Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

UA | UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Vicerrectorado de Estudios, Formación y Calidad
ICE- Instituto de Ciencias de la Educación

XII JORNADAS DE REDES DE INVESTIGACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

El reconocimiento docente: innovar e investigar con criterios de calidad

ISBN: 978-84-697-0709-8

Diseño: Gabinete de Imagen y Comunicación Gráfica de la Universidad de Alicante

XII JORNADES DE XARXES D'INVESTIGACIÓ EN DOCÈNCIA UNIVERSITÀRIA

El reconeixement docent: innovar i investigar amb criteris de qualitat

Coordinadores

María Teresa Tortosa Ybáñez

José Daniel Álvarez Teruel

Neus Pellín Buades

ISBN: 978-84-697-0709-8

Revisión y maquetación: Neus Pellín Buades

ISBN: 978-84-697-0709-8

Cómo desarrollar una mirada profesional en futuros profesores de matemáticas

M. Luz Callejo[1]; G. Sánchez-Matamoros[2]; C. Fernández[1] y J. Valls[1]

(1) Departamento de Innovación y Formación didáctica

Universidad de Alicante

(2) Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla

RESUMEN

Una de las finalidades de los programas de formación de profesores en el área de matemáticas es desarrollar una "mirada profesional" sobre la enseñanza y aprendizaje. Esto implica ser capaz de identificar lo que es realmente importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje vinculados a diferentes tópicos. En el marco del "Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria" de la Universidad de Alicante hemos desarrollado un módulo con el objetivo de desarrollar una "mirada profesional" sobre el proceso de generalización en la resolución de problemas. El módulo consistía en una tarea individual donde los futuros profesores debían describir las respuestas dadas por estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal y agrupar las que reflejaban características comunes de la comprensión del proceso de generalización; y participar en un debate virtual en el que debían discutir y consensuar un informe sobre las características de la comprensión del proceso de generalización. Los resultados indican que la tarea permitió a los futuros profesores centrar su mirada en las ideas que subyacen del proceso de generalización, más que en la corrección del procedimiento realizado, destacando el potencial de la tarea para el desarrollo de una mirada profesional en los programas de formación.

Palabras clave: una mirada profesional; problemas de generalización lineal; futuros profesores de secundaria

ISBN: 978-84-697-0709-8

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han subrayado la importancia de la competencia docente "desarrollo de una mirada profesional de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas" (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipps, 2010). Esta competencia permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de una manera profesional, permitiéndole interpretar situaciones complejas en el contexto del aula. Estas investigaciones también están demostrando que esta competencia se puede desarrollar en los programas de formación (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013). Por ejemplo, van Es y Sherin (2002) han mostrado que los profesores pueden mejorar "su mirada profesional" si se les ayuda a desplazar su foco de atención desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones de la comprensión de los alumnos basadas en evidencias. Otro foco de atención ha sido la observación de las interacciones producidas en debates en línea (Scherrer y Stein, 2013). En este sentido crear un texto escrito para convencer a otros en el debate en línea puede ayudar a los futuros profesores a desarrollar esta competencia docente. El texto producido por los futuros profesores en estos debates les puede ayudar a pasar desde la descripción de estrategias a la interpretación de la comprensión de los estudiantes aportando evidencias.

El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" se facilita incorporando dominios específicos; en matemáticas esto conlleva identificar los elementos matemáticos importantes del dominio y relacionarlos con las características de la comprensión matemática de los estudiantes. Por ejemplo, evidencias de este desarrollo se muestran en investigaciones sobre la proporcionalidad (Fernández et al. 2012), la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2012), el álgebra (Magiera et al., 2013), generalización de patrones (Yesildere-Imre y Akkoç 2012; Mouhayar y Jurdak, 2012; Zapatera y Callejo, 2013).

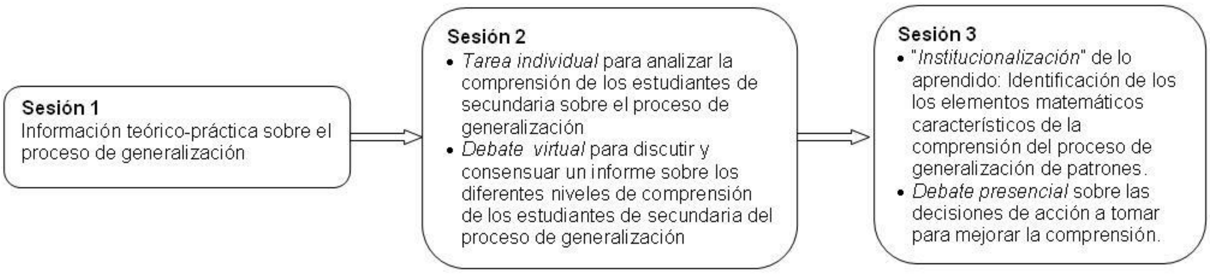
El objetivo de esta comunicación es presentar cómo a través de un módulo de enseñanza diseñado ad hoc los futuros profesores de secundaria muestran evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes cuando éstos resuelven problemas de generalización lineal, es decir, desarrollan una mirada profesional en un dominio específico, los problemas de generalización lineal.

ISBN: 978-84-697-0709-8

2. DISEÑO DEL MÓDULO DE ENSEÑANZA

En la asignatura "Aproximación didáctica a la resolución de problemas de matemáticas" del "Máster Universitario en profesorado de Educación Secundaria", especialidad de Matemáticas, en la que estaban matriculados 7 estudiantes, se trabajan los procesos: particularizar y generalizar, conjeturar y demostrar, en el contexto de la resolución de problemas, desde dos perspectivas: (1) matemática y (2) de desarrollo de una mirada profesional sobre las respuestas de los estudiantes.

El módulo se desarrolló a lo largo de tres semanas, con una sesión por semana (Figura 1). En la primera sesión presencial (4 horas presenciales) se dio información teórico-práctica relativa al proceso de generalización; en la segunda (4 horas presenciales y un trabajo on-line) los EPS realizaron individualmente una tarea analizando la comprensión de los estudiantes de educación secundaria en relación al tópico matemático seleccionado y se abrió un debate virtual con el objetivo de discutir entre ellos y consensuar un informe sobre la manera en la que interpretaban lo que estaban considerando como evidencias de diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización; en la tercera sesión se "institucionalizó" lo aprendido en las sesiones anteriores, es decir, se identificaron los elementos matemáticos principales necesarios para caracterizar la comprensión de los estudiantes de secundaria en relación a la generalización de patrones y se realizó un debate presencial.



Sesión 1

En esta sesión se propuso un marco teórico sobre el proceso de generalización en el contexto de la resolución de problemas. El proceso de generalización se entiende como el corazón de la actividad matemática y consiste en pasar del examen de un objeto o de un conjunto limitado de objetos al examen de un conjunto más extenso que lo incluya; es el proceso inverso a la particularización (Mason, Burton y Stacey, 1989). Ambos procesos aparecen juntos en la siguiente secuencia en el marco de la resolución de problemas:

Particularización --> Identificación de patrones --> Generalización -->Conjetura --> Demostración

El proceso de generalización lleva a hacer conjeturas sobre una gran cantidad de casos a partir de unos pocos ejemplos. La generalización se ve facilitada cuando la particularización se ha realizado sistemáticamente

También se mostró la potencialidad de algunos problemas para desarrollar este proceso, entre ellos los *problemas de identificación de patrones*. En estos problemas se proporcionan los primeros términos de una sucesión frecuentemente con un dibujo, y se pide calcular el valor del enésimo término para un valor de *n* pequeño y para un valor de *n* grande. En algunos casos se pide también formular una regla general.

Sesión 2

En esta sesión se propuso una tarea formada por las respuestas de seis estudiantes de secundaria a dos problemas de generalización lineal que fueron adaptados de investigaciones previas (Zapatera y Callejo, 2011; Rivera y Becker, 2005) (Figura 2).

En los dos problemas se presenta una sucesión de figuras compuestas por: cuadros y bolas (problema 1; Zapatera y Callejo, 2011) y cuadrados blancos y negros (problema 2; Rivera y Becker, 2005). La regla general es siempre una función afín: $f(n) = an + b$, con $b \neq 0$.

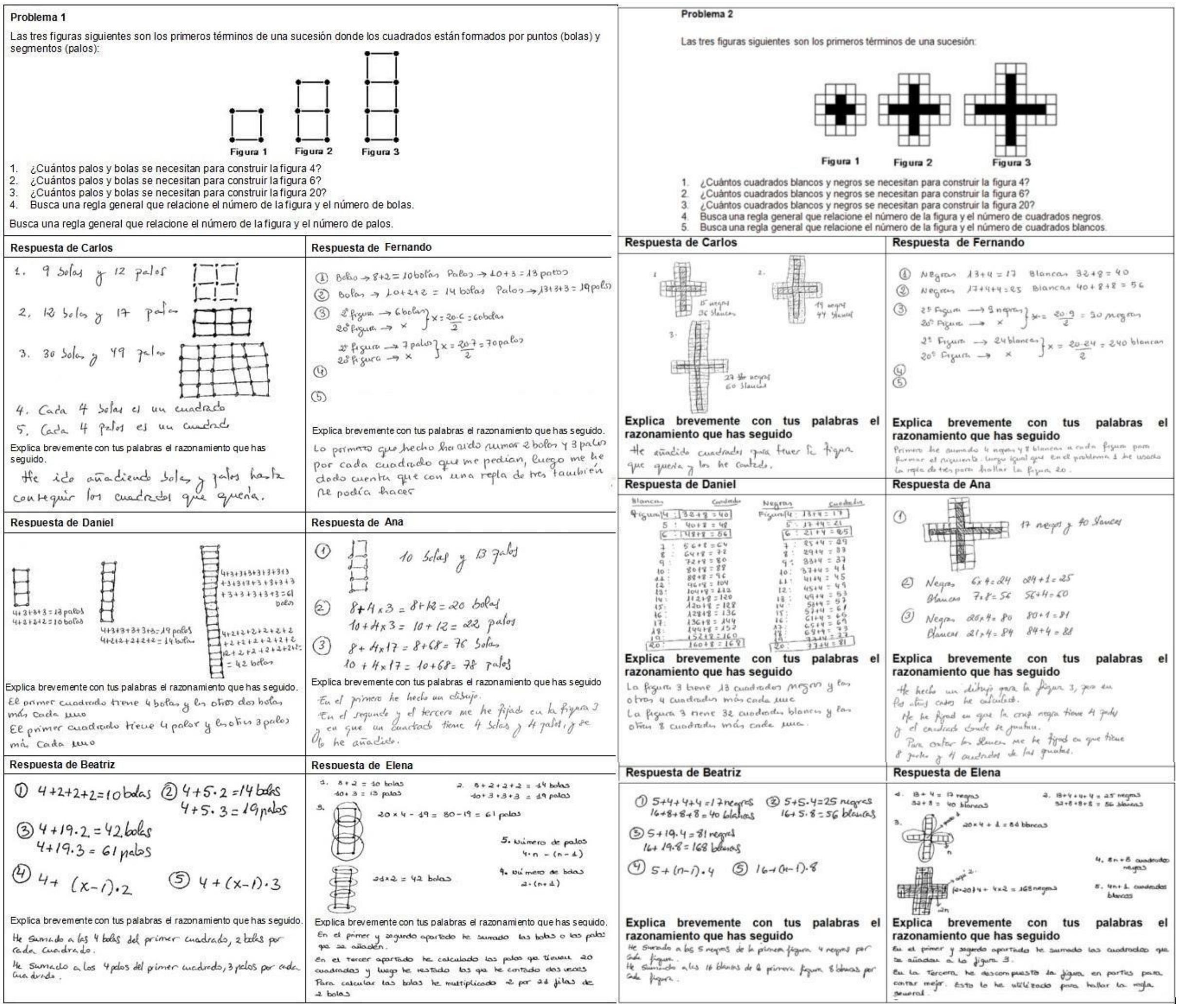
Las dos primeras cuestiones de los dos problemas son de generalización cercana y se pueden resolver siguiendo una estrategia aditiva mediante recuento, con o sin dibujo, o con un método recursivo, apoyándose en el término anterior. La cuestión 3, de generalización lejana, también se puede resolver con una estrategia aditiva, aunque resulta laborioso. Las cuestiones 4 y 5 piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces de coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica. Las respuestas de los alumnos de secundaria que los EPS debían analizar (Figura reflejaban distintos grados de desarrollo del proceso de generalización (Cañadas, Castro y Castro, 2007; García-Cruz y Martinón, 1999; Radford, 2011):

- No coordinación de la estructura espacial ni la numérica (Radford, 2011): Carlos (C).
- Utilización de estrategias aditivas (Zapatera y Callejo, 2011).
- Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana e intento de encontrar una relación funcional en el apartado de generalización lejana usando una regla de tres: Fernando (F).

 ISBN: 978-84-697-0709-8

- Utilización de un método recursivo en los apartados de generalización cercana y lejana sin intentar buscar una relación funcional: Daniel (D).
- Paso de una estrategia aditiva a una multiplicativa (relación funcional) en la generalización cercana (n=6):
  - Sin identificar la constante de crecimiento: Ana (A).
  - Identificando la constante de crecimiento: Beatriz (B).
- Utilización de un método directo deconstructivo (Rivera y Becker, 2008) descomponiendo la figura: Elena (E).

Figura 2. Problemas y respuestas de seis estudiantes de secundaria a los mismos



Las preguntas que los EPS debían responder respecto a cada uno de los problemas fueron las siguientes:

A. Describe cómo ha resuelto cada estudiante los problemas 1 y 2 en relación al proceso de generalización. B1. Agrupa los estudiantes que presentan características comunes del desarrollo del proceso de generalización. B2. Caracteriza cada uno de los subgrupos que has formado. C. Indica en qué se diferencian los distintos grupos.

Con el objetivo de que los EPS consensuaran las interpretaciones realizadas de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, se activó un debate virtual de dos semanas de duración. En la primera semana los EPS debían debatir sobre las siguientes cuestiones:

- *Características de cada uno de los grupos formados en relación al proceso de generalización.*
- *Diferencias de los distintos grupos formados.*

El debate quedó registrado por escrito. En la segunda semana, debían elaborar un informe conjunto. El informe debía recoger el consenso alcanzado sobre el número y las características de los grupos formados en relación al desarrollo del proceso de generalización y las diferencias entre ellos.

Sesión 3

En la tercera sesión se identificaron los elementos matemáticos principales necesarios para caracterizar la comprensión de los estudiantes de secundaria en relación a la generalización de patrones. También se trabajaron las estrategias y dificultades de los estudiantes en la resolución de los problemas de identificación de patrones y su potencialidad tanto para desarrollar el pensamiento algebraico como para vincular distintos modos de representación como el analítico (numérico y algebraico) y el geométrico. Se concluyó la sesión realizando un debate presencial a partir de la siguiente pregunta:

- Qué tipo de intervención didáctica sería adecuada para aquellos estudiantes que fueron capaces de construir algunos términos de la sucesión pero no de abstraer el patrón o regla general de la sucesión.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El módulo diseñado ha permitido obtener información sobre el desarrollo de la competencia docente “mirar de manera profesional” en el dominio específico de los problemas de generalización lineal. Los EPS al resolver la tarea propuesta caracterizaron el proceso de generalización en los estudiantes de secundaria en cuatro categorías:

(1) intento de llegar a la regla general,

(2) generalización cercana y lejana,

(3) uso del método recursivo y

(4) "todo o nada."

Las dos primeras categorías caracterizan el proceso de generalización. La generalización cercana demanda identificar un patrón de crecimiento de la sucesión, mientras que la generalización lejana o encontrar la regla general implica la coordinación de dos esquemas: el número de elementos de un término y la posición de cada término de la sucesión, lo que supone una relación más compleja (Radford, 2011). Por el contrario, la tercera categoría es un procedimiento en el que el estudiante observa que cada término aumenta en una diferencia constante y obtiene un término a partir del anterior. En la cuarta categoría los EPS consideraron solo si los estudiantes de secundaria habían llegado a una fórmula general o no, es decir, si el problema propuesto estaba bien resuelto o no, sin tener en cuenta el procedimiento o la conceptualización que el estudiante de secundaria ponía de manifiesto en su resolución.

Por otro el debate propuesto en el diseño jugó un papel muy importante en el desarrollo de la mirada profesional de los EPS del proceso de generalización, ante la necesidad que tenían los EPS de tomar una decisión consensuada sobre la idea de generalización (Fernández et al., 2012; Sánchez, García y Escudero, 2013).

El debate permitió a los EPS intercambiar diferentes posicionamientos sobre cómo caracterizar el proceso de generalización, lo que provocó en algunos de ellos un cambio en la manera de mirar las respuestas de los estudiantes de secundaria. El debate ayudó a los EPS a centrar su mirada en las ideas que subyacen en el proceso de generalización: generalización cercana y lejana e intento de expresar la regla general (paso de la estrategia aditiva a la funcional), más que en el procedimiento realizado. Por ejemplo, los EPS que en el cuestionario habían agrupado en función de "todo o nada" o en función del "uso o no de un método recursivo" cambiaron su forma de mirar las respuestas centrándose más en el proceso de generalización que en el hecho de haber llegado o no a la regla general, o si habían usado un método recursivo. Por ejemplo, JCB antes del debate escribió:

> "Elena, Beatriz, Ana, Daniel y Fernando porque intentan averiguar de dónde partimos y a partir de ahí intentan averiguar el número de la figura con el incremento de los elementos, es decir, realizan una adición de elementos respecto un patrón inicial Carlos tiene problemas de establecer las sucesiones de elementos"

JCB al debatir con el resto de participantes, pasó de una caracterización basada en el procedimiento realizado, "método recursivo" a caracterizar el proceso de generalización como "intento de llegar a la regla general":

> "A todos nos parece correcto establecer en el nivel más alto (nivel 4) a Elena y Beatriz por ser las que llegan a la regla general y en el más bajo (nivel 1) sólo a Carlos ya que además de no entender la sucesión su forma de generalizar es dibujar las figuras y hacer un conteo. Desde mi punto de vista Ana y Fernando estarían en el nivel 3 ya que intentan generalizar, en cambio Daniel estaría en un nivel 2 pues para resolver la figura siempre parte de la anterior por lo que no veo el intento de generalizar por ningún lado"

Por tanto, la interacción con otros para poder convencer de la aceptabilidad y validez de las diferentes ideas ayudó a los EPS a trasladarse desde meras descripciones del uso de procedimientos a mostrar evidencias de la comprensión de los estudiantes de secundaria sobre el proceso de generalización, detallando ideas que subyacen en el proceso. Estos resultados confirman que los debates en línea pueden favorecer el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-294). Badajoz: SEIEM.

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

García-Cruz, J. A., y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(1), 31-43.

Magiera, M., van den Kieboom, L., y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mason, J., Burton, L. Y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: MEC-Labor.

Mouhayar, R.R., y Jurdak, M.E. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 379-396.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception ansd symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2005). Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 465-472). Prague: PME.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 65-82.

Sánchez, V., García, M., y Escudero, I. (2013). An analytical framework for analyzing student teachers' verbal interaction in learning situations. *Instructional Science*, *41*(2), 247-269.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Scherrer, J., y Stein, M.K. (2013). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education. 16*(2), 105-124

ISBN: 978-84-697-0709-8

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge

Van Es, E. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

Yesildere-Imre, S., y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.

Zapatera, A., y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Zapatera A., y Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM