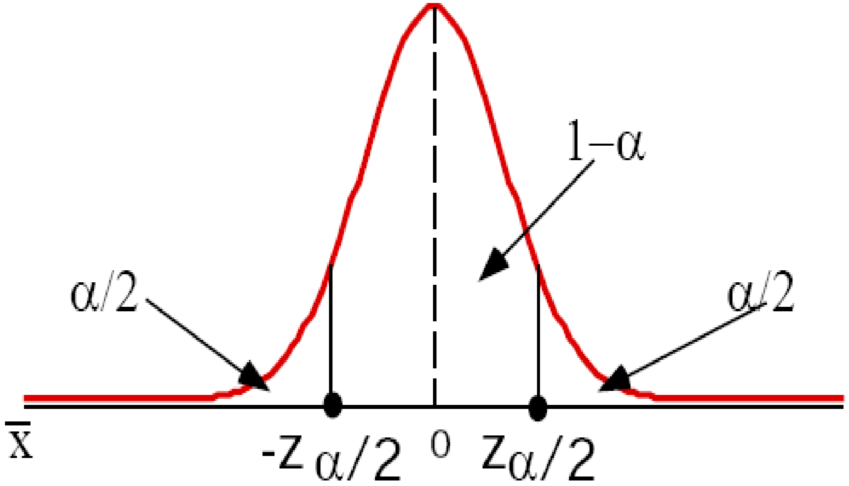


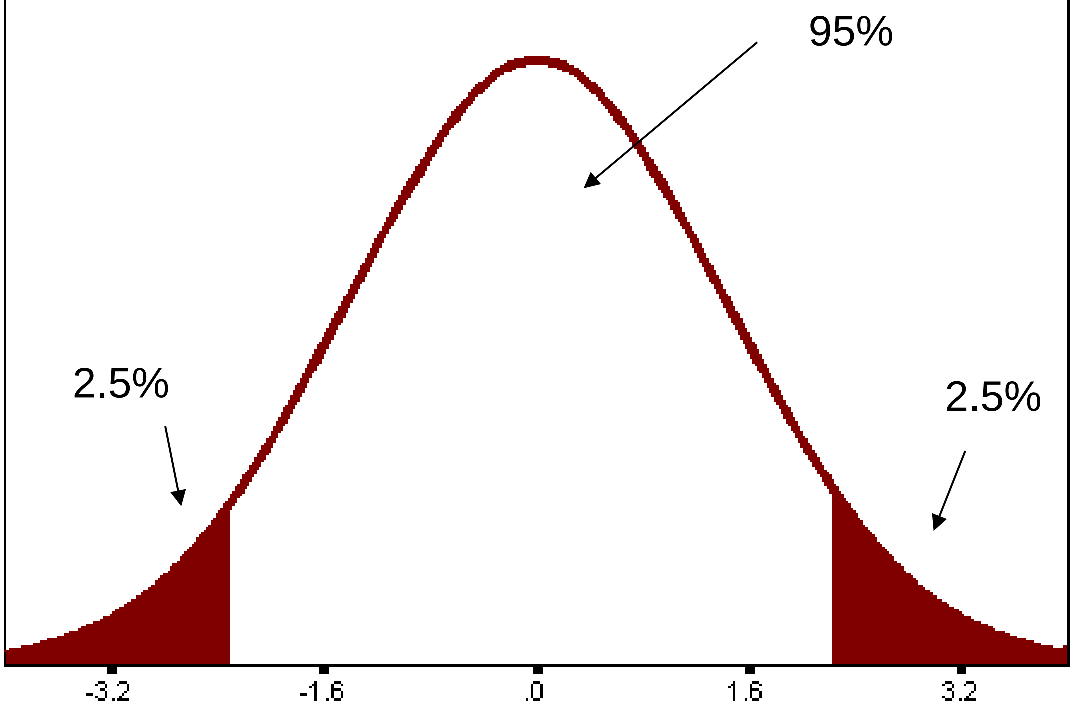
Figura 1: Selecció dels punts crítics per al càlcul de l'interval de confiança

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Gràficament: per a una normal tipificada, un interval de confiança del 95% es pot representar com:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$



La probabilitat que una variable normal tipificada prenga valors en l’interval

[-1.96,1.96] és del 95%.

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha \qquad Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Substituint Z,

$$P\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

Buidant ens queda l'interval de confiança,

$$P\left\{\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha \qquad z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow$$

Marge d'error (ε)

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = (\bar{x} \pm \varepsilon) = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Exemple

Obtenir un I. C. del 95% per a la mitjana de la talla d'una població de tauró blanc, de la qual es mesuren 25 individus, obtenint-se $\overline{x}=390$ cm. Se sap que σ^2 és de 400 cm.

$$I_{\mu}^{1-\alpha}=\left(\overline{x}\pm\varepsilon\right)=\left(\overline{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$I_{\mu}^{0.95}=\left\{390-1.96\frac{20}{\sqrt{25}},\ 390+1.96\frac{20}{\sqrt{25}}\right\}$$

$$I_{\mu}^{0.95}=(382.16,\ 397.84)\Longrightarrow 382.16\leq\mu\leq 397.84$$

La talla mitjana dels taurons es troba entre 382.16 i 397.84 amb un nivell de confiança del 95%

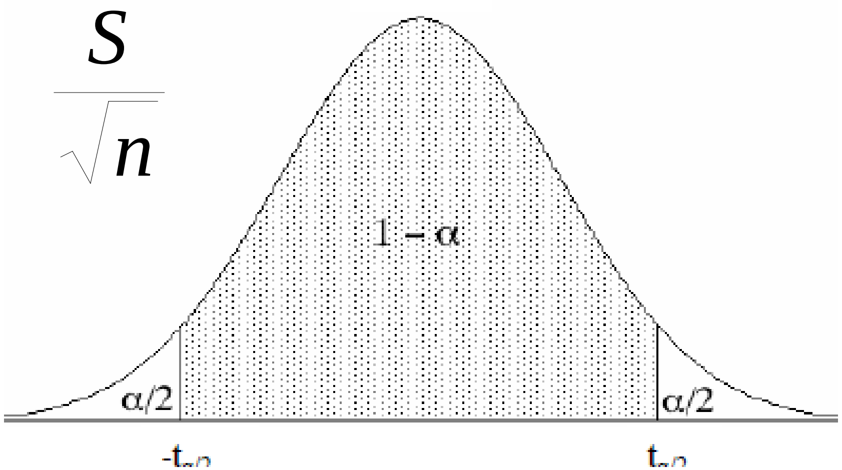
Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ desconeguda**

Si la variància poblacional (σ) és desconeguda i la variable és normal (o es pot aproximar a la normal pel teorema central del límit)

S’usa la t de Student

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

- Amb n–1 graus de llibertat
- Desviació típica mostral



L’interval de confiança resulta

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left(\overline{x} \pm \varepsilon\right) = \left(\overline{x} \pm t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(\overline{x} - t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Interval de confiança per a la mitjana poblacional, **σ desconeguda**

Exemple

Un laboratori dedicat a l'elaboració de pinsos per a aqüicultura, afirma que el seu producte augmenta el pes mitjà dels peixos en 30 g mensuals. En una mostra de 9 peixos presos a l'atzar, es va obtenir un augment mitjà de 35 g amb desviació típica de 3.04 g.

Estimar l'interval de confiança al 95% per al vertader augment mitjà.

$$I_{\mu}^{1-\alpha} = \left(\overline{x} \pm \varepsilon\right) = \left(\overline{x} \pm t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \left(\overline{x} - t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + t_{\alpha/2,\ n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$I_{\mu}^{0.95} = \left(35 - 2.306 \frac{3.04}{\sqrt{9}},\ 35 + 2.306 \frac{3.04}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I_{\mu}^{0.95} = (32.66,\ \ 37.34) \Longrightarrow 32.66 \le \mu \le 37.34$$

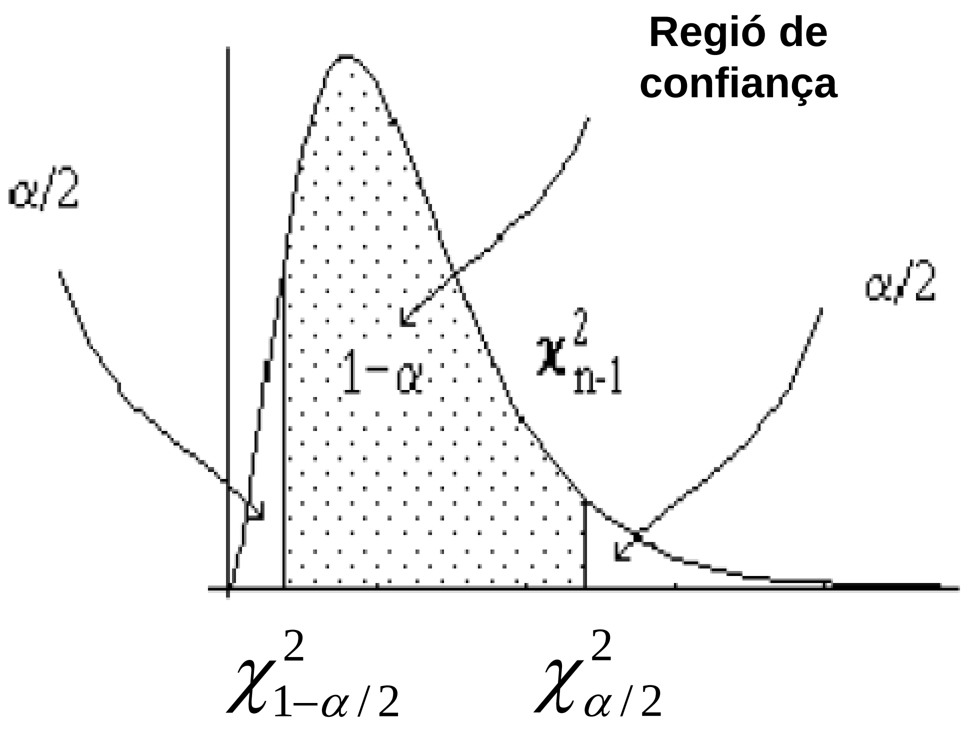
Interval de confiança per a la variància poblacional

L'estadístic utilitzat és: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

- Segueix distribució χ^2 no simètrica
- Amb n–1 graus de llibertat

L'interval de confiança resulta

$$P(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \le \chi^2_{n-1} \le \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = 1-\alpha$$



$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1,\alpha/2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

$$I^{1-\alpha}_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right]$$

Interval de confiança per a la variància poblacional

Exemple

S'estudia el diàmetre de la petxina en una població de llepasses. Després de mesurar 25 individus, s'obté una mitjana de 170 mm i una desviació típica de 10.206 mm. Calcular un interval de confiança amb α de 0.05 per a la variància del diàmetre de les llepasses.

$$\bar{x} = 170$$

$$S = 10.206$$

$$\alpha = 0.05$$

$$n = 25$$

$$I_{\sigma^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right]$$

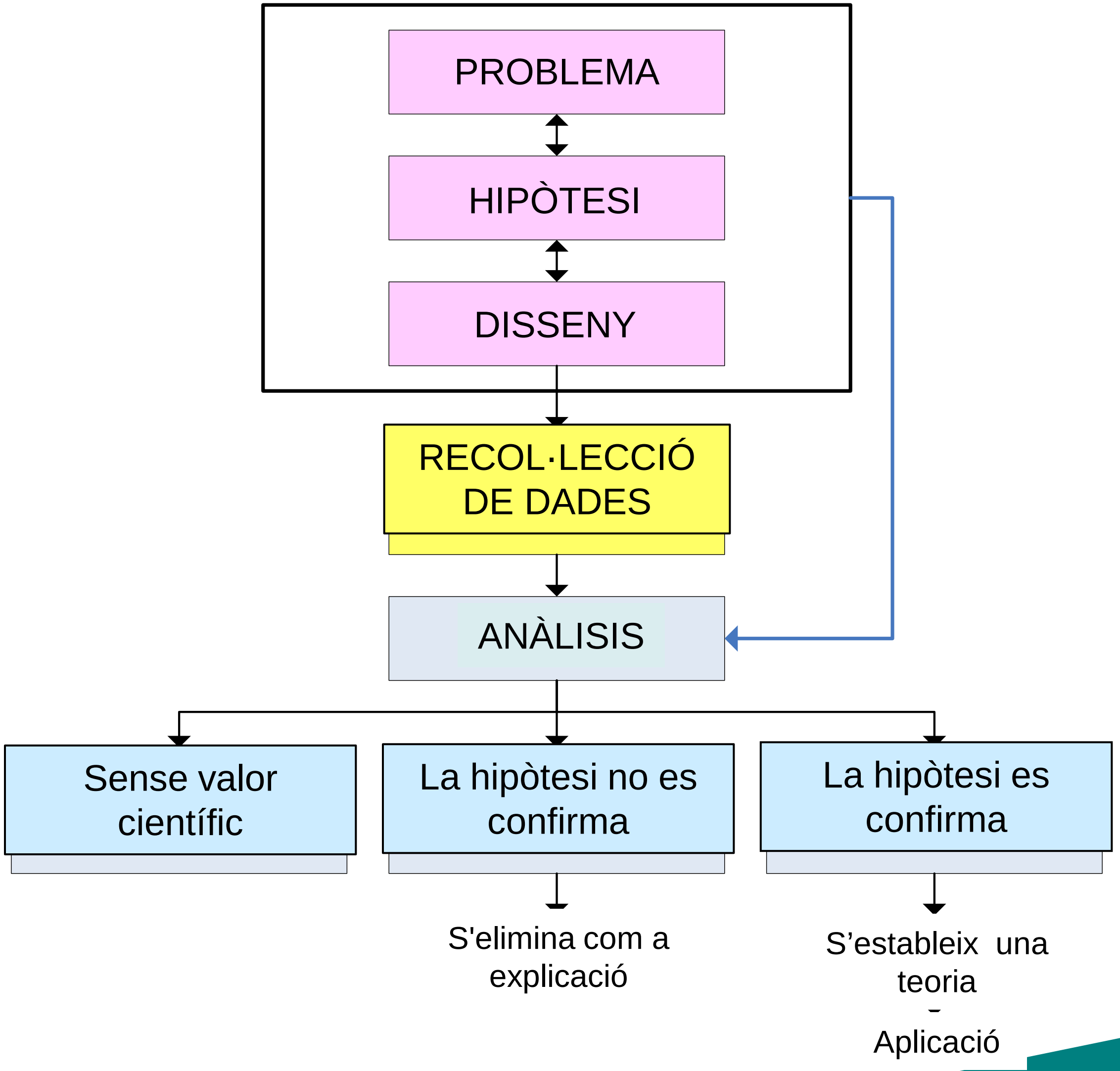
$$I_{\sigma^2}^{0.95} = \left[\frac{24 \cdot 104.162}{39.364}, \frac{24 \cdot 104.162}{12.401} \right]$$

Taula khi-quadrat

$$I_{\sigma^2}^{0.95} = (63.50,\ 201.59) \Longrightarrow 7.969 \leq \sigma \leq 14.198$$

Hipòtesi estadística

Procés de la recerca estadística



Hipòtesi estadística

Hipòtesi estadística: *afirmació o conjectura sobre la distribució d'una o més v.a., o bé sobre alguna de les seues característiques. És una afirmació respecte a alguna característica d'una o més poblacions.*

- **Hipòtesi nul·la** (**H_0**): hipòtesi que es contrasta (sempre conté la igualtat)

- **Hipòtesi alternativa** (**H_1**): hipòtesi acceptada quan l'evidència mostral està en contra de la H_0

Un test per a contrastar la **H_0** enfront de la hipòtesi alternativa consisteix a decidir, per a cada possible mostra, si acceptem o rebutgem **H_0**; per tant, un test consistirà a dividir l'espai mostral (conjunt de totes les possibles mostres) en dues regions: una regió crítica, o de rebot d'**H_0** i una regió d'acceptació d'**H_0**

Contrastos d'hipòtesis

Errors associats a les hipòtesis estadístiques

β

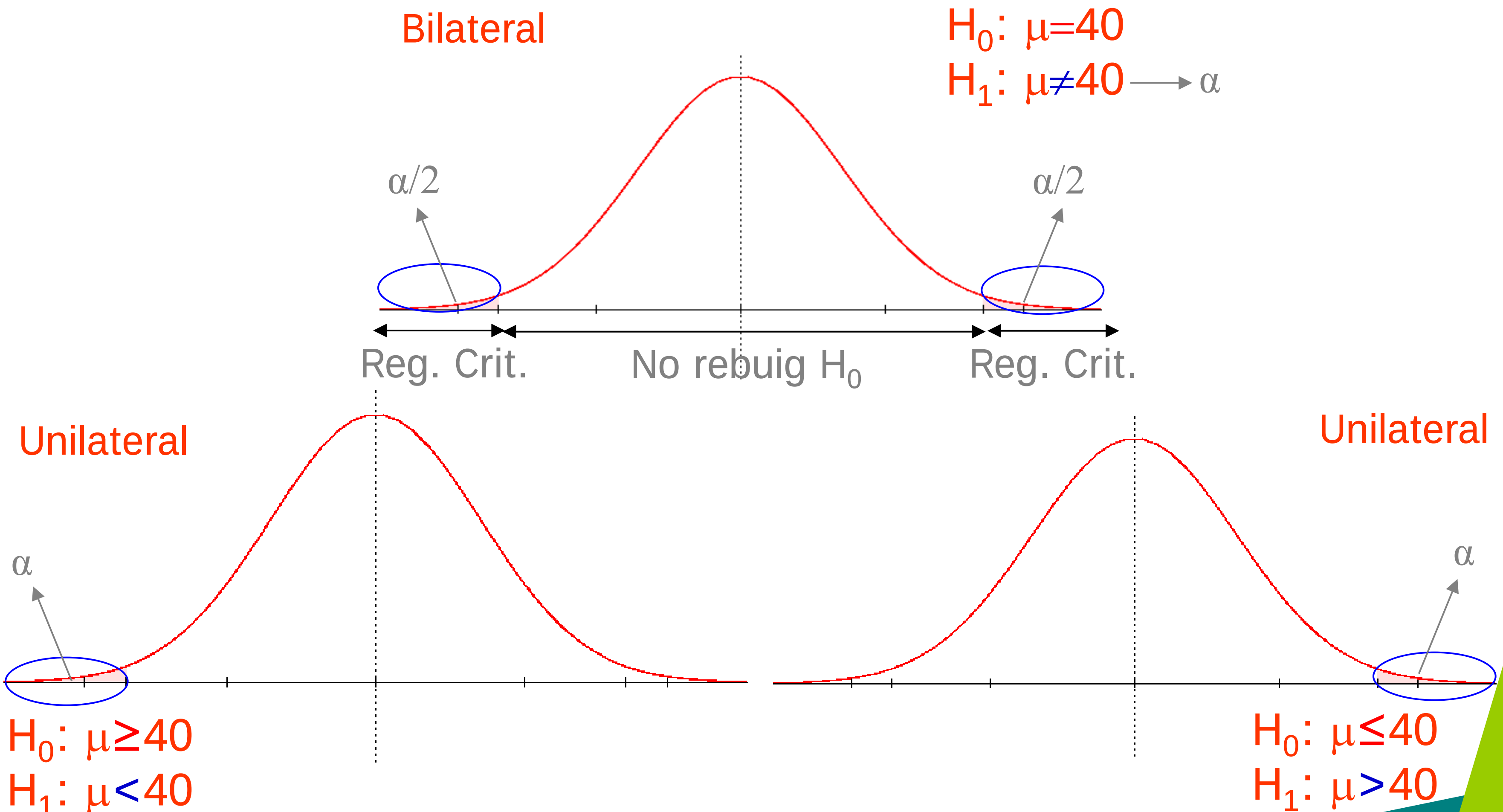
		H0 vertadera	H0 falsa
H_0: Hipòtesi nul·la	DECISIÓ: **Mantenir H_0**	Decisió correcta	Decisió incorrecta Error de tipus II
H_1: Hipòtesi alternativa	DECISIÓ: **Rebutjar H_0**	Decisió incorrecta Error de tipus I	Decisió correcta

α

Els errors poden ser **unilaterals** o **bilaterals** depenent de la hipòtesi estadística

Contrastos d'hipòtesis

La posició de la regió crítica depèn de la hipòtesi alternativa

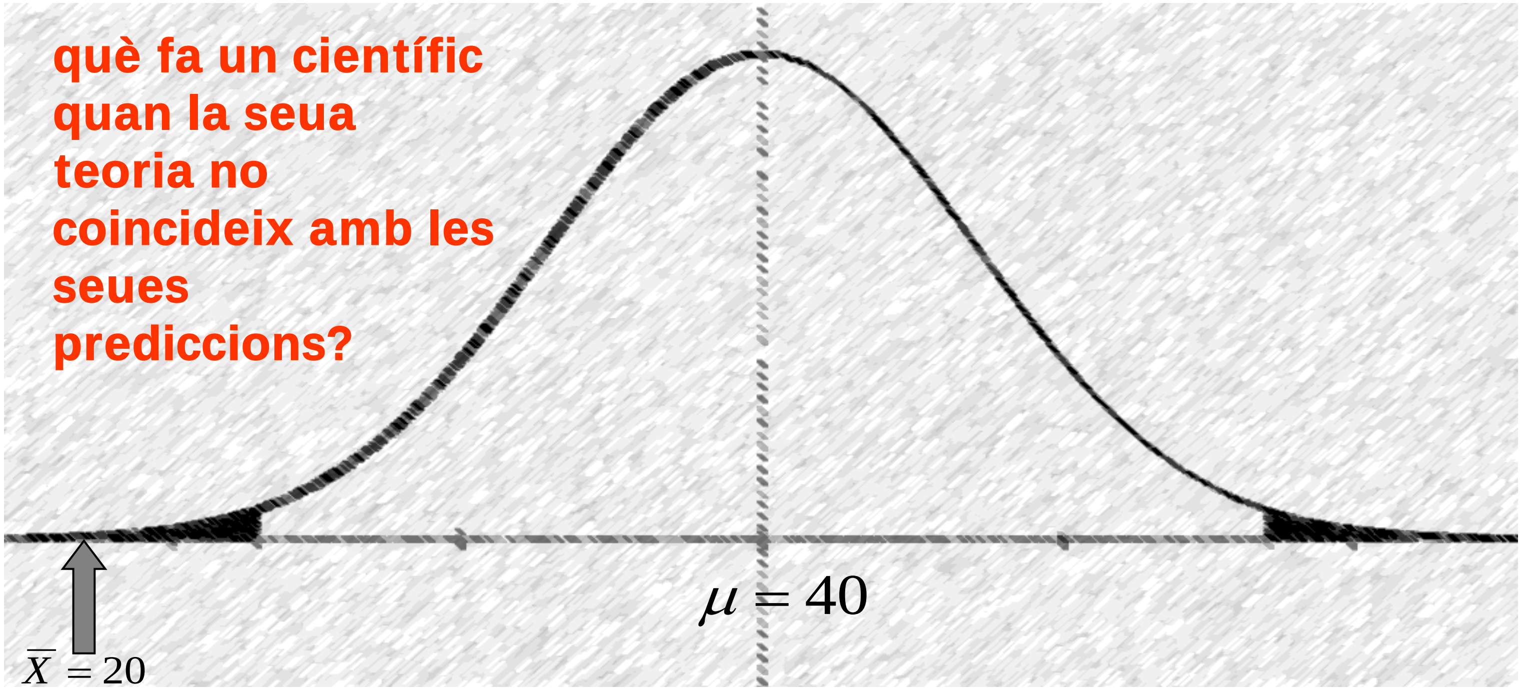


Contrastos d'hipòtesis

H_0: $\mu=40$

H_1: $\mu\neq40$

Si supose que H_0 és certa...



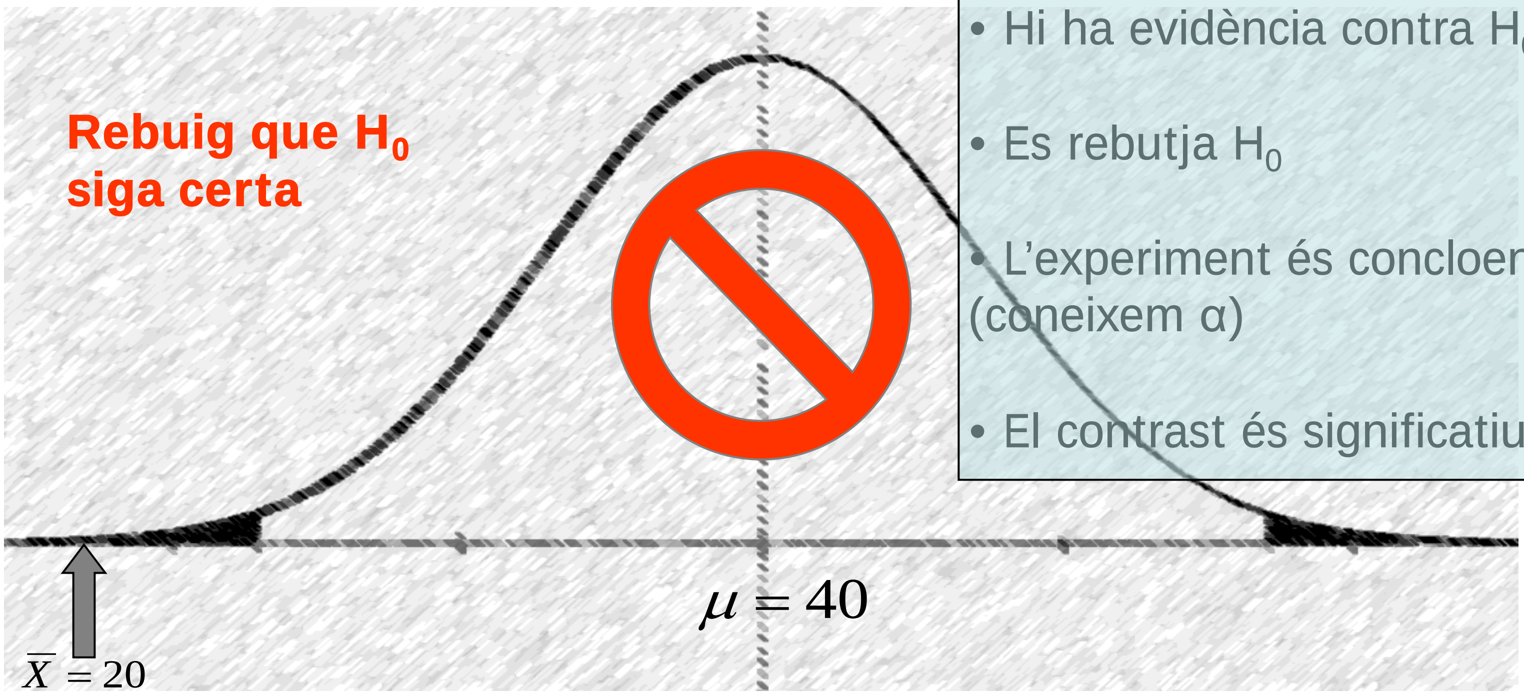
... el resultat de l'experiment seria improbable.

No obstant açò va **ocórrer**.

Contrastos d'hipòtesis

~~H_0: $\mu = 40$~~

H_1: $\mu \neq 40 \longrightarrow \alpha$



- Hi ha evidència contra H_0
- Es rebutja H_0
- L'experiment és concloent (coneixem α)
- El contrast és significatiu

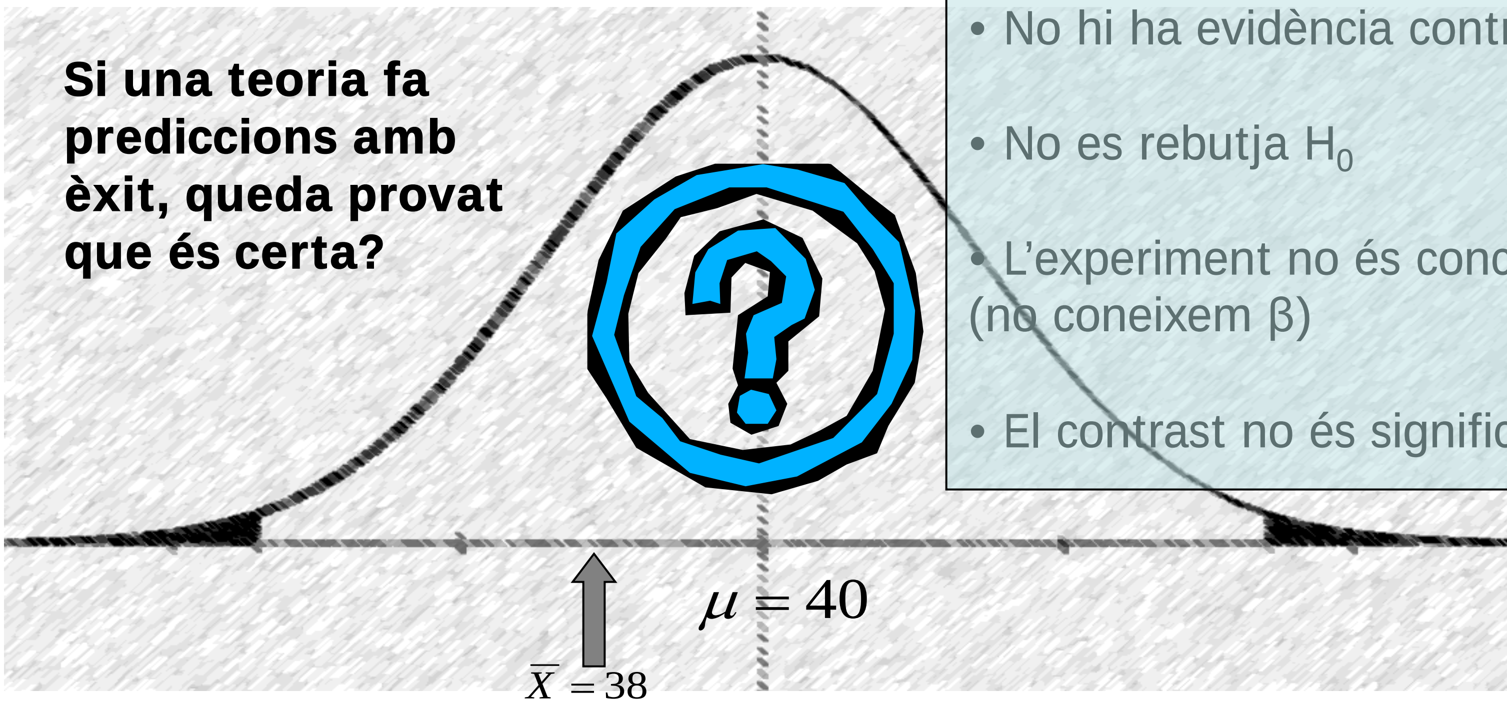
... el resultat de l'experiment seria improbable.

No obstant açò va **ocórrer**.

Contrastos d'hipòtesis

H_0: $\mu=40$ ⟶ β?
H_1: $\mu\neq40$

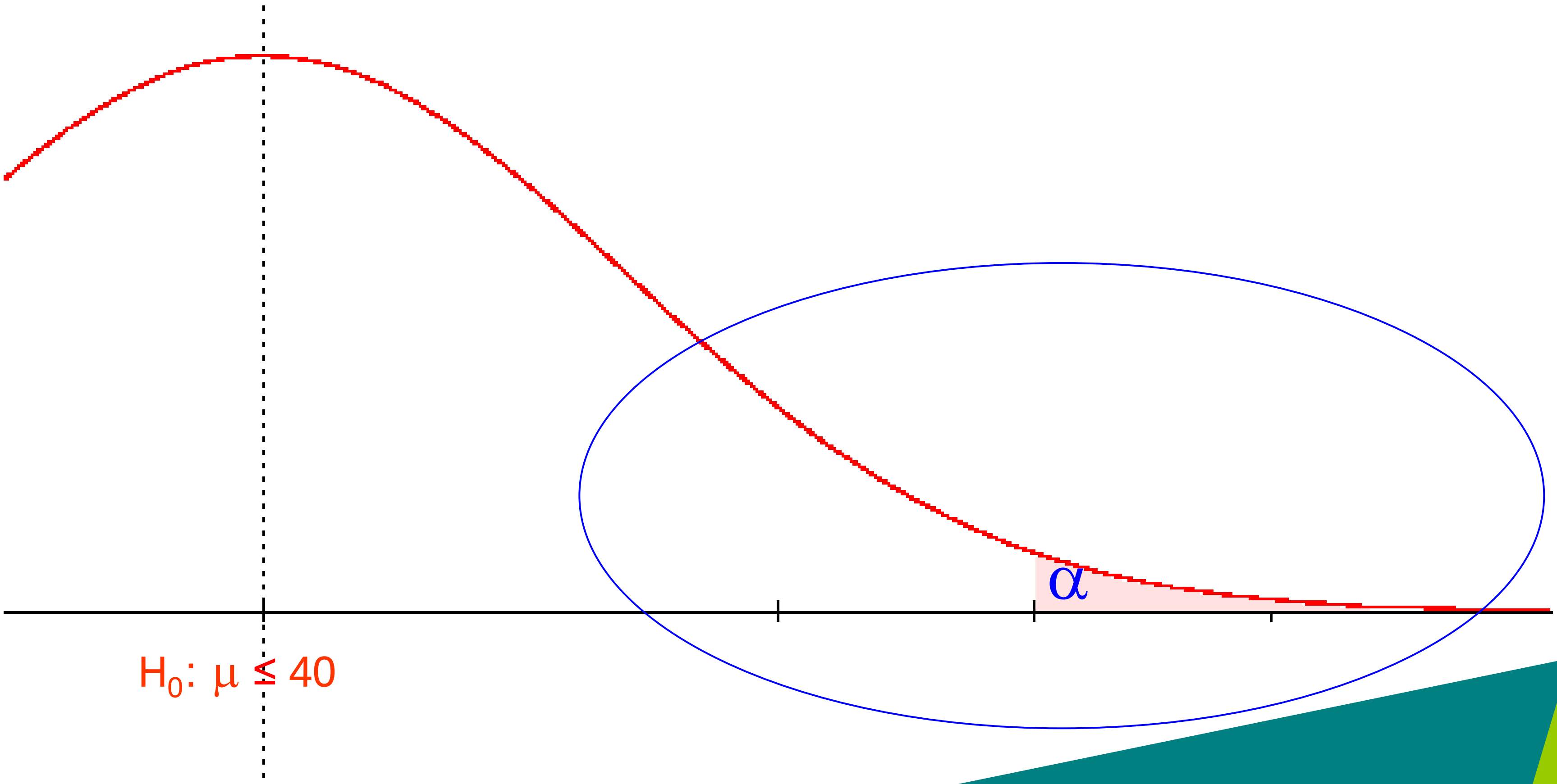
Si supose que H_0 es certa...



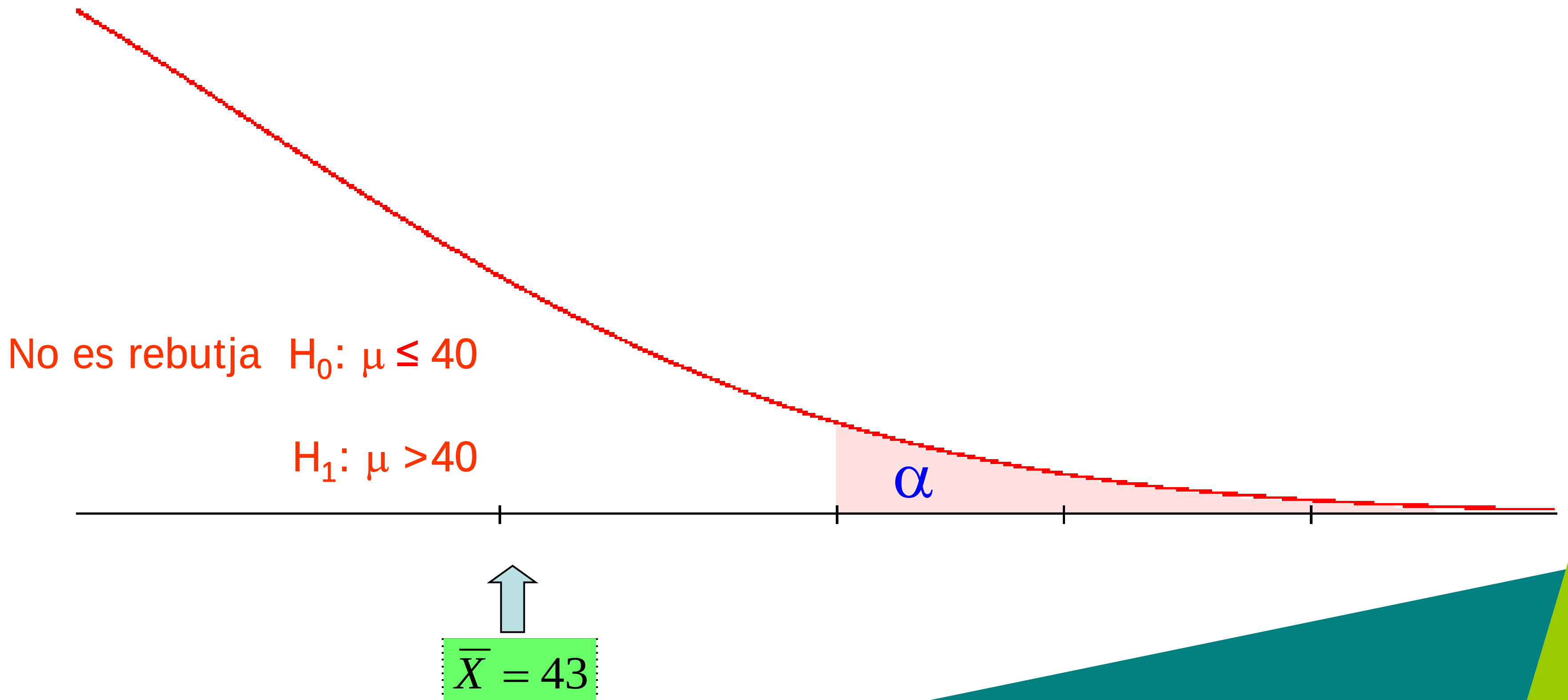
- No hi ha evidència contra H_0
- No es rebutja H_0
- L'experiment no és concloent (no coneixem β)
- El contrast no és significatiu

... el resultat de l'experiment és coherent

Contrastos d'hipòtesis



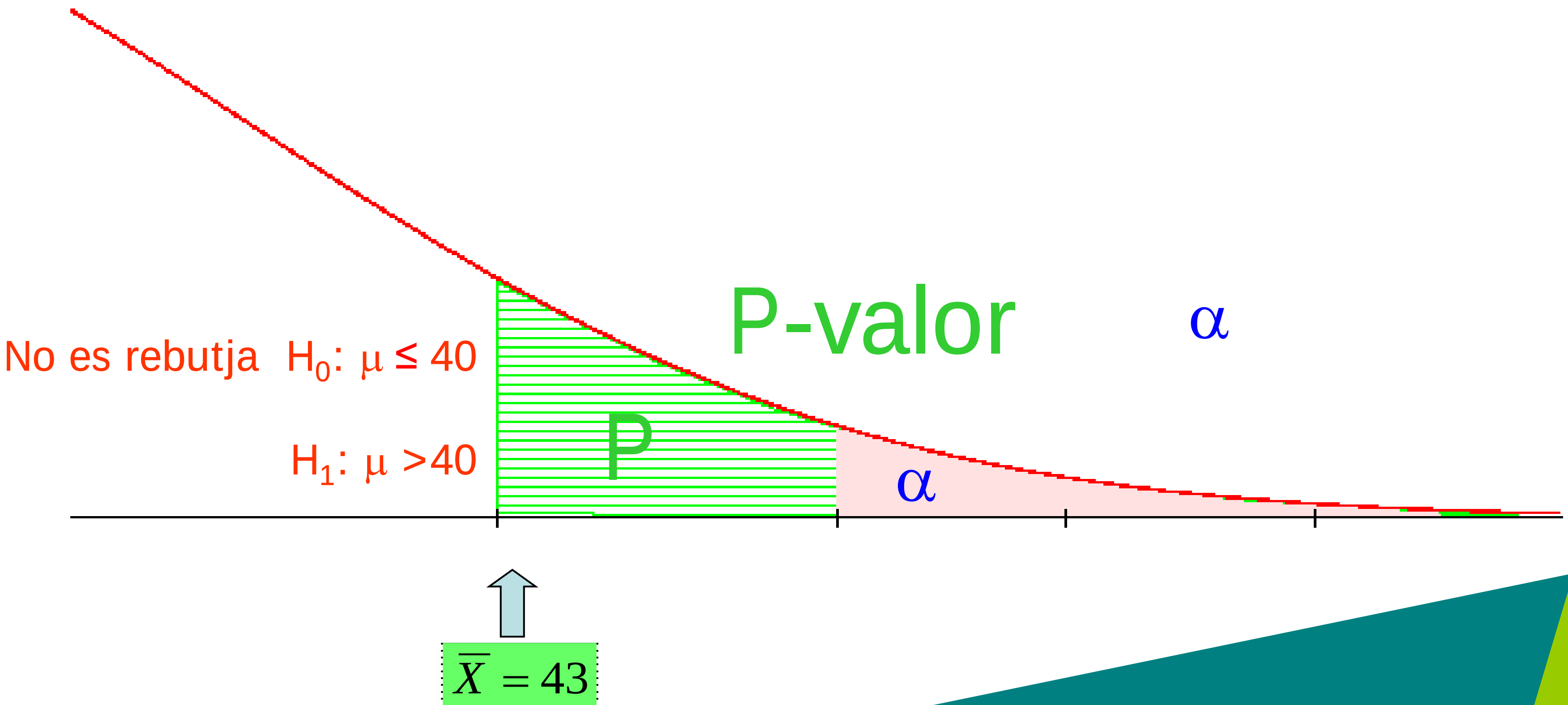
Contrastos d'hipòtesis



Contrastos d'hipòtesis

P-valor

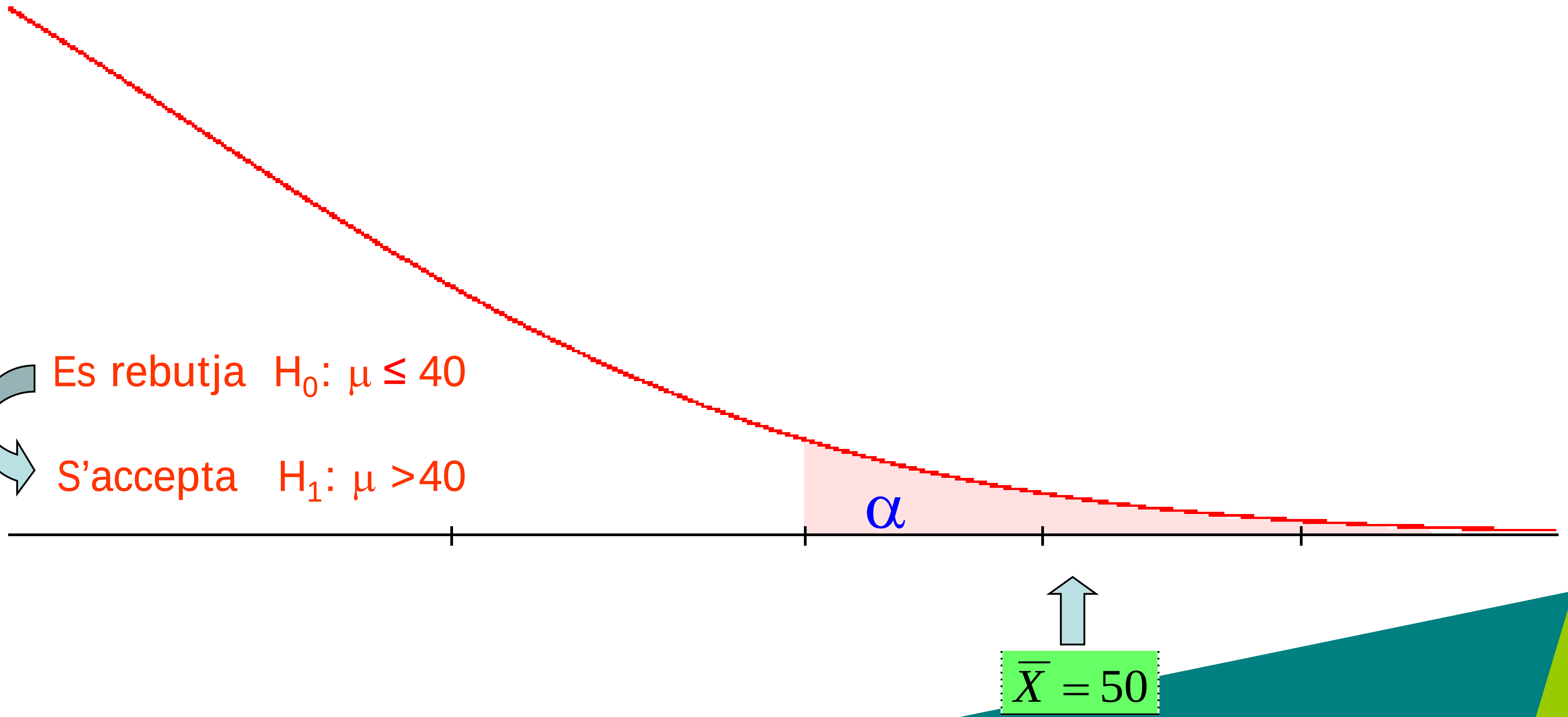
- Probabilitat de tenir una mostra que <u>discrepe encara més</u> que la nostra
- Probabilitat d'obtenir una mostra "més estranya" que l'obtinguda
- P-valor és conegut <u>després de realitzar l'experiment</u> aleatori
- El contrast és <u>no significatiu quan p-valor>α</u>



Contrastos d’hipòtesis

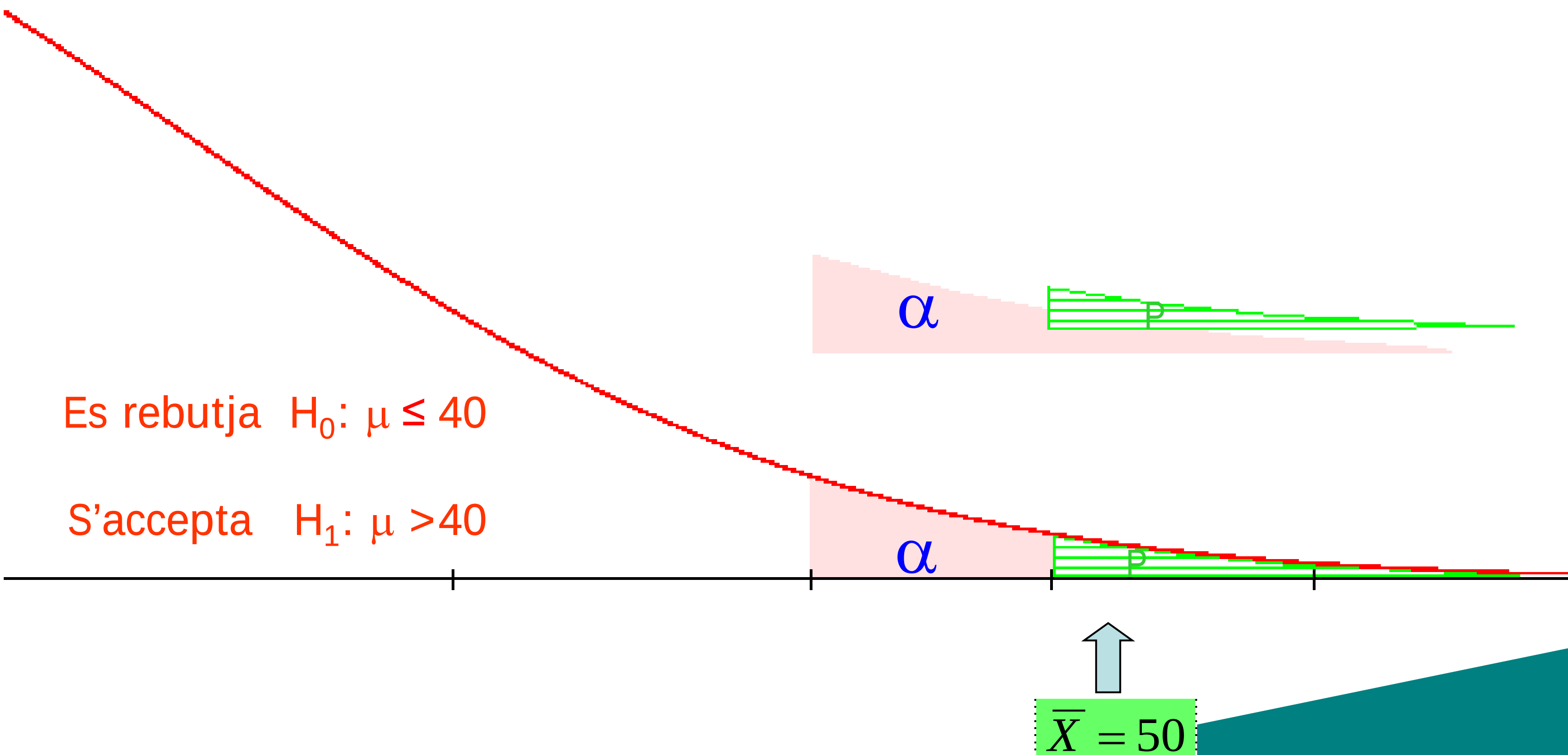
Es rebutja H_0: $\mu \leq 40$

S’accepta H_1: $\mu > 40$



Contrastos d'hipòtesis

- El contrast és <u>estadísticament significatiu quan p-valor<α</u>
- És a dir, si el resultat experimental discrepa més del que seria "tolerat" *a priori*



Contrastos d'hipòtesis

- **Sobre α**
  - Probabilitat de rebutjar H_0 quan és certa
  - Nombre xicotet (10%, 5%, 1%), triat *a priori abans de* dissenyar l'experiment
  - Conegut α sabem tot sobre la regió crítica
- **Sobre P-valor**
  - Probabilitat d'obtenir un resultat almenys tan extrem com el que realment s'ha obtingut
  - És conegut després de realitzar l'experiment
  - Conegut p-valor sabem tot sobre el resultat de l'experiment

Rebutgem H_0 (contrast significatiu) si P-valor < α

Aplicació dels contrastos als paràmetres de la normal

Exemple

Quan no existeix cap tipus d'impacte, els nivells de fosfats en l'aigua de mar està entorn de 2.5 μM, amb una variància=1. Una activitat antròpica elevada pot causar impactes que facen variar els nivells de fosfats. Assumint que segueix una distribució normal, determinar si la badia d'Alacant pateix algun tipus d'impacte a partir dels nivells de fosfats obtinguts després d'analitzar 10 mostres d'aigua:

3.0 2.9 2.8 2.7 2.6 2.4 2.5 2.4 2.6 2.7

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

L'estadístic a emprar és $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Interval de confiança:

$$\mu_0 \in \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow No\ rebuig$$

2. Regió d'acceptació:

$$\overline{X} \in \left(\mu_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow No\ rebuig$$

3. Estadístic experimental:

$$Z_{\exp} = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < Z_{\alpha/2} \Rightarrow No\ rebuig$$

4. P-valor: $p > \alpha \Rightarrow No\ rebuig$

$$p/2 = P\left(Z > \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \right) \Rightarrow p - valor = 2\left(1 - P\left(Z < \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \right) \right)$$

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

No es rebuig H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

2. Estadístic:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > -Z_\alpha$$

3. P-valor:

$$p - valor = P\left(Z < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

No es rebuig H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$\bar{X} \in \left(-\infty, \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

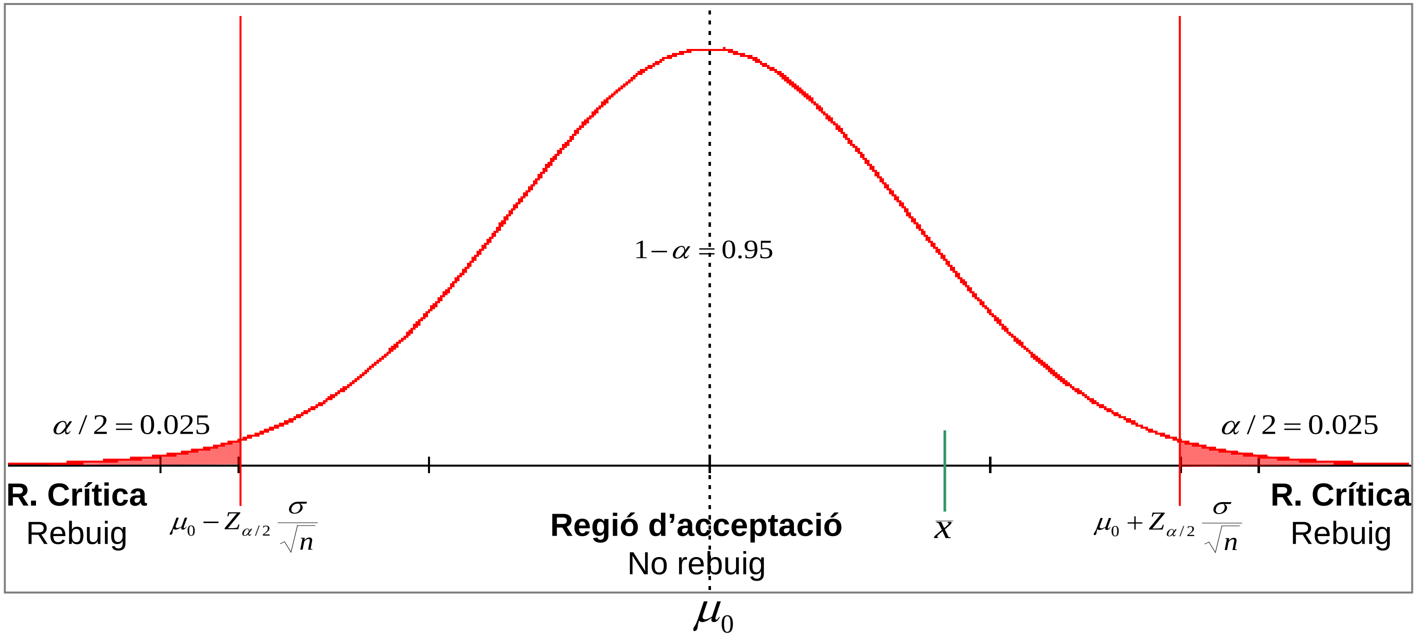
2. Estadístic:

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_\alpha$$

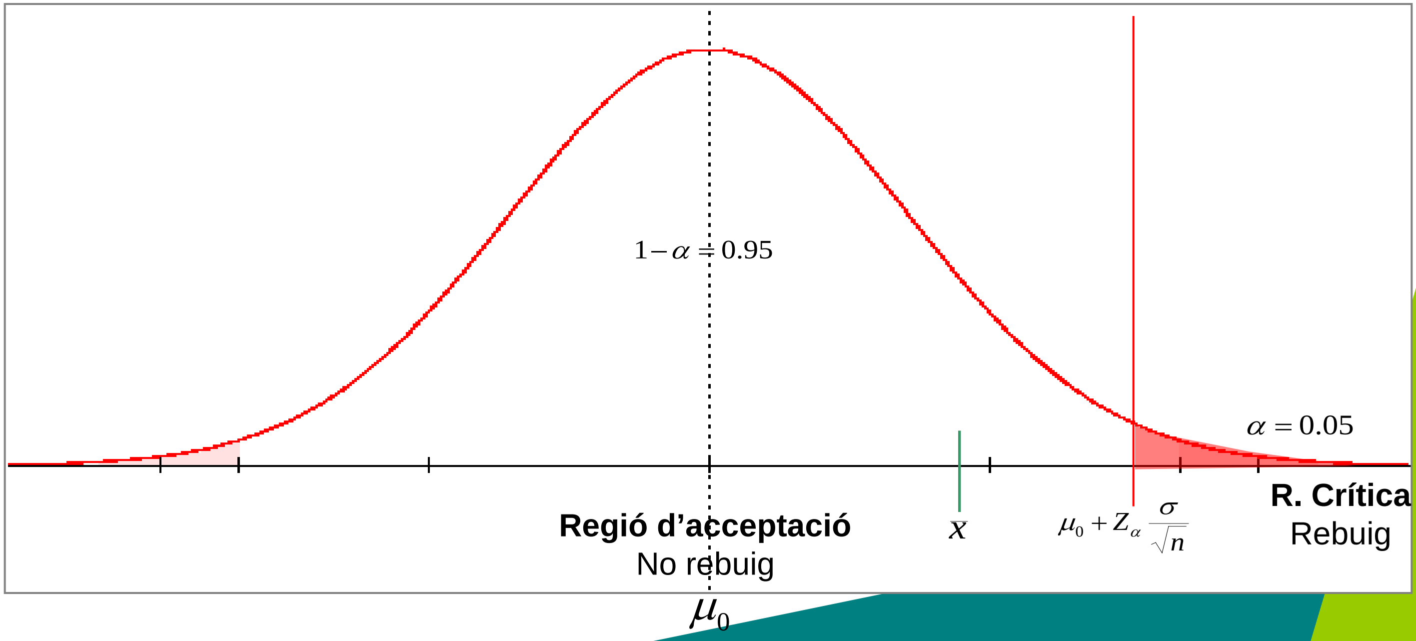
3. P-valor:

$$p - valor = P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

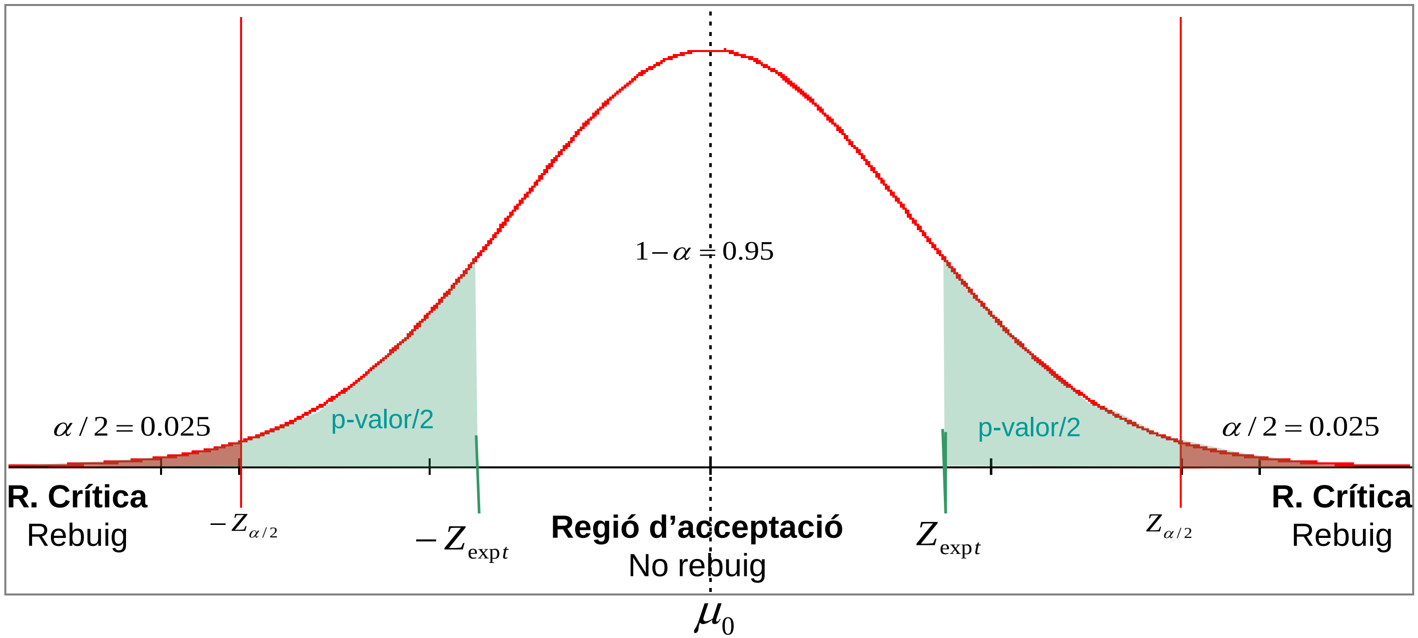


$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

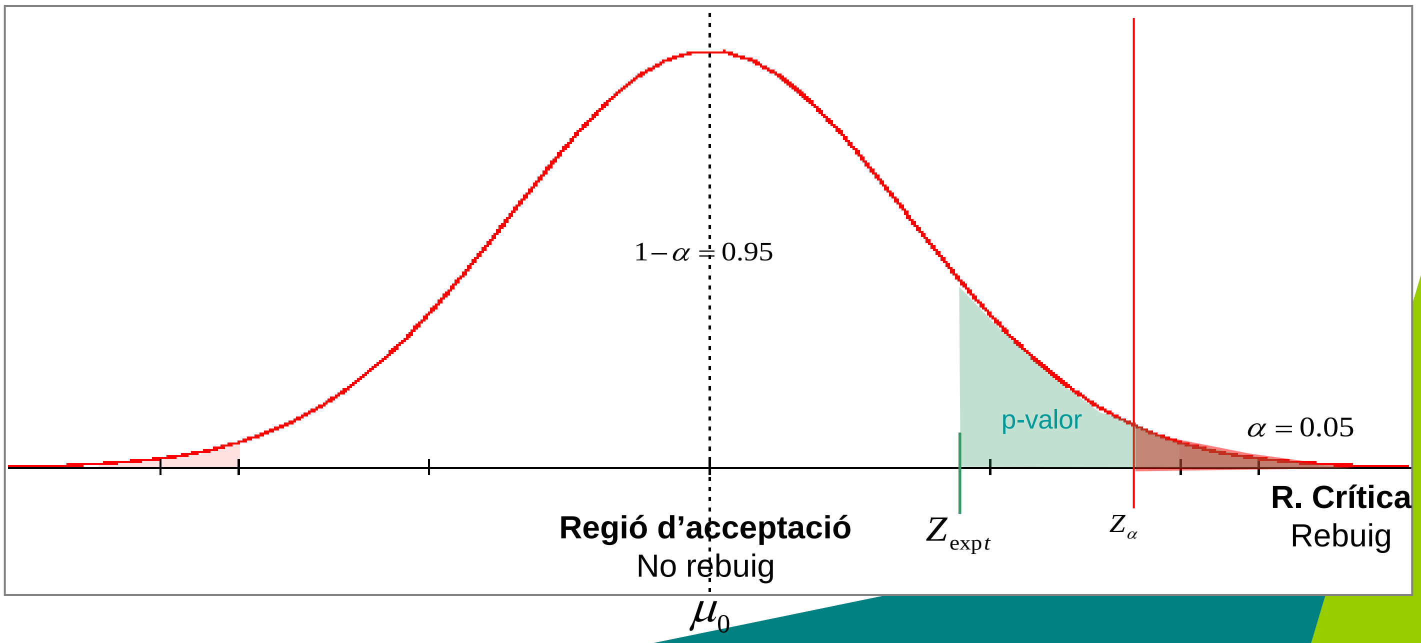


$$\boxed{\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)}$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Exemple

Quan no existeix cap tipus d'impacte, els nivells de fosfats en l'aigua de mar estan entorn de 2.5 μM, amb una variància=1. Una activitat antròpica elevada pot causar impactes que facen variar els nivells de fosfats. Assumint que segueix una distribució normal, determinar si la badia d'Alacant pateix algun tipus d'impacte a partir dels nivells de fosfats obtinguts després d'analitzar 10 mostres d'aigua:

3.0 2.9 2.8 2.7 2.6 2.4 2.5 2.4 2.6 2.7

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2.5 \\ H_1 : \mu \neq 2.5 \end{cases}$$

$$\bar{X} = 2.66$$
$$\sigma = 1$$
$$n = 10$$

1. Regió d'acceptació

$$\bar{X} \in \left(\mu_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \qquad \bar{X} \in \left(2.5 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{10}}, 2.5 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$2.66 \in (1.880,\ 3.120) \Rightarrow \textit{No rebuig}$$

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

2. Estadístic experimental

$$Z_{\exp} = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| < Z_{\alpha/2}$$

No podríem dir que els nivells de fosfats estiguen alterats

$$Z_{\exp} = \left| \frac{2.66 - 2.5}{1/\sqrt{10}} \right| < 1.96$$

$$0.506 < 1.96 \Rightarrow No\ rebuig$$

3. Mitjançant el p-valor

$$p/2 = P\left(Z > \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \right)$$

$$p/2 = P(Z > 0.506) = 1 - P(Z < 0.506) = 1 - 0.6950 = 0.3050$$

$$p - valor = 0.610 > \alpha \Rightarrow No\ rebuig$$

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

Exemple

Una mostra aleatòria de 100 ostres conreades a Santa Pola mostra un pes mitjà de 71.8 g. Assumint una desviació estàndard de la població de 8.9 g, es pot afirmar que el pes mitjà de les ostres és major de 70 g? Utilitzar un nivell de significació del 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 70 \\ H_1 : \mu > 70 \end{cases}$$

$$\overline{X} = 71.8 \qquad \sigma = 8.9 \qquad n = 100$$

1. Regió d'acceptació

$$\overline{X} \in \left(-\infty, \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\overline{X} \in \left(-\infty, 70 + 1.645 \frac{8.9}{\sqrt{100}} \right)$$

$$71.8 \notin \left(-\infty,\ 71.464 \right) \Rightarrow rebuig$$

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ coneguda**

2. Estadístic de contrast

$$Z_{\exp} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_\alpha \qquad \frac{71.8 - 70}{8.9 / \sqrt{100}} > 1.645 \Rightarrow 2.02 > 1.645 \Rightarrow rebuig$$

3. Mitjançant el p-valor

$$p - valor = P\left(Z > \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right)$$

$$p - valor = P\big(Z > 2.02\big) = 1 - P(Z < 2.02) = 1 - 0.9783 = 0.0217$$

$$p - valor = 0.0217 < 0.05 = \alpha \Rightarrow rebuig$$

El pes mitjà de les ostres és superior a 70 g amb una seguretat del 95%

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ desconeguda**

L'estadístic a emprar és $t-Student = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Interval de confiança:

$$\mu_0 \in \left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow No\ rebuig$$

2. Regió d'acceptació:

$$\overline{X} \in \left(\mu_0 - t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t_{n-1,\alpha/2} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \Rightarrow No\ rebuig$$

3. Estadístic experimental:

$$t_{\exp} = \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \right| < t_{n-1,\alpha/2} \Rightarrow No\ rebuig$$

4. P-valor: $p > \alpha \Rightarrow No\ rebuig$

$$p/2 = P\left(t_{n-1} > \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \right| \right) \Rightarrow p - valor = 2 * P\left(t_{n-1} > \left| \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \right| \right)$$

Contrastos d'hipòtesis per a la mitjana poblacional, **σ desconeguda**

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$\overline{X} \in \left(\mu_0 - t_{n-1,\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

2. Estadístic:

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1} / \sqrt{n}} > -t_{n-1,\alpha}$$

3. P-valor:

$$p - valor = P\left(t_{n-1} < \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1} / \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$\overline{X} \in \left(-\infty, \mu_0 + t_{n-1,\alpha} \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right)$$

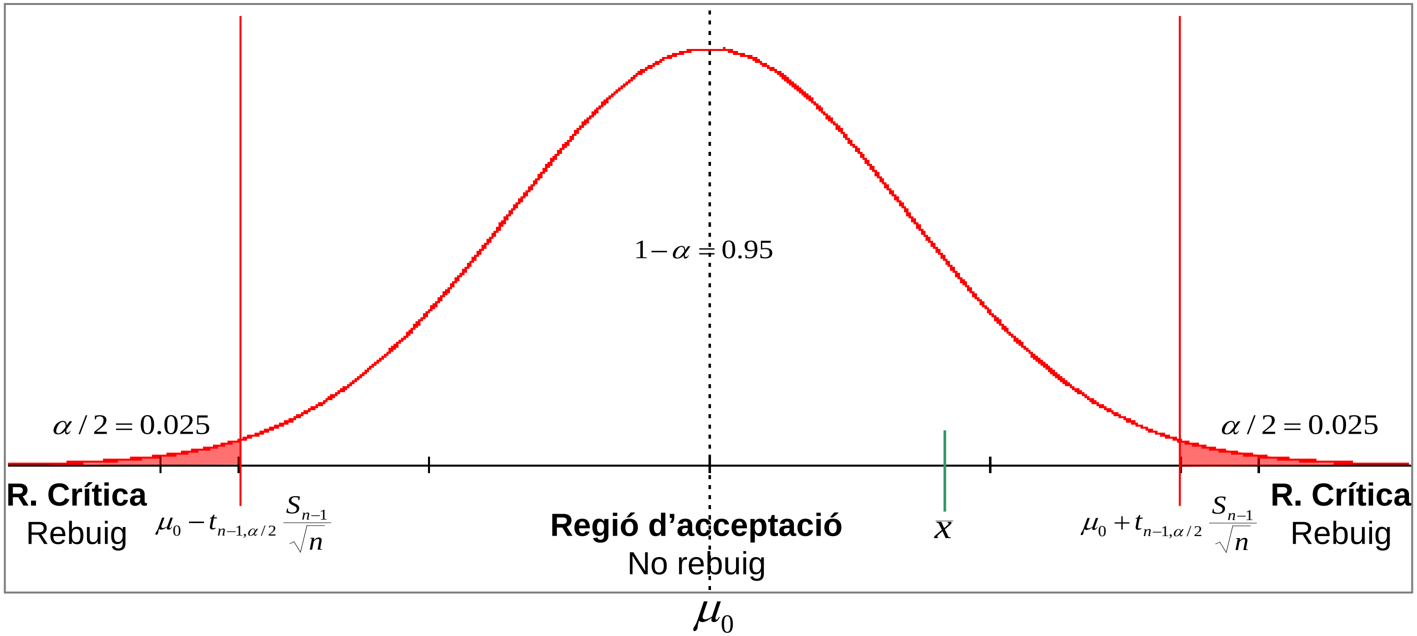
2. Estadístic

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1} / \sqrt{n}} < t_{n-1,\alpha}$$

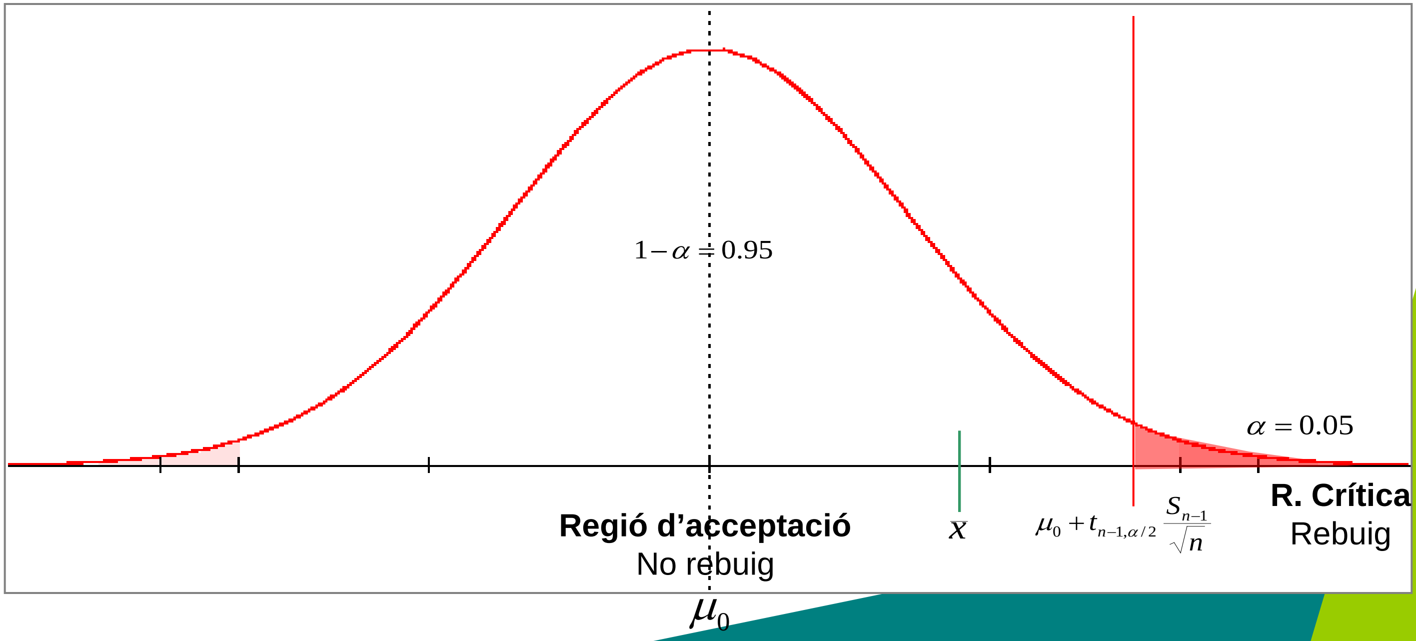
3. P-valor:

$$p - valor = P\left(t_{n-1} > \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1} / \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

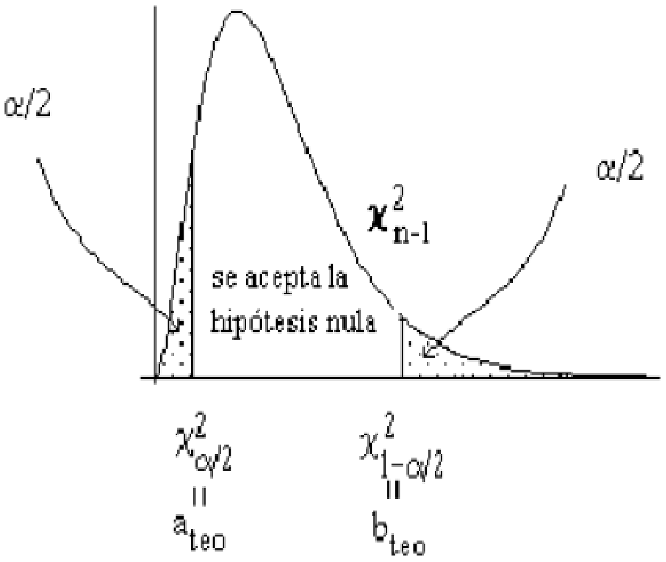


Contrastos d'hipòtesis per a la variància poblacional

L'estadístic a emprar és $\chi^2_{\text{exp}} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:



1. Regió d'acceptació:

$$S^2 \in \left(\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}{n-1}, \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha/2}}{n-1} \right) \Rightarrow No\ rebuig$$

2. Estadístic experimental:

$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \Rightarrow No\ rebuig$$

3. P-valor: $p > \alpha \Rightarrow No\ rebuig$

$$p - valor = 2\min\left(P\left(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{\text{exp}}\right), P\left(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{\text{exp}}\right)\right)$$

Contrastos d'hipòtesis per a la variància poblacional

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$s^2 \in \left(\frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,1-\alpha}}{n-1}, +\infty \right)$$

2. Estadístic:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$$

3. P-valor:

$$p-valor = P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

No es rebutja H_0 si:

1. Regió d'acceptació:

$$S^2 \in \left(-\infty, \frac{\sigma_0^2 \chi^2_{n-1,\alpha}}{n-1} \right)$$

2. Estadístic

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,\alpha}$$

3. P-valor:

$$p-valor = P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \right)$$

Comanda que s’ha d’utilitzar amb R:

Contrastos per a la mitjana d’una pob., de variàncies desconegudes:

t.test(x, alternative=c("two.sided", "less", "greater"), mu=mitjana_hipotètica, conf.level=0.95)