



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO ANALÍTICO DEL MOVIMIENTO  
DE ROTACIÓN DE UNA TIERRA DEFORMABLE

Tomás Baenas Tormo



Tesis

**Doctorales**

[www.eltallerdigital.com](http://www.eltallerdigital.com)

UNIVERSIDAD de ALICANTE



UNIVERSIDAD DE ALICANTE

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO  
ANALÍTICO DEL MOVIMIENTO DE  
ROTACIÓN DE UNA TIERRA  
DEFORMABLE

Universidad de Alicante

TOMÁS BAENAS TORMO





DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

CONTRIBUCIONES AL ESTUDIO ANALÍTICO DEL  
MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE UNA TIERRA  
DEFORMABLE

TOMÁS BAENAS TORMO

DIRECTORES: DR. LUIS ALBERTO ESCAPA GARCÍA  
DR. JOSÉ MANUEL FERRÁNDIZ LEAL

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR  
LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE



*A mi mujer, Maida,  
y a nuestros hijos.*



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



# Prólogo

Esta memoria para optar al grado de doctor por la Universidad de Alicante, en el área de Matemática Aplicada, se divide en ocho capítulos. En los cuatro primeros se lleva a cabo una revisión del problema de la rotación de la Tierra rígida y elástica, en formalismo hamiltoniano, y se introducen algunas alternativas originales a la construcción de ciertos elementos de la teoría. En los otros cuatro se presentan nuevas contribuciones al estudio analítico de los movimientos de precesión y nutación de la Tierra deformable. Éstas se pueden agrupar en dos categorías: la obtención de fórmulas que describen el movimiento de rotación del eje de figura, que completan las existentes hasta la fecha, y la extensión del formalismo para hacerlo compatible con modelos reológicos de la Tierra más generales.

Quiero expresar mi agradecimiento:

- A los doctores Alberto Escapa y José Manuel Ferrándiz, directores de esta investigación, por su experta y constante orientación científica.
- A las instituciones que han financiado parcialmente este trabajo a través de los proyectos I+D+I del *Ministerio de Economía y Competitividad* AYA2010-22039-C02-01, AYA2010-22039-C02-02, y el proyecto de la *Generalitat Valenciana* GV/2014/072.
- A mis familiares y amigos, por su apoyo constante e incondicional.

Villena, Alicante, abril de 2014  
Tomás Baenas Tormo



# Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. El movimiento de rotación de la Tierra . . . . .	3
1.2. Contexto actual de las investigaciones . . . . .	6
1.3. Objetivos de la Investigación . . . . .	9
<b>2. Preliminares y formalismo hamiltoniano</b>	<b>13</b>
2.1. Conjunto canónico de Euler . . . . .	13
2.2. Conjunto canónico de Andoyer . . . . .	16
2.3. Relación entre las variables de Euler y de Andoyer . . . . .	24
2.4. Integración del problema libre . . . . .	25
2.5. Conjunto de Andoyer referido al sistema no inercial . . . . .	28
2.6. Desarrollo multipolar del potencial . . . . .	33
2.7. Transformación de los armónicos esféricos . . . . .	38
2.8. Método de perturbaciones . . . . .	49
<b>3. Tierra rígida</b>	<b>57</b>
3.1. Integración de primer orden . . . . .	57
3.2. Movimiento de nutación . . . . .	63
3.3. Movimiento de precesión . . . . .	72
<b>4. Tierra elástica: energía cinética de redistribución</b>	<b>81</b>
4.1. Sistema de Tisserand . . . . .	81
4.2. Energía cinética de redistribución . . . . .	86
4.3. Potencial de redistribución . . . . .	89
4.4. Dependencia temporal del tensor de inercia . . . . .	96
4.4.1. Demostración del teorema de Darwin . . . . .	99
4.5. Integración de primer orden . . . . .	100
4.6. Movimiento de precesión . . . . .	104
4.7. Movimiento de nutación . . . . .	106

<b>5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución</b>	<b>111</b>
5.1. Potencial de redistribución en variables canónicas . . . . .	111
5.2. Integración de primer orden . . . . .	116
5.3. Movimiento de precesión . . . . .	119
5.4. Movimiento de nutación . . . . .	123
5.4.1. Términos de Poisson . . . . .	123
5.4.2. Términos de Oppolzer . . . . .	128
<b>6. Cancelación de los efectos del potencial de redistribución</b>	<b>135</b>
6.1. Introducción . . . . .	135
6.2. Cancelación de la velocidad de precesión . . . . .	139
6.3. Cancelación de los términos de Poisson . . . . .	140
6.4. Cancelación de los términos de Oppolzer . . . . .	145
6.5. Cancelación del torce del potencial de redistribución . . . . .	147
<b>7. Tierra elástica: generalizaciones</b>	<b>157</b>
7.1. Generalización del modelo elástico . . . . .	157
7.2. Modelos de comportamiento anelástico . . . . .	163
7.3. Fórmulas de rotación generalizadas . . . . .	174
7.3.1. Velocidades de precesión . . . . .	177
7.3.2. Términos de Poisson . . . . .	178
7.3.3. Términos de Oppolzer . . . . .	179
7.3.4. Términos en fase y fuera de fase . . . . .	181
7.4. Representaciones numéricas . . . . .	182
<b>8. Conclusiones</b>	<b>207</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>211</b>

# Capítulo 1

## Introducción

*Que los puntos equinocciales retroceden, y que el eje de la Tierra, por una nutación en cada revolución anual, vibra dos veces hacia la eclíptica y retorna las mismas veces a su anterior posición.*

Proposición XXI. Teorema XVII.

*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,*

Sir Isaac Newton, 1687.

### 1.1. El movimiento de rotación de la Tierra

Desde un punto de vista geométrico, el problema de la rotación de un sólido (rígido o deformable) consiste en encontrar la ley de transformación entre dos sistemas de referencia: uno que pueda asociarse en todo instante al sólido, y otro inercial (o cuasi inercial). En el ámbito de la Mecánica Celeste, y en particular del estudio de la rotación de la Tierra, al primero se le denomina sistema de referencia *terrestre* y al segundo sistema de referencia *celeste*.

Con un enfoque newtoniano de la Mecánica, éstos pueden describirse mediante sistemas de referencia ortonormales y directos, en el espacio afín euclídeo tridimensional. Sobre los estándares actuales para la elección de estos sistemas y su realización puede consultarse IERS Conventions (2010)<sup>1</sup> o Soffel y Langhans (2013). Al sistema terrestre se refiere la cartografía, el posicionamiento global, las variaciones temporales de la tierra sólida y los océanos, etc. El estudio de la rotación de la Tierra se convierte entonces en un elemento estructural de la Astronomía y la Investigación Espacial, y está considerado como uno de los pilares de la Geodesia.

Cuando el sólido es rígido es posible definir un sistema terrestre de movimiento solidario con las partículas del sólido, de forma que la conexión de

---

<sup>1</sup>Publicación oficial del *Servicio Internacional de la Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia* (IERS Technical Note No. 36).

éste con la referencia celeste, supuestos coincidentes en origen, viene dada por una rotación que es parametrizable, por ejemplo, mediante los conocidos ángulos de Euler (longitud, oblicuidad y rotación propia, sección 2.1). En el caso de un sólido deformable, una posible elección del sistema de referencia terrestre es el sistema de Tisserand (sección 4.1). En el ámbito de este trabajo, la Tierra se considerará un sistema de partículas continuo, con simetría mecánica biaxial, formada por una única capa, y con ciertas características elásticas que se abordarán en su momento, en cada caso estudiado. El modelo de Tierra participa en el problema de su rotación, como también lo hace, en la praxis, la elección de los sistemas de referencia empleados.

El movimiento de rotación del sistema de referencia terrestre respecto al sistema de referencia celeste puede darse mediante una transformación de coordenadas, explícita y dependiente del tiempo<sup>2</sup>. Ésta, para los ángulos de Euler longitud ( $\phi$ ) y oblicuidad ( $\theta$ ), puede escribirse en la forma más básica (Escapa 2006)

$$\begin{aligned}\phi(t) &= P_\phi(t) + N_\phi(t) + F_\phi(t), \\ \theta(t) &= P_\theta(t) + N_\theta(t) + F_\theta(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde las funciones  $N_i(t)$  llevan asociados movimientos periódicos (o cuasi periódicos, en forma de polinomios trigonométricos), que definen el denominado *movimiento de nutación*, y las  $P_i(t)$  son de naturaleza secular (movimiento no acotado, en forma de polinomios), y dan lugar al denominado *movimiento de precesión*. Se habla entonces de los movimientos de nutación o precesión en longitud u oblicuidad del sistema terrestre<sup>3</sup>. Las funciones  $F_i(t)$  engloban movimientos residuales<sup>4</sup> (que no se describen mediante polinomios, ni polinomios trigonométricos).

Como se verá más adelante, con carácter más general la precesión englobará también cualquier movimiento de largo periodo, comparado éste convencionalmente con periodos característicos del movimiento del sistema, y de forma que, en buena aproximación, pueda seguir describiéndose matemáticamente con polinomios<sup>5</sup>. Cualquier división de estas características en el movimiento es puramente convencional, y obedece a criterios pragmáticos.

<sup>2</sup>En las últimas décadas la Unión Astronómica Internacional (IAU) ha adoptado distintas resoluciones a este respecto. Las más importantes pueden consultarse, por ejemplo, en Capitaine (2012).

<sup>3</sup>Para el sistema terrestre también se emplean las denominaciones *plano ecuatorial* y *eje de figura*, haciendo mención al plano  $XY$  y al eje  $Z$  de la elección usual de este sistema en el caso de la Tierra rígida.

<sup>4</sup>Algunos de estos términos son de la forma  $t^\alpha \cos(n_i t + n_{i,0})$ ,  $t^\alpha \sin(n_i t + n_{i,0})$ , con  $\alpha \geq 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ , y se denominan *términos seculares mixtos*. Su valor numérico se considera en los estándares actuales (IERS 2010).

<sup>5</sup>La observaciones muestran que la parte principal del movimiento de precesión (sección

Desde un punto de vista dinámico, precesión, nutación y cualquier otro componente del movimiento conforman una única entidad. Veremos que esta conveniente descomposición del movimiento de rotación se induce matemáticamente a través de la elegante unión del método de perturbaciones de Lie-Hori (sección 2.8) y el método de los promedios.

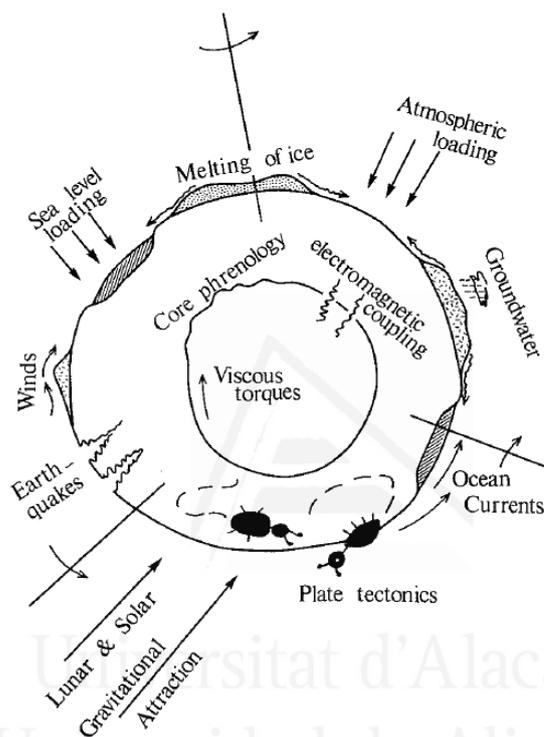


Ilustración esquemática de las fuerzas que perturban la rotación terrestre (Lambeck, Nature 286, p. 104, 1980).

Dentro de los múltiples factores que pueden intervenir en el movimiento de rotación de la Tierra, consideraremos la acción gravitatoria de la Luna y el Sol (denominada *lunisolar*), esto es, de los astros que por su relación entre masa y distancia, tienen una mayor influencia sobre nuestro planeta. Ésta a su vez podrá descomponerse convenientemente en la acción perturbadora del movimiento de rotación, como *torce*<sup>6</sup> externo, y la acción deformante del

3.3) viene dada por

$$P_{\phi}(t) \sim \phi_0 + n_{\phi}t, P_{\theta}(t) \sim \theta_0.$$

Es decir, la oblicuidad es aproximadamente constante, y la longitud tiene un periodo asociado de aproximadamente 26000 años.

<sup>6</sup>Se sigue en este trabajo la denominación *torce* apuntada por Rañada (1990), como sinónimo de momento de fuerza, en sustitución del anglicismo usual *torque*.

sistema de partículas. Ambas acciones están, empero, vinculadas por las leyes de la Mecánica, debido a que la deformación del sólido altera la atracción gravitatoria sobre él, lo que inserta este desacople del problema en diferentes órdenes del cálculo perturbativo.

Si nos centramos en particular en el movimiento de nutación, podemos separar éste en función de la procedencia, interna o externa, de las interacciones que lo afectan. Dado un modelo de Tierra, que da origen a las interacciones internas, si en las ecuaciones diferenciales del movimiento se prescinde de las interacciones externas, el movimiento solución se denomina de nutación *libre*,  $N_t^L(t)$ . La diferencia entre el movimiento de nutación que incorpora todas las interacciones y el movimiento de nutación libre, se denomina *forzado*,  $N_t^F(t)$ , es decir

$$N_t(t) = N_t^L(t) + N_t^F(t). \quad (1.2)$$

Esta separación no se emplea para el caso del movimiento de precesión, ya que su evolución temporal depende exclusivamente de las interacciones externas.

El método de perturbaciones de Lie-Hori, y la sencillez de la integración del problema del sólido rígido simétrico libre en variables de Andoyer (sección 2.4), son los dos motivos principales que llevan a elegir el formalismo hamiltoniano para el planteamiento y resolución de las ecuaciones de la Mecánica. Se sigue así el estudio originario de la rotación de la Tierra rígida de Kinoshita (1975 y 1977), así como la generalización a sólidos elásticos realizada por Kubo (1991), Getino y Ferrándiz (1995) y Escapa (2011). El carácter instrumental de las variables de Andoyer induce una división en las componentes de las contribuciones al movimiento de nutación del eje de figura, a partir de la descomposición

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda + (\phi - \lambda), \\ \theta &= I + (\theta - I). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Las contribuciones a la parte del movimiento descrito por las variables de Andoyer  $\lambda$  e  $I$  (esto es, al movimiento del eje del momento angular), se denominan *términos de Poisson*; las correspondientes a  $\phi - \lambda$  y  $\theta - I$ , *términos de Oppolzer*.

## 1.2. Contexto actual de las investigaciones del movimiento de rotación de la Tierra

Es conveniente referirse a la situación presente en el estudio de la rotación de la Tierra, y los niveles de precisión dados por modelos semiempíricos, que

justifican el estudio de este tipo de contribuciones al movimiento, desde una perspectiva analítica.

En 2003 entró en vigor el nuevo modelo de nutación (IAU 2000), adoptado por la Unión Astronómica Internacional (IAU) y la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG), que permite realizar predicciones de nutaciones con precisión centimétrica (en la escala de distancias sobre la superficie terrestre). Los logros derivados de este modelo merecieron el Premio Descartes de la Unión Europea, por su relevancia para la navegación de satélites y el posicionamiento preciso (Galileo, GPS, etc.). Otras aplicaciones importantes, presentes y futuras, requieren alcanzar una precisión milimétrica. Es el caso, por ejemplo, de la determinación de las variaciones del nivel del mar, estrechamente asociadas al cambio climático.

A pesar de los esfuerzos destinados a conseguir este objetivo, apenas se ha podido mejorar la precisión en la última década. En este escenario, la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) está impulsando una iniciativa denominada GGOS (Global Geodetic Observing System), que está ampliamente documentada tanto en su vertiente científica como en la referente a la utilidad social de sus aplicaciones.

Empleando la notación de IERS (2010) para las series de nutación del modelo IAU 2000, el movimiento de nutación en longitud,  $\Delta\psi \equiv N_\phi(t)$ , y oblicuidad,  $\Delta\epsilon \equiv N_\theta(t)$ , referido a la eclíptica de la fecha, con  $t$  en centurias julianas desde J2000.0, se escribe en la forma:

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_i (A_i + A'_i t) \operatorname{sen} \Theta_i + (A''_i + A'''_i t) \operatorname{cos} \Theta_i, \\ \Delta\epsilon &= \sum_i (B_i + B'_i t) \operatorname{cos} \Theta_i + (B''_i + B'''_i t) \operatorname{sen} \Theta_i.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Los argumentos  $\Theta_i$  representan ciertas combinaciones lineales de las variables de Delaunay del movimiento orbital de la Luna y el Sol, que dependen de la quintupla de números enteros indicados en la columna de argumento de la tabla siguiente. Éstos se definirán más adelante, en el desarrollo de la materia (sección 2.7).

La tabla 1.1, extraída de la Circular n.º. 179 del USNO (United States Naval Observatory) (Kaplan 2005), muestra las series de nutación del modelo IAU 2000, para los argumentos principales (en la serie completa hay 1365 términos). No se han incluido los coeficientes correspondientes al término lineal de las amplitudes (términos seculares mixtos). Para longitud y oblicuidad, la primera columna contiene los denominados *términos en fase*, y la segunda, los *fuera de fase*.

Tabla 1.1: Series de nutación IAU 2000A

Argumento					Periodo	Longitud [arcsec]			Oblicuidad [arcsec]	
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	$A_i$	$A_i''$	$B_i$	$B_i''$	
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	-17.2064161	0.0033386	9.2052331	0.0015377	
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	0.2074554	-0.0000698	-0.0897492	-0.0000291	
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	0.1475877	0.0011817	0.0073871	-0.0001924	
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	0.0215829	0.0000111	-0.0095929	0.0000132	
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	-1.3170906	-0.0013696	0.5730336	-0.0004587	
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	-0.0516821	-0.0000524	0.0224386	-0.0000174	
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	0.0711159	-0.0000872	-0.000675	0.0000358	
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	-0.2276413	0.0002796	0.0978459	0.0001374	
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	-0.0387298	0.000038	0.0200728	0.0000318	
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	-0.0301461	0.0000816	0.0129025	0.0000367	

Se observa que los valores oficiales de referencia de las amplitudes del movimiento de nutación se dan actualmente con una precesión formal de décima de microsegundo de arco ( $\mu\text{s}$ ). Esto justifica que se estén estudiando efectos y modelos que, en la escala de amplitudes de nutación, supongan contribuciones en el orden del microsegundo de arco.

Bajo estas premisas de búsqueda de un aumento significativo de precisión, se planteó la revisión del problema de la rotación de la Tierra, tomando como base un cuerpo sujeto a variaciones temporales y mucho más complejo que el actual modelo de tres capas sometido a perturbaciones oceánicas y atmosféricas. Nuevos elementos como variaciones del geopotencial, movimiento del geocentro y redistribuciones de masa del agua externa y las capas internas eran candidatos para un estudio detallado.

Desde una perspectiva metodológica, la herramienta del formalismo hamiltoniano que aquí se ha señalado, tiene una eficacia altamente probada, ya que las predicciones analíticas realizadas durante estos años por los doctores Ferrándiz, Getino y Escapa, proporcionan la misma precisión que el modelo actual de nutación (IAU 2006/2000) de la IAU, y tiene suficiente capacidad instrumental para abordar los nuevos efectos y obtener soluciones analíticas aproximadas. Además estos métodos pueden ser adaptados y extendidos para describir los movimientos de otros cuerpos celestes, como Mercurio (D'Hoedt 2010), Venus (Cottureau y Souchay 2009), Europa (Henrard 2005), etc.

En los últimos años los grupos liderados por los doctores Ferrándiz y Getino han identificado varios efectos directos o indirectos, que dan lugar a términos de nutación con amplitudes de varias decenas de microsegundos de arco, la mayoría de los cuales no están incluidos en los modelos de la IAU. Estos nuevos términos no despreciables en los niveles de precisión actual tienen orígenes diversos: términos de segundo orden en el sentido de teorías de perturbaciones, efectos de variaciones temporales del geopotencial, rotación del núcleo interno, etc.

Estos hallazgos son de gran relevancia porque la diferencia actual entre

predicciones teóricas del modelo IAU 2006/2000 y observacionales (VLBI) están en el orden de  $0.1 \text{ mas/cent}^{-1}$  (milisegundo de arco por centuria juliana) en las amplitudes de los términos seculares, unas pocas decenas de  $\mu\text{s}$  (microsegundos de arco) en la componente de nutación de periodo 18.6 años, y por debajo de  $20 \mu\text{s}$  para el resto de términos de nutación (Capitaine 2012).

La relevancia de estos resultados condujo a que distintos integrantes de los mencionados grupos de investigación fueran invitados a participar de modo destacado en la propuesta de un grupo de trabajo oficial de la Unión Astronómica Internacional y de la Asociación Internacional de Geodesia (*IAU/IAG Joint Working Group on Theory of the Earth Rotation* ó *WG-ThER*). En abril de 2013, tanto la IAG como la IAU han aprobado oficialmente la creación de dicho *Working Group*. Resulta relevante que José Manuel Ferrándiz ha sido nombrado *Chair* del *Working Group on Theory of the Earth Rotation*.

Este grupo de trabajo constituye el marco natural de referencia que debe guiar la investigación en rotación de la Tierra durante los años venideros, como la que se presenta en esta memoria de tesis doctoral.

### 1.3. Objetivos de la Investigación

Esta investigación se centra en la obtención de expresiones analíticas de las contribuciones a los movimientos forzados de precesión y nutación por la interacción gravitatoria de la Luna y el Sol. Esto se abordará mediante la formulación canónica del problema de rotación con modelos de Tierra deformable. Nos restringiremos a aquellos que describen las *mareas sólidas* (o mareas terrestres) inducidas por la interacción lunisolar, es decir, sin consideración de las mareas que se producen en los océanos y la atmósfera. Las mareas sólidas suponen una redistribución de la masa de la Tierra, que en consecuencia origina términos adicionales a las energías cinética y potencial del sistema, que habitualmente se denominan *de redistribución*.

La linealidad de las ecuaciones de perturbación a primer orden, permite estudiar separadamente la contribución debida a la variación de la energía cinética de rotación del sólido deformado (capítulo 4), y la correspondiente al potencial de redistribución (capítulo 5). El estudio de las fórmulas de rotación asociadas a la energía cinética de redistribución se incluye por completitud del estudio teórico, y debido a que posteriormente se darán expresiones mejoradas con un modelado más general del comportamiento elástico de la Tierra.

Los efectos del potencial de redistribución sobre la rotación de la Tierra han sido estudiados anteriormente por Escapa et al. (2004), sobre la base de

los trabajos de Kubo (1991) y Getino y Ferrándiz (1995), aunque sin considerar el movimiento completo de nutación. Este trabajo muestra, mediante el uso del formalismo hamiltoniano, que con un modelo de Tierra elástico y lineal, en el que el estado no perturbado se considera esférico y sin rotación, no existe una contribución neta en las nutaciones del eje de momento angular, ni en la velocidad de precesión.

El resultado es consistente con el deducido a partir del cálculo del torque asociado al potencial de redistribución, que es analíticamente nulo (Krasinsky 1999). Tal nulidad se demuestra con la expresión vectorial del potencial de redistribución bajo las hipótesis del mismo modelo reológico simplificado, o lo que es equivalente, en el marco del formalismo newtoniano de la Mecánica.

Otros antecedentes en el estudio de los efectos del potencial de redistribución los encontramos en Souchay y Folgueira (2000), Lambert y Capitaine (2004) y Lambert y Mathews (2006). En el primero de estos trabajos se emplea el formalismo hamiltoniano pero restringido al caso de una interacción zonal, bajo la suposición de que el resto de contribuciones son numéricamente despreciables. Por interacción zonal se entiende la contribución del potencial de redistribución procedente de los armónicos zonales en la interacción entre los cuerpos perturbador y perturbado. Al despreciar los demás términos del potencial, se obtiene una contribución neta en el movimiento de nutación. Como veremos este resultado es incorrecto al no incorporar todas las contribuciones del potencial.

En los trabajos de Lambert y Capitaine (2004) y Lambert y Mathews (2006) se aborda el estudio a través de la expresión del torque asociado al potencial de redistribución y su inserción en las ecuaciones de Sasao et al. (1980), en un modelo de Tierra de dos capas (manto y núcleo líquido). En el primero de los casos sólo se considera la contribución zonal de la interacción, para los movimientos de nutación y precesión, ofreciendo igualmente una contribución neta total en estos movimientos.

En el caso de Lambert y Mathews (2006) se considera una respuesta elástica de la Tierra diferente para cada contribución armónica del potencial (zonal, tesimal y sectorial), lo que arroja un valor neto no nulo para las componentes de los movimientos de precesión y nutación. El formalismo empleado no ofrece expresiones analíticas para las componentes del movimiento de rotación del eje de figura.

Uno de los objetivos de esta investigación consiste en obtener todos estos resultados para la velocidad de precesión y el movimiento completo de nutación (esto es, del eje de figura), así como la nulidad del torque asociado al potencial de redistribución, mediante el formalismo canónico. En particular, se hará uso de la expresión del potencial de redistribución en variables de Andoyer referidas a la eclíptica de la fecha y el movimiento orbital de la

Luna y el Sol siguiendo los desarrollos de Kinoshita (1977). La nulidad de las contribuciones al movimiento y al torque, se demostrará analíticamente para todas las componentes (capítulo 6), como consecuencia de ciertas propiedades matemáticas satisfechas por los coeficientes de los desarrollos orbitales, y las características del modelo elástico. Paralelamente se verá que el resultado es consecuencia de la cancelación de las diferentes contribuciones armónicas del potencial, lo que invalida el uso de contribuciones aisladas para la corrección del valor observado de la precesión o de la elipticidad dinámica (Lambert y Capitaine 2004).

Como consecuencia directa se abordará la obtención de fórmulas generales para todas las componentes del movimiento de rotación del eje de figura, bajo un modelado menos restrictivo de la respuesta elástica de la Tierra, en el que ya no se produzca la cancelación de las contribuciones armónicas del potencial (capítulo 7). Es el caso de los modelos reológicos (por ejemplo Wahr 1981 o IERS 2010) que amparan la inserción en las expresiones de un conjunto de *números de Love* (Munk y MacDonald 1960) complejos y dependientes de la frecuencia de excitación. En esas condiciones es posible la inclusión de efectos anelásticos y de resonancia en la respuesta elástica de la Tierra, y el estudio de su repercusión en el movimiento de rotación.

Por lo tanto, el propósito de este trabajo es el desarrollo de expresiones analíticas bajo estas consideraciones de modelado, y la obtención de los resultados numéricos asociados.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 2

## Preliminares y formalismo hamiltoniano

### 2.1. Conjunto canónico de Euler

Para la descripción dinámica de los sistemas rígidos se utiliza con frecuencia los *ángulos de Euler*. Cualquier referencia habitual de Mecánica Clásica, con propósito general, es adecuada para una introducción de este conjunto de variables canónicas (Meirovitch 1970, Goldstein 1987 o Marion 1992, entre otros). Si consideramos (figura 2.2) un sistema de referencia inercial definido por una base ortonormal  $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ , y un sistema ligado al sólido, con el mismo origen, y base ortonormal  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , los ángulos de Euler  $\phi \in [0, 2\pi[$ ,  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\psi \in [0, 2\pi[$  definen la secuencia de rotaciones respecto a ejes coordenados que conecta las coordenadas de los vectores en ambas bases. Así, si  $\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas en la base ligada al sólido (o sistema terrestre), y  $\mathbf{X}$  en la base del sistema inercial (o sistema celeste), se tiene que

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\psi, \mathbf{b}_3)\mathbf{R}(\theta, \mathbf{l})\mathbf{R}(\phi, \mathbf{s}_3)\mathbf{X} \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n})$  es una matriz de rotación del grupo  $SO(3)$  ( $\det \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) = 1$ ,  $\mathbf{R}^T(\alpha, \mathbf{n})\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) = I$ ), de ángulo  $\alpha$  y eje  $\mathbf{n}$ . En la expresión anterior  $\mathbf{l}$  es el versor de la línea de nodos intersección de los planos  $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$  y  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{s}_1 \cos \phi + \mathbf{s}_2 \sin \phi$ . En la secuencia de Euler anterior cada rotación se realiza respecto a un eje coordenado, no obstante se puede demostrar que la anterior expresión se reduce a

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_3(\psi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{X} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{R}_i(\alpha)$  es la matriz de rotación elemental, de ángulo  $\alpha$  y eje coordenado  $i$ -ésimo. De forma equivalente, la secuencia de rotaciones (2.1) se puede

describir con un vector velocidad angular,  $\boldsymbol{\omega}$ , construido por la asociación con rotaciones infinitesimales,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{b}_3 + \dot{\theta}\mathbf{l} + \dot{\phi}\mathbf{s}_3. \quad (2.3)$$

que se expresa en la base no ortonormal  $\{\mathbf{s}_3, \mathbf{l}, \mathbf{b}_3\}$ . Como rotación infinitesimal se escribe  $d\mathbf{R} = \mathbf{b}_3 d\psi + \mathbf{l} d\theta + \mathbf{s}_3 d\phi$ .

Si hacemos coincidir los ejes  $\mathbf{b}_i$  con los ejes principales del sólido, el tensor de inercia  $I_{ij}$  es diagonal y la energía cinética de rotación toma la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2), \quad (2.4)$$

donde  $I_i$  son los momentos principales de inercia, que en general denotaremos por  $(I_1, I_2, I_3) = (A, B, C)$ , y  $\omega_i$  son las componentes del vector velocidad angular en el sistema coordenado ligado al cuerpo, que en función de los ángulos de Euler se escribe como

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La expresión (2.4), una vez consideradas las relaciones (2.5), coincide con la función lagrangiana en un sistema de coordenadas en el que el centro de masas del sólido esté en reposo y en ausencia de energía potencial, esto nos permite construir los momentos canónicos mediante

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\alpha}} = \mathbf{L} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\alpha}}, \quad (2.6)$$

donde  $\alpha$  es cualquiera de los ángulos de Euler y  $\mathbf{L}$  es el momento angular (o momento cinético). Si determinamos el producto escalar en la base  $\{\mathbf{s}_3, \mathbf{l}, \mathbf{b}_3\}$ , es inmediato a partir de (2.3) que

$$p_\phi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_3, \quad p_\theta = \mathbf{L} \cdot \mathbf{l}, \quad p_\psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3, \quad (2.7)$$

es decir, que los momentos conjugados son las proyecciones del momento angular en esta base. De forma equivalente se llega a la misma conclusión si se establece una estructura simpléctica en el espacio de fases, exigiendo que la 1-forma de Cartan, construida a partir de  $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{R}$ , sea

$$\mathbf{L} \cdot d\mathbf{R} = p_\phi d\phi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi,$$

lo que conduce a (2.7) a partir de (2.3).

Las identidades (2.7), junto con la relación entre las bases  $S$  y  $B$  (Deprit y Elipe 1993) permiten encontrar las componentes de  $\mathbf{L}$  en la base ligada al sólido,  $B$ , en términos de los momentos canónicos:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \psi + p_\theta \cos \psi, \\ L_2 &= \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \cos \psi - p_\theta \operatorname{sen} \psi, \\ L_3 &= p_\psi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

También resultará útil conocer la expresión del módulo del momento angular

$$L = \|\mathbf{L}\| = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + p_\psi^2}. \quad (2.9)$$

En consecuencia disponemos de la relación de las componentes de la velocidad angular con los momentos, a partir de  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}$ , que en el sistema de ejes principales de inercia se reduce a

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{A} \left[ \frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) + p_\theta \cos \psi \right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{B} \left[ \frac{\cos \psi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) - p_\theta \operatorname{sen} \psi \right], \\ \omega_3 &= \frac{1}{C} p_\psi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos escribir entonces la energía cinética del sólido (2.4) en términos del conjunto canónico de Euler  $(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2A} \left[ \frac{\operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) + p_\theta \cos \psi \right]^2 + \frac{1}{2C} p_\psi^2 + \\ &+ \frac{1}{2B} \left[ \frac{\cos \psi}{\operatorname{sen} \theta} (p_\phi - p_\psi \cos \theta) - p_\theta \operatorname{sen} \psi \right]^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se tiene, pues, en el caso libre, un hamiltoniano con dos grados de libertad, dado que la coordenada  $\phi$  es cíclica. El sistema es integrable porque admite dos integrales primeras, la energía  $T$ , y  $L = \|\mathbf{L}\|$ , lo que se demuestra a partir de las ecuaciones de Euler del movimiento del sólido (Deprit y Elipe 1993). Por lo tanto debe existir otro conjunto canónico que reduzca el número de grados de libertad. Esto lo abordaremos en la próxima sección, donde se emplea el conjunto de Euler como apoyo para la construcción, vía transformación canónica, del conjunto canónico denominado de Andoyer, en el que la forma analítica del hamiltoniano es más simple (con un mayor número de variables cíclicas), y por ende su integración.

## 2.2. Conjunto canónico de Andoyer

Introduciremos el *conjunto canónico de Andoyer*  $(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3) = (\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N)$  mediante una extensión canónica dada una selección específica de los momentos,  $P_1, P_2, P_3$ , a partir del conjunto canónico de Euler,  $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = (\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$ . Esto garantiza, por construcción, la canonicidad de la transformación. La elección de los nuevos momentos se puede justificar examinando las propiedades de conmutación de las componentes  $(L_i)$  del momento angular del sistema y su módulo  $(L = \|\mathbf{L}\|)$ . Teniendo en cuenta que (Goldstein 1987)  $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k$ , y que el corchete de Poisson de dos momentos canónicos debe ser nulo, resulta que no es posible seleccionar dos componentes del momento angular, en un mismo sistema de referencia, como momentos canónicos. Sin embargo, en virtud  $\{L^2, \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}\} = 0$ , donde  $\mathbf{n}$  es un eje fijo cualquiera, sí pueden tomarse como variables canónicas el módulo de  $L$  y cualquiera de sus componentes. Para seleccionar componentes del momento angular en diferentes sistemas de referencia nos apoyamos en las variables de Euler (figura 2.2), cuyos momentos conjugados verifican las identidades (2.7),  $p_\phi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_3$ ,  $p_\theta = \mathbf{L} \cdot \mathbf{l}$ ,  $p_\psi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3$ , donde  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  es la base ortonormal que define el sistema inercial,  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  la correspondientes al sistema fijo en el sólido (o figura) y  $\mathbf{l}$  es el versor de la línea de nodos intersección de los planos  $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$  y  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ . La selección que conduce al conjunto de canónico de Andoyer es:

$$\Lambda = p_\phi, M = L, N = p_\psi. \quad (2.12)$$

Resulta conveniente la introducción de los ángulos auxiliares  $I$  y  $\sigma$  entre  $\mathbf{L}$  y los ejes  $\mathbf{s}_3$  y  $\mathbf{b}_3$  respectivamente, es decir,

$$\Lambda = M \cos I, N = M \cos \sigma, 0 < I < \pi, 0 < \sigma < \pi. \quad (2.13)$$

La expresión del módulo del momento angular, en función de los momentos conjugados de Euler (2.9) es

$$M = \sqrt{p_\theta^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + p_\psi^2}. \quad (2.14)$$

Para realizar la extensión canónica que nos permita completar el conjunto de variables empleamos una función generatriz que sea función de las variables “antiguas”  $q_i = (\phi, \theta, \psi)$  y los “nuevos” momentos  $P_i = (\Lambda, M, N)$ , que representamos como  $F_2(q_i, P_i)$  siguiendo la notación de Goldstein (1987). En este caso se tienen las ecuaciones de la transformación canónica

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

y consecuentemente, a partir de la primera de ellas, podemos construir la función generatriz

$$F_2 = \int \sum_{i=1}^3 p_i dq_i = \int (p_\phi d\phi + p_\theta d\theta + p_\psi d\psi). \quad (2.16)$$

El primer paso para realizar la integración es escribir los momentos de Euler en función de los de Andoyer mediante las relaciones inversas a (2.12) y (2.14), de manera que (2.16) resulta:

$$F_2 = \Lambda \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi + N \int_{\psi_0}^{\psi} d\psi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{M^2 - N^2 - \frac{(\Lambda - N \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta}} d\theta \quad (2.17)$$

donde  $\phi_0$ ,  $\theta_0$  y  $\psi_0$  son constantes de integración de cuya elección no depende la validez de la extensión canónica, pero que aprovecharemos para que la interpretación geométrica de las nuevas variables sea compatible con la definición original de las variables de Andoyer (Andoyer 1923, Kinoshita 1977). La forma de esta función generatriz fue señalada también por Kubo (1991) como camino para construir una transformación canónica a partir del conjunto canónico de Euler, si bien la deducción de las variables de Andoyer a partir de ésta no se incluye en el mencionado artículo.

Teniendo en cuenta la segunda de las ecuaciones de (2.15),

$$\nu = \frac{\partial F_2}{\partial N} = \psi - \psi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-N + \frac{(\Lambda - N \cos \theta) \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta}}{\sqrt{M^2 - N^2 - \frac{(\Lambda - N \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta}}} d\theta, \quad (2.18)$$

dividiendo numerador y denominador del integrando por  $M > 0$ , e intro-

duciendo los ángulos auxiliares (2.13)

$$\begin{aligned}
\nu &= \psi - \psi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-\cos \sigma (1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta (\cos I - \cos \sigma \cos \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{\operatorname{sen}^2 \sigma \left[ 1 - \frac{(\cos I - \cos \sigma \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \sigma} \right]}} d\theta = \\
&= \psi - \psi_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{-\cos \sigma + \cos \theta \cos I}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \sigma \sqrt{1 - \frac{(\cos I - \cos \sigma \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \sigma}}} d\theta \\
&= \psi - \psi_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{f'(\theta)}{\sqrt{1 - f(\theta)^2}} d\theta = \psi - \psi_0 - \operatorname{arcsen} f(\theta) + \operatorname{arcsen} f(\theta_0),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde se ha definido  $f(\theta) = (\cos I - \cos \sigma \cos \theta) / \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma$  para evidenciar el cálculo de la primitiva. A efectos de facilitar la interpretación de este resultado, denotaremos  $k = \operatorname{arcsen} f(\theta_0)$ , con lo que se tiene

$$\nu = \psi - \psi_0 - \operatorname{arcsen} \left( \frac{\cos I - \cos \sigma \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma} \right) + k, \tag{2.20}$$

o, equivalentemente,

$$\operatorname{sen}(\psi - \psi_0 - \nu + k) = \frac{\cos I - \cos \sigma \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \sigma}, \tag{2.21}$$

que expresamos de forma que nos permita interpretar geoméricamente los ángulos mediante las *fórmulas de Bessel* para triángulos esféricos

$$\cos I = \cos \sigma \cos \theta + \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\psi - \psi_0 - \nu + k). \tag{2.22}$$

Si consideramos el triángulo esférico de la figura 2.1, de vértices  $\pi - \theta$ ,  $I$ ,  $\sigma$  y lados opuestos  $\mu$ ,  $\psi - \nu$ ,  $\phi - \lambda$ , que relaciona los ángulos de Euler y de Andoyer en la construcción original de éstas variables (Kinoshita 1977), la aplicación de la ley de los cosenos para triángulos esféricos conduce a la identidad

$$\cos I = -\cos(\pi - \theta) \cos \sigma + \operatorname{sen}(\pi - \theta) \operatorname{sen} \sigma \cos(\psi - \nu), \tag{2.23}$$

que es equivalente de forma inmediata a (2.22) eligiendo  $\psi_0 = 0$  y  $k = \pi/2$ . Para encontrar un valor de la constante  $\theta_0$  que sea consistente con esta selección, debe ocurrir que  $f(\theta_0) = 1$ , es decir

$$\frac{\cos I - \cos \sigma \cos \theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0 \operatorname{sen} \sigma} = 1, \tag{2.24}$$

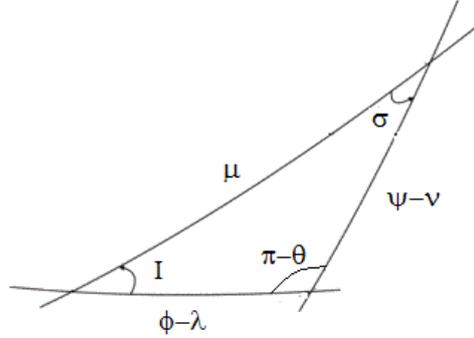


Figura 2.1: Triángulo esférico de referencia.

donde la elección más sencilla es  $\theta_0 = I + \sigma$ . Este valor supone una condición inicial para la integración (2.17) compatible con el triángulo esférico definido anteriormente, en concreto para la identidad

$$\cos \theta = \cos I \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I \cos \mu, \quad (2.25)$$

que en el caso límite  $\mu = 0$  se reduce a

$$\cos \theta_0 = \cos I \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I = \cos(I + \sigma). \quad (2.26)$$

La construcción del triángulo esférico de referencia requiere de la introducción de un plano perpendicular al momento angular, denominado habitualmente como *plano de Andoyer*. Los ángulos formados por este plano y los planos inercial,  $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$ , y de figura,  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ , son precisamente los auxiliares introducidos en (2.13). La variable  $\nu \in [0, 2\pi[$  es entonces el ángulo formado entre la línea de nodos intersección de los planos de Andoyer y de figura y el eje  $\mathbf{b}_1$  (véase la figura 2.2, en la página 22).

Proseguimos con la construcción de la variable  $\mu$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial F_2}{\partial M} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{M}{\sqrt{M^2 - N^2 - \frac{(\Lambda - N \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}}} d\theta = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \theta - (\cos I - \cos \sigma \cos \theta)^2}} d\theta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Manipulamos el radicando para buscar una estructura del tipo  $1 - f(\theta)^2$ . Para ello desarrollando el cuadrado y sumando y restando por conveniencia la cantidad  $\cos^2 I \cos^2 \sigma$  para completar un nuevo cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned} & \text{sen}^2 \sigma \text{sen}^2 \theta - [\cos^2 I + (\cos I \cos \sigma - \cos \theta)^2 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ & \quad - \cos^2 I \cos^2 \sigma] \\ = & \text{sen}^2 \sigma - \cos^2 I \text{sen}^2 \sigma - (\cos I \cos \sigma - \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Recuperando la integral

$$\mu = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\text{sen } \theta}{\text{sen}^2 \sigma \text{sen}^2 I \sqrt{1 - \left( \frac{\cos I \cos \sigma - \cos \theta}{\text{sen } \sigma \text{sen } I} \right)^2}} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{f'(\theta)}{\sqrt{1 - f(\theta)^2}} d\theta, \quad (2.29)$$

donde se ha definido  $f(\theta) = (\cos I \cos \sigma - \cos \theta) / (\text{sen } \sigma \text{sen } I)$ , análogamente al caso anterior, para evidenciar el cálculo de la primitiva. Por lo tanto

$$\mu = \arcsen \left( \frac{\cos I \cos \sigma - \cos \theta}{\text{sen } \sigma \text{sen } I} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (2.30)$$

donde se ha usado que  $f(\theta_0) = f(I + \sigma) = 1$ , y por tanto  $\arcsen f(\theta_0) = \pi/2$ . Actuando con la función seno a ambos lados de la igualdad, resulta

$$\cos \theta = \cos I \cos \sigma - \text{sen } \sigma \text{sen } I \cos \mu, \quad (2.31)$$

identidad compatible con el triángulo esférico definido anteriormente (figura 2.1), y que de hecho ya hemos utilizado en (2.25). La variable  $\mu \in [0, 2\pi[$  es entonces el ángulo formado entre la línea de nodos intersección de los planos de Andoyer e inercial, y la línea de nodos intersección de los planos de Andoyer y de figura (véase la figura 2.2, en la página 22).

El valor  $\mu = 0$  se corresponde con el solapamiento entre ambas líneas de nodos, o equivalentemente la coincidencia del plano de Andoyer con el plano de figura. En tal situación límite, las variables de Andoyer son “equivalentes” a las de Euler, y es por tanto una condición de integración consistente con su interpretación geométrica.

Por último construimos la variable  $\lambda$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\partial F_2}{\partial \Lambda} = \phi - \phi_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\Lambda - N \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{M^2 - N^2 - \frac{(\Lambda - N \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta}}} d\theta = \\ &= \phi - \phi_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos I - \cos \sigma \cos \theta}{\text{sen}^2 \theta \sqrt{1 - \cos^2 \sigma - \frac{(\cos I - \cos \sigma \cos \theta)^2}{\text{sen}^2 \theta}}} d\theta, \end{aligned} \quad (2.32)$$

Con una manipulación del radicando análoga a la del caso anterior desarrollando el cuadrado y sumando y restando por conveniencia la cantidad  $\cos^2 I \cos^2 \theta$  para completar un nuevo cuadrado, se tiene

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} [(\cos \sigma - \cos I \cos \theta)^2 + \cos^2 I - \cos^2 I \cos^2 \theta] \\
&= 1 - \cos^2 I - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} (\cos \sigma - \cos I \cos \theta)^2 = \\
&= \operatorname{sen}^2 I \left[ 1 - \frac{(\cos \sigma - \cos I \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 I} \right], \tag{2.33}
\end{aligned}$$

recuperando la integral

$$\begin{aligned}
\lambda &= \phi - \phi_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos I - \cos \sigma \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 I} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\cos \sigma - \cos I \cos \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 I}}} d\theta = \\
&= \phi - \phi_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{f'(\theta)}{\sqrt{1 - f(\theta)^2}} d\theta, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

con  $f(\theta) = (\cos \sigma - \cos I \cos \theta) / \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} I$  para evidenciar el cálculo de la primitiva. Por lo tanto:

$$\lambda = \phi - \phi_0 - \arcsen \left( \frac{\cos \sigma - \cos I \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} I} \right) + \frac{\pi}{2} \tag{2.35}$$

donde se ha usado que  $f(\theta_0) = f(I + \sigma) = 1$ , o equivalentemente

$$\cos \sigma = \cos I \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} I \cos(\phi - \phi_0 - \lambda). \tag{2.36}$$

La comparación de esta expresión con la correspondiente de Bessel para el triángulo esférico de referencia es inmediata a partir de la elección  $\phi_0 = 0$ . La variable  $\lambda \in [0, 2\pi[$  es entonces el ángulo formado entre el eje  $\mathbf{s}_1$  y la línea de nodos intersección de los planos de Andoyer e inercial (véase la figura 2.2).

A partir de la interpretación geométrica de las variables o coordenadas de Andoyer,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ , y de las variables auxiliares  $I$  y  $\sigma$ , los sistemas de referencia celeste y terrestre pueden conectarse mediante una secuencia de cinco rotaciones, frente a las tres de (2.1) para las variables de Euler

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\nu, \mathbf{b}_3) \mathbf{R}(\sigma, \mathbf{m}) \mathbf{R}(\mu, \mathbf{u}_L) \mathbf{R}(I, \mathbf{n}) \mathbf{R}(\lambda, \mathbf{s}_3) \mathbf{X}, \tag{2.37}$$

donde los nuevos ejes de rotación son  $\mathbf{m}$ , versor de la línea de nodos intersección de los planos de figura,  $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ , y de Andoyer,  $\mathbf{m} = \mathbf{b}_1 \cos \nu - \mathbf{b}_2 \operatorname{sen} \nu$ ;

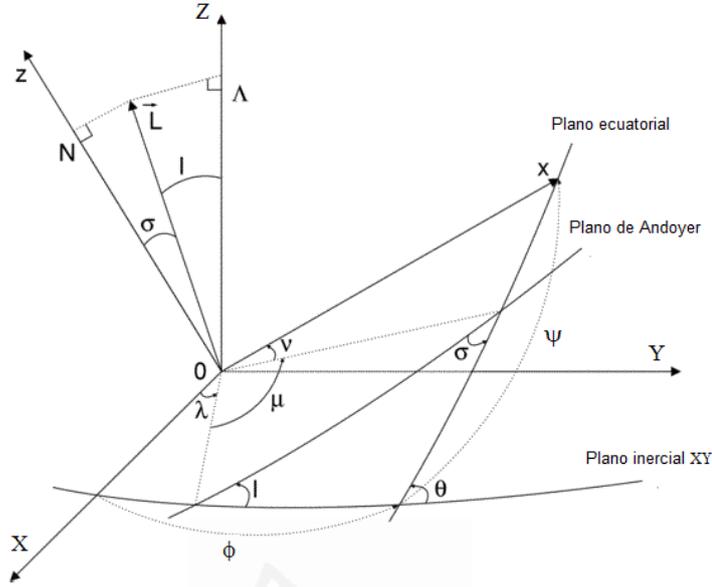


Figura 2.2: Variables de Euler y Andoyer

$\mathbf{u}_L$  el unitario en la dirección del momento angular; y  $\mathbf{n}$  versor de la línea de nodos intersección de los planos inercial,  $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$ , y de Andoyer,  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \cos \lambda + \mathbf{s}_2 \sin \lambda$ .

En términos de rotaciones elementales, dado que cada rotación se realiza respecto a un eje coordenado, resulta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_3(\nu)\mathbf{R}_1(\sigma)\mathbf{R}_3(\mu)\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda)\mathbf{X}. \quad (2.38)$$

Equivalentemente, a la secuencia de rotaciones (2.37) se le asocia un vector velocidad angular dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\nu}\mathbf{b}_3 + \dot{\sigma}\mathbf{m} + \dot{\mu}\mathbf{u}_L + \dot{I}\mathbf{n} + \dot{\lambda}\mathbf{s}_3, \quad (2.39)$$

que en forma de rotación infinitesimal se escribe

$$d\mathbf{R} = \mathbf{b}_3 d\nu + \mathbf{m} d\sigma + \mathbf{u}_L d\mu + \mathbf{n} dI + \mathbf{s}_3 d\lambda. \quad (2.40)$$

Como el conjunto es canónico, tal como se ha probado, la 1-forma de Cartan toma la expresión

$$\mathbf{L} \cdot d\mathbf{R} = \Lambda d\lambda + M d\mu + N d\nu \quad (2.41)$$

donde  $\Lambda = \mathbf{L} \cdot \mathbf{s}_3$ ,  $M = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_L$  y  $N = \mathbf{L} \cdot \mathbf{b}_3$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Puede comprobarse de forma directa sin más que notar que  $\mathbf{u}_L$  es perpendicular a  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{m}$ .

El conjunto canónico de Andoyer es la base de la formulación hamiltoniana del problema de la rotación del sólido rígido y, por extensión, de la rotación de la Tierra. Su uso en este ámbito fue introducido por Kinoshita (1977) por la simplicidad de la expresión del hamiltoniano escrito en estas variables, en el problema no perturbado, y lo ventajoso que resulta este hecho para la aplicación de métodos canónicos de perturbaciones.

Evaluemos entonces la expresión de la energía cinética en el sistema de ejes principales de la Tierra donde el tensor de inercia,  $\mathbf{I}$ , es diagonal. En función de las componentes del momento angular,  $L_i$ , la energía cinética tiene la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{I}^{-1})_{ij} L_i L_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{1}{I_i} \delta_{ij} L_i L_j = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1^2}{A} + \frac{L_2^2}{B} + \frac{L_3^2}{C} \right). \quad (2.42)$$

Considerando (2.38), y que en el sistema de referencia del plano de Andoyer, definido por el triedro  $\{\mathbf{m}, \mathbf{u}_L \times \mathbf{m}, \mathbf{u}_L\}$ , las componentes del momento angular son  $(0, 0, M)$ , se tendrá que en el sistema terrestre de ejes principales, el momento angular en función del conjunto canónico de Andoyer resulta

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_3(\nu) \mathbf{R}_1(\sigma) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \nu \\ M \operatorname{sen} \sigma \cos \nu \\ N \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

con lo que se tiene, a partir de una sustitución directa de las componentes en (2.42):

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \nu}{A} + \frac{\cos^2 \nu}{B} \right) (M^2 - N^2) + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C}, \quad (2.44)$$

donde se ha hecho uso de (2.13) a través de  $\operatorname{sen} \sigma = \sqrt{M^2 - N^2}/M$ . Con esta expresión para el hamiltoniano, las coordenadas  $\lambda$  y  $\mu$  son cíclicas (un grado de libertad), lo que es una ventaja analítica respecto a (2.11).

Además, en el caso de un sólido simétrico (sólido de revolución),  $A = B$ , se obtiene

$$T_S = \frac{1}{2} \frac{M^2 - N^2}{A} + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{A} + \frac{1}{2} N^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \quad (2.45)$$

en el que las tres coordenadas de Andoyer son cíclicas, es decir, forman un conjunto de variables acción-ángulo.

Por último, y por analogía con (2.43) podemos encontrar las componentes del vector momento angular en el sistema celeste,  $(L'_1, L'_2, L'_3)$ , teniendo en cuenta que el vector de coordenadas en esta base está conectado con el vector de coordenadas en la base del sistema del plano de Andoyer mediante la

secuencia de rotaciones  $\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda)$ , lo que en el caso del momento angular se traduce en

$$\begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\lambda)]^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \lambda \\ -M \operatorname{sen} I \operatorname{cos} \lambda \\ \Lambda \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

### 2.3. Relación entre las variables de Euler y de Andoyer

El carácter de las variables de Andoyer es instrumental, dado que el movimiento de rotación se describe a través de los ángulos de Euler. Por ello es útil disponer de expresiones que nos relacionen de forma directa ambos conjuntos de variables. Veámos que, tal como se indica en Getino et al. (2010), estas relaciones se obtienen a partir de las identidades del triángulo esférico de referencia utilizadas (2.22), (2.25) y (2.36), junto con las dos relaciones adicionales

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\psi - \nu) &= \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \mu \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\phi - \lambda) &= \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \mu. \end{aligned} \quad (2.47)$$

La identidad (2.25) ya proporciona de forma directa la variable  $\theta$  en función de las variables de Andoyer:

$$\theta = \arccos(\cos I \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I \cos \mu) \quad (2.48)$$

Partiendo de (2.22), y sustituyendo el valor de  $\cos \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$  que disponen (2.25) y la primera de las igualdades (2.47), se tiene

$$\begin{aligned} \tan(\psi - \nu) &= \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \mu}{\cos I - \cos \sigma(\cos I \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I \cos \mu)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} I \operatorname{sen} \mu}{\cos I \operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} I \cos \sigma \cos \mu}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

que nos permite dar  $\psi$  en función de las variables de Andoyer:

$$\psi = \nu + \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} I \operatorname{sen} \mu}{\cos I \operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} I \cos \sigma \cos \mu}\right). \quad (2.50)$$

Análogamente, la relación (2.36), con las sustituciones de (2.25) y la segunda de las identidades (2.47) conduce a

$$\begin{aligned} \tan(\phi - \lambda) &= \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} I}{\cos \sigma - \cos I(\cos I \cos \sigma - \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} I \cos \mu)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \mu}{\cos \sigma \operatorname{sen} I + \cos I \operatorname{sen} \sigma \cos \mu}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

o, equivalentemente,

$$\phi = \lambda + \arctan \left( \frac{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \mu}{\cos \sigma \operatorname{sen} I + \cos I \operatorname{sen} \sigma \cos \mu} \right). \quad (2.52)$$

Es habitual, en el ámbito del estudio de la rotación de la Tierra, el uso de desarrollos de Taylor de estas expresiones (2.48, 2.50 y 2.52) en torno a  $\sigma = 0$ , dado que el valor numérico de este ángulo auxiliar lo permite con una pérdida de precisión asumible ( $\sigma \simeq 10^{-6}$  rad, Kinoshita 1977). Además, en virtud de estas expresiones, en el límite de  $\sigma$  tendiendo a 0, se tiene:

$$\theta \longrightarrow I, \phi \longrightarrow \lambda, \psi \longrightarrow \nu + \mu, \quad (2.53)$$

por lo tanto también en el valor límite  $\sigma = 0$  se tiene la equivalencia entre ambos conjuntos canónicos, al coincidir nuevamente el plano de Andoyer con el plano de figura.

Los desarrollos en serie de potencias de  $\sigma$  resultantes son:

$$\begin{aligned} \theta &= I + \sigma \cos \mu + \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\cos I}{\operatorname{sen} I} \operatorname{sen}^2 \mu + O(\sigma^3) \\ \phi &= \lambda + \sigma \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} I} - \sigma^2 \frac{\cos I \cos \mu \operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen}^2 I} + O(\sigma^3) \\ \psi &= \mu + \nu - \sigma \frac{\cos I \operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} I} + \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \mu \cos \mu (1 + \cos^2 I)}{\operatorname{sen}^2 I} + O(\sigma^3). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Puede consultarse una construcción alternativa de estos desarrollos en serie en Escapa (2006). En la aplicación de estas expresiones en una teoría a primer orden de perturbación, como se desarrollará más adelante, se hará uso de las mismas a primer orden en  $\sigma$ .

## 2.4. Integración del problema libre

El problema libre, es decir, aquel en que el hamiltoniano del sólido es  $H = T$ , según (2.44), se resuelve por aplicación directa de las ecuaciones de Hamilton. Resultará útil la descomposición de la energía cinética en dos términos,  $T = T_0 + T_1$ , donde  $T_0$  es la parte correspondiente al caso simétrico, y por lo tanto coincidente con (2.45), y  $T_1$  la contribución de la triaxialidad del sólido. Esto se consigue sin más que aplicar la relación  $(1/A + 1/B)(\cos^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \nu) + (1/B - 1/A)(\cos^2 \nu - \operatorname{sen}^2 \nu) = 2 \operatorname{sen}^2 \nu / A + 2 \cos^2 \nu / B$ . Entonces podemos escribir

$$T = \frac{1}{4} (M^2 - N^2) \left[ \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \cos 2\nu \right] + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C} = T_0 + T_1, \quad (2.55)$$

donde

$$T_0 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{A} + \frac{1}{2} N^2 \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \quad T_1 = \frac{1}{4} (M^2 - N^2) \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (1 + \cos 2\nu). \quad (2.56)$$

El sistema de ecuaciones del movimiento resulta:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{\lambda} = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial \mu} &= \dot{M} = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial \nu} &= \dot{N} = \frac{1}{2} (M^2 - N^2) \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \sin 2\nu, \\ \frac{\partial H}{\partial \Lambda} &= \dot{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial M} &= \dot{\mu} = \frac{M}{A} + \frac{1}{2} M \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (1 + \cos 2\nu), \\ \frac{\partial H}{\partial N} &= \dot{\nu} = N \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) - \frac{1}{2} N \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (1 + \cos 2\nu). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Pese a la reducción de orden que supone la existencia de variables cíclicas, y que por tanto

$$\lambda = \lambda_0, \quad \Lambda = \Lambda_0, \quad M = M_0, \quad (2.58)$$

donde  $\lambda_0$ ,  $\Lambda_0$  y  $M_0$  son constantes de integración, el sistema de ecuaciones diferenciales no es resoluble en términos de funciones elementales. Siempre es posible, no obstante, el estudio cualitativo de soluciones en torno a puntos críticos como en Deprit (1967).

Numéricamente está justificado, al menos en una integración a primer orden, despreciar la contribución de la triaxialidad de la Tierra en la energía cinética. Se puede comparar la magnitud de ambos términos a partir de las expresiones (2.56)

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} &= \frac{\frac{1}{4} M^2 \sin^2 \sigma \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (1 + \cos 2\nu)}{\frac{1}{2} \frac{M^2}{A} \sin^2 \sigma + \frac{1}{2} \frac{N^2}{C}} \simeq \frac{M^2 \sin^2 \sigma \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right)}{\frac{N^2}{C}} \\ &\simeq C \sin^2 \sigma \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \simeq -2 \times 10^{-5} \sin^2 \sigma \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde para la estimación numérica se ha tomado el valor de las constantes adimensionales definidas por Bretagnon et al. (1997):

$$\frac{A}{m_E a_E^2} = 0.329611083, \quad \frac{B}{m_E a_E^2} = 0.329618344, \quad \frac{C}{m_E a_E^2} = 0.330697340, \quad (2.60)$$

con  $m_E$  la masa de la Tierra y  $a_E^2$  su radio ecuatorial. Es decir, numéricamente es aceptable suponer la Tierra como un sólido con simetría mecánica biaxial con  $A = B < C$ .

La integración es exacta y trivial en el caso simétrico, donde el hamiltoniano se reduce a  $H = T_0$  y se anulan todos los términos que incluyen el factor  $1/B - 1/A$ , resultando adicionalmente a (2.58) las soluciones:

$$N = N_0, \quad \mu = \frac{M_0}{A}t + \mu_0, \quad \nu = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) N_0 t + \nu_0, \quad (2.61)$$

donde igualmente hemos denotado por  $N_0$ ,  $\mu_0$  y  $\nu_0$  a las constantes de integración. Es frecuente la definición de los *movimientos medios* (o frecuencias) de las variables  $\mu$  y  $\nu$ , dados y denotados por

$$n_\mu = \frac{M_0}{A}, \quad n_\nu = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) N_0. \quad (2.62)$$

La introducción del conjunto canónico de Andoyer tiene como objetivo fundamental explotar la simplicidad de las ecuaciones del movimiento en este caso, y por tanto se considerará como problema sin perturbar el problema libre de un sólido simétrico.

Teniendo en cuenta que en el sistema de referencia terrestre de ejes principales las componentes del momento angular vienen dadas por (2.43), se tiene que  $L_3 = N_0 = C\omega_3$ , que implica la constancia de la tercera componente de la velocidad angular<sup>2</sup>,  $\omega_3 \equiv \omega_E$ , y entonces  $n_\nu = -\omega_E(C - A)/A$ .

La frecuencia  $n_\nu$  también está relacionada con el movimiento de las otras dos componentes de la velocidad angular<sup>3</sup> en el caso de la Tierra simétrica, lo que podemos evidenciar determinando directamente  $\dot{\omega}_1$  y  $\dot{\omega}_2$  como funciones de las variables canónicas a través de (2.44). En el sistema de ejes principales

<sup>2</sup>La función  $\omega_3$  está relacionada con la duración del tiempo sidéreo, *LOD* (por sus siglas en inglés, *Length of Day*), mediante  $\omega_3 = 2\pi/LOD$ .

<sup>3</sup>En mecánica se denomina *movimiento polar* al movimiento de las coordenadas del vector velocidad angular en el sistema de referencia terrestre. Este término no debe confundirse con el denominado *polar motion* según se considera en, por ejemplo, IERS Conventions 2010.

de inercia, donde  $L_i = I_i\omega_i$ , se tiene entonces

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \{\omega_1, T_0\} = n_\nu \frac{M_0}{A} \operatorname{sen} \sigma \cos \nu, \\ \dot{\omega}_2 &= \{\omega_1, T_0\} = -n_\nu \frac{M_0}{B} \operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \nu.\end{aligned}\quad (2.63)$$

En general se usarán las *centurias julianas* (1 cent = 36525 días) para la escala temporal (véase, por ejemplo, la tabla 3.1). Los periodos de movimiento en esta escala se calcularán como  $P_i = |2\pi/n_i| \times 36525$  (donde  $n_i$  son las frecuencias angulares, en inversas de día). Un valor aproximado para  $\omega_E$  será entonces,  $\omega_{E,\text{aprox}} = 2\pi \text{ rad/día} = 2\pi \times 36525 = 229493 \text{ rad/cent}$ . Un valor preciso es, por ejemplo, el ofrecido por Souchay et al. (2000),  $\omega_E = 230121.67526278 \text{ rad/cent}$ . Observacionalmente<sup>4</sup> se ajusta el parámetro denominado *elipticidad dinámica*,

$$H_d = \frac{2C - A - B}{2C} \xrightarrow{A=B} H_d = \frac{C - A}{A}, \quad (2.64)$$

cuyo valor numérico de referencia, en el caso de Tierra rígida, es (Souchay et al. 2000)  $H_d = 0.0032737548$ , que se puede aproximar por  $H_{d,\text{aprox}} = 1/305$ . Las frecuencias  $n_\mu$  y  $n_\nu$  se pueden escribir en términos de éste:

$$n_\mu = \frac{\omega_E}{1 - H_d}, \quad n_\nu = -\frac{H_d}{1 - H_d} \omega_E \rightarrow n_\mu + n_\nu = \omega_E. \quad (2.65)$$

El periodo en días asociado a la variable  $\nu$  será entonces

$$P_\nu = \left| \frac{2\pi}{n_\nu} \right| \simeq 2\pi \frac{1 - H_d}{H_d \omega_{E,\text{aprox}}} \stackrel{1-H_d \simeq 1}{\simeq} \frac{1}{H_{d,\text{aprox}}} = 305 \text{ días}, \quad (2.66)$$

conocido como periodo libre de Euler para la Tierra rígida (Moritz y Mueller 1986).

## 2.5. Conjunto de Andoyer referido al sistema no inercial

Tanto el conjunto canónico de Euler como el de Andoyer se han construido referidos a un sistema celeste inercial. En el ámbito de la rotación de la Tierra, para éste se toma la eclíptica, y en concreto la denominada *eclíptica de la*

<sup>4</sup>Sobre la relación entre la elipticidad dinámica y el movimiento de precesión terrestre se hablará en la sección 5.3.

*época* (o eclíptica fija), plano teórico que se considera inercial y cuya posición se fija convencionalmente cada cierto lapso de tiempo<sup>5</sup>, respecto del cual el movimiento de precesión de la *eclíptica de la fecha* (o eclíptica móvil) es una función conocida del tiempo. El movimiento orbital de los planetas (para el estudio del problema de rotación perturbado por el campo gravitatorio) está referido a la eclíptica móvil, y de ahí la conveniencia de referir el conjunto canónico a este sistema en el que se dispondrá de los desarrollos analíticos del potencial, si bien se trata de una referencia no inercial. El problema fue planteado y resuelto originalmente por Kinoshita (1977), que mediante relaciones geométricas, estudiando la transformación de la 1-forma  $Md\mu + \Lambda d\lambda - F dt$ , demuestra la canocidad de la conexión vía rotaciones entre ambas referencias (figura 2.3), lo que conlleva la introducción de una contribución al hamiltoniano cuando se trabaja con variables de Andoyer referidas al sistema no inercial. Puede encontrarse una reconstrucción basada en el formalismo de rotaciones infinitesimales y el estudio de la transformación de la 1-forma de Cartán  $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{R}$  en Escapa (2006).

Aquí completaremos lo indicado en Efroimsky y Escapa (2007), como consecuencia de la asociación entre velocidad angular y rotaciones infinitesimales. Para ello y utilizando la notación original de Kinoshita (1977) introducida en la figura 2.3, llamaremos  $\pi_1(t)$  y  $\Pi_1(t)$  a los ángulos (funciones conocidas del tiempo) que conectan las coordenadas en la eclíptica móvil (o no inercial),  $\mathbf{X}'$ , con las coordenadas en la eclíptica fija (o inercial),  $\mathbf{X}$ , mediante la secuencia de rotaciones

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}(-\Pi_1, \tilde{\mathbf{s}}_3)\mathbf{R}(\pi_1, \mathbf{N})\mathbf{R}(\Pi_1, \mathbf{s}_3)\mathbf{X} = \mathbf{R}_3(-\Pi_1)\mathbf{R}_1(\pi_1)\mathbf{R}_3(\Pi_1)\mathbf{X}, \quad (2.67)$$

donde  $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{s}}_1$  es el versor de la línea de nodos intersección de los planos eclíptica de la fecha, de base  $\langle \tilde{\mathbf{s}}_1, \tilde{\mathbf{s}}_2 \rangle$  y eclíptica de la época,  $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$ . La rotación  $\mathbf{R}(-\Pi_1, \tilde{\mathbf{s}}_3)$  obedece a la elección como origen de longitudes el eje  $\mathbf{s}_1$ , y no el eje  $\tilde{\mathbf{s}}_1$  de la eclíptica móvil (Kinoshita 1977<sup>6</sup>). Finalmente las coordenadas del vectores  $\mathbf{X}'$  están en una nueva base para la eclíptica móvil que denotamos por  $\{\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \mathbf{s}'_3\}$ . Determinamos la velocidad angular,  $\boldsymbol{\mu}'$ , asociada a la rotación  $\mathbf{R}(t)$  del sistema móvil respecto del fijo, definida por (2.67), utilizando la relación de sus coordenadas con los elementos de la ma-

<sup>5</sup> Ahora se utiliza el sistema de referencia eclíptica de la época denominado J2000.0 (IERS 2010), haciendo referencia a la fecha 1 de enero de 2000 (a las 12 h).

<sup>6</sup> La longitud del nodo ascendente del Plano de Andoyer,  $\lambda$ , se mide desde un equinoccio medio fijo de la eclíptica de la época.

triz hemisimétrica  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{R}}^t(t)\mathbf{R}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_3(-\Pi_1)\mathbf{R}_1(\pi_1)\mathbf{R}_3(\Pi_1) = \begin{pmatrix} \cos \Pi_1 & -\operatorname{sen} \Pi_1 & 0 \\ \operatorname{sen} \Pi_1 & \cos \Pi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi_1 & \operatorname{sen} \pi_1 \\ 0 & -\operatorname{sen} \pi_1 & \cos \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Pi_1 & \operatorname{sen} \Pi_1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \Pi_1 & \cos \Pi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

de donde

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\Pi}_1 (\cos \pi_1 - 1) & \dot{\pi}_1 \operatorname{sen} \Pi_1 + \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 \\ \dot{\Pi}_1 (1 - \cos(\pi_1)) & 0 & -\dot{\pi}_1 \cos \Pi_1 + \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 \\ -\dot{\pi}_1 \operatorname{sen} \Pi_1 - \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 & \dot{\pi}_1 \cos \Pi_1 - \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

que nos permite obtener las coordenadas de la velocidad angular en la base inercial  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{13} \\ \Omega_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\pi}_1 \cos \Pi_1 - \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 \\ \dot{\pi}_1 \operatorname{sen} \Pi_1 + \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 \\ \dot{\Pi}_1 (1 - \cos \pi_1) \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Sus coordenadas en la base no inercial (que se mueve con la eclíptica) se obtienen entonces a partir de (2.67):

$$\boldsymbol{\mu}' = \mathbf{R}_3(-\Pi)\mathbf{R}_1(\pi)\mathbf{R}_3(\Pi)\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{\pi}_1 \cos \Pi_1 - \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 \\ \dot{\pi}_1 \operatorname{sen} \Pi_1 + \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 \\ \dot{\Pi}_1 (\cos \pi_1 - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Por analogía con (2.43) encontramos las componentes del vector momento angular en el sistema celeste.

Consideraremos el conjunto canónico de Andoyer referido a la eclíptica móvil, representado por las variables  $(\lambda', \mu', \nu', \Lambda', M', N')$  y los ángulos auxiliares  $I'$  y  $\sigma'$ . En virtud de (2.46) las coordenadas del vector velocidad angular en el sistema no inercial vendrán dadas por

$$\mathbf{L}' = (M' \operatorname{sen} I' \operatorname{sen} \lambda', -M' \operatorname{sen} I' \cos \lambda', \Lambda'). \quad (2.72)$$

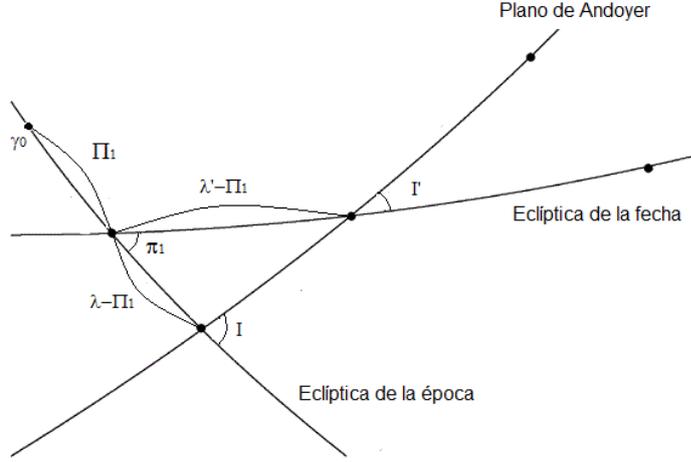


Figura 2.3: Eclípticas de la fecha y de la época.

Para estudiar las condiciones para la canonicidad del conjunto de Andoyer cuando se define uniendo las secuencias de rotaciones (2.67) y (2.37), consideraremos la expresión que toma la 1-forma de Cartan asociada a la rotación

$$\mathbf{R}(\nu', \mathbf{b}'_3)\mathbf{R}(\sigma', \mathbf{m}')\mathbf{R}(\mu', \mathbf{u}'_L)\mathbf{R}(I', \mathbf{n}')\mathbf{R}(\lambda', \mathbf{s}'_3)\mathbf{R}(-\Pi, \tilde{\mathbf{s}}_3)\mathbf{R}(\pi_1, \tilde{\mathbf{s}}_1)\mathbf{R}(\Pi_1, \mathbf{s}_3). \quad (2.73)$$

Con las mismas consideraciones que las efectuadas en (2.41) se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot d\mathbf{R} &= \mathbf{L} \cdot \left( -\tilde{\mathbf{s}}_3 \frac{d\Pi_1}{dt} + \tilde{\mathbf{s}}_1 \frac{d\pi_1}{dt} + \mathbf{s}_3 \frac{d\Pi_1}{dt} \right) dt + \Lambda' d\lambda' + M' d\mu' + N' d\nu' = \\ &= (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mu}) dt + \Lambda' d\lambda' + M' d\mu' + N' d\nu', \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde hemos usado que la expresión dentro del paréntesis es la velocidad angular dada por la asociación de (2.67) con las rotaciones infinitesimales, y que  $\pi_1$  y  $\Pi_1$  son funciones exclusivas del tiempo. Por lo tanto la transformación de las variables  $(\lambda, \mu, \nu, \Lambda, M, N)$  a las nuevas  $(\lambda', \mu', \nu', \Lambda', M', N')$  será canónica si se define un nuevo hamiltoniano de la forma  $H' = H - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mu}$ . El producto escalar  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mu}$  lo determinamos con los vectores de coordenadas en el sistema no inercial de la eclíptica móvil a partir de las expresiones (2.71) y (2.72):

$$\begin{aligned} -\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mu} &= \Lambda' \dot{\Pi}_1 (1 - \cos \pi_1) - \\ &\quad - M' \text{sen } I' \dot{\pi}_1 (\text{sen } \lambda' \cos \Pi_1 - \cos \lambda' \text{sen } \Pi_1) + \\ &\quad + M' \text{sen } I' \dot{\Pi}_1 \text{sen } \pi_1 (\text{sen } \lambda' \text{sen } \Pi_1 + \cos \lambda' \cos \Pi_1), \end{aligned} \quad (2.75)$$

Finalmente, introduciendo la denominación habitual resulta

$$E(\Lambda', M', \lambda') = -\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\mu} = \Lambda' (1 - \cos \pi_1) \dot{\Pi}_1 + M' \operatorname{sen} I' \times \\ \times \left[ \dot{\Pi}_1 \operatorname{sen} \pi_1 \cos(\lambda' - \Pi_1) - \dot{\pi}_1 \operatorname{sen}(\lambda' - \Pi_1) \right], \quad (2.76)$$

que es la ecuación 3.4 de Kinoshita (1977). Cuando se considere este término de no inercialidad en el hamiltoniano omitiremos las primas en las variables del conjunto canónico de Andoyer, sobreentendiendo que fijan la posición del sistema terrestre respecto del sistema no inercial (eclíptica de la fecha).

Como veremos más adelante en el estudio del movimiento de precesión de la Tierra (evolución secular), resulta útil la aproximación mediante polinomios en  $t$  del movimiento de la eclíptica a través de las funciones angulares  $\pi_1(t)$  y  $\Pi_1(t)$ . En particular se emplean desarrollos para las funciones (Kinoshita 1977)

$$\operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 = \sum_{i=1}^n p_{i-1} t^i, \quad \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 = \sum_{i=1}^n q_{i-1} t^i, \quad (2.77)$$

donde  $n$  es cierto grado, y  $p_i, q_i$  los coeficientes de los polinomios, que se suponen conocidos. Esto permite encontrar una expresión analíticamente más sencilla para  $E(\Lambda, M, \lambda)$ , que facilitará la obtención de desarrollos en serie para el movimiento. Para ello, reescribimos (2.76) en la forma

$$E(\Lambda, M, \lambda) = \Lambda e_1(t) + M \operatorname{sen} I [e_2(t) \cos \lambda + e_3(t) \operatorname{sen} \lambda] \quad (2.78)$$

donde se han definido las funciones

$$\begin{aligned} e_1(t) &= (1 - \cos \pi_1) \dot{\Pi}_1, \\ e_2(t) &= \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 \dot{\Pi}_1 + \operatorname{sen} \Pi_1 \dot{\pi}_1, \\ e_3(t) &= \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 \dot{\Pi}_1 - \cos \Pi_1 \dot{\pi}_1. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Derivando respecto al tiempo las expresiones (2.77), y aprovechando la pequeña magnitud del ángulo de inclinación entre la eclíptica de la fecha y de la época,  $|\pi_1| \ll 1 \text{ rad}^7$ , de forma que  $\cos \pi_1 = 1 + O(\pi_1^2)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \Pi_1 \dot{\pi}_1 + \operatorname{sen} \pi_1 \cos \Pi_1 \dot{\Pi}_1 &= \sum_{i=1}^n i p_{i-1} t^{i-1} + O(\pi_1^2), \\ \cos \Pi_1 \dot{\pi}_1 - \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen} \Pi_1 \dot{\Pi}_1 &= \sum_{i=1}^n i q_{i-1} t^{i-1} + O(\pi_1^2). \end{aligned} \quad (2.80)$$

<sup>7</sup> $\pi_1 \simeq 47.0''t$ , con  $t$  en centurias julianas (Lieske et al. 1977).

De esta manera se obtiene una aproximación numéricamente admisible para las funciones  $e_i(t)$

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 0 + O(\pi_1^2), \\ e_2(t) &= \sum_{i=1}^n ip_{i-1}t^{i-1} + O(\pi_1^2), \\ e_3(t) &= -\sum_{i=1}^n iq_{i-1}t^{i-1} + O(\pi_1^2). \end{aligned} \quad (2.81)$$

En Kinoshita (1975), a partir del trabajo previo de Newcomb (1906), se utilizan polinomios de tercer grado, cuya notación adoptamos para desarrollos posteriores:

$$\text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 = p_0t + p_1t^2 + p_2t^3, \quad \text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 = q_0t + q_1t^2 + q_2t^3, \quad (2.82)$$

en virtud de los que se tiene

$$\begin{aligned} e_2(t) &= p_0 + 2p_1t + 3p_2t^2 + O(\pi_1^2), \\ e_3(t) &= -q_0 - 2q_1t - 3q_2t^2 + O(\pi_1^2). \end{aligned} \quad (2.83)$$

## 2.6. Desarrollo multipolar del potencial

Para la expresión del hamiltoniano del sistema dinámico se necesita la energía potencial debida a la interacción gravitatoria entre el sólido y los cuerpos externos. En el ámbito de estudio de este trabajo, las contribuciones relevantes estudiadas son las producidas por la Luna y el Sol. A estos efectos, ambos cuerpos se considerarán con simetría esférica geométrica y mecánica (esto es, asimilables gravitacionalmente a puntos) y que constituyen con la Tierra un sistema de tres cuerpos cuyo movimiento orbital se supone conocido, es decir, resuelto. El problema se desacopla entonces permitiendo el estudio independiente de la parte rotacional del cuerpo perturbado, la Tierra, mediante la introducción en la expresión del potencial (o *geopotencial*) de la posición relativa de los cuerpos perturbadores que ofrecen las teorías orbitales. Esta cuestión se abordará en la siguiente sección, siguiendo el desarrollo clásico dado por Kinoshita (1977).

Paralelamente se necesita de un desarrollo de la expresión de la energía potencial, en órdenes proporcionales a la inversa de la distancia entre cuerpo perturbado y perturbador, que permita una integración analítica del problema mediante la teoría canónica de perturbaciones. El desarrollo general del potencial viene dado por los coeficientes del geopotencial (*zonales, tesorales*

y *sectoriales*<sup>8</sup>) y su expresión en armónicos esféricos, más concretamente en términos de polinomios de Legendre y funciones asociadas de Legendre (Kaula 1966). Sin embargo, y dado que en la integración a primer orden de perturbación será suficiente considerar términos hasta el segundo orden en el desarrollo, podemos eludir este planteamiento general y realizar un desarrollo multipolar por analogía con el caso electrostático (Jackson 1980) hasta el orden del momento cuadrupolar. Como se verá, la equivalencia en el ámbito de la rotación del sólido de las componentes del tensor de inercia con el momento cuadrupolar del potencial, permite recuperar la fórmula de MacCullagh.

La energía potencial gravitatoria entre un sólido continuo que define un volumen  $V$  y un cuerpo puntual exterior a  $V$ , de masa  $m$  y vector posición  $\mathbf{r}$  (en un sistema de referencia centrado en el centro de masas o geocentro), viene dado por la expresión

$$V(\mathbf{r}) = -Gm \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.84)$$

donde  $G$  es la constante de la gravitación universal, y  $\varrho(\mathbf{r}')$  la función densidad. Dado que el cuerpo perturbador es exterior al sólido,  $r = \|\mathbf{r}\| > \|\mathbf{r}'\| = r'$ . El desarrollo en serie se realiza considerando que el cociente  $r'/r$  es pequeño para el caso de la Luna y el Sol, y en ambos casos se pueden despreciar los términos de orden<sup>9</sup>  $O[(r'/r)^3]$ . Para ello utilizamos el desarrollo

<sup>8</sup>La denominación zonal, tesimal (o tesseral) y sectorial hace referencia a la representación geométrica de los armónicos esféricos del desarrollo del geopotencial, de grado  $n$  y orden  $m$ . Así, si  $m = 0$ , la esfera queda dividida en zonas de latitud donde los armónicos son de signo constante, y se denominan zonales. Si  $m \neq 0$ , la superficie se compartimenta en parcelas formadas por paralelos y meridianos en las que los armónicos mantienen el signo constante, formando algo parecido a un tablero de ajedrez sobre la superficie esférica. Entonces se denominan tesaerales (de la palabra griega *tessera*, que significa rectángulo o baldosa). En particular, si  $n = m$ , los armónicos tesaerales degeneran en funciones que dividen la esfera en sectores de signo constante, y reciben el nombre de sectoriales. Dado que en nuestro caso trabajamos con armónicos de segundo grado, estas denominaciones se corresponden con los armónicos de orden  $m = 0, 1, 2$  respectivamente.

<sup>9</sup>Dado que  $r/r' \simeq$  radio terrestre/distancia media tierra-astro perturbador, el valor más desfavorable se tiene para el caso de la Luna, donde  $r/r' \simeq 1/60$ . Es decir, cada vez que el orden del desarrollo se incrementa en una unidad, la magnitud del potencial se divide por 60.

de MacLaurin  $(1 + u)^{-1/2} = 1 - 1/2u + 3/8u^2 + O(u^3)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} &= \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}} = \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^2 + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Por conveniencia reescribimos los productos escalares en términos de las coordenadas de los vectores  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ ,  $\mathbf{r}' = (r'_1, r'_2, r'_3)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \sum_i \frac{r_i r'_i}{r^3} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} \frac{r_i r'_i r_j r'_j}{r^5} = \\ &= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i r'_i}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{r_i r_j}{r^5} \left( 3r'_i r'_j - \delta_{ij} \sum_k r_k r'_k \right), \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde en el último paso hemos reagrupado los términos de orden  $r'^2$ . Recuperamos la expresión del potencial (2.84) teniendo en cuenta que

$$M = \int_V \varrho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (2.87)$$

es la masa del sólido, y definiendo por analogía con el caso electrostático las magnitudes:

$$\mathbf{p} = \int_V \varrho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}', \quad Q_{ij} = \int_V \varrho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) d^3 \mathbf{r}', \quad (2.88)$$

que son el vector *momento dipolar* (vector) y las coordenadas del tensor *momento cuadrupolar*. Éste último es un tensor de traza nula con cinco componentes distintas. El potencial tiene entonces la expresión:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -Gm \left( \frac{M}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_{ij} r_i r_j}{r^5} \right) + O\left(\frac{r'^3}{r^3}\right) = \\ &= V^0(\mathbf{r}) + V^1(\mathbf{r}) + V^2(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde se ha descompuesto el potencial en tres términos y, en lo sucesivo, se omite el resto del desarrollo.

El primero de éstos,  $V^0(\mathbf{r}) = -GmM/r$  es la parte correspondiente al problema orbital que, como se ha indicado al comienzo de esta sección, no se considerará para el estudio de la rotación de la Tierra<sup>10</sup>. Por su parte  $V^1(\mathbf{r}) = 0$ , ya que por su definición (2.88) no es sino el vector posición del centro de masas del sólido y, si se elige el geocentro como origen del sistema de referencia,  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

Estudiemos la relación existente entre  $V^2(\mathbf{r})$  y las componentes del tensor de inercia  $I_{ij}$  definidas por

$$I_{ij} = \int_V \varrho(\mathbf{r}') (\delta_{ij}r'^2 - r'_i r'_j) d^3\mathbf{r}'. \quad (2.90)$$

Reescribiendo entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} r_i r_j}{r^5} &= \frac{3}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} \int_V \varrho(\mathbf{r}') \left( r'_i r'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r'^2 \right) d^3\mathbf{r}' = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} I_{ij} + \frac{2}{3} \frac{3}{2} \frac{r_i r_j}{r^5} \delta_{ij} \int_V \varrho(\mathbf{r}') r'^2 d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.91)$$

La integral del último término se puede relacionar con la traza del tensor de inercia,  $tr(\mathbf{I})$ , ya que de forma inmediata se tiene que

$$tr(\mathbf{I}) = \sum_i I_{ii} = \int_V \varrho(\mathbf{r}') (3r'^2 - r'^2) d^3\mathbf{r}' = 2 \int_V \varrho(\mathbf{r}') r'^2 d^3\mathbf{r}'. \quad (2.92)$$

Finalmente, el desarrollo multipolar del potencial gravitatorio para nuestro problema, a partir de (2.89), se escribe como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} \frac{Gm}{r^5} \sum_{i,j} I_{ij} r_i r_j - \frac{1}{2} \frac{Gm}{r^3} tr(\mathbf{I}). \quad (2.93)$$

La expresión anterior que relaciona la energía potencial con las componentes del tensor de inercia del sólido, dentro del orden de la aproximación del desarrollo en serie, se conoce como la fórmula de MacCullagh (MacCullagh 1844). En el caso de la Tierra rígida y en un sistema de referencia no necesariamente coincidente con el *sistema principal* (sistema de ejes principales de inercia), usaremos la notación habitual (véase por ejemplo Kubo 1991) para las coordenadas del tensor, momentos y productos de inercia

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

<sup>10</sup>Dado que en el planteamiento del problema  $\mathbf{r}(t)$  es una función conocida del tiempo a partir de las teorías orbitales,  $V^0(\mathbf{r})$  no tendrá dependencia con las variables canónicas que definen la rotación y, por tanto, no participará en la evolución de éstas.

Para las coordenadas de los vectores posición,  $\mathbf{r}$ , de los cuerpos perturbadores utilizaremos  $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ . Se tiene entonces que  $\sum_{i,j} I_{ij} r_i r_j = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Exz + 2Fxy + 2Dyz$ .

Recuperaremos ahora la expresión del potencial dada por Kinoshita (1977), a partir del desarrollo en armónicos esféricos, explicitando la relación algebraica de (2.93) con los *armónicos esféricos* reales (de grado  $n$  y orden  $m$ ) definidos como

$$C_{nm}(\eta, \alpha) = P_n^m(\cos \eta) \cos(m\alpha), \quad S_{nm}(\eta, \alpha) = P_n^m(\cos \eta) \sin(m\alpha), \quad (2.95)$$

donde  $P_n^m(u)$  son las funciones asociadas de Legendre<sup>11</sup>. Veamos que utilizando las coordenadas esféricas<sup>12</sup>  $\eta$  y  $\alpha$ , colatitud y longitud del cuerpo exterior respectivamente, la expresión (2.93) depende exclusivamente de los armónicos de grado  $n = 2$ . Para ello reescribimos en primer lugar los armónicos en términos de las coordenadas  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} C_{20}(\eta, \alpha) &= P_2^0(\cos \eta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \eta - 1) = \frac{1}{2} \frac{3z^2 - r^2}{r^2}, \\ C_{21}(\eta, \alpha) &= P_2^1(\cos \eta) \cos \alpha = 3 \cos \eta \sin \eta \cos \alpha = \frac{3xz}{r^2}, \\ C_{22}(\eta, \alpha) &= P_2^2(\cos \eta) \cos 2\alpha = 3 \sin^2 \eta (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 3 \frac{x^2 - y^2}{r^2}, \\ S_{21}(\eta, \alpha) &= P_2^1(\cos \eta) \sin \alpha = 3 \cos \eta \sin \eta \sin \alpha = \frac{3yz}{r^2}, \\ S_{22}(\eta, \alpha) &= P_2^2(\cos \eta) \sin 2\alpha = 6 \sin^2 \eta \sin \alpha \cos \alpha = 6 \frac{xy}{r^2}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

En la expresión (2.93) consideraremos primero los términos relacionados con los elementos diagonales de  $\mathbf{I}$  y su traza, es decir

$$\begin{aligned} V_{diag}(\mathbf{r}) &= \frac{3}{2} \frac{Gm}{r^5} (Ax^2 + By^2 + Cz^2) - \frac{1}{2} \frac{Gm}{r^3} (A + B + C) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Gm}{r^5} [(2A - B - C)x^2 + (2B - A - C)y^2 + (2C - A - B)z^2]. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Evidentemente esta expresión sólo puede depender de los armónicos  $C_{20}$  y  $C_{22}$ , por la dependencia algebraica con los cuadrados de las coordenadas.

<sup>11</sup>  $P_n^0(u) = P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n$ ,  $n \geq 0$ ,  $-1 \leq u \leq 1$  (Fórmula de Rodrigues).

$P_n^m(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u)$ ,  $m \geq 0$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ .

<sup>12</sup>  $x = r \sin \eta \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \eta \sin \alpha$ ,  $z = r \cos \eta$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Una forma sencilla, entonces, de encontrar esta dependencia es plantear un sistema de ecuaciones a partir de la combinación lineal:

$$\begin{aligned} V_{diag}(\mathbf{r}) &= \frac{Gm}{r^3} [c_1 C_{20}(\eta, \alpha) + c_2 C_{22}(\eta, \alpha)] = \\ &= \frac{Gm}{r^3} \left[ (6c_2 - c_1) \frac{x^2}{2r^2} + (-6c_2 - c_1) \frac{y^2}{2r^2} + 2c_1 \frac{z^2}{2r^2} \right], \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde se han utilizado las relaciones (2.96). El sistema arroja los coeficientes  $c_1 = (2C - A - B)/2$ ,  $c_2 = (A - B)/4$ , y por lo tanto

$$V_{diag}(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} C_{20}(\eta, \alpha) + \frac{A - B}{4} C_{22}(\eta, \alpha) \right], \quad (2.99)$$

que es la expresión 4.1b de Kinoshita (1977), aplicable a un modelo de Tierra rígida cuando las coordenadas esféricas  $(\eta, \alpha)$  de los cuerpos perturbadores se refieren al sistema principal del sólido.

La parte del potencial relacionada con los elementos no diagonales de  $\mathbf{I}$ , esto es, con los productos de inercia, se obtiene directamente de (2.96)

$$2Exz + 2Fxy + 2Dyz = \frac{2}{3}Er^2C_{21}(\eta, \alpha) + \frac{1}{3}Fr^2S_{22}(\eta, \alpha) + \frac{2}{3}Dr^2S_{21}(\eta, \alpha). \quad (2.100)$$

Agrupando (2.99) y (2.100), la expresión final del desarrollo del potencial es

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{Gm}{r^3} \left[ \frac{2C - A - B}{2} C_{20}(\eta, \alpha) + \frac{A - B}{4} C_{22}(\eta, \alpha) + \right. \\ &\quad \left. EC_{21}(\eta, \alpha) + DS_{21}(\eta, \alpha) + \frac{1}{2}FS_{22}(\eta, \alpha) \right], \end{aligned} \quad (2.101)$$

que coincide, por ejemplo, con la expresión 3.27 de Getino y Ferrándiz (1995), salvo la constante  $D_t$  que en esta referencia aparece por tratarse de un modelo de Tierra elástica, como estudiaremos más adelante.

## 2.7. Transformación de los armónicos esféricos

El desarrollo del geopotencial abordado en la sección anterior depende de los armónicos esféricos de grado dos referidos al sistema terrestre. Las coordenadas esféricas  $(r, \eta, \alpha)$  posicionan entonces, en cada instante, a los cuerpos externos, Luna y Sol. Sin embargo, y para poder disponer de la posición de estos astros como funciones conocidas del tiempo, hay que recurrir

a las teorías orbitales<sup>13</sup> y el cálculo de efemérides que ofrecen. Esto conlleva la necesidad de referir los armónicos esféricos a la eclíptica de la fecha.

Este cambio de referencia viene dado, a priori, por la secuencia de rotaciones (2.38), que como se ha estudiado introduce convenientemente el empleo del conjunto canónico de Andoyer, cuyas variables pueden referirse a la eclíptica móvil (sección 2.5). Para el cálculo de efemérides, las teorías de movimiento orbital relacionan los armónicos esféricos referidos a la eclíptica móvil con series trigonométricas cuyos argumentos son funciones conocidas del tiempo, que incluyen además una dependencia explícita con la variable canónica  $\lambda$  (lo que implica directamente una dependencia del potencial con esta variable canónica). O dicho de otra forma, en la secuencia de rotaciones (2.38) se debe excluir la rotación  $\mathbf{R}_3(\lambda)$  porque está incluida en las series armónicas de la teoría de movimiento orbital.

El problema integro de la transformación de los armónicos para dar una expresión del potencial en variables canónicas referidas a la eclíptica de la fecha fue planteado y resuelto por Kinoshita (1977). En el caso general, Kinoshita resuelve la cuestión mediante una aplicación reiterada del teorema de Wigner (1959) para la transformación de los armónicos esféricos. Esto lo hace siguiendo la secuencia de rotaciones que conectan los sistemas de referencia en la situación que hemos indicado,  $\mathbf{R}_3(\nu)\mathbf{R}_1(\sigma)\mathbf{R}_3(\mu)\mathbf{R}_1(I)$ . El cálculo trigonométrico es altamente farroioso por cualquier vía, especialmente para la consecución de expresiones compactas como las que ofrece Kinoshita, justificadas por el desarrollo analítico posterior de la teoría.

Hoy en día, sin embargo, el proceso de cálculo se puede agilizar enormemente mediante la utilización de manipuladores simbólicos de propósito general. Por otro lado, y dado que en la expresión aproximada del potencial (2.101) sólo aparecen los armónicos esféricos de grado dos, no es necesario derivar la transformación de éstos a partir del resultado general para cualquier grado, y se puede utilizar otros procedimientos como los desarrollados por Escapa (1997).

A continuación realizaremos la transformación siguiendo una variante de uno de estos procedimientos; se explicitarán los cálculos o manipulaciones que permiten la introducción de las funciones definidas por Kinoshita (1977) para la expresión analítica del potencial; y se completará la transformación del primero de los armónicos esféricos de (2.101) a modo de ejemplo.

Para ello vamos a construir las matrices de rotación equivalentes a las rotaciones elementales  $\mathbf{R}_1(\xi)$  y  $\mathbf{R}_3(\xi)$  del espacio afín tridimensional, en el

---

<sup>13</sup> Algunas teorías sobre el movimiento orbital son las de Newcomb (1895), Brown (1896, 1910), Eckert et al. (1966), Henrad (1972, 1978) o las desarrolladas en el *Bureau des Longitudes* de París más recientemente.

espacio subtendido por los armónicos esféricos  $\{C_{20}, C_{21}, S_{21}, C_{22}, S_{22}\}$ , que forman un sistema de funciones linealmente independientes. Omitimos la dependencia funcional de los armónicos, por simplicidad de notación, entendiéndose que ésta es  $C_{ij} = C_{ij}(\eta, \alpha)$ ,  $S_{ij} = S_{ij}(\eta, \alpha)$  en coordenadas esféricas referidas al sistema de referencia terrestre, y  $C'_{ij} = C_{ij}(\eta', \alpha')$ ,  $S'_{ij} = S_{ij}(\eta', \alpha')$  con colatitud y longitud del cuerpo externo referidas a la eclíptica de la fecha.

Las matrices de rotación en el espacio subtendido por los armónicos las denotaremos por  $\tilde{\mathbf{R}}_1(\xi)$  y  $\tilde{\mathbf{R}}_3(\xi)$ , de manera que la transformación buscada, representada matricialmente, es

$$\begin{pmatrix} C_{20} \\ C_{21} \\ S_{21} \\ C_{22} \\ S_{22} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{R}}_3(\nu)\tilde{\mathbf{R}}_1(\sigma)\tilde{\mathbf{R}}_3(\mu)\tilde{\mathbf{R}}_1(I) \begin{pmatrix} C'_{20} \\ C'_{21} \\ S'_{21} \\ C'_{22} \\ S'_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

Para construir las matrices  $\tilde{\mathbf{R}}_i(\xi)$  podemos seguir varios caminos. La forma más directa, y operacionalmente más sencilla, es plantear a partir de las expresiones (2.96) de los armónicos en términos de las variables cartesianas, una combinación lineal arbitraria,  $aC'_{20} + bC'_{21} + cS'_{21} + dC'_{22} + eS'_{22} = f(x', y', z')$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$ , son constantes reales. Realizamos la transformación de coordenadas dada por la rotación elemental en las expresiones de los armónicos, para obtener  $\tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ij}(x', y', z', \xi)$ ,  $\tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{ij}(x', y', z', \xi)$ . Identificando entonces coeficientes entre las expresiones de  $C_{ij}$  y  $S_{ij}$ , con  $f(x', y', z')$ , obtenemos un sistema de cinco ecuaciones que nos permite obtener las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  como funciones del ángulo de rotación,  $\xi$ . Explicitamos el cálculo para el primero de los armónicos,  $C_{20}$ , y una rotación  $\mathbf{R}_1(\xi)$  en el espacio afín. La combinación lineal es

$$\begin{aligned} f(x', y', z') &= \frac{1}{2r^2} [(6d - a)x'^2 + (-6d - a)y'^2 + 2az'^2 + \\ &\quad + 12ex'y' + 6bx'z' + 6cy'z']. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Las coordenadas rotadas son  $(x, y, z) = (x', y' \cos \xi + z' \sin \xi, -y' \sin \xi + z' \cos \xi)$ , que sustituimos en

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{20} &= \frac{1}{2} \frac{3z^2 - r^2}{r^2} = \\ &= \frac{1}{2r'^2} [-x'^2 + (3 \sin^2 \xi - 1)y'^2 + (3 \cos^2 \xi - 1)z'^2 - 3 \sin 2\xi y'z']. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Igualando  $\tilde{C}_{20} = f(x', y', z')$  se obtiene que  $a = 3/2 \cos^2 \xi - 1/2$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1/2 \sin 2\xi$ ,  $d = -1/4 \sin^2 \xi$  y  $e = 0$ . Por lo tanto

$$C_{20} = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \xi - \frac{1}{2} \right) C'_{20} - \frac{1}{2} \sin 2\xi S'_{21} - \frac{1}{4} \sin^2 \xi C'_{22}. \quad (2.105)$$

Repitiendo el proceso se obtienen todos los elementos de matriz de la rotación  $\tilde{\mathbf{R}}_1(\xi)$ , y los de  $\tilde{\mathbf{R}}_3(\xi)$  transformando las coordenadas cartesianas según  $\mathbf{R}_3(\xi)$ .

Otra alternativa consiste en aprovechar la ortogonalidad del sistema de funciones  $\{C_{20}, C_{21}, S_{21}, C_{22}, S_{22}\}$ , que nos permite definir un producto escalar mediante integración definida sobre la esfera unidad,  $S_1$  (tomamos radio unidad, evidentemente el radio es un invariante ante rotaciones, siguiendo la notación anterior,  $r' = r$ ):

$$\langle A_1, A_2 \rangle = \int_{S_1} A_1 A_2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A_1(\eta, \alpha) A_2(\eta, \alpha) \sin \eta d\eta d\alpha, \quad (2.106)$$

donde  $A_k$  es cualquiera de los armónicos esféricos de grado dos y  $dS = \sin \eta d\eta d\alpha$  el elemento de superficie de la esfera unidad en coordenadas esféricas. Planteando entonces, de forma análoga, cada armónico transformado  $\tilde{C}_{ij}$ ,  $\tilde{S}_{ij}$  como una combinación lineal del tipo  $aC'_{20} + bC'_{21} + cS'_{21} + dC'_{22} + eS'_{22}$ , podemos calcular los coeficientes multiplicándola escalarmente por cada armónico, sin olvidar que no están normalizados, es decir,  $\|A_k\|^2 = \langle A_k, A_k \rangle \neq 1$ . Explicitamos igualmente el cálculo para el primero de los armónicos,  $C_{20}$ , y una rotación  $\mathbf{R}_1(\xi)$  en el espacio afín. En tal caso:

$$\begin{aligned} C_{20} &= aC'_{20} + bC'_{21} + cS'_{21} + dC'_{22} + eS'_{22}, \\ a &= \frac{\langle C_{20}, C'_{20} \rangle}{\|C'_{20}\|^2} = \frac{3}{2} \cos^2 \xi - \frac{1}{2}, \quad \|C'_{20}\|^2 = \frac{4\pi}{5}, \\ b &= \frac{\langle C_{20}, C'_{21} \rangle}{\|C'_{21}\|^2} = 0, \quad \|C'_{21}\|^2 = \frac{12\pi}{5}, \\ c &= \frac{\langle C_{20}, S'_{21} \rangle}{\|S'_{21}\|^2} = -\frac{1}{2} \sin 2\xi, \quad \|S'_{21}\|^2 = \frac{12\pi}{5}, \\ d &= \frac{\langle C_{20}, C'_{22} \rangle}{\|C'_{22}\|^2} = -\frac{1}{4} \sin^2 \xi, \quad \|C'_{22}\|^2 = \frac{48\pi}{5}, \\ e &= \frac{\langle C_{20}, S'_{22} \rangle}{\|S'_{22}\|^2} = 0, \quad \|S'_{22}\|^2 = \frac{48\pi}{5}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

que es el mismo resultado (2.105). Operacionalmente este camino es más costoso, sin embargo mediante el uso de un operador simbólico el algoritmo es inmediato.

Independientemente del camino escogido, podemos construir las matrices

$\tilde{\mathbf{R}}_1(\xi)$  y  $\tilde{\mathbf{R}}_3(\xi)$ , que resultan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_1(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cos^2 \xi - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \sin 2\xi & -\frac{1}{4} \sin^2 \xi & 0 \\ 0 & \cos \xi & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \sin \xi \\ \frac{3}{2} \sin 2\xi & 0 & \cos 2\xi & \frac{1}{4} \sin 2\xi & 0 \\ -3 \sin^2 \xi & 0 & -\sin 2\xi & \frac{1}{2} \cos^2 \xi + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \sin \xi & 0 & 0 & \cos \xi \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_3(\xi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & \sin \xi & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \xi & \cos \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 2\xi & \sin 2\xi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin 2\xi & \cos 2\xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Los armónicos esféricos se transforman entonces a variables referidas a la eclíptica de la fecha, realizando el producto matricial (2.102). Tal como indicábamos al inicio de la sección, estudiaremos por su interés la transformación del primero de ellos,  $C'_{20} = C_{20}(\eta', \alpha') = P_2(\cos \eta')$ . En las expresiones que se obtienen tras el producto matricial distinguiremos por conveniencia, en primer lugar, los términos correspondientes a diferentes relaciones funcionales con la variable auxiliar  $\sigma$ , que en virtud de su magnitud,  $\sigma \simeq 10^{-6}$  rad, dará pie a la utilización de desarrollos en serie de MacLaurin para la realización de aproximaciones numéricas. Escribiremos entonces

$$C_{20} = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \sigma - \frac{1}{2} \right) \cdot f_1 + \sin 2\sigma \cdot f_2 + \sin^2 \sigma \cdot f_3, \quad (2.109)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} f_1 &= \left( \frac{3}{2} \cos^2 I - \frac{1}{2} \right) C'_{20} - \frac{1}{4} C'_{22} \sin^2 I - \frac{1}{2} S'_{21} \sin 2I, \\ f_2 &= -\frac{3}{4} C'_{20} \cos \mu \sin 2I - \frac{1}{4} P_2^1(\cos \eta') f_{21} - \frac{1}{8} P_2^2(\cos \eta') f_{22}, \\ f_3 &= \frac{3}{4} P_2(\cos \eta') \cos 2\mu \sin^2 I + \frac{1}{4} P_2^1(\cos \eta') f_{31} - \frac{1}{16} P_2^2(\cos \eta') f_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \operatorname{sen}(\alpha' - \mu) (\cos I + \cos 2I) + \operatorname{sen}(\alpha' + \mu) (\cos 2I - \cos I), \\
f_{22} &= \cos(2\alpha' - \mu) \left( \operatorname{sen} I + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I \right) + \cos(2\alpha' + \mu) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I - \operatorname{sen} I \right), \\
f_{31} &= \operatorname{sen}(\alpha' - 2\mu) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I + \operatorname{sen} I \right) + \operatorname{sen}(\alpha' + 2\mu) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I - \operatorname{sen} I \right), \\
f_{32} &= \cos(2\alpha' - 2\mu) (1 + \cos^2 I + 2 \cos I) + \\
&\quad + \cos(2\alpha' + 2\mu) (1 + \cos^2 I - 2 \cos I). \tag{2.110}
\end{aligned}$$

En las expresiones anteriores se han utilizado relaciones trigonométricas elementales para convertir combinaciones de productos y sumas de funciones trigonométricas en funciones con argumentos del tipo  $p\alpha' + q\mu$ , con  $p$  y  $q$  enteros. Por extensión para el cálculo del resto de armónicos se habrá de repetir con argumentos de la forma  $p\alpha' + q\mu + r\nu$ , con  $p$ ,  $q$  y  $r$  enteros. Estos argumentos  $p\alpha' + q\mu$  permiten compactar las relaciones anteriores, buscando la forma dada por Kinoshita (1977). Para ello introduciremos sumas sobre un índice  $\tau = \pm 1$  en las funciones  $f_{ij}$ , que resumimos a continuación:

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \sum_{\tau=\pm 1} \operatorname{sen}(\alpha' - \tau\mu) (\cos 2I + \tau \cos I) = \\
&= \sum_{\tau=\pm 1} \operatorname{sen}(\alpha' - \tau\mu) (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I), \\
f_{22} &= \sum_{\tau=\pm 1} \cos(2\alpha' - \tau\mu) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I + \tau \operatorname{sen} I \right) = \\
&= \sum_{\tau=\pm 1} \cos(2\alpha' - \tau\mu) \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I), \\
f_{31} &= \sum_{\tau=\pm 1} \operatorname{sen}(\alpha' - \tau 2\mu) \left( \tau \operatorname{sen} I + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I \right) = \\
&= \sum_{\tau=\pm 1} \operatorname{sen}(\alpha' - \tau 2\mu) \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I), \\
f_{32} &= \sum_{\tau=\pm 1} \cos(2\alpha' - \tau 2\mu) (1 + \cos^2 I + 2\tau \cos I) = \\
&= \sum_{\tau=\pm 1} \cos(2\alpha' - \tau 2\mu) (1 + \tau \cos I)^2. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

En este punto se introduce la información ofrecida por la teoría externa del movimiento orbital de los astros perturbadores, en la eclíptica de la fecha.

Como indicábamos, son series trigonométricas de la siguiente forma (se sigue la notación original de Kinoshita 1977):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}(\eta', \alpha') &= -\sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{21}(\eta', \alpha') &= 3 \sum_i \bar{A}_i^{(1)} \operatorname{sen} \Theta_i, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta', \alpha') = 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{22}(\eta', \alpha') &= 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{22}(\eta', \alpha') = 3 \sum_i \bar{A}_i^{(2)} \operatorname{sen} \Theta_i,
\end{aligned} \tag{2.112}$$

donde  $i = (m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, m_{4i}, m_{5i})$  es una quintupla de enteros con  $m_5 \geq 0$  (es habitual denotar el índice  $i$  con carácter vectorial),  $a$  es la distancia media entre los dos cuerpos<sup>14</sup> (perturbador y perturbado), y  $\Theta_i$  representa ciertas combinaciones lineales de *variables de Delaunay* de los cuerpos perturbadores, Luna y Sol, dadas por

$$\Theta_i(t) = m_{1i}l + m_{2i}l' + m_{3i}F + m_{4i}D + m_{5i}\Omega, \tag{2.113}$$

con  $l$ ,  $g$  y  $h$  las variables de Delaunay de la Luna,  $l'$ ,  $g'$  y  $h'$  las del Sol,  $F = l+g$ ,  $D = l+g+h-l'-g'-h'$  y  $\Omega = h-\lambda$  ( $\lambda$  es la variable canónica de Andoyer para la rotación de la Tierra)<sup>15</sup>. Las variables  $l$ ,  $l'$ ,  $F$ ,  $D$  y  $\Omega$  son funciones dependientes del tiempo, polinomios en  $t$  que para nuestros propósitos podrán considerarse de primer grado, de forma que podrá escribirse

$$\Theta_i(t) = n_i t + \Theta_{i0}. \tag{2.114}$$

El cálculo de las series trigonométricas (2.112) a partir de soluciones del movimiento orbital para Luna y Sol puede consultarse en Navarro (2001). También son necesarias las propiedades, numéricamente admisibles, dadas

<sup>14</sup>En Kinoshita (1977) se utiliza para  $a$  el valor del radio medio de la órbita. En las teorías orbitales es habitual el uso del semieje mayor de la órbita. Esto afecta al valor de las constantes  $A_i^{(k)}$  empleadas para la expresión de los armónicos esféricos. En el caso del Sol la diferencia es despreciable, con la precisión considerada hoy en día. Para la Luna se tiene el factor (Kinoshita y Souchay 1990):

$$\frac{a_{\text{Radio medio}}}{a_{\text{Semieje}}} \equiv F_2 = 0.999093142.$$

<sup>15</sup> $l$  es la anomalía media de la Luna,  $l'$  la anomalía media del Sol,  $F$  el argumento medio de la latitud de la Luna,  $D$  la elongación media de la Luna desde el Sol y  $\Omega$  la longitud media del nodo ascendente de la Luna.

por Kinoshita (1977)<sup>16</sup>

$$A_i^{(1)} = -\bar{A}_i^{(1)}, A_i^{(2)} = \bar{A}_i^{(2)}, A_i^{(j)} = A_{i,0}^{(j)} + A_{i,1}^{(j)}t. \quad (2.115)$$

Las expresiones (2.112) implican además que los coeficientes  $A_i^{(j)}$  verifiquen las siguientes condiciones señaladas por Kinoshita (1977):

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 1, 2, \\ A_i^{(1)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 0, 2, \\ A_i^{(2)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.116)$$

La demostración de éstas se incluye en la sección 6.1.

En las relaciones (2.109), (2.110) y (2.111), y las correspondientes al resto de armónicos esféricos, siguiendo la construcción anterior, los armónicos del cuerpo perturbador aparecen en la forma de productos de funciones de Legendre por funciones trigonométricas de argumento  $p\alpha' + q\mu + r\nu = p\alpha' - \tau u$ , con  $u = \tilde{q}\mu + \tilde{r}\nu$  ( $\tilde{q}$  y  $\tilde{r}$  enteros). Así por ejemplo, a partir de (2.112)

$$\begin{aligned} C_{20}(\eta', \alpha') \cos u &= P_2(\cos \eta') \cos u = -\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i \cos u = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_{i,\tau=\pm 1} A_i^{(0)} \cos(u - \tau\Theta_i), \end{aligned} \quad (2.117)$$

donde hemos usado  $\sum_{\tau=\pm 1} \cos(u - \tau\Theta_i) = 2 \cos u \cos \Theta_i$ . De forma análoga, y expresando en todos los casos las funciones trigonométricas con el mismo argumento  $u - \tau\Theta_i$ , se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} C_{20}(\eta', \alpha') \cos u &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_{i,\tau=\pm 1} A_i^{(0)} \cos(u - \tau\Theta_i), \\ C_{20}(\eta', \alpha') \sin u &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_{i,\tau=\pm 1} A_i^{(0)} \sin(u - \tau\Theta_i), \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Los valores numéricos para los coeficientes  $A_i^{(j)}$ ,  $\Theta_i$ ,  $n_i$  y las quintuplas de enteros  $(m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, m_{4i}, m_{5i})$ , para cada valor del índice  $i$ , pueden consultarse en Kinoshita (1977), o su revisión posterior en Kinoshita y Souchay (1990).

$$\begin{aligned}
P_2^1(\cos \eta') \cos(\alpha' - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(1)} \tau \operatorname{sen}(u - \tau \Theta_i), \\
P_2^1(\cos \eta') \operatorname{sen}(\alpha' - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(1)} \cos(u - \tau \Theta_i), \\
P_2^2(\cos \eta') \cos(2\alpha' - \tau u) &= 3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(2)} \cos(u - \tau \Theta_i), \\
P_2^2(\cos \eta') \operatorname{sen}(2\alpha' - \tau u) &= -3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sum_i A_i^{(2)} \tau \operatorname{sen}(u - \tau \Theta_i), \quad (2.118)
\end{aligned}$$

en las que se ha hecho uso de las propiedades (2.115).

Estudiemos la expresión final para la transformación del primero de los armónicos,  $C_{20}$ . Utilizando (2.118) en (2.110):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 f_1 &= -\left(\frac{3}{2} \cos^2 I - \frac{1}{2}\right) \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2I \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i - \\
&\quad - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 I \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i \\
&= 3 \sum_i B_i(I) \cos \Theta_i, \quad (2.119)
\end{aligned}$$

donde se ha definido la función

$$B_i(I) = -\frac{1}{6} (3 \cos^2 I - 1) A_i^{(0)} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2I A_i^{(1)} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 I A_i^{(2)}. \quad (2.120)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 f_2 &= \frac{3}{4} \cos \mu \operatorname{sen} 2I \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i - \\
&\quad - \frac{3}{4} \sum_{i, \tau=\pm 1} (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I) A_i^{(1)} \cos(\mu - \tau \Theta_i) - \\
&\quad - \frac{3}{8} \sum_{i, \tau=\pm 1} \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I) A_i^{(2)} \cos(\mu - \tau \Theta_i) \\
&= -\frac{3}{2} \sum_{i, \tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu - \tau \Theta_i), \quad (2.121)
\end{aligned}$$

donde se ha definido la función

$$\begin{aligned}
C_i(I, \tau) &= -\frac{1}{4} \operatorname{sen} 2I A_i^{(0)} + \frac{1}{2} (1 + \tau \cos I) (-1 + 2\tau \cos I) A_i^{(1)} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I) A_i^{(2)}, \quad (2.122)
\end{aligned}$$

y también se ha hecho uso de la igualdad  $\sum_{\tau=\pm 1} \cos(\mu - \tau\Theta_i) = 2 \cos \mu \cos \Theta_i$  en el primer sumando.

Por último

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 f_3 &= -\frac{3}{4} \cos 2\mu \operatorname{sen}^2 I \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i + \\
&+ \frac{3}{4} \sum_{i,\tau=\pm 1} \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I) A_i^{(1)} \cos(2\mu - \tau\Theta_i) - \\
&- \frac{3}{16} \sum_{i,\tau=\pm 1} (1 + \tau \cos I)^2 A_i^{(2)} \cos(2\mu - \tau\Theta_i) \\
&= \frac{3}{4} \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \cos(2\mu - \tau\Theta_i), \tag{2.123}
\end{aligned}$$

donde

$$D_i(I, \tau) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 I A_i^{(0)} + \tau \operatorname{sen} I (1 + \tau \cos I) A_i^{(1)} - \frac{1}{4} (1 + \tau \cos I)^2 A_i^{(2)}, \tag{2.124}$$

efectuando la misma manipulación trigonométrica que en el caso anterior. Finalmente, recopilando los resultados anteriores en (2.109) obtenemos la expresión para  $C_{20}(\eta, \alpha)$ .

Las funciones  $B_i(I)$ ,  $C_i(I, \tau)$  y  $D_i(I, \tau)$  fueron convenientemente introducidas por Kinoshita (1977) para dar expresiones analíticas manejables de los armónicos esféricos de grado dos de los cuerpos perturbadores, referidos al sistema terrestre. Éstos, incluidos en el desarrollo del geopotencial (2.101), son funciones de las variables canónicas<sup>17</sup> de Andoyer y del tiempo; esto es, en virtud del desarrollo previo, incluyen soluciones para el movimiento orbital de la Luna y el Sol. Relacionamos a continuación el resultado para todos los armónicos esféricos de que intervienen en el potencial, y que se obtienen según el procedimiento ejemplificado. Las expresiones se pueden consultar

<sup>17</sup>Aunque ya se ha dicho y además forma parte del planteamiento de partida dado por (2.102), conviene recordar que el potencial depende también de la variable canónica  $\lambda$ , aunque ésta no aparezca explícitamente en las expresiones de los armónicos esféricos. Ésta viene a través de (2.113), vía  $\Omega = h - \lambda$ . Por eso a veces se hace aparecer explícitamente definiendo  $\Theta_i = \tilde{\Theta}_i - m_5 \lambda$ , donde  $\tilde{\Theta}_i$  no incluye ninguna variable de la rotación.

también en Getino y Ferrándiz (1995) o Escapa (1997) entre otros.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}(\eta, \alpha) &= \frac{3}{2} (3 \cos^2 \sigma - 1) \sum_i B_i(I) \cos \Theta_i - \frac{3}{2} \sin 2\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \times \\
&\quad \times \cos(\mu - \tau \Theta_i) + \frac{3}{4} \sin^2 \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \cos(2\mu - \tau \Theta_i), \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{21}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{4} \sin 2\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} B_i(I) \sin(\nu - \tau \Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho=\pm 1} \rho(1 + \rho \cos \sigma) \times \\
&\quad \times (-1 + 2\rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \sin(\mu + \rho\nu - \tau \Theta_i) - \\
&\quad - \frac{3}{4} \sum_{\rho=\pm 1} \sin \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \sin(2\mu + \rho\nu - \tau \Theta_i), \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{4} \sin 2\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} B_i(I) \cos(\nu - \tau \Theta_i) + \frac{3}{2} \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos \sigma) \times \\
&\quad \times (-1 + 2\rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu + \rho\nu - \tau \Theta_i) - \\
&\quad - \frac{3}{4} \sum_{\rho=\pm 1} \rho \sin \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + \rho\nu - \tau \Theta_i), \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{22}(\eta, \alpha) &= -\frac{9}{2} \sin^2 \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} B_i(I) \cos(2\nu - \tau \Theta_i) - \\
&\quad - 3 \sum_{\rho=\pm 1} \rho \sin \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu + 2\rho\nu - \tau \Theta_i) - \\
&\quad - \frac{3}{4} \sum_{\rho=\pm 1} (1 + \rho \cos \sigma)^2 \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + 2\rho\nu - \tau \Theta_i), \\
\left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{22}(\eta, \alpha) &= \frac{9}{2} \sin^2 \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} B_i(I) \sin(2\nu - \tau \Theta_i) + \\
&\quad + 3 \sum_{\rho=\pm 1} \sin \sigma (1 + \rho \cos \sigma) \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \sin(\mu + 2\rho\nu - \tau \Theta_i) + \\
&\quad + \frac{3}{4} \sum_{\rho=\pm 1} \rho (1 + \rho \cos \sigma)^2 \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \sin(2\mu + 2\rho\nu - \tau \Theta_i).
\end{aligned} \tag{2.125}$$

## 2.8. Método de perturbaciones

A pesar de que se haya dado una expresión compacta para los armónicos esféricos de los que depende el geopotencial, su dependencia con las variables canónicas hace inviable la resolución exacta de las ecuaciones de Hamilton para

$$H = T(M, N, \nu) + V(\Lambda, M, N, \lambda, \mu, \nu) + E(\Lambda, M, \lambda). \quad (2.126)$$

Ello requerirá de la introducción de métodos canónicos de perturbaciones para la obtención de soluciones aproximadas.

Las particularidades de aplicación de éstos, y de elección de los distintos componentes del método, se abordarán en la próxima sección. Por el momento resumiremos las generalidades del denominado *método de Hori* (Hori 1966, 1973, también conocido como de Lie-Hori) y su justificación para el caso que nos atañe. Fue introducido originalmente por Kinoshita (1977) en el ámbito de la teoría hamiltoniana de la rotación de la Tierra, pero tiene sus orígenes en los métodos canónicos de von Zeipel-Brouwer (Zeipel 1916, Brouwer 1959) y de Poincaré (Poincaré 1893). Estos métodos están basados en el uso de series de Lie y su asociación con las transformaciones canónicas infinitesimales. Los aspectos matemáticos del método pueden consultarse en Ferraz-Mello (2007), que aquí se exponen de forma sucinta.

Se puede construir una transformación canónica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  a partir de una función generatriz de la forma  $S(Q, q; \lambda)$  suficientemente regular, donde por el habitual abuso de notación  $q$  y  $Q$  representan los conjuntos de coordenadas canónicas antes y después de la transformación, respectivamente. La transformación canónica, para cada valor del parámetro real  $\lambda$ , vendrá dada por las ecuaciones  $p_i = \partial S / \partial q_i$ ,  $P_i = -\partial S / \partial Q_i$ , donde  $p$  y  $P$  representan los momentos canónicos. Si  $Q = Q(q, p; \lambda)$  es una solución del anterior sistema de ecuaciones, entonces, definiendo  $W(q, p; \lambda) = -\partial S(Q(q, p; \lambda), q; \lambda) / \partial \lambda$  (denominada función generatriz de Lie o generador de Lie del grupo) se verifican las ecuaciones siguientes para la transformación canónica infinitesimal

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (2.127)$$

Se define la derivada de Lie de una función real  $f$  de clase  $C^\infty$  con dominio en el espacio de fases, como

$$D_W f = \{f, W\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (2.128)$$

que además de verificar las propiedades algebraicas habituales de la derivada, permite definir una estructura de álgebra de Lie. Para nuestra aplicación

mecánica es interesante reseñar que cuando se dispone de una restricción de la función  $f$  a una curva integral  $(q(\lambda), p(\lambda))$ , solución de las ecuaciones canónicas (2.127) generadas por  $W$  para cierto problema de valor inicial, y que representamos como  $\tilde{f} = f(q(\lambda), p(\lambda))$ , se tiene por aplicación de (2.128) que

$$\frac{d\tilde{f}}{d\lambda} = \{f, W\} = D_W f. \quad (2.129)$$

Bajo condiciones generales de regularidad las ecuaciones (2.127) permiten expresar las soluciones como desarrollos de Taylor, que teniendo en cuenta (2.129) toman la forma

$$q_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (D_W^k q_i)_{\lambda=0}, \quad p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (D_W^k p_i)_{\lambda=0} \quad (2.130)$$

donde  $D_W^k$  representa la derivada  $k$ -ésima, por aplicación reiterada de  $D_W$ .

El resultado anterior permite definir la *serie de Lie* generada por  $W$  de una función  $f$  como

$$E_W f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_W^k f, \quad (2.131)$$

que resulta ser la serie de Taylor en  $\lambda = 0$  de la función restringida,  $\tilde{f}$ , a las trayectorias solución de (2.127).

En las teorías canónicas de perturbaciones, la generatriz  $W$  se introduce como una función arbitraria a determinar de forma que verifique algunas condiciones dadas. A su vez, en la construcción independiente de (2.131), dada ésta como definición, se tiene libertad para adoptar el parámetro  $\lambda = 1$ , ya que éste nada tiene que ver con el pequeño parámetro que define la perturbación, en la forma  $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$  habitualmente. Además la condición de canonicidad (o caracterización a través de corchetes de Poisson) para una transformación canónica del tipo  $(q, p) \rightarrow (E_W q, E_W p)$ , en términos de series de Lie se escribe  $E_W \{q, p\} = \{E_W q, E_W p\}$ , es independiente del parámetro  $\lambda$ . Aprovechando la homogeneidad de la derivada de Lie,  $D_{\varepsilon W}^k = \varepsilon^k D_W^k$ , y asumiendo desarrollos para las funciones  $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$  y  $W = W_1 + W_2 + \dots$ , tenemos la base de lo que constituirán las ecuaciones del método de perturbaciones:

$$\begin{aligned} E_W f &= f_0 + f_1 + D_{W_1} f_0 + \\ &\quad + f_2 + D_{W_1} f_1 + D_{W_2} f_0 + \frac{1}{2} D_{W_1} D_{W_1} f_0 + \dots \\ &= f_0 + f_1 + \{f_0, W_1\} + \\ &\quad f_2 + \{f_1, W_1\} + \{f_0, W_2\} + \frac{1}{2} \{\{f_0, W_1\}, W_1\} + \dots \end{aligned} \quad (2.132)$$

cuya convergencia no está asegurada en un sentido estricto (se trata de un desarrollo asintótico), y depende de la magnitud de  $|W|$  debido a la homegenidad de  $D_W^k$  respecto de  $W$ . La transposición de (2.132) al marco hamiltoniano es directa, considerando una transformación canónica<sup>18</sup>  $(q, p) \rightarrow (E_{W^*}q, E_{W^*}p) = (q^*, p^*)$  donde  $W^* = W(q^*, p^*)$ .

Si el hamiltoniano es independiente del tiempo (sistema autónomo), y por tanto se conserva ante transformaciones canónicas,  $H^*(q^*, p^*) = H(q, p)$ , se tiene

$$H^*(q^*, p^*) = E_{W^*}H(q^*, p^*). \quad (2.133)$$

Las ecuaciones perturbativas se obtienen sustituyendo este resultado en los desarrollos siguientes

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots \\ H^* &= H_0^* + \varepsilon H_1^* + \varepsilon^2 H_2^* + \dots \\ W^* &= \varepsilon W_1^* + \varepsilon^2 W_2^* + \dots \end{aligned} \quad (2.134)$$

y comparando con el desarrollo (2.133), utilizando (2.132):

$$\begin{aligned} H_0^* &= H_0 \\ H_1^* &= H_1 + \{H_0, W_1^*\} \\ H_2^* &= H_2 + \{H_1, W_1^*\} + \frac{1}{2} \{\{H_0, W_1^*\}, W_1^*\} + \{H_0, W_2^*\} \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.135)$$

En estas ecuaciones,  $H_k = H_k(q^*, p^*)$ , la dependencia en  $(q^*, p^*)$  es la misma que  $H_k(q, p)$  en  $(q, p)$ , es decir, se construye mediante sustitución literal de las coordenadas viejas por las nuevas. En la ecuación de orden  $k$ ,  $W_k^*$  sólo aparece en el término de la forma  $\{H_0, W_k^*\}$ , y  $H_k^*$  sólo aparece en el miembro izquierdo de la ecuación. El resto de términos son funciones calculadas en los  $k - 1$  pasos anteriores. Se puede escribir entonces, de forma resumida

$$H_k^* = \Psi_k + \{H_0, W_k^*\} \quad (2.136)$$

donde  $\Psi_k(q^*, p^*)$  es una función conocida. La ecuación (2.136) es una ecuación diferencial en derivadas parciales para la función incógnita  $W_k^*$ . En el caso en que el hamiltoniano depende sólo de algunos momentos canónicos<sup>19</sup>,  $H_0 =$

<sup>18</sup>Nótese que el resultado (2.130) se puede escribir de forma compacta como  $z = E_{W^*}z^*$  donde  $z = (q, p)$ ,  $z^* = (q^*, p^*)$  y  $W^* = W(z^*)$ . Para cualquier función  $f$  se tiene entonces  $f(z) = f(E_{W^*}z^*) = E_{W^*}f(z^*)$ , resultado que se conoce como teorema de conmutación.

<sup>19</sup>Esta condición para hallar soluciones al método hace que, en general, se formule sólo para variables acción-ángulo, como ocurre en nuestro problema en el caso del hamiltoniano libre y simétrico,  $H_0 = T_0$  dado por (2.56).

$H_0(p_j)$  esta ecuación se simplifica por  $\partial H_0/\partial q_i^* = 0$ , y entonces

$$\Psi_k - H_k^* = \sum_j \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*} \frac{\partial W_k}{\partial q_j^*}. \quad (2.137)$$

Aun así, en la ecuación (2.137) sigue habiendo dos funciones desconocidas, lo que nos obliga a seleccionar una de ellas bajo ciertos criterios que sean consistentes con el problema a resolver. En las teorías canónicas de perturbaciones (von Zeipel-Brouwer), en esta situación, se buscan soluciones aproximadas mediante el *método de los promedios*, bajo la hipótesis *a priori* de que la evolución del sistema diferirá respecto del “sistema promediado” dentro del orden de aproximación requerido. Por ejemplo, si se trabaja con variables acción-ángulo, una posibilidad es promediar el hamiltoniano de la perturbación en los ángulos cuyas frecuencias,  $\nu_j^* = \partial H_0/\partial p_j^*$ , sean no nulas. Pero ésta no es necesariamente la única opción, ya que el método no tiene un enunciado preciso<sup>20</sup>, sino diversas posibilidades consistentes con una misma idea física.

Vamos a ilustrar un caso particular buscando la aplicación en nuestro problema, con las ecuaciones del método a primer orden de perturbaciones, para  $H_0 = H_0(p_j)$

$$\begin{aligned} H_0^* &= H_0 \\ H_1^* &= H_1 + \{H_0, W_1^*\} \\ H_1 - H_1^* &= \sum_j \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial q_j^*}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Supongamos además que el hamiltoniano es de un tipo similar a nuestro problema de rotación, de forma que la perturbación de primer orden,  $H_1$ , dependerá de los momentos canónicos y, quizás, también de algunas variables angulares, en contribuciones aditivas separadas. Siguiendo el método de los promedios seleccionamos  $H_1^* = \langle H_1 \rangle$ , y elegimos como promedio  $\langle H_1 \rangle = H_{1\text{sec}}$  la parte secular del hamiltoniano, esto es, la parte sin dependencia con las variables angulares (esta definición no estricta de la parte secular del hamiltoniano se sigue únicamente a efectos ilustrativos, volveremos a ella más adelante). La ecuación diferencial (2.138) resulta entonces

$$H_1 - \langle H_1 \rangle = \sum_j \frac{\partial H_0}{\partial p_j^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial q_j^*} = \sum_j \frac{dq_j^*}{dt} \frac{\partial W_1^*}{\partial q_j^*} = \left( \frac{dW_1^*}{dt} \right)_{UP}, \quad (2.139)$$

<sup>20</sup>En este aspecto es ilustrativo el comentario de Arnold (1978) sobre el método de los promedios (*averaging principle*): "*this principle is neither a theorem, an axiom, nor a definition; it is [...] a vaguely formulated and, rigorously speaking, wrong proposition*".

ya que  $H_1 - \langle H_1 \rangle$  sólo puede depender de las coordenadas canónicas, y dado que hemos usado las ecuaciones de Hamilton, el subíndice “UP” (*unperturbed*) indica que la derivada está calculada sobre soluciones o trayectorias del sistema hamiltoniano dado por  $H_0$ , es decir, del caso no perturbado. A las ecuaciones de hamilton para  $H_0$  se les denomina, en este ámbito, *sistema auxiliar* de Hori. La ecuación (2.139) permite la integración para obtener la función generatriz de primer orden de perturbación

$$W_1^* = \int_{UP} (H_1 - \langle H_1 \rangle) dt = \int_{UP} H_{1per} dt, \quad (2.140)$$

donde  $H_{1per}$  simboliza la parte periódica del hamiltoniano, definida a partir de  $H_1 = H_{1sec} + H_{1per}$ . En esta expresión se realiza una integral de camino sobre las trayectorias solución del sistema no perturbado (funciones dependientes del tiempo y de constantes de integración, se vuelve a este detalle más adelante). A partir de ahí, y en virtud del desarrollo (2.131) se obtienen aproximaciones analíticas para las funciones que dependan de las variables canónicas. Así por ejemplo, a primer orden se tiene

$$f(p, q) = f(p^*, q^*) + \{f(p^*, q^*), W_1^*\} = f(p^*, q^*) + \Delta f(p^*, q^*). \quad (2.141)$$

En esta aproximación de primer orden, los efectos seculares de la evolución de  $f$  se encuentran contenidos en  $f(p^*, q^*)$ , mientras que los efectos periódicos provienen de  $\Delta f(p^*, q^*)$ , tal como apunta Kinoshita (1977).

Sin embargo, esta definición de parte secular, no es válida para nuestro problema de rotación de la Tierra, ya que no tiene por qué verificarse que la dependencia con los momentos y variables angulares sea disjunta en  $H_{1sec} + H_{1per}$ . Pero en concreto, y como veremos, será válida si permitimos que en la parte secular del hamiltoniano se incluyan las variables de largo periodo, o dicho de otra forma, si promediamos sólo con respecto a las variables de movimiento rápido (comparado con alguna característica propia del sistema dinámico, en nuestro caso, por ejemplo, los periodos de nutación). Esto es una manifestación de un resultado más amplio. Puede demostrarse (Ferraz-Mello 2007, mediante la teoría de Cauchy-Darboux de curvas *características*) que en el método general de Hori la ecuación (2.136) conduce a un resultado general, formalmente similar a (2.139)

$$\frac{dW_k^*}{du} = \Psi_k - H_k^*, \quad (2.142)$$

que se resuelve conjuntamente con el sistema auxiliar de Hori,

$$\frac{dq_i^*}{du} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i^*}, \quad \frac{dp_i^*}{du} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i^*}. \quad (2.143)$$

El sistema cuyo hamiltoniano es  $H_0$  se denomina *núcleo* (o *kernel*) de Hori. En este sistema de ecuaciones,  $u$  es un parámetro de las curvas solución, denominadas características,  $q_i^*(u)$ ,  $p_i^*(u)$ , que ocupa el lugar del parámetro tiempo en las ecuaciones de los sistemas mecánicos. Es importante reseñar que las ecuaciones (2.143) son las mismas para todo  $k$ , esto es, para todo orden de perturbación. Esto es una de las ventajas analíticas del método de Hori, ya que se mantienen las ecuaciones del caso no perturbado en la aproximación dada por el método en todos los órdenes. La solución de (2.142) para todo  $k$  requiere, no obstante, la integrabilidad de (2.143), esto es, la obtención de las trayectorias del sistema no perturbado, que simbólicamente representamos como:

$$\begin{aligned} q_i^* &= q_i^*(u + C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ p_i^* &= p_i^*(u + C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \quad (i = 1 \dots n) \end{aligned} \quad (2.144)$$

donde  $2n$  es la dimensión del espacio de fases y  $C_j$  son constantes de integración.

El método de los promedios conlleva la selección de  $H_k^* = \langle \Psi_k \rangle$ , donde se puede realizar un promedio general para funciones quasi-periódicas (teorema de Bohr)

$$H_k^* = \langle \Psi_k \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Psi_k du, \quad (2.145)$$

que finalmente permite la construcción de la función generatriz por integración de (2.142). Podemos, por lo tanto, dar un carácter general a los resultados (2.140) y (2.141).

Nótese además que, lejos de ser una elección libre, las particularidades de nuestro problema nos obligan, ante una ecuación diferencial del tipo (2.138), a incluir las variables de largo periodo en la parte secular del hamiltoniano. Supongamos, en una situación similar a la integración de primer orden de nuestro problema de rotación, que

$$H_1^*(\lambda^*, p^*) = H_{1\text{sec}} = H_{1\text{s}}(p^*) + H_{1\text{lp}}(\lambda^*, p^*), \quad (2.146)$$

aquí  $\lambda^*$  representa las variables angulares de largo periodo, “s” hace referencia a la parte secular pura, y “lp” a los términos de largo periodo. La ecuación (2.138) toma entonces la forma

$$\sum_j \nu_j^* \frac{\partial W_1^*}{\partial q_j^*} = H_{1\text{cp}}(q^*, p^*), \quad (2.147)$$

donde “cp” representa la contribución aditiva de  $H_1$  de los términos de corto periodo, y  $\nu_j^*$  las frecuencias de las variables de corto periodo (se puede

suponer, como simplificación, que se trata de variables acción-ángulo o próximas a ellas). En general, y como se verá en la próxima sección, la integración de (2.147) para la obtención de  $W_1^*$  incluirá denominadores del tipo  $\sum_k h_k \nu_j^*$  (con  $h_k$  enteros). Sin embargo, de haber excluido  $\lambda^*$  de la parte secular, y por lo tanto estar presente en  $H_{1cp}$ , provocaría la aparición de pequeños divisores (frecuencias próximas a cero), o *resonancias*, que invalidarían la convergencia del método.

Para determinada  $W_k^*$  a partir de (2.142), se emplean las soluciones (2.144) para escribir  $\Psi_k$  en función del tiempo ( $u$ ), esto es, se realiza la integral de camino sobre el sistema núcleo, como ya adelantábamos en (2.140). Después se requiere invertir el sistema de soluciones (2.144) para recuperar  $H_k^*$  y  $W_k^*$  como funciones de  $q_i^*$  y  $p_i^*$ :

$$\begin{aligned} u + C_1 &= g_1(q_j^*, p_j^*), \\ C_i &= g_i(q_j^*, p_j^*), \quad (i = 2 \dots n, j = 1 \dots n). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Esto último es un paso que puede ser problemático y no garantizado en general<sup>21</sup>. No obstante está implícitamente incluido en la construcción de las funciones generatrices y hamiltonianos transformados, aunque la notación habitual pueda ser confusa a este respecto. Volveremos sobre algunos de los detalles del método en su aplicación específica al problema que nos atañe.

Por último relacionamos las ecuaciones de método para los primeros dos órdenes de perturbación (Hori 1966, 1973 o más recientemente Getino et al. 2010):

$$\begin{aligned} H_0^* &= H_0, \quad H_1^* = H_{1sec}, \\ H_2^* &= H_{2sec} + \frac{1}{2} \{H_1 + H_{1sec}, W_1^*\}_{sec}, \quad \text{donde } H_{k(\dots)} = H_{k(\dots)}(q^*, p^*) \\ W_1^* &= \int_{UP} H_{1per} dt, \\ W_2^* &= \int_{UP} H_{2per} dt + \frac{1}{2} \{H_1 + H_{1sec}, W_1^*\}_{per}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Para la evolución temporal de las funciones dependientes de las variables canónicas:

$$\begin{aligned} f(p, q) &= f(p^*, q^*) + \Delta f(p^*, q^*), \\ \Delta f &= \{f^*, W_1^*\} + \{f^*, W_2^*\} + \frac{1}{2} \{\{f^*, W_1^*\}, W_1^*\}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

<sup>21</sup>Es remarcable a este respecto que Hori (1973) indica que la inversión puede realizarse “*in principle, at least*”. Ferraz-Mello (2007) en este punto recomienda el uso de variables acción-ángulo o próximas a ellas.

donde  $f^* = f(p^*, q^*)$ . En el caso particular de las variables canónicas, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q - q^* = \frac{\partial W_1^*}{\partial p^*} + \frac{\partial W_2^*}{\partial p^*} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1^*}{\partial p^*}, W_1^* \right\}, \\ \Delta p &= p - p^* = -\frac{\partial W_1^*}{\partial q^*} - \frac{\partial W_2^*}{\partial q^*} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial W_1^*}{\partial q^*}, W_1^* \right\}.\end{aligned}\quad (2.151)$$

En el ámbito de aplicación de esta investigación, se emplearán las expresiones correspondientes al primer orden de perturbación.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 3

## Tierra rígida

### 3.1. Integración de primer orden

En el estudio de la rotación de la Tierra rígida, se entiende por problema de primer orden (Kinoshita 1977) aquél definido por una perturbación, sobre el caso libre simétrico, dada por el primer término del desarrollo del potencial gravitatorio (2.101) y el término de no inercialidad. Es decir, el hamiltoniano se descompone en

$$H = H_0 + H_1 \text{ con } H_0 = T_0, H_1 = V_1 + E, \quad (3.1)$$

donde  $T_0$  viene dado por (2.56),  $E$  por (2.76) y  $V_1$  definido por

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r^3} \frac{2C - A - B}{2} C_{20}(\eta, \alpha). \quad (3.2)$$

La justificación de que  $H_1$  puede ser considerado como un hamiltoniano de perturbación viene dada por la evaluación de los órdenes de magnitud relativos, que puede consultarse en la literatura de referencia (Kinoshita 1977, Getino y Ferrándiz 1995):

$$\begin{aligned} \frac{V_{1,L}}{T_0} &\simeq 6 \times 10^{-8}, \quad \frac{V_{1,S}}{T_0} \simeq 3 \times 10^{-8}, \\ \frac{V_L - V_{1,L}}{V_{1,L}} &\simeq 4 \times 10^{-5}, \quad \frac{V_S - V_{1,S}}{V_{1,S}} \simeq 10^{-7}, \quad \frac{E}{T_0} \simeq 10^{-7}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $T_0$  se define en (2.56), y cuya relación en magnitud con  $T_1$  ya se estudió previamente (2.59). Los subíndices  $L$  y  $S$ , denotan los términos del potencial correspondientes a los astros perturbadores, Luna y Sol, respectivamente.

La integración de la situación no perturbada definida por  $H_0$ , es decir, la rotación de un sólido rígido libre y simétrico, se abordó en la sección 2.4. Con esta descomposición del hamiltoniano, todos los momentos canónicos en el caso no perturbado son constantes del movimiento. Tal y como se reseña en Getino et al. (2010), esta elección de  $H_0$  y  $H_1$  supone una diferencia de procedimiento respecto a la integración original de Kinoshita (1977), que introduce el término  $E$  en la expresión de  $H_0^*$  para la construcción de la función generatriz del método de Hori (ecuación 4.8 de la referencia).

Debe tenerse en cuenta además la expresión (2.125) para escribir  $V_1$  en términos del conjunto canónico de Andoyer. Éste a su vez, y de ahí la presencia del término de no inercialidad  $E(\Lambda, M, \lambda)$ , está referido al sistema no inercial denominado eclíptica de la fecha. Tal como se expuso en la sección 2.7, es en éste donde se dispone de funciones conocidas del tiempo para la posición de los cuerpos perturbadores, a través de las combinaciones lineales  $\Theta_i(t)$  dadas por (2.113) que participan en la expresión final de  $V_1$ . Por lo tanto el hamiltoniano de la perturbación resulta:

$$\begin{aligned}
H_1 = & G(C - A) \sum_{p=L,S} \frac{m_p}{a_p^3} \left[ \frac{3}{2} (3 \cos^2 \sigma - 1) \sum_i B_{i;p}(I) \cos \Theta_i - \right. \\
& - \frac{3}{2} \sin 2\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} C_{i;p}(I, \tau) \cos(\mu - \tau\Theta_i) + \\
& \left. + \frac{3}{4} \sin^2 \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} D_{i;p}(I, \tau) \cos(2\mu - \tau\Theta_i) \right] + E(\Lambda, M, \lambda).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La integración del problema se aborda con el método de perturbaciones de Hori, expuesto en la sección 2.8. Las ecuaciones de Hamilton, resueltas en la sección 2.4 para la integración del caso libre, constituyen el denominado sistema auxiliar de Hori. Las ecuaciones del método (2.149) conducen a

$$\begin{aligned}
H_0^* &= H_0(M^*, N^*) = \frac{1}{2} \frac{M^{*2}}{A} + \frac{1}{2} N^{*2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \\
H_1^* &= H_{1\text{sec}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Recuérdese que  $H_{1\text{sec}} = H_{1\text{sec}}(p^*, q^*)$ . La solución del sistema auxiliar de Hori, en virtud de (2.58) y (2.61), resulta

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \lambda_0^*, \quad \mu^* = n_\mu^* t + \mu_0^*, \quad \nu^* = n_\nu^* t + \nu_0^*, \\
\Lambda^* &= \Lambda_0^*, \quad M^* = M_0^*, \quad N^* = N_0^*,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde se han definido los movimientos medios análogamente a (2.62) y el subíndice 0 denota las constantes de integración. En virtud de su definición (2.13), los ángulos auxiliares también resultan constantes

$$\sigma^* = \sigma_0^*, I^* = I_0^*. \quad (3.7)$$

La selección de la parte secular del hamiltoniano,  $H_{1\text{sec}}$ , siguiendo la construcción dada por (2.146), debe incluir la parte secular pura, esto es, sin dependencia con las variables angulares, así como los términos dependientes exclusivamente de variables de largo periodo, en nuestro problema de la variable canónica  $\lambda$ .

Por lo tanto  $H_{1\text{sec}} = E(\Lambda, M, \lambda) + V_{1\text{sec}}$ , donde  $V_{1\text{sec}}$  denota la parte secular del potencial perturbador. Examinando (3.4), los únicos términos con contribución secular son aquellos con argumento  $\Theta_i = 0$ , y siempre que  $\Theta_i$  sea el único argumento de las fórmulas trigonométricas. Tal y como se indica en Kinoshita (1977), el valor  $\Theta_i = 0$  se obtiene para la quintupla de enteros nulos,  $i = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$ , por lo tanto

$$H_1^* = H_{1\text{sec}} = \sum_{p=L,S} k'_p \frac{1}{2} (3 \cos^2 \sigma^* - 1) B_{0;p}(I^*) + E(\Lambda^*, M^*, \lambda^*), \quad (3.8)$$

donde por comodidad de notación se ha definido el parámetro

$$k'_p = \frac{3Gm_p(C - A)}{a_p^3} \quad (3.9)$$

que caracteriza la intensidad gravitatoria debida al cuerpo externo  $p$ . Para la construcción de la función generatriz del método, se precisa de la parte periodica del hamiltoniano, esto es

$$\begin{aligned} H_{1\text{per}} &= H_1 - H_{1\text{sec}} = \\ &= \sum_{p=L,S} k'_p \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \sigma^* - 1) \sum_{i \neq 0} B_{i;p}(I^*) \cos \Theta_i^* - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2\sigma^* \sum_{i,\tau=\pm 1} C_{i;p}(I^*, \tau) \cos(\mu^* - \tau\Theta_i^*) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sin^2 \sigma^* \sum_{i,\tau=\pm 1} D_{i;p}(I^*, \tau) \cos(2\mu^* - \tau\Theta_i^*) \right]. \quad (3.10) \end{aligned}$$

La función generatriz para la obtención del movimiento del sistema,  $W_1^*$ , se construye a partir de (2.149)

$$W_1^* = \int_{UP} H_{1\text{per}} dt. \quad (3.11)$$

El cálculo de la integral resulta inmediato teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. Como se indicó, es una integral de camino que se realiza sobre las soluciones o trayectorias del sistema núcleo de Hori, dadas por (3.6), donde tanto los momentos como los movimientos medios de las variables son constantes. Aceptando la simplificación numéricamente admisible indicada por Kinoshita (1977)<sup>1</sup>, supondremos que el efecto de la dependencia temporal de los coeficientes  $A_i^{(j)}$  dada por (2.115) es despreciable, considerando que éstos son constantes en la integración. Igualmente, en virtud de la asunción de (2.114), dentro del nivel de aproximación, se tendrá que  $d\Theta_i^*/dt = n_i^*$ , con  $n_i$  constante. Por último, recuperando la dependencia de  $\Theta_i^*$  con la variable  $\lambda^*$  dada por (2.113), se tiene que  $d\Theta_i^*/d\lambda^* = -m_{5i}$ . La función generatriz resulta entonces:

$$\begin{aligned}
W_1^* = & \sum_{p=L,S} k'_p \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \sigma^* - 1) \sum_{i \neq 0} \frac{B_{i;p}(I^*)}{n_i} \operatorname{sen} \Theta_i^* - \right. \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\sigma^* \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i} \operatorname{sen} (\mu^* - \tau \Theta_i^*) + \\
& \left. + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \sigma^* \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{D_{i;p}(I^*, \tau)}{2n_\mu^* - \tau n_i} \operatorname{sen} (2\mu^* - \tau \Theta_i^*) \right]. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Nótese que tras la integración sobre el camino no perturbado, se ha realizado la sustitución de las constantes de integración por las variables transformadas mediante la inversión del sistema (3.6), tal como se indicó en (2.148). La inversión resulta trivial en este caso,

$$\lambda_0^* = \lambda^*, \mu_0^* = \mu^* - n_\mu^* t, \nu_0^* = \nu^* - n_\nu^* t,$$

$$\Lambda_0^* = \Lambda^*, M_0^* = M^*, N_0^* = N^*, \quad (3.13)$$

<sup>1</sup>En los valores tabulados para las  $A_i^{(j)}$  (por ejemplo en Kinoshita 1977) se tiene que  $|A_{i,1}^{(j)}| \ll |A_{i,0}^{(j)}|$ , al menos dos órdenes de magnitud inferiores. La consideración de la dependencia temporal de las funciones  $B_{i;p}$ ,  $B_{i;p}$  y  $C_{i;p}$  da lugar a los *términos fuera de fase*, de poca magnitud por el valor de las  $A_{i,1}^{(j)}$  y por aparecer divididos por el cuadrado de las frecuencias. No obstante, algunos de ellos se consideran en los estándares actuales (Escapa et al. 2013).

y a modo de ejemplo, se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 \int_{UP} \cos(\mu^* - \tau\Theta_i^*) dt &= \int \cos(n_\mu^* t + \mu_0^* - \tau\Theta_i^*) dt = \\
 &= \frac{1}{n_\mu^* - \tau n_i} \text{sen}(n_\mu^* t + \mu_0^* - \tau\Theta_i^*) = \\
 &= \frac{1}{n_\mu^* - \tau n_i} \text{sen}(\mu^* - \tau\Theta_i^*). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

La solución para el sistema perturbado, esto es, su movimiento descrito a través de la variación de las variables canónicas respecto al caso no perturbado, viene dado por las ecuaciones (2.151) del método de perturbaciones, que a primer orden resulta

$$q = q^* + \Delta q = q^* + \frac{\partial W_1^*}{\partial p^*} = q^* + \{q^*, W_1^*\}, \quad (3.15)$$

o equivalentemente,  $\Delta q = \{q^*, W_1^*\}$ .

Nótese que esta aplicación del método de perturbaciones de Hori, en el ámbito de la rotación de la Tierra, permite sólo el estudio del movimiento de corto periodo, esto es, el movimiento de *nutación*. Ello es debido a la dependencia con los argumentos de corto periodo,  $\Theta_i^*$ , en todos los términos de la función generatriz, que vía (3.15) pasan a formar parte de  $\Delta q$ . En cambio, la evolución de las coordenadas  $q^*$  viene determinada por el hamiltoniano secular  $H_0^* + H_1^*$ , esto es, el hamiltoniano transformado por la transformación canónica generada por  $W_1^*$ , que define el primer orden de perturbación. Constituye, por tanto, la parte secular o de largo periodo del movimiento del sistema. Ésta resulta, en virtud de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dq^*}{dt} = \{q^*, H_0^* + H_1^*\} = \{q^*, H_0^*\} + \{q^*, H_{1\text{sec}}\}. \quad (3.16)$$

El movimiento de *precesión* de la Tierra, necesario para el estudio de la evolución temporal del sistema, viene definido entonces por (3.16)<sup>2</sup>, y se aborda en la sección 3.3. Tampoco éste sistema resulta integrable (aunque queda reducido a un grado de libertad) y conduce a los conocidos desarrollos en serie para el estudio de la precesión de la Tierra.

En (3.15) se requiere, por tanto, derivar  $W_1^*$  respecto de los momentos. Antes de proceder al cálculo de las derivadas, conviene hacer un rápido repaso de la dependencia funcional de la función generatriz. La dependencia con los momentos canónicos,  $\Lambda^*$ ,  $M^*$  y  $N^*$ , está a través de los ángulos auxiliares  $\sigma^*$

<sup>2</sup>En particular, como se estudiará, de  $d\lambda^*/dt$  y  $dI^*/dt$ .

e  $I^*$ , en virtud de (2.13), y en el caso de  $M^*$  también a través del movimiento medio<sup>3</sup>  $n_\mu^* = M^*/A$ , según (2.56). En particular  $\sigma^*$  aparece explícitamente, e  $I^*$  lo hace como argumento de las funciones  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$ . No hay dependencia con la variable canónica  $\nu^*$ , con  $\lambda^*$  a través de las funciones  $\Theta_i^*$ , y  $\mu^*$  aparece en los argumentos de las funciones trigonométricas. Conviene por ello expresar el operador derivada parcial respecto de los momentos en términos de las derivadas parciales respecto de las variables auxiliares, mediante la regla de la cadena. Las derivadas parciales de las variables auxiliares respecto de los momentos se obtienen por derivación directa de (2.13)<sup>4</sup>. Los operadores resultan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial M} &= \left( \frac{\partial}{\partial M} \right) + \frac{\cot \sigma}{M} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\cot I}{M} \frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial n_\mu}, \\ \frac{\partial}{\partial N} &= \left( \frac{\partial}{\partial N} \right) - \frac{1}{M \sin \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial \Lambda} &= \left( \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) - \frac{1}{M \sin I} \frac{\partial}{\partial I},\end{aligned}\tag{3.17}$$

donde  $(\partial/\partial p)$  denota la derivada parcial de los términos que contienen una dependencia funcional explícita con el momento canónico  $p$ .

A partir de las ecuaciones de perturbación (3.15), estudiamos el movimiento del sistema perturbado, esto es, el cálculo de las funciones  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\mu$ ,  $\Delta\nu$  y adicionalmente las auxiliares  $\Delta I$  y  $\Delta\sigma$ . Con éstas se determina el movimiento de nutación de los planos fundamentales que describen la rotación de la Tierra a través de la geometría definida por los conjuntos canónicos seleccionados. Las ecuaciones de perturbación resultan entonces:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{\partial W_1^*}{\partial \Lambda^*} = -\frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial I^*}, \\ \Delta\mu &= \frac{\partial W_1^*}{\partial M^*} = \frac{1}{M^*} \left( \cot \sigma^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} + \cot I^* \frac{\partial W_1^*}{\partial I^*} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial W_1^*}{\partial n_\mu^*}, \\ \Delta\nu &= \frac{\partial W_1^*}{\partial N^*} = -\frac{1}{M^* \sin \sigma^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Dado que  $\sigma^*$  e  $I^*$  son funciones del conjunto canónico, su evolución viene

<sup>3</sup>En la aplicación del método de perturbaciones, en Kinoshita (1977) se ignora esta dependencia funcional con  $M$ . Un análisis independiente de esta contribución puede consultarse en Escapa (1997), dónde se comprueba que conduce términos del orden de  $\sigma^2$ , que no afectan al resultado del cálculo de las nutaciones a orden  $\sigma^0$ . No obstante bajo esta aproximación pueden incluirse en el cálculo, junto al resto de términos, sin ninguna consideración particular.

<sup>4</sup> $\frac{\partial I}{\partial M} = \frac{\cot I}{M}$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial M} = \frac{\cot \sigma}{M}$ .

determinada análogamente por (2.150)<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}\Delta I &= \{I^*, W_1^*\} = -\frac{\partial I^*}{\partial \Lambda^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*} - \frac{\partial I^*}{\partial M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} = \\ &= \frac{1}{M^*} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} I^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*} - \cot I^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} \right), \\ \Delta \sigma &= \{\sigma^*, W_1^*\} = -\frac{\partial \sigma^*}{\partial M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} = -\frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

### 3.2. Movimiento de nutación

Estudiamos la solución a primer orden del movimiento de rotación de la Tierra rígida a partir de la descripción de las nutaciones de los planos fundamentales de referencia: de Andoyer y de figura (o ecuatorial).

El *plano de Andoyer* está introducido por la geometría del conjunto canónico de Andoyer, tal como se estudió en su construcción. Su movimiento, por tanto, se rige por las nutaciones de los ángulos  $\lambda$  e  $I$ , esto es, por los términos  $\Delta I$  (nutación en oblicuidad) y  $\Delta \lambda$  (nutación en longitud) denominados de *Poisson*<sup>6</sup>. Estos términos periódicos determinan, entonces, el movimiento de nutación del eje del momento angular total de la Tierra. Siguiendo el desarrollo analítico de Kinoshita (1977), el cálculo de (3.18) se simplifica considerablemente aprovechando que  $\sigma^* \simeq 10^{-6}$  rad y estableciendo el orden 0 de  $\sigma$  como numéricamente aceptable para las expresiones del movimiento de nutación.

Bajo esta aproximación  $(3 \cos^2 \sigma^* - 1)/2 \simeq 1$  y sólo se considera el primer término de (3.12)<sup>7</sup>, por tanto

$$\Delta \lambda = -\frac{1}{M^* \operatorname{sen} I^*} \sum_{p=L,S} k'_p \sum_{i \neq 0} \frac{1}{n_i^*} \frac{\partial B_i(I^*)}{\partial I^*} \operatorname{sen} \Theta_i^* + O(\sigma^*).\quad (3.20)$$

Considerando la expresión (2.120) de  $B_i(I^*)$ , y definiendo (Kinoshita 1977)

$$E_i(I^*) = \frac{1}{\operatorname{sen} I^*} \frac{\partial B_i(I^*)}{\partial I^*} = \left( A_i^{(0)} - \frac{1}{2} A_i^{(2)} \right) \cos I^* - \frac{\cos 2I^*}{\operatorname{sen} I^*} A_i^{(1)},\quad (3.21)$$

<sup>5</sup>De forma matemáticamente equivalente se puede proceder a la diferenciación de sus expresiones definitorias (2.13), y la sustitución de las diferenciales por las funciones  $\Delta p$  y  $\Delta q$  dadas por las ecuaciones (2.151) del método de perturbaciones.

<sup>6</sup>Son los términos que se obtienen por aplicación de las ecuaciones de perturbación de Poisson (Kinoshita 1977).

<sup>7</sup>En aras de la simplicidad, procedemos aquí igual que en Kinoshita (1977). Sin embargo un planteamiento riguroso exige realizar primero las derivadas y después la aproximación numérica de los términos.

finalmente resulta

$$\Delta \lambda = -\frac{1}{M^*} \sum_{p=L,S} k'_p \sum_{i \neq 0} \frac{E_i(I^*)}{n_i^*} \operatorname{sen} \Theta_i^* + O(\sigma^*). \quad (3.22)$$

En el caso de la oblicuidad, la aproximación numérica previa anula los términos con dependencia en  $\mu$ , esto es  $\partial W_1 / \partial \mu = 0$ . Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{1}{M^* \operatorname{sen} I^*} \sum_{p=L,S} k'_p \sum_{i \neq 0} \frac{B_i(I^*)}{n_i^*} \cos \Theta_i^* \frac{\partial \Theta_i^*}{\partial \lambda^*} + O(\sigma^*) = \\ &= -\frac{1}{M^* \operatorname{sen} I^*} \sum_{p=L,S} k'_p \sum_{i \neq 0} m_{i5} \frac{B_i(I^*)}{n_i^*} \cos \Theta_i^* + O(\sigma^*). \end{aligned} \quad (3.23)$$

El movimiento del *plano de figura*, o plano ecuatorial, se describe a través de las nutaciones de los ángulos de Euler  $\phi$  (longitud) y  $\theta$  (oblicuidad). Éstos se relacionan con los ángulos de Andoyer a través de las expresiones (2.54). Se acostumbra a dividir el movimiento de estos ángulos (Kinoshita 1977) en dos partes, en virtud de

$$\begin{aligned} \phi &= \lambda + (\phi - \lambda) = \lambda + \sigma \frac{\operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen} I} + O(\sigma^2), \\ \theta &= I + (\theta - I) = I + \sigma \cos \mu + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Así el movimiento del plano de figura se describe a través del movimiento del plano de Andoyer, más términos adicionales dependientes de  $\sigma$  (que representa el movimiento del plano ecuatorial respecto del de Andoyer. Las nutaciones  $\Delta(\phi - \lambda)$  y  $\Delta(\theta - I)$  se denominan términos de *Oppolzer*. Estos términos periódicos determinan la desviación del movimiento periódico del eje de figura respecto al eje del momento angular de la Tierra. Teniendo en cuenta (2.150), a primer orden de perturbación se tendrá

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \{\phi - \lambda, W_1^*\} = \left\{ \sigma^* \frac{\operatorname{sen} \mu^*}{\operatorname{sen} I^*}, W_1^* \right\} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mu^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial M^*} - \frac{\partial f}{\partial M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde se ha definido con carácter auxiliar la función  $f = \sigma^* \operatorname{sen} \mu^* / \operatorname{sen} I^*$ . Igualmente, por simplicidad de notación en el cálculo de las derivadas, definimos las funciones  $W_1^{*(0)}$ ,  $W_1^{*(1)}$  y  $W_1^{*(2)}$  a partir de (3.12) de forma que

$$W_1^* = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \sigma^* - 1) W_1^{*(0)} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\sigma^* W_1^{*(1)} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \sigma^* W_1^{*(2)}. \quad (3.26)$$

Empleando (3.18):

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \sigma^* \frac{\cos \mu^*}{\text{sen } I^*} \left[ \frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial \sigma^*} + \frac{\cot I^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial I^*} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial n_\mu^*} \right] W_1^* - \\ &\quad - \left[ \frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial \sigma^*} + \frac{\cot I^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial I^*} \right] \left( \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} \right) \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} + \\ &\quad + \frac{1}{M^* \text{sen } I^*} \frac{\partial}{\partial I^*} \left( \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} \right) \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

El cálculo se efectúa análogamente estableciendo el orden 0 de  $\sigma$  como numéricamente aceptable. Con este nivel de aproximación se consideran despreciables todos los términos que, tras la derivación, sean proporcionales a  $\sigma$  o  $\text{sen } \sigma$ . Así, las únicas contribuciones resultantes provienen de

$$\begin{aligned} \sigma^* \frac{\cos \mu^*}{\text{sen } I^*} \frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} &= -\frac{1}{M^* \text{sen } I^*} W_1^{*(1)} + O(\sigma^*), \\ -\frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial \sigma^*} \left( \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} \right) \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} &= \frac{1}{M^* \text{sen } I^*} \frac{\partial W_1^{*(1)}}{\partial \mu^*} + O(\sigma^*). \end{aligned} \quad (3.28)$$

La suma de estos términos, explicitando la forma de  $W_1^{(1)}$  resulta

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \sum_{p=L,S} \frac{k'_p}{M^* \text{sen } I^*} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i^*} \times \\ &\quad \times [\text{sen } \mu^* \cos(\mu^* - \tau \Theta_i^*) - \cos \mu^* \text{sen}(\mu^* - \tau \Theta_i^*)] + O(\sigma^*) \\ &= \sum_{p=L,S} \frac{k'_p}{M^* \text{sen } I^*} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{\tau C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i^*} \text{sen } \Theta_i^* + O(\sigma^*), \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde en el último paso se ha empleado  $\text{sen}(\tau \Theta_i) = \tau \text{sen}(\Theta_i)$ .

Para el cálculo de la función  $\Delta(\theta - I)$  se procede de forma completamente análoga

$$\begin{aligned} \Delta(\theta - I) &= \{\theta - I, W_1^*\} = \{\sigma^* \cos \mu^*, W_1^*\} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial \mu^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial M^*} - \frac{\partial g}{\partial M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} - \frac{\partial g}{\partial \Lambda^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*} \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $g = \sigma^* \cos \mu^*$ . Dentro del nivel de aproximación, las contribuciones significativas provienen de los mismos términos que en el caso anterior

$$\begin{aligned} -\sigma^* \text{sen } \mu^* \frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} &= \frac{1}{M^*} \text{sen } \mu^* W_1^{*(1)} + O(\sigma^*), \\ -\frac{\cot \sigma^*}{M^*} \frac{\partial}{\partial \sigma^*} (\sigma^* \cos \mu^*) \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} &= \frac{1}{M^*} \cos \mu^* \frac{\partial W_1^{*(1)}}{\partial \mu^*} + O(\sigma^*). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Finalmente, con similar manipulación se obtiene

$$\Delta(\theta - I) = \sum_{p=L,S} \frac{k'_p}{M^*} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i^*} \cos \Theta_i^* + O(\sigma^*). \quad (3.32)$$

Como puede apreciarse en su construcción, con una aproximación a orden 0 de  $\sigma^*$ , los términos de Poisson vienen de  $W_1^{*(0)}$ , en cambio los de Oppolzer lo hacen de  $W_1^{*(1)}$ .

Realizaremos a continuación el cálculo numérico de las nutaciones en longitud y oblicuidad para el plano de figura, a partir de la suma de los términos de Poisson y Oppolzer, esto es,

$$\Delta \phi = \Delta \lambda + \Delta(\phi - \lambda), \quad \Delta \theta = \Delta I + \Delta(\theta - I). \quad (3.33)$$

El valor de  $M^*$  que aparece en las amplitudes (módulo del momento angular) se puede aproximar como constante, en virtud de (2.43),  $M^* = C\omega_E^8$ . Ello permite introducir en las amplitudes de nutación la constante definida por Kinoshita (1977), a partir de (3.9)

$$k_p = \frac{k'_p}{C\omega_E} = \frac{3Gm_p C - A}{\omega_E a_p^3} \frac{C}{C} = \frac{3Gm_p}{\omega_E a_p^3} H_d, \quad (p = L, S) \quad (3.34)$$

donde además se ha introducido la elipticidad dinámica,  $H_d$ , definida por (2.64). Las expresiones anteriores de las nutaciones, con la inclusión de estas constantes, resultan finalmente

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= - \sum_{p=L,S} \sum_{i \neq 0} k_p \frac{E_i(I^*)}{n_i^*} \operatorname{sen} \Theta_i^*, \\ \Delta I &= - \frac{1}{\operatorname{sen} I^*} \sum_{p=L,S} \sum_{i \neq 0} k_p m_{i5} \frac{B_i(I^*)}{n_i^*} \cos \Theta_i^*, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \frac{1}{\operatorname{sen} I^*} \sum_{p=L,S} \sum_{i,\tau=\pm 1} k_p \frac{\tau C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i^*} \operatorname{sen} \Theta_i^*, \\ \Delta(\theta - I) &= \sum_{p=L,S} \sum_{i,\tau=\pm 1} k_p \frac{C_{i;p}(I^*, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i^*} \cos \Theta_i^*. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Los valores de los diferentes parámetros utilizados para la representación numérica de estas expresiones se incluyen en la tabla 3.1. En el formulario de

<sup>8</sup> $\omega_E$  es el valor medio de la velocidad angular de la Tierra (sección 2.4).

la rotación de la Tierra, los momentos principales de inercia siempre aparecen ligados entre sí a través de la elipticidad dinámica y parámetros similares, y nunca de forma independiente. Por ello  $H_d$  se ajusta observacionalmente, y su valor es más preciso que los valores aislados de los momentos, tales como (2.60). Por ello referiremos a éste el valor de otros parámetros en los que aparezcan los momentos principales de inercia. Tal es el caso de la frecuencia  $n_\mu^*$ , dada por (2.62) que determinamos como

$$n_\mu^* = \frac{M_0^*}{A} = \frac{C}{A} \omega_E + O(\sigma^*) = \frac{\omega_E}{1 - H_d} + O(\sigma^*). \quad (3.37)$$

Las constantes para el Sol,  $A_{i;S}^{(1)}$ , son nulas debido a que el Sol se encuentra en el plano de la eclíptica (por definición)<sup>9</sup>. Las constantes para la Luna,  $A_{i;L}^{(j)}$  pueden ir divididas por un factor constante (véase la nota al pie en la página 44) dependiendo de su origen. En nuestro caso (Kinoshita y Souchay 1990) se relacionan en las tablas 3.3 y 3.4. Las amplitudes de nutación en las expresiones de  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta(\phi - \lambda)$ ,  $\Delta I$  y  $\Delta(\theta - I)$  se evalúan para valores constantes de  $I_0^*$  y  $\lambda_0^*$ , definidos para el sistema de referencia J2000 y tomados de Souchay et al. (2000).

Los argumentos  $\Theta_i(t)$  definidos por (2.113) participan en las amplitudes de nutación a través de su frecuencia  $n_i^* = d\Theta_i^*/dt$ . Los valores empleados se han tomado de Kinoshita y Souchay (1990) y se incluyen en la tabla 3.2. Las amplitudes de nutación calculadas para las quintuplas  $(m_{1i}, m_{2i}, m_{3i}, m_{4i}, m_{5i})$  de las combinaciones lineales de los argumentos se enumeran en la tabla 3.5, y se comparan con las dadas por Kinoshita (1977). Esta comparación es conveniente debido a las ligeras diferencias existentes en el método de perturbaciones empleado y como verificación de los algoritmos numéricos sobre los que se construirán el resto de representaciones numéricas. Los valores tabulados de tiempo están dados en *centurias* (cent) y *años* (a) *julianos* (1 a = 365.25 días). Los periodos calculados en días a partir de las frecuencias dadas en la tabla 3.2, correspondientes a cada argumento  $\Theta_i$ , son entonces  $(2\pi/n_i^*) \times 36525$ . En la tabla 3.5, la unidad de las amplitudes es  $1'' = 1$  arcsec (segundo de arco).

El valor  $\Omega_0$  de la tabla 3.2 se corresponde con el valor medio de  $h$ , esto es, la variable de Delaunay de la Luna según la definición de los argumentos (2.113). Es el valor que se ha tomado en los cálculos en sustitución de la longitud media del nodo ascendente de la Luna,  $\Omega = \Omega_0 - \lambda$ . Ello se debe a que si consideramos los movimientos medios,  $n_\Omega = n_{\Omega_0} - n_\lambda$ , con la elección

<sup>9</sup>Considerando (2.112), dado que el Sol está en la eclíptica se tiene que  $\alpha' = 0$ , y  $S_{21}(\eta', 0) = 0$ . En virtud de  $(a/r)^3 S_{21}(\eta', 0) = 3 \sum_i A_{i;S}^{(1)} \cos \Theta_i$  necesariamente  $A_{i;S}^{(1)} = 0$ .

del hamiltoniano  $H_0^* = T_0$  según (3.5), se tiene  $n_\lambda = 0$  (en el problema libre,  $\lambda$  es constante, y su movimiento medio nulo, no debe confundirse con el  $n_\lambda^*$  asociado al movimiento secular, que se estudiará en la próxima sección). Debe tomarse entonces como valor medio del movimiento de  $\Omega$  el valor  $n_{\Omega_0}$ , de ahí la pequeña diferencia existente entre la parte lineal en  $t$  existente en los valores tabulados de  $\Omega$  y  $\Omega_0$ .

Tabla 3.1: Parámetros numéricos (Souchay et al. 1999)

Parámetro	Valor
$I_{0,J2000}$	-0.4090928041 rad
$\lambda_{0,J2000}$	0 rad
$\omega_E$	230121.67526278 rad cent <sup>-1</sup>
$H_d$	0.0032737548
$k_L$	7546".717329 cent <sup>-1</sup>
$k_S$	3475".413512 cent <sup>-1</sup>

Tabla 3.2: Argumentos numéricos (Kinoshita y Souchay 1990)

Argumento	Valor constante (rad)	Mov. medio (rad/1000 a, $t$ desde J2000)
$l (= l_L)$	2.355555898	83286.914269554 $t$
$l' (= l_S)$	6.24006013	6283.01955 $t$
$F$	1.627905234	84334.66158131 $t$
$D$	5.198466741	77713.771468121 $t$
$\Omega$	2.18243920	-337.57045 $t$
$\Omega_0$	2.18243920	-337.81426 $t$

Tabla 3.3: Constantes de la Luna para los principales argumentos (Kinoshita y Souchay 1990 y Kinoshita 1977)

Argumento			Días			$\times 10^{-7}$ rad			$\times 10^{-8}$ rad cent $^{-1}$		
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Periodo	$A_{0;L}^{(0)}$	$A_{0;L}^{(1)}$	$A_{0;L}^{(2)}$	$A_{1;L}^{(0)}$	$A_{1;L}^{(1)}$	$A_{1;L}^{(2)}$
+0	+0	+0	+0	+0	$+\infty$	4963035.3	0	0	0	0	0
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	0	448720.5	0	0	0	0
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	0	0	40433.0	0	0	0
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	-1559.1	0	0	40.0	0	0
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	0	0	-100.0	0	0	0
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	0	0	7880.7	0	0	0
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	0	0	338.0	0	0	-10.0
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	811948.6	0	0	0	0	0
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	0	0	9880171.3	0	0	0
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	0	-443830.4	0	0	0	0
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	0	0	1891661.7	0	0	0

Tabla 3.4: Constantes del Sol para los principales argumentos (Kinoshita y Souchay 1990 y Kinoshita 1977)

Argumento			Días		$\times 10^{-7}$ rad		$\times 10^{-8}$ rad cent $^{-1}$		
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Periodo	$A_{0;s}^{(0)}$	$A_{0;s}^{(2)}$	$A_{1;s}^{(0)}$	$A_{1;s}^{(2)}$
+0	+0	+0	+0	+0	$+\infty$	5002105.4	0	-	-
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	0	0	0	0
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	0	0	0	0
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	251345.0	0	-6270.0	0
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	0	-83753.0	0	2090.0
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	0	9992978.0	0	350.0
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	0	585926.0	0	-14610.0
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	0	0	0	0
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	0	0	0	0
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	0	0	0	0
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	0	0	0	0

Tabla 3.5: Nutaciones del plano de figura para los principales argumentos (amplitudes y comparación con Kinoshita 1977)

Argumento		Período		Longitud [arcsec]		Oblicuidad [arcsec]		
$l$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	Calculado	K-77	Calculado	K-77
+0	+0	+0	+1	-6793.48	+17.2820294	+17.2641	-9.2275355	-9.2267
+0	+0	+0	+2	-3396.74	-0.2078313	-0.2079	+0.0901083	+0.0902
+0	+1	+0	+0	+365.26	-0.1258356	-0.1275	+0.0000004	+0.0001
+0	-1	+2	+2	+365.25	-0.0213689	-0.0213	+0.0092623	+0.0093
+0	+0	+2	+2	+182.63	+1.2775464	+1.2774	-0.5536132	-0.5537
+0	+1	+2	+2	+121.75	+0.0500651	+0.0501	-0.0216900	-0.0217
+1	+0	+0	+0	+27.55	-0.0677727	-0.0677	+0.0000351	+0.0010
+0	+0	+2	+2	+13.66	+0.2215280	+0.2215	-0.0954229	-0.0950
+0	+0	+2	+1	+13.63	+0.0378427	+0.0378	-0.0197205	-0.0194
+1	+0	+2	+2	+9.13	+0.0295836	+0.0296	-0.0127026	-0.0126

### 3.3. Movimiento de precesión

Como ya se indicó en la sección 3.1, el movimiento de precesión de la Tierra viene determinado por las ecuaciones de Hamilton para las variables y hamiltoniano transformados. En una aplicación a primer orden del método de perturbaciones, la transformación canónica generada por  $W_1^*$  conduce al hamiltoniano  $H_0^* + H_{1\text{sec}}(p^*, q^*)$  siguiendo las ecuaciones del método, con lo que las ecuaciones de movimiento pueden escribirse según (3.16). Por lo tanto, a primer orden de perturbación, los comportamientos seculares (precesión) y periódicos (nutación) forzados del movimiento de rotación están totalmente desacoplados en  $q = q^* + \Delta q$ . No ocurre así con órdenes superiores, como se aprecia directamente en las ecuaciones del método para segundo orden, dadas por (2.151).

Consideremos de entrada la dependencia funcional del nuevo hamiltoniano,  $H_0^* + H_{1\text{sec}} = H_{\text{sec}}^*(\Lambda^*, M^*, \lambda^*)$ . Recuérdense la discusión en la sección 2.8 que condujo a la necesidad de incluir la coordenada canónica  $\lambda^*$  en la parte secular del hamiltoniano, a través del término  $E(\Lambda^*, M^*, \lambda^*)$ . Las ecuaciones de Hamilton conducen entonces a

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^*}{dt} &= \frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial \Lambda^*}, \quad \frac{d\mu^*}{dt} = \frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial M^*}, \quad \nu^* = \nu_0^*, \\ \frac{d\Lambda^*}{dt} &= -\frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial \lambda^*}, \quad M^* = M_0^*, \quad N^* = N_0^*, \end{aligned} \quad (3.38)$$

donde el subíndice 0 denota las constantes de integración. En consecuencia,  $H_0^*$  dado por (3.5) también es constante. La evolución temporal de  $\Lambda^*$  se estudia convencionalmente a través del ángulo auxiliar  $I^*$ , relacionado funcionalmente a través de  $\cos I^* = \Lambda^*/M^*$ , es decir

$$\frac{dI^*}{dt} = \{I^*, H_{\text{sec}}^*\} = \frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial \lambda^*}. \quad (3.39)$$

Entonces, explicitando la derivada en términos de las variables auxiliares según (3.17) se tiene

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = \left( \frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial \Lambda} \right) - \frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial H_{\text{sec}}^*}{\partial I^*}. \quad (3.40)$$

Las derivadas temporales de  $\lambda^*$  e  $I^*$  describen el movimiento secular del plano de figura, y son las que se estudian convencionalmente para describir el movimiento de precesión de la Tierra en longitud ( $\phi$ ) y oblicuidad ( $\theta$ )<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Ello es debido a que en las relaciones (2.54), a primer orden, se tiene que  $\theta_{\text{sec}} = I^*$  y  $\phi_{\text{sec}} = \lambda^*$ .

La ecuación diferencial para la coordenada  $\mu^*$  está desacoplada respecto del sistema formado por (3.39) y (3.40), que no incluye esta variable. La evolución de  $\mu^* + \nu^*$ , relacionada con el ángulo de Euler  $\psi$  a través de (2.54), se estudiará al final de esta sección. Por lo tanto el sistema de ecuaciones formado por (3.39) y (3.40) incluye una única coordenada angular,  $\lambda^*$ . Antes de abordar su resolubilidad, explicitaremos la forma de estas ecuaciones.

Para el cálculo de las derivadas retomamos las expresiones del hamiltoniano, dadas por (3.5) y (3.8), así como la definición de la función  $B_{0;p}(I^*) = B_{0;p}^*$  dada por (2.120). Entonces

$$\frac{\partial B_{0;p}^*}{\partial I^*} = -\cos I^* \sin I^* A_{0;p}^{(0)} - \cos 2I^* A_{0;p}^{(1)} - \frac{1}{2} \sin I^* \cos I^* A_{0;p}^{(2)}, \quad (p = L, S) \quad (3.41)$$

Para particularizar para cada astro perturbador, consideramos que sólo en el caso del Sol (Kinoshita 1977) es apreciable la contribución temporal<sup>11</sup> definida por (2.115), y que por definición (véase nota al pie en la página 67)  $A_{i;S}^{(1)} = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{0;S}^*}{\partial I^*} &= \cos I^* \sin I^* \left( A_{0,0;S}^{(0)} + A_{0,1;St}^{(0)} \right) - \frac{1}{2} \sin I^* \cos I^* A_{0,0;S}^{(2)}, \quad (3.42) \\ \frac{\partial B_{0;L}^*}{\partial I^*} &= \cos I^* \sin I^* A_{0,0;L}^{(0)} - \cos 2I^* A_{0,0;L}^{(1)} - \frac{1}{2} \sin I^* \cos I^* A_{0,0;L}^{(2)}. \end{aligned}$$

La ecuación (3.40), recordando que (3.34)  $k_p = k'_p/M^*$ , y como es habitual  $3 \cos^2 \sigma^* - 1 = 2 + O(\sigma^{*2})$ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^*}{dt} &= -\frac{k_S}{\sin I^*} \cos I^* \sin I^* \left( A_{0,0;S}^{(0)} + A_{0,1;St}^{(0)} - \frac{1}{2} A_{0,0;S}^{(2)} \right) - \\ &\quad - \frac{k_L}{\sin I^*} \cos I^* \sin I^* \left( A_{0,0;L}^{(0)} - \frac{1}{2} A_{0,0;L}^{(2)} \right) + \frac{k_L}{\sin I^*} \cos 2I^* A_{0,0;L}^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial E^*}{\partial I^*}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Empleando una notación similar a la empleada en Kinoshita (1975), definimos las constantes y función siguientes

$$\begin{aligned} P_0 &= k_L \left( A_{0,0;L}^{(0)} - \frac{1}{2} A_{0,0;L}^{(2)} \right) + k_S \left( A_{0,0;S}^{(0)} - \frac{1}{2} A_{0,0;S}^{(2)} \right), \\ P_1 &= k_S A_{0,1;S}^{(0)}, \quad Q_0 = k_L A_{0,0;L}^{(1)}, \\ \tilde{R}(I^*) &= (P_0 + P_1 t) \sin I^* \cos I^* - Q_0 \cos 2I^*. \end{aligned} \quad (3.44)$$

<sup>11</sup>Ésta no fue incluida en el estudio del movimiento de nutación, ya que no se abordó el estudio de los términos seculares mixtos.

Para la derivada del término de no inercialidad consideramos la expresión (2.78), de modo que

$$-\frac{1}{M^* \operatorname{sen} I^*} \frac{\partial E^*}{\partial I^*} = -\cot I^* [e_2(t) \cos \lambda^* + e_3(t) \operatorname{sen} \lambda^*]. \quad (3.45)$$

Finalmente

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = -\frac{\tilde{R}(I^*)}{\operatorname{sen} I^*} - \cot I^* [e_2(t) \cos \lambda^* + e_3(t) \operatorname{sen} \lambda^*] + e_1(t). \quad (3.46)$$

La función  $\tilde{R}(I^*)$  depende de las constantes  $k_S$  y  $k_L$ , que recordando (3.34) tienen en cuenta la intensidad gravitatoria del cuerpo perturbador, a través de su masa y distancia media, y también la estructura de la Tierra a través de su elipticidad dinámica. El resto de términos son debidos a la no inercialidad del sistema de referencia en la ecuación (3.46).

Análogamente, la ecuación (3.39) se escribe

$$\frac{dI^*}{dt} = \frac{1}{M^* \operatorname{sen} I^*} \frac{\partial E^*}{\partial \lambda^*} = -e_2(t) \operatorname{sen} \lambda^* + e_3(t) \cos \lambda^*. \quad (3.47)$$

Por convención con las observaciones, los ángulos de precesión en longitud y en oblicuidad se cuentan hacia el oeste (Kinoshita 1975), y las ecuaciones se suelen reescribir, para hablar de precesión, definiendo  $\Psi = -\lambda^*$  y  $\varepsilon = -I^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{R(\varepsilon)}{\operatorname{sen} \varepsilon} - \cot \varepsilon [e_2(t) \cos \Psi - e_3(t) \operatorname{sen} \Psi] - e_1(t), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -e_2(t) \operatorname{sen} \Psi - e_3(t) \cos \Psi, \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde por comodidad formal y similitud con esta referencia se ha definido  $R(\varepsilon) = -\tilde{R}(-\varepsilon)$ , es decir<sup>12</sup>

$$R(\varepsilon) = (P_0 + P_1 t) \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon + Q_0 \cos 2\varepsilon. \quad (3.49)$$

Pese a las aproximaciones realizadas, y a que el sistema físico se ha reducido a un grado de libertad (la coordenada canónica  $\lambda^* = -\Psi$ ), el sistema de ecuaciones diferenciales (3.48) es no lineal. Su solución puede obtenerse mediante aproximaciones sucesivas (Kinoshita 1975), asumiendo que las funciones  $\Psi$  y  $\varepsilon$  admiten desarrollos en serie de potencias del tiempo, truncadas

<sup>12</sup>Nótese que en Kinoshita (1975) la función  $R(\varepsilon)$  tiene un término adicional que procede de una contribución secular de segundo orden en el hamiltoniano, que aquí no se considera.

a cierto orden  $n$  (desarrollos polinómicos de grado  $n$ ), a partir de las condiciones iniciales dadas por  $\varepsilon_0 = -I_{0,J2000}$  y  $\Psi_0 = -\lambda_{0,J2000} = 0$  (tabla 3.1) y  $t$  contado desde el origen de tiempos de J2000, es decir,

$$\Psi = 0 + \sum_{i=1}^n h_{i-1} t^i, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^n a_{i-1} t^i. \quad (3.50)$$

Este desarrollo es formal, y se considerará un valor de  $n$  coherente con la no consideración del segundo orden del hamiltoniano, así como con los desarrollos introducidos anteriormente en (2.77) a partir de los que se genera. Para éstos se aceptan polinomios de tercer grado (Kinoshita 1975)<sup>13</sup> según

$$\begin{aligned} \text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 &= p_0 t + p_1 t^2 + p_2 t^3, \\ \text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 &= q_0 t + q_1 t^2 + q_2 t^3. \end{aligned} \quad (3.51)$$

La aplicación de la aproximación  $|\pi_1| \ll 1$  simplifica considerablemente la obtención de los coeficientes de los desarrollos en serie de las soluciones de (3.48), debido a que las series para las funciones  $e_i(t)$  se obtienen de forma inmediata como se vio en (2.81). Sin embargo esta aproximación introduce errores no despreciables numéricamente dependiendo del orden de los desarrollos, por lo que no puede emplearse de entrada. Reescribimos, por tanto, las ecuaciones (3.48) de forma que podamos hacer uso de los desarrollos (3.51). Las funciones  $e_2(t)$  y  $e_3(t)$  dadas por (2.79)

$$\begin{aligned} e_2(t) &= \text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 \dot{\Pi}_1 + \text{sen } \Pi_1 \dot{\pi}_1, \\ e_3(t) &= \text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 \dot{\Pi}_1 - \text{cos } \Pi_1 \dot{\pi}_1, \end{aligned} \quad (3.52)$$

se relacionan con las derivadas  $d(\text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1)/dt$ , y  $d(\text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1)/dt$ , de forma que

$$\begin{aligned} \text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 \dot{\Pi}_1 &= \frac{d}{dt}(\text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1) - \text{cos } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 \dot{\pi}_1, \\ \text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 \dot{\Pi}_1 &= -\frac{d}{dt}(\text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1) + \text{cos } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 \dot{\pi}_1, \end{aligned} \quad (3.53)$$

que conduce a<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\text{sen } \Psi \frac{d}{dt}(\text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1) + \text{cos } \Psi \frac{d}{dt}(\text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1) + \\ &\quad + (1 - \text{cos } \pi_1) \text{cos } (\Psi + \Pi_1) \dot{\pi}_1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

<sup>13</sup>Considerando, por ejemplo, Lieske et al. (1977):  
 $\text{sen } \pi_1 \text{ sen } \Pi_1 = 4'' .1976t + 0'' .0.19447t^2 - 0'' .000179t^3$ ,  
 $\text{sen } \pi_1 \text{ cos } \Pi_1 = -46'' .8150t + 0'' .05059t^2 + 0'' .000344t^3$ ,  
con  $t$  medido en centurias desde J2000. Valores más recientes (con polinomios de sexto grado) pueden encontrarse en Fukushima (2003) o Hilton et al. (2006).

<sup>14</sup>Es la expresión dada por Kinoshita (1975) con  $1 - \text{cos } \pi_1 = 2 \text{sen}^2(\pi_1/2)$ .

Como se aprecia en esta ecuación, los polinomios (3.51) se insertan directamente en los dos primeros sumandos, pero no en el tercero, donde se requiere de un desarrollo en serie para cada una de las funciones que lo componen. Esta complejidad analítica se evitaría mediante la aproximación  $1 - \cos \pi_1 = 0 + O(\pi_1^2)$ . La manera de abordar el cálculo de este término requiere obtener desarrollos polinómicos directamente para los ángulos  $\pi_1$  y  $\Pi_1$  a partir de (3.51), según se indica en Kinoshita (1975)<sup>15</sup> <sup>16</sup>. Denotamos estos polinomios mediante

$$\Pi_1 = \Pi_0 + v_0 t + v_1 t^2, \quad \pi_1 = w_0 t + w_1 t^2 + w_2 t^3. \quad (3.55)$$

A partir de los desarrollos de MacLaurin de las funciones  $\sin \pi_1 \sin \Pi_1$  y  $\sin \pi_1 \cos \Pi_1$ ,

$$\begin{aligned} \sin \pi_1 \sin \Pi_1 &= w_0 \sin \Pi_0 t + (v_0 w_0 \cos \Pi_0 + w_1 \sin \Pi_0) t^2 + \dots, \\ \sin \pi_1 \cos \Pi_1 &= w_0 \cos \Pi_0 t + (-v_0 w_0 \sin \Pi_0 + w_1 \cos \Pi_0) t^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.56)$$

e identificando los coeficientes con el mismo grado en  $t$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \arctan \frac{p_0}{q_0}, \\ v_0 &= \frac{p_1 \cos \Pi_0 - q_1 \sin \Pi_0}{w_0}, \\ v_1 &= \frac{p_2 \cos \Pi_0 - q_2 \sin \Pi_0 - w_1 v_0}{w_0}, \\ w_0 &= \sqrt{p_0^2 + q_0^2}, \\ w_1 &= p_1 \sin \Pi_0 + q_1 \cos \Pi_0, \\ w_2 &= q_2 \cos \Pi_0 + p_2 \sin \Pi_0 + \frac{1}{2} w_0 v_0^2 + \frac{1}{6} w_0^3. \end{aligned} \quad (3.57)$$

El desarrollo de  $(1 - \cos \pi_1) \cos(\Psi + \Pi_1) \dot{\pi}_1$ , en virtud de los polinomios (3.55), no tiene término lineal, dado que  $1 - \cos \pi_1 = O(t^2)$ . Dado que éste aparece sumado en la ecuación para  $d\varepsilon/dt$ , se traduce en una contribución

<sup>15</sup>Cabe decir que en esta referencia los polinomios para las funciones  $\pi_1$  y  $\Pi_1$  se presentan con posterioridad a los indicados para la longitud y oblicuidad, sin embargo su cálculo ha de ser necesariamente previo.

<sup>16</sup>Expresiones numéricas para estos ángulos vienen dadas por (Lieske et al. 1977):

$$\pi_1 = 47''.0029t - 0''.03302t^2 + 0''.000060t^3,$$

$\Pi_1 = 174^\circ 52' 34''.982 - 869''.8089t + 0''.03536t^2$ , con  $t$  en centurias julianas desde J2000.0. Valores más actuales (con polinomios de sexto grado) pueden encontrarse en Fukushima (2003) o Hilton et al. (2006).

$O(t^3)$  para la serie de  $\varepsilon$ . Dicho de otro modo, analíticamente no hay diferencia en el desarrollo hasta orden  $t^2$  de  $\varepsilon$  si se suprime, como aproximación, este término en la ecuación (3.54). Esto ocurre igualmente para la serie polinómica de  $\Psi$  a partir de (3.48). Las series a orden  $t^2$  son en general suficientes para el cálculo de la precesión en una teoría de primer orden.

No obstante, no es una simplificación imprescindible ya que los coeficientes pueden obtenerse mediante el uso de un operador simbólico de propósito general, como por ejemplo Maple, atendiendo a las dependencias existentes entre los coeficientes de los distintos polinomios. Prescindiendo de los términos dependientes de  $1 - \cos \pi_1$  en las ecuaciones, la obtención de coeficientes puede abordarse mediante manipulaciones básicas, tales como el uso de los desarrollos de MacLaurin de las funciones elementales y el producto de Cauchy para los productos y cocientes de polinomios. No se considera relevante alargar la exposición para incluir este proceso de cálculo, y por lo tanto incluiremos directamente las expresiones obtenidas para las series polinómicas

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + a_0 t + a_1 t^2 + O(t^3), \\ \Psi &= h_0 t + h_1 t^2 + O(t^3),\end{aligned}\tag{3.58}$$

con los coeficientes en función de las constantes del problema:

$$\begin{aligned}a_0 &= q_0, \\ a_1 &= q_1 - \frac{1}{2} h_0 p_0, \\ h_0 &= \frac{R_0}{\text{sen } \varepsilon_0} - p_0 \cot \varepsilon_0, \\ h_1 &= \frac{1}{2} \frac{R_1}{\text{sen } \varepsilon_0} - (p_1 + h_0 q_0) \cot \varepsilon_0 + \frac{1}{2} q_0 p_0, \\ R_0 &= P_0 \text{sen } \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0 + Q_0 \cos 2\varepsilon_0, \\ R_1 &= P_0 q_0 \cos 2\varepsilon_0 + (P_1 - 4q_0 Q_0) \text{sen } \varepsilon_0 \cos \varepsilon_0,\end{aligned}\tag{3.59}$$

donde  $R_0$  y  $R_1$  son los dos primeros coeficientes del desarrollo polinómico en potencias de  $t$  de la función  $R(\varepsilon)$ , en la forma  $R(\varepsilon) = R_0(\varepsilon_0) + R_1(\varepsilon_0)t + O(t^2)$ .

Por último podemos recuperar las expresiones dadas en Kinoshita (1977) definiendo los coeficientes<sup>17</sup>

$$f_0 = \frac{R_0}{\text{sen } \varepsilon_0}, f_1 = \frac{1}{2} \frac{R_1}{\text{sen } \varepsilon_0}, d_0 = \frac{p_0}{\text{sen } \varepsilon_0}, d_1 = \frac{p_1 + q_0 h_0}{\text{sen } \varepsilon_0},\tag{3.60}$$

<sup>17</sup>La definición no es arbitraria. Tal como puede consultarse en Kinoshita (1975),  $f_0 t + f_1 t^2$  y  $d_0 t + d_1 t^2$  representan la precesión lumisolar y la precesión planetaria, respectivamente.

de manera que se tiene

$$h_0 = f_0 - d_0 \cos \varepsilon_0, \quad h_1 = f_1 - d_1 \cos \varepsilon_0 + \frac{1}{2}p_0q_0, \quad (3.61)$$

y finalmente, en términos de las variables canónicas:

$$\begin{aligned} I^* &= I_0^* - q_0 t - \left( q_1 - \frac{1}{2}p_0f_0 + \frac{1}{2}p_0d_0 \cos I_0 \right) t^2 + O(t^3), \\ \lambda^* &= -(f_0 - d_0 \cos I_0) t - \left( f_1 - d_1 \cos I_0 + \frac{1}{2}p_0q_0 \right) t^2 + O(t^3). \end{aligned} \quad (3.62)$$

La evaluación numérica de esta expresión, con los coeficientes empleados por Kinoshita (1975)<sup>18</sup>, arroja un valor para la *constante de precesión*  $p \equiv n_\lambda^* = 5027''.972563 \text{ cent}^{-1}$  (para el primer grado en  $t$ ), muy próximo a valores actuales más refinados como los dados por Fukushima (2003) o Hilton et al. (2006),  $p = 5028''.795492 \text{ cent}^{-1}$  (el polinomio es de sexto grado en  $t$ ). En lo referente a la velocidad de precesión en oblicuidad se tiene,  $n_I^* = -q_0 = 46''.8519 \text{ cent}^{-1}$ , frente al valor  $46''.8354$  dado por estas referencias.

La expresión anterior nos permite dar una representación numérica a la velocidad de precesión  $n_\lambda^*$ , definida por  $\lambda^* = n_\lambda^* t + O(t^2)$ . Dado que en el caso no perturbado se tiene que  $\lambda = \lambda_0 = 0$  (constante),  $n_\lambda = 0$ , o equivalentemente  $n_\lambda^* = n_\lambda + \delta n_\lambda$ , que nos permite representar numéricamente la contribución de primer orden a la velocidad de precesión, esto es,

$$\delta n_\lambda = n_\lambda^* = -(f_0 - d_0 \cos I_0) + O(t). \quad (3.63)$$

Estudiaremos ahora la contribución a primer orden de perturbación a los movimientos medios, constantes en el caso libre ( $n_\mu$  y  $n_\nu$ ) y definidos por (2.62). Las contribuciones de primer orden vendrán dadas por (3.16):

$$\begin{aligned} n_\mu^* &= n_\mu + \delta n_\mu, \quad n_\nu^* = n_\nu + \delta n_\nu \\ \delta n_\mu &= \{\mu^*, H_{1\text{sec}}\}, \quad \delta n_\nu = \{\nu^*, H_{1\text{sec}}\}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde  $H_{1\text{sec}}$  viene dado por (3.8). El cálculo de los corchetes de Poisson y la sustitución de  $\sigma^* = 0$ , conduce a las siguientes expresiones con precisión  $O(\sigma^2)$

$$\begin{aligned} \delta n_\mu &= \frac{\partial E}{\partial M^*} - \frac{3}{M^*} \sum_{p=L,S} k'_p B_{0;p}(I^*) + \frac{\cot I^*}{M^*} \sum_{p=L,S} k'_p \frac{\partial B_{0;p}}{\partial I^*}(I^*) + O(\sigma^2), \\ \delta n_\nu &= \frac{3}{M^*} \sum_{p=L,S} k'_p B_{0;p}(I^*) + O(\sigma^2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

<sup>18</sup>En este cálculo se ha empleado:  $p_0 = 4''.2109$ ,  $q_0 = -46''.8519$ ,  $f_0 = 5037''.6851 \text{ cent}^{-1}$ , que se reproducen a partir de las expresiones dadas para los coeficientes  $R_0$ ,  $P_0$  y  $Q_0$  y las constantes del problema.

Por el interés de la evolución temporal de  $\mu^* + \nu^*$ , nos interesa estudiar  $\delta n_\mu + \delta n_\nu = \delta(n_\mu + n_\nu)$ . Como sabemos, en el caso no perturbado (2.65):  $n_\mu + n_\nu = \omega_E$  (el periodo asociado a  $\mu + \nu$  es aproximadamente un día). Podemos además relacionar uno de los términos de esta suma con el valor constante  $\delta n_\lambda$  dado por (3.63), a partir de

$$\delta n_\lambda = \{\lambda^*, H_{1\text{sec}}\} = \frac{\partial E}{\partial \Lambda^*} - \frac{1}{M^* \sin I^*} \sum_{p=L,S} k'_p \frac{\partial B_{0;p}}{\partial I^*}(I^*) + O(\sigma^2). \quad (3.66)$$

Entonces

$$\delta n_\mu + \delta n_\nu = \frac{\partial E}{\partial M^*} + \cos I^* \frac{\partial E}{\partial \Lambda^*} - \cos I^* \delta n_\lambda + O(\sigma^2). \quad (3.67)$$

Por otro lado, y en virtud de la expresión de  $E(\Lambda^*, M^*, \lambda^*)$  dada por (2.78), se tiene que

$$\frac{\partial E}{\partial M^*} + \cos I^* \frac{\partial E}{\partial \Lambda^*} = \frac{E}{M^*}, \quad (3.68)$$

que nos permite escribir, finalmente,

$$\delta n_\mu + \delta n_\nu = \frac{E}{M^*} - \cos I^* \delta n_\lambda + O(\sigma^2). \quad (3.69)$$

Esta expresión es equivalente, salvo notación, a la expresión 8.8 dada por Kinoshita (1977).

Nos interesará estudiar el orden cero en  $t$  en la evolución de  $\delta n_\mu + \delta n_\nu$  a fin de disponer el primer orden en  $t$  en la evolución de  $\mu^* + \nu^*$ , esto es

$$\mu^* + \nu^* = \mu_0 + \nu_0 + (n_\mu + n_\nu)t + (\delta n_\mu + \delta n_\nu)|_{O(t^0)}t + O(t^2). \quad (3.70)$$

Para ello, usando los desarrollos aproximados (2.81),  $I^* = I_0$ , y (3.62), se tiene a partir del desarrollo en serie en torno a  $t = 0$ ,

$$\left. \frac{E}{M^*} \right|_{O(t^0)} = p_0 \sin I_0 = -d_0 \sin^2 I_0, \quad (3.71)$$

donde se ha usado (3.60) con  $\varepsilon_0 = -I_0$ . Finalmente, y por aplicación de (3.63)

$$\begin{aligned} (\delta n_\mu + \delta n_\nu)|_{O(t^0)} &= \left. \frac{E}{M^*} \right|_{O(t^0)} + \cos I_0 (f_0 - d_0 \cos I_0) = \\ &= f_0 \cos I_0 - d_0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}\delta n_\mu + \delta n_\nu &= f_0 \cos I_0 - d_0 + O(t, \sigma^2), \\ n_\mu^* + n_\nu^* &= \omega_E + f_0 \cos I_0 - d_0 + O(t, \sigma^2).\end{aligned}\quad (3.73)$$

Numéricamente esta corrección se puede despreciar en una teoría de primer orden. En efecto, con los coeficientes empleados por Kinoshita (1975),  $f_0 \cos I_0 - d_0 = 4611''.399635 \text{ cent}^{-1}$  (la corrección está en el orden de magnitud de la constante de precesión), y por lo tanto para la aproximación lineal en  $t$  de la evolución de  $\mu^* + \nu^*$ , se tiene

$$n_\mu^* + n_\nu^* \simeq \omega_E + O(\sigma^2).\quad (3.74)$$



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## Capítulo 4

# Tierra elástica: contribución de la energía cinética de redistribución

### 4.1. Sistema de Tisserand

El estudio de la rotación de una Tierra elástica requiere de entrada la definición del sistema de referencia terrestre. En el capítulo anterior era suficiente con elegir un sistema ligado al cuerpo, permitido por la definición de sólido rígido, tal como se hizo en la sección 2.1 para la introducción del conjunto canónico de Euler. Sin embargo, cuando la distancia relativa entre las partículas (con más exactitud, los elementos de volumen) del sólido es variable con el tiempo, una supuesta ligadura con el cuerpo no conservaría el carácter ortogonal ni rectangular del sistema de referencia, y por tanto, no sería útil para el propósito de estudio. En el caso del sólido rígido el estudio de su rotación o el de la rotación de un sistema de referencia ligado a él son conceptos equivalentes. Ahora, con una Tierra deformable, esta equivalencia no es sustancial, y por tanto vendrá dada a través de la definición de la rotación del sólido como la rotación de cierto sistema de referencia asignado a él. Para el desarrollo de este modelo tomaremos como sistema de referencia terrestre el denominado *de Tisserand* (Routh 1955, Moritz y Mueller 1986), siguiendo la construcción dada por Escapa (2011).

Recuperando la notación de la sección 2.1 consideramos el sistema inercial definido por una base ortonormal  $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  y origen el centro de masas del sólido, y escribimos referida a éste la velocidad,  $\mathbf{v}$ , de una partícula en la posición  $\mathbf{x}$ , considerando un vector  $\boldsymbol{\omega}$  arbitrario y común a todas las

partículas del sólido (y por tanto independiente de  $\mathbf{x}$ ),

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega}). \quad (4.1)$$

En cambio  $\mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega})$ , que denominaremos velocidad de deformación, es un campo vectorial (al igual que la velocidad de las partículas). Evidentemente, si  $\mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ , el sólido es rígido.

Hay infinitas formas de definir el vector  $\boldsymbol{\omega}$ . El sistema de Tisserand implica una definición particular para este vector, que denotaremos por  $\boldsymbol{\omega}_T$ . Nótese que a través de las relaciones generales entre el conjunto canónico de Euler y las componentes de la velocidad angular dadas por (2.5), la rotación del sólido queda definida una vez seleccionado un vector  $\boldsymbol{\omega}_T$  que desempeñe la función de velocidad angular para el sólido deformable y una orientación inicial.

En este sentido, y como primera condición, exigimos que cumpla una relación con el momento angular total,  $\mathbf{L}$ , formalmente idéntica al caso rígido, donde  $\boldsymbol{\omega}_T$  ocupa el lugar de la velocidad angular, esto es

$$\mathbf{L} = \int_V \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_T, \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el tensor de inercia del sólido, definido por (2.90). Esta selección siempre es posible desde un punto de vista matemático, ya que dado un sistema de coordenadas, la matriz de inercia es siempre invertible. No obstante desde un punto de vista geométrico sólo resulta útil para el estudio de la rotación del sólido si

$$\|\mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega})\| \ll \|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}\|, \quad (4.3)$$

es decir, si el sólido elástico experimenta pequeñas deformaciones o, dicho de otra forma, si es aproximadamente rígido. En otra situación, aunque se pudiese resolver el movimiento entre los sistemas de referencia de Tisserand e inercial (estudio de la rotación), no existiría una correspondencia razonable entre las observaciones en la superficie terrestre y las predicciones teóricas referenciadas al sistema de Tisserand.

Para explotar las consecuencias de esta condición para  $\boldsymbol{\omega}_T$ , escribimos la expresión general del momento angular total sustituyendo (4.1):

$$\mathbf{L} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} + \int_V \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \times \mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega})] d^3\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Desarrollamos el primero de los términos en componentes

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})_i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \sum_{l,m} \epsilon_{klm} \omega_l x_m = \sum_{j,k,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) x_j \omega_l x_m = \\ &= \sum_j (\omega_i x_j^2 - \omega_j x_i x_j), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  son las componentes del pseudo-tensor de *Levi-Civita*<sup>1</sup>. Recuperando la integral

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\mathbf{x}) \sum_j (\omega_i x_j^2 - \omega_j x_i x_j) d^3 \mathbf{x} &= \sum_j \left[ \int_V \rho(\mathbf{x}) (\delta_{ij} \mathbf{x}^2 - x_i x_j) d^3 \mathbf{x} \right] \omega_j = \\ &= \sum_j I_{ij} \omega_j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por lo tanto el momento angular total resulta a partir de (4.4) y (4.6):

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}), \quad (4.7)$$

donde se ha definido

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}) = \int_V \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{x} \times \mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega})] d^3 \mathbf{x}. \quad (4.8)$$

La primera condición para la definición del sistema de Tisserand, dada por (4.2), implica de forma inmediata que

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\omega}_T) = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

y viceversa, también se puede tomar este resultado como condición para la definición de  $\boldsymbol{\omega}_T$  (Moritz y Mueller 1986). Las condiciones (4.9) y (4.2) son, por lo tanto, equivalentes.

Veamos que otra condición equivalente para la definición de  $\boldsymbol{\omega}_T$  viene dada por la exigencia de minimización de la energía cinética de deformación (Jeffreys 1976)

$$T_d = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}_d(\boldsymbol{\omega})^2 d^3 \mathbf{x}, \quad (4.10)$$

para lo que, en primer lugar, estudiaremos la relación entre ésta y la energía cinética total del sólido,  $T$ . Haciendo uso de (4.1) escribimos la energía cinética en la forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}^2 d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}_d)^2 d^3 \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 d^3 \mathbf{x} + \int_V \rho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_d + \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}_d^2 d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

<sup>1</sup> $\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$ , donde  $\mathbf{e}_i$  son los vectores de una base ortonormal. El tensor es totalmente antisimétrico e invariante ante permutaciones cíclicas de los índices. De su definición se obtiene la importante identidad empleada:  $\sum_k \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ .

En esta expresión reconocemos directamente el segundo sumando como  $\boldsymbol{\omega}\mathbf{h}$  a partir de (4.8) y las propiedades de permutación del producto mixto, en el tercero la energía cinética de deformación (4.10), y en el primero energía cinética en el caso de un sólido rígido. En efecto, desarrollando el cuadrado

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})^2] d^3\mathbf{x} = & (4.12) \\
&= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{x}) \left( \sum_i \omega_i^2 \mathbf{x}^2 - \sum_{i,j} \omega_i \omega_j x_i x_j \right) d^3\mathbf{x} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_V \rho(\mathbf{x}) (\omega_i \omega_j \delta_{ij} \mathbf{x}^2 - \omega_i \omega_j x_i x_j) d^3\mathbf{x} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \int_V \rho(\mathbf{x}) (\delta_{ij} \mathbf{x}^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij} \omega_i \omega_j.
\end{aligned}$$

En suma la energía cinética del sólido resulta

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{h} + T_d. \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta (4.7),  $\mathbf{L}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{h}$ , y la energía cinética puede reescribirse como

$$T = \mathbf{L}\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + T_d. \quad (4.14)$$

Siguiendo la prueba realizada por Escapa (2011), veamos que se puede definir  $\boldsymbol{\omega}_T$  como el vector que minimiza  $T_d$  (frente a cualquier otra elección de  $\boldsymbol{\omega}$ ). Comprobemos primero que la condición (4.2) es suficiente. Para ello a partir de (4.14) determinamos  $T_d(\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda})$  donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es un vector arbitrario no nulo:

$$\begin{aligned}
T_d(\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) &= T - \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{I} (\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) = \\
&= T - \mathbf{L}\boldsymbol{\omega}_T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_T - \mathbf{L}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_T + \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} \boldsymbol{\lambda}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Aplicando (4.2) y que  $T_d(\boldsymbol{\omega}_T) = T - \mathbf{L}\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\omega}_T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_T / 2$ , resulta

$$T_d(\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) = T_d(\boldsymbol{\omega}_T) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} \boldsymbol{\lambda}.$$

Dado que  $\boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} \boldsymbol{\lambda}$  es la ecuación de una forma cuadrática diagonalizable ( $\mathbf{I}$  es diagonalizable) y definida (algún momento principal de inercia es no nulo), entonces tiene signo constante, y necesariamente positivo ya que los autovalores de  $\mathbf{I}$  son positivos. Es decir,  $\boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} \boldsymbol{\lambda} > 0$  para todo  $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ . Entonces

$$T(\boldsymbol{\omega}_T + \boldsymbol{\lambda}) > T_d(\boldsymbol{\omega}_T), \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

que implica que  $T_d$  tiene un mínimo absoluto en  $\boldsymbol{\omega}_T$ , como se quería probar.

La condición (4.2) es también necesaria (Moritz y Mueller 1986). Supongamos que  $T_d(\boldsymbol{\omega}_T)$  es un valor mínimo de la función. Dado que  $T_d(\boldsymbol{\omega})$  es una función diferenciable, la condición necesaria de extremo en un punto interior del dominio implica

$$\nabla_{\boldsymbol{\omega}} T_d(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} \rightarrow -\mathbf{L} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

cuya solución es  $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_T$ , lo que concluye la prueba.

A modo de conclusión, la selección de un vector  $\boldsymbol{\omega}_T$  para el estudio de la rotación de la Tierra elástica nos proporciona: primero, un sistema de referencia de Tisserand definido de forma que  $\boldsymbol{\omega}_T$  sea la velocidad angular correspondiente a la rotación de este sistema respecto del inercial; segundo, una expresión para la energía cinética del sólido dada por (4.13) y (4.9), esto es,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_T + T_d. \quad (4.18)$$

Bajo la condición de pequeñas deformaciones expresada por (4.3), a partir de (4.10) y (4.18) se tiene

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_T + O(\mathbf{v}_d^2). \quad (4.19)$$

Nótese en la primera de estas conclusiones que la orientación de la base ortonormal del sistema de Tisserand,  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ , con origen en el centro de masas, no está definida unívocamente por las condiciones de definición de  $\boldsymbol{\omega}_T$ , dado que para un vector velocidad angular existen infinitas matrices de rotación compatibles.

Esto se evidencia a partir de la ecuación diferencial lineal que conecta las componentes de la velocidad angular con las matrices de rotación, vía la matriz antisimétrica  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ :

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{R}}^t(t) \mathbf{R}(t), \text{ donde } \boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{T3} & \omega_{T2} \\ \omega_{T3} & 0 & \omega_{T1} \\ \omega_{T2} & \omega_{T1} & 0 \end{pmatrix},$$

Su solución (Wintner 1941) viene dada por

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Omega}(s) ds \right),$$

donde  $\mathbf{R}(t_0)$  es una matriz de rotación constante, dependiente de la orientación inicial, que conlleva esta arbitrariedad<sup>2</sup>. Una vez definida la rotación

<sup>2</sup>Dos sistemas de Tisserand correspondientes a una misma velocidad angular que inicialmente difieran entre sí por una matriz constante  $\mathbf{R}(t_0)$ , diferirán en cualquier instante por esta misma matriz constante.

que conecta los sistemas de Tisserand e inercial, el conjunto canónico de Euler se introduce conforme a la sección 2.1 y permite la incorporación del formalismo canónico desarrollado en el capítulo anterior al caso de la Tierra elástica.

Siguiendo Kinoshita y Sasao (1989) la orientación puede fijarse con la condición adicional de que los ejes del sistema de Tisserand coincidan con los ejes principales de inercia del sólido rígido ficticio que se obtiene al eliminar, o promediar en el tiempo, la deformación del sólido elástico.

Este sistema de Tisserand (denominado medio) será tal que, si descomponemos la matriz de inercia según una contribución rígida  $\mathbf{I}_0$  (sólido rígido equivalente, tensor no dependiente del tiempo) y otra elástica  $\mathbf{I}_1$  (que incluye toda la deformación, permanente y dependiente del tiempo)<sup>3</sup>, se escribirá como

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta A & F & E \\ F & \Delta B & D \\ E & D & \Delta C \end{pmatrix}, \quad A \leq B < C, \quad (4.20)$$

de modo que el promedio temporal del tensor de inercia correspondiente a la deformación resulte diagonal,

$$\langle \mathbf{I}_1 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{I}_1(t) dt = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

con  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  constantes, esto es, una deformación permanente. Matizaremos esta condición en la sección 4.5, una vez dispongamos de una forma explícita para  $\mathbf{I}_1(t)$ . Como veremos en el desarrollo de la teoría, cuando hablamos de deformación del sólido asociada a la contribución  $\mathbf{I}_1$  del tensor de inercia, y su dependencia temporal, nos referimos a la deformación inducida por la perturbación lunisolar.

## 4.2. Energía cinética de redistribución

El resultado (4.19) bajo la condición de pequeñas deformaciones supone una similitud formal en la energía cinética entre el caso elástico y el rígido. La principal diferencia estriba en la dependencia temporal del tensor de inercia,  $\mathbf{I}(t)$ , ya que sus elementos constitutivos, tales como el volumen del cuerpo

<sup>3</sup>Cabe decir que esta división del tensor de inercia es conforme a la considerada en Getino y Ferrándiz (1995), y por ende diferente a Escapa (2011) donde por conveniencia la deformación permanente se incluye en  $\mathbf{I}_0$ .

o la densidad, son funciones del tiempo. En el sistema de Tisserand seleccionado (también lo denominaremos sistema terrestre, por su funcionalidad), admitiremos una descomposición del tensor de inercia en la forma (4.20).

La idea fundamental para el estudio de la rotación de la Tierra deformable consiste en desacoplar los problemas elástico y de rotación. Supondremos que  $\mathbf{I}(t)$  es una función conocida del tiempo, o lo que es equivalente, supondremos que el problema elástico está resuelto de antemano, sin considerar la interacción entre la deformación del sólido y el movimiento de rotación. Esta aproximación al problema es necesaria para eludir el complejo sistema de ecuaciones que implicaría la inclusión de las ecuaciones de la elasticidad, y está avalada numéricamente (Sasao et al. 1980, Kubo 1991, Getino y Ferrándiz 1995). Exploraremos no obstante la relación existente entre el potencial deformador (atracción lunisolar), denominado *de marea*, y la variación de las energías cinética y potencial debidas a la deformación de la Tierra, denominadas *de redistribución*. En todo caso nos centraremos en la respuesta forzada en el movimiento de rotación de la Tierra por la deformación inducida por los astros perturbadores (deformación de marea), siguiendo la línea de estudio de este trabajo<sup>4</sup>.

Así el problema físico del estudio de la rotación de la Tierra deformada por la interacción gravitatoria de la Luna y el Sol, bajo este planteamiento funcional, puede esquematizarse con la siguiente secuencia de efectos. En primer lugar el potencial lunisolar es el agente deformante del sistema de partículas, y provoca una redistribución de la masa de la Tierra. En este sentido la Luna y el Sol actúan como cuerpos perturbadores. La nueva distribución geométrica de masa supone una variación del tensor de inercia ( $\mathbf{I}_1$ ), que se cuantifica con una contribución adicional en la energía cinética de rotación, que se denomina energía cinética de redistribución ( $T_t$ ). Su cálculo se aborda en la presente sección. A su vez, la nueva distribución de masa altera el campo gravitatorio de la Tierra, en interacción con la Luna y el Sol, que en este sentido se consideran cuerpos perturbados. Esta variación del campo gravitatorio conduce a un término adicional de la energía potencial, denominado potencial de redistribución ( $V_t$ ). Su cálculo se aborda en el próximo capítulo.

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones se considera que el orden de magnitud de  $\mathbf{I}_1$  es pequeño respecto a la parte no perturbada, esto es,  $\|\mathbf{I}_1\| \ll \|\mathbf{I}_0\|$  (puede encontrarse una evaluación de estos órdenes de magnitud en Kubo 1991). Escribiremos la energía cinética en términos de  $\mathbf{L}$ , lo que nos permitirá introducir el conjunto canónico de Andoyer mediante (2.43).

---

<sup>4</sup>Con un formalismo similar se puede incluir la deformación rotacional, inducida por el potencial centrífugo terrestre (Getino y Ferrándiz 1995).

A partir de (4.19) se tiene:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}, \quad (4.22)$$

donde hemos hecho uso de (4.7) y hemos prescindido del subíndice en la velocidad angular ya que se sobreentiende que en todo momento trabajamos en el sistema de Tisserand. Obtendremos la expresión de  $\mathbf{I}^{-1}$  mediante un desarrollo en serie en órdenes de  $\mathbf{I}_1$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1 = (\mathbf{1} + \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1}) \mathbf{I}_0 \rightarrow \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}_0^{-1} (\mathbf{1} + \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1})^{-1}. \quad (4.23)$$

Utilizando el desarrollo de McLaurin  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$ , resulta

$$(\mathbf{1} + \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1})^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1} + (\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1})^2 + O(\mathbf{I}_1^3), \quad (4.24)$$

por lo que, a primer orden en  $\mathbf{I}_1$  se tiene

$$\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}_0^{-1} - \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1} + O(\mathbf{I}_1^2). \quad (4.25)$$

La expresión de la energía cinética es entonces, a este orden de aproximación,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{L} - \frac{1}{2} \mathbf{L} (\mathbf{I}_0^{-1} \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_0^{-1}) \mathbf{L} = T_0 + T_t, \quad (4.26)$$

donde  $T_0$  es la energía cinética asociada a un sólido rígido libre (2.42). Para el caso simétrico (tomamos  $A = B$  bajo las mismas consideraciones que en la sección 2.4) ésta viene dada por (2.45), en términos del conjunto canónico de Andoyer:

$$T_0 = \frac{1}{2A} (M^2 - N^2) + \frac{N^2}{2C}. \quad (4.27)$$

Empleamos (2.43) para reescribir  $T_t$ . Realizando el producto de matrices:

$$\begin{aligned} T_t = & -\frac{MN}{AC} \sin \sigma \left( E \sin \nu + D \cos \nu \frac{N}{M} \right) - F \frac{MN}{A^2} \sin^2 \sigma \sin \nu \cos \nu + \\ & -\frac{1}{2} \Delta A \frac{M^2}{A^2} \sin^2 \sigma \sin^2 \nu - \frac{1}{2} \Delta B \frac{N^2}{A^2} \sin^2 \sigma \cos^2 \nu - \frac{1}{2} \Delta C \frac{N^2}{C^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Manteniendo el primer orden en  $\sigma$  en virtud de  $\sigma \simeq 10^{-6}$  resulta:

$$T_t = -\frac{\Delta C}{2C^2} N^2 - \frac{MN}{AC} \sigma (E \sin \nu + D \cos \nu), \quad (4.29)$$

término de la energía cinética debido a la redistribución de masa en el sólido deformado y que, por ello, se denomina *de redistribución*.

Así pues, el hamiltoniano del sistema vendrá dado por las siguientes contribuciones:

$$H = T_0 + T_t + V_1 + E + V_t, \quad (4.30)$$

donde  $T_0$  y  $T_t$  vienen dados por las expresiones (4.27) y (4.29),  $V_1$  es el potencial de perturbación lunisolar dado por (3.2) correspondiente a la contribución rígida  $\mathbf{I}_0$  a través de la fórmula de MacCullagh (2.101),  $E$  es la corrección por no inercialidad (2.76) y  $V_t$  es el potencial de perturbación correspondiente a la contribución por deformación  $\mathbf{I}_1$ .

La linealidad del método de perturbaciones a primer orden en virtud de (2.141) y de las ecuaciones de Hamilton (3.16), permite abordar cada contribución por separado. Las contribuciones a las nutaciones dadas por  $T_0$  y  $V_1$  ya se han estudiado en el capítulo anterior, así como la del término  $E$  para el movimiento de precesión en el caso rígido. En las siguientes secciones abordaremos el estudio de  $T_t$ , esto es, de la contribución de la deformación de la Tierra a la energía cinética del sistema. Dejaremos para el siguiente capítulo el término  $V_t$ , la contribución directa del potencial de redistribución sobre el movimiento de rotación.

### 4.3. Potencial de redistribución

El estudio de la relación existente entre el potencial perturbador lunisolar, y la variación del geopotencial por la deformación inducida, introduce en el formalismo los denominados *números de Love* (Munk and MacDonald 1960), que cuantifican la respuesta elástica de la Tierra. Otro camino, que requiere de un análisis más profundo del problema elástico, se basa en la determinación del campo de desplazamientos a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (Getino y Ferrándiz 1991, Getino 1989). Referencias con un mayor nivel de detalle que la citada anteriormente para la primera de estas vías son, por ejemplo, Wahr (1996) o más recientemente Lambert y Mathews (2006) y Efroimsky (2012).

Supondremos que la Tierra no deformada tiene simetría esférica. Como es bien conocido, las soluciones en coordenadas esféricas para la ecuación de Laplace para el cálculo del potencial gravitatorio, mediante el método de separación de variables, están formadas por combinaciones lineales de funciones de la forma

$$V_{lm} = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{array} \right\} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad l \geq 0, |m| \leq l, (l, m \text{ enteros}) \quad (4.31)$$

donde  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas (radio, colatitud y longitud),

y  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos complejos<sup>5</sup> (Bell 1968). El teorema adición de los armónicos esféricos permite el desarrollo multipolar esférico del potencial gravitatorio, en virtud de la expresión

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.32)$$

donde  $r_{<} = \min(r, r')$ ,  $r_{>} = \max(r, r')$ , y  $(r, \theta, \phi)$ ,  $(r', \theta', \phi')$  son las coordenadas esféricas de los vectores  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$ , respectivamente. El asterisco (\*) representa aquí el conjugado complejo. Este desarrollo es el equivalente a (2.85) en coordenadas esféricas. Por lo tanto, la expresión del potencial gravitatorio creado por una cuerpo de masa  $m$  en la posición  $\mathbf{r}'$  ( $r' > r$ ) referenciada al sistema de Tisserand, en un punto  $\mathbf{r}$  de la Tierra, vendrá dado por

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}, \quad (4.33)$$

cuyo desarrollo multipolar esférico es

$$U(r, \theta, \phi) = 4\pi \frac{Gm}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{r'}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (4.34)$$

Evidentemente este potencial es solución de la ecuación de Laplace en virtud de (4.31). Nos centraremos en el orden más bajo del desarrollo que pueda crear deformación en el sólido, en función de la geometría intrínseca de cada término. Así, el orden  $l = 0$  es un término constante, ya que  $Y_{00}(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ . Dado que la fuerza actuante sobre las partículas del sólido será  $\nabla_{\mathbf{r}}U = \mathbf{0}$ , esta contribución no influye.

Los términos del orden  $l = 1$ , con  $Y_{10}(\theta, \phi) = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$  y  $Y_{1\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{3/8\pi} \sin \theta \exp(\pm i\phi)$ , generan contribuciones al potencial proporcionales a  $r \cos \theta = z$  y  $r \sin \theta \exp(\pm i\phi) = x \pm iy$ , cuyas fuerzas gradiente son constantes en las direcciones de la base del sistema de referencia dadas por  $\mathbf{s}_1$  ( $m = 0$ )

<sup>5</sup>En secciones anteriores hemos usado los armónicos esféricos reales, definidos en (2.95). En este apartado haremos uso de su expresión compleja y normalizada, por comodidad formal y similitud con algunas de las referencias:

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) = \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} [C_{lm}(\theta, \phi) + iS_{lm}(\theta, \phi)]. \end{aligned}$$

y  $\mathbf{s}_1 \pm i\mathbf{s}_2$  ( $m = \pm 1$ ). Dado que las fuerzas son constantes e iguales para todos los elementos de volumen del sólido, no generan deformación (influyen sobre el movimiento orbital).

El primer grado del desarrollo que induce deformación sobre la Tierra es  $l = 2$ , y por la disminución de la magnitud en cada orden, mantendremos sólo estos términos para la expresión del potencial deformador (mismo orden de magnitud que el desarrollo de la energía potencial de la sección 2.6). Se puede demostrar (Wahr 1996) que los términos con  $l > 1$ , en el caso de una Tierra esférica, no provocan una fuerza neta, es decir, no afectan al movimiento orbital. Por lo tanto, la expresión del potencial de marea será

$$U = \frac{4\pi Gm}{5} \frac{r}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \sum_{m=-2}^2 Y_{2m}^*(\theta', \phi') Y_{2m}(\theta, \phi) + O\left[\left(\frac{r}{r'}\right)^3\right]. \quad (4.35)$$

Podemos eliminar las contribuciones negativas de  $m$  mediante manipulación algebraica. Expandiendo el sumatorio:

$$\begin{aligned} & Y_{00}^* Y_{00} + \sum_{m=1}^2 [Y_{2m}^*(\theta', \phi') Y_{2m}(\theta, \phi) + Y_{2(-m)}^*(\theta', \phi') Y_{2(-m)}(\theta, \phi)] \\ &= Y_{00}^* Y_{00} + \sum_{m=1}^2 [Y_{2m}^*(\theta', \phi') Y_{2m}(\theta, \phi) + (-1)^{2m} Y_{2m}(\theta', \phi') Y_{2m}^*(\theta, \phi)] \\ &= Y_{00}^* Y_{00} + 2 \sum_{m=1}^2 \operatorname{Re} [Y_{2m}^*(\theta', \phi') Y_{2m}(\theta, \phi)], \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde se ha usado que  $Y_{2(-m)} = (-1)^m Y_{2m}^*$  y  $\operatorname{Re}$  es la función parte real. Dado que  $Y_{00}$  es real, se puede dar una forma compacta para la expresión del potencial (Wahr 1996):

$$U = \operatorname{Re} \left[ \frac{r^2}{a_E^2} \sum_{m=0}^2 c_m Y_{2m}^*(\theta', \phi') Y_{2m}(\theta, \phi) \right], \quad (4.37)$$

donde se ha usado la constante  $a_E$  radio medio terrestre como normalización, y definido

$$c_m = \frac{4\pi Gm}{5} \frac{r}{r'^3} a_E^2 (2 - \delta_{m0}) \quad (4.38)$$

que es una medida de la magnitud del potencial de marea cuando  $r = a_E$ , es decir, en la superficie terrestre.

El problema elástico lo planteamos desde un punto de vista estático, esto es, para cada instante dado en el que podamos considerar  $r'$  como constante.

Supondremos que la solución dinámica es válida cuando el radio-vector del astro perturbador sea una función conocida del tiempo, o dicho de otra forma, que la solución dinámica del problema puede aproximarse con una sucesión continua de estados en los que es válida la solución estática del problema elástico. Como solución estática del problema elástico entendemos el cálculo del campo de vectores desplazamiento como función única de la posición, que denotaremos por  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ . Esto forma parte del desacople de los problemas elástico y de rotación, donde se desprecian las interacciones posibles entre ambos movimientos, y de la consideración de que el problema elástico está resuelto a priori. Recíprocamente tampoco consideramos el movimiento de rotación terrestre en la búsqueda de una relación formal entre el potencial de marea y el de redistribución<sup>6</sup>. Reescribiremos (4.37) considerando formalmente este planteamiento, a través de la definición de las constantes  $\alpha_m$  y de las funciones  $U_m(r, \theta, \phi)$  según

$$\alpha_m = c_m Y_{2m}^*(\theta', \phi'), \quad U_m = \frac{r^2}{a_E^2} Y_{2m}(\theta, \phi). \quad (4.39)$$

Las constantes  $\alpha_m$  están determinadas por el movimiento orbital del cuerpo perturbador, y constituyen los coeficientes de la combinación lineal

$$U = \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^2 \alpha_m U_m \right). \quad (4.40)$$

La linealidad de esta expresión nos permite estudiar la respuesta elástica de la Tierra a estos términos deformantes,  $U_m$ , de forma independiente.

Como adelantábamos no estudiaremos esta respuesta a partir de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para el campo de vectores desplazamiento, bajo cierta modelización, sino a través de la relación existente entre los potenciales de marea y de redistribución, siguiendo el planteamiento de Kubo (1991), o Peale (1973), entre otros.

Por lo tanto nuestro interés no es tanto tener una expresión explícita para  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ , como el obtener información sobre su dependencia formal en términos del potencial  $U_m$  que induce los desplazamientos en las partículas del sólido. Así pues, mediante la aplicación directa de la Segunda Ley de Newton sobre un elemento de volumen del sólido en la posición  $\mathbf{r}$ , en el caso estático se tendrá

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} = \rho(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} U_m + \Gamma \mathbf{s}(\mathbf{r}) \quad (4.41)$$

<sup>6</sup>Si bien como señalábamos en la nota al pie de la página 87, un movimiento promediado, a través del potencial centrífugo, puede incluirse en el potencial de marea. Esto implica una dependencia temporal conocida, de carácter armónico, en el campo de vectores desplazamiento, esto es,  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ .

donde  $\Gamma \mathbf{s}(\mathbf{r})$  representa las fuerzas internas, vía cierto operador diferencial  $\Gamma$ . Nótese que en esta ecuación no se han considerado fuerzas de inercia asociadas a la rotación (fuerza centrífuga y de Coriolis), esto es, que se considera el sólido sin rotación a efectos del modelado reológico. Teniendo en cuenta la simetría esférica del potencial perturbador, es conveniente el desarrollo del campo vectorial  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  en el base local de armónicos esféricos vectoriales,  $\{\hat{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi), \nabla_{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi), \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi)\}$ , es decir,

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} [s_{lm}^1(r)\hat{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi) + s_{lm}^2(r)\nabla_{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi) + s_{lm}^3(r)\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi)]. \quad (4.42)$$

El planteamiento estricto consistiría en sustituir este desarrollo en la ecuación en derivadas parciales para hallar las funciones  $s_{lm}^i$  mediante ecuaciones diferenciales ordinarias. Evidentemente no disponemos de una forma concisa para el operador  $\Gamma$  (que incluye las ecuaciones de la elasticidad, por ejemplo para la consideración de las tensiones internas), y hemos de suponer la forma de actuación de este operador sobre los vectores de la base. Esto va a depender directamente de la forma del potencial  $U_m$ , en la medida en que debe satisfacerse la ecuación (4.41). Para ello, teniendo en cuenta que

$$\nabla_{\mathbf{r}}U_m = \frac{2}{a_E^2} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} Y_{2m}(\theta, \phi) + \frac{r^2}{a_E^2} \nabla_{\mathbf{r}}Y_{2m}(\theta, \phi), \quad (4.43)$$

y considerando simetría esférica radial en la situación no deformada, esto es  $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ , se tiene que  $\Gamma \mathbf{s}(\mathbf{r})$  no puede incluir un término dependiente del vector base<sup>7</sup>  $\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}}Y_{lm}(\theta, \phi)$ . De igual forma sólo los términos de grado  $l = 2$  pueden ser no nulos. Nótese que en una situación inicial más general, se requeriría también para la función densidad  $\rho(\mathbf{r})$  un desarrollo en armónicos esféricos que conduciría a la aparición de productos de éstos en  $\rho(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}U_m$ , impidiendo este desacople del problema. La ecuación (4.42) se reescribe entonces

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \sum_m [s_{2m}^1(r)\hat{\mathbf{r}}Y_{2m}(\theta, \phi) + s_{2m}^2(r)\nabla_{\mathbf{r}}Y_{2m}(\theta, \phi)] = \sum_m \mathbf{s}_m(\mathbf{r}). \quad (4.44)$$

Tenemos entonces dos funciones radiales independientes,  $s_{2m}^1(r)$  para los desplazamientos radiales, en la dirección de  $\hat{\mathbf{r}}$ , y  $s_{2m}^2(r)$  para los transversales, en las direcciones de  $\nabla_{\mathbf{r}}Y_{2m}(\theta, \phi)$  (versores  $\mathbf{u}_\theta$  y  $\mathbf{u}_\phi$  de la base local de las coordenadas esféricas)<sup>8</sup>. Los desplazamientos por deformación sólo se observan (o miden) en la superficie terrestre. Por lo tanto el único dato disponible,

<sup>7</sup>Nótese que de existir dependencia temporal, esto no sería así, ya que la derivada temporal de  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  incluiría al tercer vector de la base.

<sup>8</sup> $\nabla_{\mathbf{r}}\alpha(r, \theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \mathbf{u}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi}$

como condición de contorno, que debe incorporarse a la teoría es el de los valores  $s_{2m}^1(a_E)$  y  $s_{2m}^2(a_E)$ . Esto se hace convencionalmente mediante los denominados números de Love (Munk y MacDonald 1960, Wahr 1996), que consisten en unos valores normalizados para estas funciones, denominados  $l$  y  $h$ , y definidos a partir de los desplazamientos vertical y horizontales de la superficie terrestre según:

$$\begin{aligned} \text{Desplazamiento vertical} &= \frac{h}{g} U_{\text{superficie}}, & (4.45) \\ \text{Desplazamientos horizontales} &= \left\{ \frac{l}{g} \frac{\partial}{\partial \theta} U_{\text{superficie}}, \frac{l}{g} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} U_{\text{superficie}} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $g$  es el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Denominando entonces  $(s_{rm}, s_{\theta m}, s_{\phi m})$  a las coordenadas esféricas de los vectores  $\mathbf{s}_m$ , tendremos de (4.44) y (4.45), teniendo en cuenta que  $U_m(r = a_E) = Y_{2m}(\theta, \phi)$ :

$$\begin{aligned} s_{rm}(a_E, \theta, \phi) &= s_{2m}^1(a_E) Y_{2m}(\theta, \phi) = \frac{h}{g} Y_{2m}(\theta, \phi), \\ s_{\theta m}(a_E, \theta, \phi) &= s_{2m}^2(a_E) \frac{1}{a_E} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{2m}(\theta, \phi) = \frac{l}{g} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{2m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (4.46)$$

de donde

$$s_{2m}^1(a_E) = \frac{h}{g}, \quad s_{2m}^2(a_E) = a_E \frac{l}{g}. \quad (4.47)$$

Sin embargo el número de Love que nos afecta directamente para el estudio del potencial de redistribución es el tercero, denotado  $k$ , que da cuenta de las observaciones del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra. Éste se define según (Kaula 1964, Munk y MacDonald 1960):

$$\text{Potencial adicional en la superficie (desplazada)} = k U_{\text{superficie}}. \quad (4.48)$$

Definimos  $V_m(\mathbf{r})$  como el término del potencial de redistribución, según una descomposición del tipo (4.40), asociado al desplazamiento  $\mathbf{s}_m(\mathbf{r})$ , esto es, el potencial adicional o la variación sobre el potencial. Dado que éste es una función escalar cuya parte angular debe satisfacer (4.31) y  $\mathbf{s}_m(\mathbf{r})$  tiene la forma (4.44), podrá descomponerse en variables separadas como

$$V_m(r, \theta, \phi) = R_m(r) Y_{2m}(\theta, \phi). \quad (4.49)$$

Por lo tanto se tendrá que

$$V_m(a_E, \theta, \phi) = R_m(a_E) Y_{2m}(\theta, \phi) = k U_m(r = a_E) = k Y_{2m}(\theta, \phi), \quad (4.50)$$

de manera que

$$R_m(a_E) = k. \quad (4.51)$$

Las simplificaciones aceptadas en este modelo conllevan que los números de Love resulten magnitudes independientes del valor del subíndice<sup>9</sup>  $m$ . El cálculo de éstos no es trivial y atiende a modelos reológicos (Takeuchi 1950, Jeffreys 1976), no obstante en nuestro problema son datos de entrada de la teoría<sup>10</sup>. Para construir la expresión del potencial de redistribución dado por (4.49), necesitamos obtener la parte radial para  $r > a_E$ . Es decir, la solución de la ecuación de Laplace dada por (4.31) compatible con la condición de contorno (4.51). Dado que la solución debe ser acotada, la parte radial será de la forma  $r^{-(l+1)} = r^{-3}$ , por lo que

$$R_m(r) = \frac{A}{r^3} \rightarrow R_m(a_E) = k = \frac{A}{a_E^3} \rightarrow A = ka_E^3, \quad (4.52)$$

de manera que

$$V_m(r, \theta, \phi) = k \left( \frac{a_E}{r} \right)^3 Y_{2m}(\theta, \phi), \quad r \geq a_E. \quad (4.53)$$

Esta expresión puede relacionarse directamente con el término  $U_m$  del potencial de marea dado por (4.39),

$$V_m(r, \theta, \phi) = k \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 U_m(r, \theta, \phi). \quad (4.54)$$

La relación entonces entre los potenciales completos de redistribución y marea se obtiene de la combinación lineal (4.40), ya que ambos admiten un desarrollo en armónicos esféricos con los mismos coeficientes (4.39), al tratarse de potenciales gravitatorios. Por lo tanto

$$V(\mathbf{r}) = \text{Re} \left[ \sum_{m=0}^2 \alpha_m V_m(\mathbf{r}) \right] = k \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 \text{Re} \sum_{m=0}^2 \alpha_m U_m(\mathbf{r}), \quad (4.55)$$

que definitivamente se puede escribir como

$$V(\mathbf{r}) = k \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 U(\mathbf{r}). \quad (4.56)$$

<sup>9</sup>Considerando una deformación más general en (4.35), los números de Love dependen del grado  $l$ , es decir,  $k_l$ . En nuestro caso  $k = k_2$ .

<sup>10</sup>A modo de referencia, valores para los números de Love pueden encontrarse, por ejemplo, en Munk y MacDonald (1960):  $k = 0.290$ ,  $h = 0.587$ ,  $l = 0.068$ . Para más precisión pueden consultarse las expresiones normalizadas del geopotencial en las IERS Conventions (2010), o la tabla 7.1.

Esta expresión para el potencial de redistribución es independiente de las coordenadas utilizadas, ya que depende explícitamente sólo de  $r = \|\mathbf{r}\|$ . Estrictamente es válida bajo la aproximación del desarrollo multipolar dado por (4.35), y coincide con la empleada por Kubo (1991) para el estudio de la variación del tensor de inercia en la Tierra deformable. Este problema lo abordaremos en la siguiente sección.

## 4.4. Dependencia temporal del tensor de inercia

Siguiendo el planteamiento del problema expuesto en las secciones previas, los elementos de matriz de  $\mathbf{I}_1$  son funciones conocidas del tiempo, dependientes de la posición de los cuerpos perturbadores que inducen la deformación de marea, y de las características elásticas (con más generalidad, reológicas) de la Tierra. A partir de la relación existente entre el potencial lunisolar perturbador y el potencial de redistribución, dada por (4.56), usaremos la fórmula de MacCullagh estudiada en la sección 2.6 para encontrar la forma explícita de la matriz de inercia, siguiendo un planteamiento similar al de Peale (1973) o Kubo (1991). Con mayor nivel de detalle puede destacarse Rochester y Smyle (1974).

Para escribir el potencial  $V(\mathbf{r})$  de manera que pueda realizarse una comparación con la expresión de la energía potencial dada por (2.101), conviene explicitarla en coordenadas cartesianas, y para ello reescribiremos el desarrollo multipolar esférico (4.35) en términos del polinomio de Legendre de segundo orden, en virtud del teorema de adición para los armónicos esféricos:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r'} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2(\cos \gamma), \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{rr'}. \quad (4.57)$$

Teniendo en cuenta la forma explícita del polinomio,

$$P_2(\cos \gamma) = \frac{1}{2} \left[ 3 \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{rr'}\right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{r^2 r'^2}, \quad (4.58)$$

resulta

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{2} \frac{1}{r'^5} \left[ 3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \right]. \quad (4.59)$$

Una expresión equivalente para el potencial de redistribución (4.56) es entonces

$$V(\mathbf{r}) = k \frac{Gm}{2} \frac{1}{r'^5} \left(\frac{a_E}{r}\right)^5 \left[ 3(\mathbf{r}\mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 \right]. \quad (4.60)$$

Antes de comparar con la fórmula de MacCullagh es conveniente aclarar, ya que por abuso de notación se han denotado de la misma manera, que la expresión (2.101) se corresponde a la energía potencial (2.84) y no a la función potencial, y que por ello debe dividirse por la masa,  $m$ . Igualmente en la expresión (4.33) del potencial gravitatorio  $U(\mathbf{r})$ , por comodidad no hemos incluido el signo menos que se utiliza con carácter convencional, de modo que la comparación de (4.60) con (2.101) requiere también de un cambio de signo en (4.60). Teniendo en cuenta estos detalles y las expresiones del potencial en coordenadas cartesianas dadas por (2.97) y (2.100), la fórmula de MacCullagh para el potencial de redistribución en términos de los elementos de matriz de  $\mathbf{I}_1$  dados por (4.20) se escribe

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{G}{2r^5} [x^2(-2\Delta A + \Delta B + \Delta C) + y^2(-2\Delta B + \Delta A + \Delta C) + z^2(-2\Delta C + \Delta A + \Delta B) - 6Fxy - 6Exz - 6Dyz]. \quad (4.61)$$

Nótese que el potencial de redistribución es una contribución adicional al geopotencial rígido que induce la variación en el tensor de inercia. Por ello la fórmula de MacCullagh se aplica para los elementos de matriz de  $\mathbf{I}_1$ . Desarrollando (4.60) en coordenadas cartesianas,

$$V(\mathbf{r}) = -k \frac{Gm}{2} \frac{1}{r'^5} \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 [x^2(2x'^2 - y'^2 - z'^2) + y^2(2y'^2 - x'^2 - z'^2) + z^2(2z'^2 - x'^2 - y'^2) + 6xyx'y' + 6xzx'z' + 6yzy'z']. \quad (4.62)$$

Al igualar (4.61) y (4.62), comparamos los términos correspondientes a la diagonal de la matriz de inercia, ya que el resto de términos están desacoplados. Se obtiene el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} -2\Delta A + \Delta B + \Delta C &= \alpha(2x'^2 - y'^2 - z'^2), \\ -2\Delta B + \Delta A + \Delta C &= \alpha(2y'^2 - x'^2 - z'^2), \\ -2\Delta C + \Delta A + \Delta B &= \alpha(2z'^2 - x'^2 - y'^2), \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $\alpha = km(a_E/r')^5$ . El determinante del sistema de incógnitas  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  y  $\Delta C$  es nulo y el sistema resulta compatible indeterminado. El sistema se puede reescribir en términos de la traza de la matriz,  $Tr(\mathbf{I}_1) = \Delta A + \Delta B + \Delta C$ ,

$$\begin{aligned} -3\Delta A + Tr(\mathbf{I}_1) &= \alpha(2x'^2 - y'^2 - z'^2), \\ -3\Delta B + Tr(\mathbf{I}_1) &= \alpha(2y'^2 - x'^2 - z'^2), \\ -3\Delta C + Tr(\mathbf{I}_1) &= \alpha(2z'^2 - x'^2 - y'^2). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Aplicando el teorema de Darwin (Darwin 1910), bajo la hipótesis de sólido incompresible, se tiene  $Tr(\mathbf{I}_1) = 0$ , y el sistema queda desacoplado. Se incluye una demostración de este teorema al final de esta sección. Los términos correspondientes a los productos de inercia en (4.62) se obtienen de forma directa. Podemos dar una expresión compacta para los elementos de matriz renombrando estos como  $\mathbf{I}_{1ij}$ , y las coordenadas  $(x', y', z') = (r'_1, r'_2, r'_3)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{1ii} &= \frac{km}{3} \frac{a_E^5}{r'^5} (r'^2 - 3r_i'^2), \\ \mathbf{I}_{1ij} &= -km \frac{a_E^5}{r'^5} r'_i r'_j \quad (i \neq j).\end{aligned}\quad (4.65)$$

Es habitual definir (Kubo 1991) el parámetro constante<sup>11</sup>

$$\kappa = \frac{1}{3} k m a_E^2 \left( \frac{a_E}{a} \right)^3 \quad (4.66)$$

donde  $a$  es la distancia media entre el geocentro y el cuerpo perturbador, tal como se ha empleado ya con anterioridad. De esta manera, la matriz  $\mathbf{I}_1$  queda finalmente escrita en términos de las coordenadas cartesianas  $(x', y', z')$  y módulo  $r'$  del radiovector del astro perturbador de masa  $m$ , referido al sistema de Tisserand, como

$$\mathbf{I}_1 = \kappa \frac{a^3}{r'^5} \begin{pmatrix} r'^2 - 3x'^2 & -3x'y' & -3x'z' \\ -3x'y' & r'^2 - 3y'^2 & -3y'z' \\ -3x'z' & -3y'z' & r'^2 - 3z'^2 \end{pmatrix}. \quad (4.67)$$

Considerando las coordenadas del cuerpo perturbador como funciones conocidas del tiempo (siguiendo la conexión con las teorías orbitales abordada en la sección 2.7), la expresión anterior proporciona la dependencia temporal del tensor de inercia,  $\mathbf{I}_1(t)$ .

Conviene hacer la aclaración de que los elementos de la matriz de inercia, definidos en (4.20), y por ende en (4.67), son los correspondientes al sistema de Tisserand conforme se abordó en la sección 4.1. En ese sentido disponemos de una expresión para  $\mathbf{I}_1(t)$ .

El parámetro  $\kappa$  determina el orden de magnitud de  $\|\mathbf{I}_1\|$ . Teniendo en cuenta (4.20), la magnitud de la perturbación elástica puede caracterizarse por<sup>12</sup>  $\kappa/C$ .

<sup>11</sup>En Getino y Ferrándiz (1995) se denota  $\kappa = 2D_t$ .

<sup>12</sup>Valores numéricos para la Luna ( $\kappa_L$ ) y el Sol ( $\kappa_S$ ) pueden encontrarse en Kubo (1991):  $\kappa_L = 5.66 \times 10^{-8} kC$ ,  $\kappa_S = 2.60 \times 10^{-8} kC$ . Teniendo en cuenta el valor de referencia  $k = 0.290$ , en el caso más desfavorable la magnitud de la perturbación resulta  $\kappa_L/C \simeq 1.64 \times 10^{-8}$ .

#### 4.4.1. Demostración del teorema de Darwin

Por último demostraremos el teorema de Darwin empleado para la resolución del sistema (4.63). Demostraremos que  $Tr(\mathbf{I}_1) = 0$  encontrando la expresión explícita de la traza, en términos del campo de desplazamientos. Siguiendo la notación de (4.20),  $Tr(\mathbf{I}_1) = Tr(\mathbf{I}) - Tr(\mathbf{I}_0)$ , donde  $\mathbf{I}$  es el tensor de inercia del sólido deformado, e  $\mathbf{I}_0$  en el estado sin deformar. Aplicando (2.92) se tiene

$$Tr(\mathbf{I}) = 2 \int_{V^*} \varrho(\mathbf{r}^*) r^{*2} d^3 \mathbf{r}^*, \quad (4.68)$$

donde hemos denotado con un asterisco (\*) las magnitudes correspondientes al estado deformado del sólido. La deformación conserva los elementos de masa, ya que no hay flujo de masa en la frontera de los elementos de volumen. Por lo tanto, se tiene

$$dm^* = \varrho(\mathbf{r}^*) d^3 \mathbf{r}^* = dm = \varrho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (4.69)$$

La deformación viene determinada por el campo de vectores desplazamiento  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ , de modo que  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r})$ . Considerando esta transformación como un cambio de variable para el cálculo de la integral (4.68), se tiene

$$Tr(\mathbf{I}) = 2 \int_V \varrho(\mathbf{r}) [\mathbf{r} + \mathbf{s}(\mathbf{r})]^2 d^3 \mathbf{r}, \quad (4.70)$$

integral que se evalúa en el estado sin deformar. Desarrollando el cuadrado,

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{I}) &= 2 \int_V \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 d^3 \mathbf{r} + 2 \int_V \varrho(\mathbf{r}) \mathbf{s}^2 d^3 \mathbf{r} + 4 \int_V \varrho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d^3 \mathbf{r} = \\ &= Tr(\mathbf{I}_0) + 4 \int_V \varrho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d^3 \mathbf{r} + O(\mathbf{s}^2), \end{aligned} \quad (4.71)$$

donde despreciaremos el término de orden  $\mathbf{s}^2$  bajo la aproximación de pequeñas deformaciones,  $\|\mathbf{s}\| \ll \|\mathbf{r}\|$ . De donde se sigue que

$$Tr(\mathbf{I}_1) = Tr(\mathbf{I}) - Tr(\mathbf{I}_0) = 4 \int_V \varrho(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d^3 \mathbf{r}. \quad (4.72)$$

Considerando la expresión (4.42) para  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  en términos de la base local de los armónicos esféricos vectoriales, determinamos el producto escalar

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \sum_{l,m} s_{lm}^1(r) r Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.73)$$

ya que el resto de términos son ortogonales a  $\mathbf{r}$ . Escribiendo el elemento de volumen en coordenadas esféricas,  $d^3 \mathbf{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , en el caso de simetría

radial en la distribución de masa,  $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(r)$ , podemos integrar separadamente la parte angular,

$$\begin{aligned} \int_S Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi &= \sqrt{4\pi} \int_S Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{00}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde se ha utilizado que  $Y_{00}^*(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$ , y la relación de ortogonalidad de los armónicos esféricos<sup>13</sup> (Bell 1968). Por lo tanto

$$\begin{aligned} Tr(\mathbf{I}_1) &= 4\sqrt{4\pi} \sum_{l,m} \int_0^{a_E} \varrho(r) r^3 s_{lm}^1(r) \delta_{l0} \delta_{m0} dr = \\ &= 8\sqrt{\pi} \int_0^{a_E} \varrho(r) r^3 s_{00}^1(r) dr. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Este resultado muestra que a primer orden de deformación,  $Tr(\mathbf{I}_1)$  es proporcional a la componente  $s_{00}^1(r)$  del campo de desplazamientos. En nuestro problema los vectores desplazamiento son de la forma (4.44), con armónicos de orden  $l = 2$ , donde  $s_{00}^1(r) = 0$ . Por lo tanto

$$Tr(\mathbf{I}_1) = 0.$$

En un modelo de deformación más general, que incluya armónicos de todos los órdenes, se puede demostrar que la condición suficiente para la nulidad de la traza es que el campo de desplazamientos sea solenoidal,  $\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{s} = 0$  (Rochester y Smylie 1974), que es una condición derivada de la hipótesis de incompresibilidad. Dado que no es el caso que nos atañe, no se considera necesario incluir aquí la demostración en el caso general.

## 4.5. Integración de primer orden

Considerando el hamiltoniano con las contribuciones indicadas en (4.30), y en virtud de la linealidad del método de Horie a primer orden de perturbación, en este capítulo abordaremos la integración del término de energía cinética de redistribución,  $T_t$ , dado por (4.29)

$$T_t = -\frac{\Delta C}{2C^2} N^2 - \frac{MN}{AC} \sigma (E \sin \nu + D \cos \nu). \quad (4.76)$$

El algoritmo de integración es el mismo que el empleado en la sección 3.1, y por lo tanto no requiere de mayor detalle en la descripción del proceso. Este

<sup>13</sup>  $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

término del hamiltoniano es función de los elementos de matriz  $\Delta C$ ,  $E$  y  $D$  de  $\mathbf{I}_1$ . Éstos dependen de las posiciones del astro perturbador según (4.67), referidas al sistema de Tisserand, que son funciones conocidas del tiempo.

Omitiremos las primas en las coordenadas en lo sucesivo, al no existir riesgo de confusión, de modo que las coordenadas serán  $(x, y, z)$  y  $r$  el módulo de su radiovector. La conexión con las teorías orbitales para la Luna y el Sol requiere de la expresión de estos elementos de matriz en armónicos esféricos y de las expresiones (2.125). Por lo tanto, la nueva contribución debida a la deformación de la Tierra será fundamentalmente periódica, en virtud de los argumentos  $\Theta_i$  introducidos en (2.113). Como ya se estudió, a primer orden de perturbación los movimientos secular y periódico están desacoplados, de modo que esta contribución influirá principalmente sobre el movimiento de nutación.

A fin de hacer uso de la conocida conexión de las teorías orbitales, la posición de los cuerpos perturbadores se describirá en variables de Andoyer, dado que la conexión entre sistema de Tisserand y sistema celeste inercial se puede realizar vía la secuencia de rotaciones (2.38), que simbólicamente podemos escribir como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{X}(t). \quad (4.77)$$

Las variables canónicas que aparecen en  $\mathbf{R}(t)$  son también funciones del tiempo, y no participarán, entonces, en las diferentes derivadas que se realizarán en el proceso de construcción de las ecuaciones del movimiento y la obtención de sus soluciones a primer orden (Kaula 1964, Peale 1973). Es habitual en algunas referencias (Getino y Ferrándiz 1995) emplear el símbolo  $\sim$  para denotar las variables relativas a los cuerpos perturbadores (en el sentido de inductores de deformación). Por simplicidad de notación nosotros sólo lo utilizaremos cuando pueda existir riesgo de confusión, esto es, cuando en una misma expresión coexistan variables referidas a cuerpos perturbados y perturbadores.

Siguiendo lo descrito en la sección 2.5, el uso de las soluciones de las teorías orbitales referidas a la eclíptica de la fecha implicaba la introducción del término  $E(\Lambda, M, \lambda)$  en el hamiltoniano (4.30). Estrictamente cuando el movimiento orbital desempeña el papel de funciones conocidas del tiempo para la variación del tensor de inercia, también debería considerarse una corrección por la no inercialidad del sistema de referencia. Sin embargo, dado que no afecta directamente a las variables canónicas del problema, esto es, a las que describen el movimiento de rotación de la Tierra, ni por tanto a las diferentes dependencias funcionales a través de las que se generan las ecuaciones del movimiento, podemos despreciar numéricamente esta correc-

ción<sup>14</sup>. En todo caso introduciría una pequeña contribución de índole secular, que tampoco interaccionaría con las nutaciones debidas a la deformación de marea. Supondremos por tanto que el sistema celeste dado por la eclíptica de la fecha es el sistema de referencia respecto al cual hemos construido el sistema de Tisserand en la sección 4.1.

Para la aplicación del método de Hori, el problema no perturbado es el mismo que en el caso rígido,  $H_0 = T_0$  dado por (4.27), cuya solución se aborda en la sección 2.4. Empleando la notación para el sistema auxiliar de Hori, son válidas las expresiones (3.6).

Escribimos los elementos de matriz de  $\mathbf{I}_1$  dados en (4.67) en términos de los armónicos esféricos (2.95),

$$\begin{aligned}\Delta C &= \kappa \frac{a^3}{r^5} (r^2 - 3z^2) = -2\kappa \left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}(\eta, \alpha), \\ E &= -3\kappa \frac{a^3}{r^5} xz = -\kappa \left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{21}(\eta, \alpha), \\ D &= -3\kappa \frac{a^3}{r^5} yz = -\kappa \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta, \alpha),\end{aligned}\tag{4.78}$$

donde  $(r, \eta, \alpha)$  son las coordenadas esféricas del cuerpo perturbador, referidas al sistema de Tisserand. La conexión con las teorías orbitales se realiza vía las expresiones (2.125), que a orden 0 en  $\sigma$  se escriben

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}(\eta, \alpha) &= 3 \sum_i B_i(I) \cos \Theta_i, \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{21}(\eta, \alpha) &= 3 \sum_{i, \tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \sin(\mu + \nu - \tau \Theta_i), \\ \left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta, \alpha) &= 3 \sum_{i, \tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu + \nu - \tau \Theta_i).\end{aligned}\tag{4.79}$$

Sustituiremos (4.79) en (4.78) para obtener las expresiones explícitas para los elementos de matriz. Recordemos, sin embargo, una vez más que las variables canónicas,  $\mu$ ,  $\nu$  y  $\lambda$  (ésta implícitamente en  $\Theta_i$ ) así como el ángulo auxiliar  $I$ , son funciones conocidas del tiempo. Con suficiente exactitud puede tomarse para éstas la solución del problema del sólido rígido libre dada por (2.58), (2.61) y (2.62). Esto implica suponer que la deformación inducida por los astros perturbadores se produce sobre una Tierra no perturbada en su movimiento de rotación por ellos mismos, lo cual es numéricamente admisible

<sup>14</sup>Es un movimiento de rotación muy lento, y se considera como secular. Véase por ejemplo la nota al pie en la página 75.

considerando la magnitud de las nutaciones de la Tierra rígida. Así, recordando que para las constantes de integración se verifica  $N_0 = M_0 + O(\sigma^2) \simeq C\omega_E$ , se tendrá en el argumento de las funciones trigonométricas de (4.79):

$$\begin{aligned}\mu + \nu &= \mu_0 + \nu_0 + \left[ \frac{M_0}{A} + \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) N_0 \right] t = \\ &= \mu_0 + \nu_0 + \omega_E t,\end{aligned}\quad (4.80)$$

de manera que podemos sustituir

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} (\mu + \nu - \tau\Theta_i) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{sen} \\ \text{cos} \end{array} \right\} (\omega_E t - \tau\Theta_i), \quad (4.81)$$

pudiendo prescindir para nuestros propósitos de la fase constante,  $\mu_0 + \nu_0$ , en el argumento de las funciones trigonométricas. Los elementos de matriz (4.78) quedan entonces

$$\begin{aligned}\Delta C &= -6\kappa \sum_i B_i(I_0) \cos \Theta_i, \\ E &= -3\kappa \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I_0, \tau) \text{sen} (\omega_E t - \tau\Theta_i), \\ D &= -3\kappa \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I_0, \tau) \text{cos} (\omega_E t - \tau\Theta_i),\end{aligned}\quad (4.82)$$

donde  $\Theta_i \equiv \Theta_i(t) = n_i t + \Theta_{i0}$ , conforme a (2.114).

La introducción de las relaciones (4.82) en el hamiltoniano de perturbación (4.76),  $H_1 = T_t$ , nos permite abordar la integración de primer orden siguiendo el método de Hori

$$H_0^* = H_0(M^*, N^*) = \frac{1}{2} \frac{M^{*2}}{A} + \frac{1}{2} N^{*2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \quad (4.83)$$

$$H_1^* = H_{1\text{sec}}(p^*, q^*) = \sum_{p=L,S} 3\kappa_p B_{0;p}(I_0) \frac{N^{*2}}{C^2}, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned}H_{1\text{per}} &= H_1 - H_{1\text{sec}} = \\ &= \sum_{p=L,S} \left\{ 3\kappa_p \frac{N^{*2}}{C^2} \sum_{i \neq 0} B_{i;p}(I_0) \cos \Theta_i + 3\kappa_p \frac{M^* N^*}{AC} \sigma^* \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i,\tau=\pm 1} C_{i;p}(I_0, \tau) \cos (\omega_E t - \tau\Theta_i - \nu^*) \right\}.\end{aligned}\quad (4.85)$$

La función generatriz se construye a partir de (2.149),

$$W_1^* = \int_{UP} H_{1\text{per}} dt, \quad (4.86)$$

donde debe recordarse que el método requiere de la inversión del sistema de soluciones del caso no perturbado, dado por (3.13). A modo de ejemplo, la integración de uno de los términos resulta

$$\int_{UP} \cos(\omega_E t - \tau \Theta_i - \nu^*) dt = \frac{1}{\omega_E - \tau n_i - n_\nu^*} \operatorname{sen}(\omega_E t - \tau \Theta_i - \nu^*). \quad (4.87)$$

Teniendo en cuenta (2.62), podemos escribir

$$\omega_E - \tau n_i - n_\nu^* = \frac{1}{AC} [(\omega_E - \tau n_i) AC - (A - C) N_0^*], \quad (4.88)$$

donde realizaremos la sustitución  $N_0^* = N^*$  en virtud de (3.13).

La función generatriz que se obtiene realizando este proceso es

$$W_1^* = \sum_{p=L,S} \left\{ 3\kappa_p \frac{N^{*2}}{C^2} \sum_{i \neq 0} B_{i;p}(I_0) \operatorname{sen} \Theta_i - 3\kappa_p M^* N^* \sigma^* \right. \\ \left. \times \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I_0, \tau)}{(A - C) N^* + AC(\tau n_i - \omega_E)} \operatorname{sen}(\omega_E t - \tau \Theta_i - \nu^*) \right\}. \quad (4.89)$$

## 4.6. Movimiento de precesión

Abordaremos en primer lugar la dependencia temporal de  $\mu^* + \nu^*$  en términos de las constantes del problema. Para el caso no perturbado se tiene (4.80), veamos si es suficiente como aproximación para la evolución temporal de estas variables canónicas emplear que  $\mu^* + \nu^* = \mu_0^* + \nu_0^* + \omega_E t$ .

Tal como estudiamos en la sección 3.3, para el movimiento de precesión de estas variables se tiene (3.74),  $n_\mu^* + n_\nu^* = \omega_E + O(\sigma^{*2})$ , o equivalentemente  $\mu^* + \nu^* = \mu_0^* + \nu_0^* + \omega_E t + O(\sigma^{*2})$ . Respecto al caso rígido, la evolución de las variables se ve afectada por el hamiltoniano secular adicional (4.84). Éste no supone ninguna variación para la variable  $\mu^*$  dado que  $\{\mu^*, H_1^*\} = 0$ , al no depender de  $M^*$ . Teniendo en cuenta (3.16), para la derivada temporal de la variable  $\nu^*$  existe una contribución adicional dada por

$$\delta n_\nu^* = \{\nu^*, H_1^*\} = 6 \sum_{p=L,S} \kappa_p B_{0;p}(I_0) \frac{N^*}{C^2}, \quad (4.90)$$

que evidentemente es numéricamente despreciable al depender del pequeño parámetro  $\kappa_p/C$ , frente al resto de términos del argumento de la función trigonométrica,  $\delta n_\nu^* \simeq 10^{-8} \omega_E$ . Utilizaremos entonces para las expresiones de las nutaciones debidas a la deformación de marea que

$$\mu^* + \nu^* = \mu_0^* + \nu_0^* + \omega_E t. \quad (4.91)$$

Como consecuencia de (3.38) y (4.84), se tiene que  $N^* = N_0^*$ , y no existe contribución adicional al movimiento secular de  $I^*$  y  $\lambda^*$ , es decir

$$\delta n_\lambda = 0, \delta n_I = 0. \quad (4.92)$$

En este apartado conviene incluir una aclaración sobre la equivalencia con el planteamiento seguido en Escapa (2011), ya que en esta referencia los momentos de inercia, que denominaremos  $A_0$  y  $C_0$ , incluyen los del caso rígido más la contribución elástica de tipo permanente. En nuestro caso los momentos principales de inercia son los empleados en el modelo de Tierra rígida del capítulo anterior (los dados por el valor constante  $A/C = 1 - H_d$ ). Centrando la discusión en el tercer momento de inercia, para el que hemos introducido expresiones con anterioridad, la diferencia estriba en la contribución secular de (4.82), dada por el término  $i = (0, 0, 0, 0, 0)$ , esto es

$$\Delta C_{\text{sec}} = -6 \sum_{p=L,S} \kappa_p B_{0;p}(I_0) = \langle \Delta C \rangle. \quad (4.93)$$

Con el modelo de deformación en estudio (primer orden de deformación a través del teorema de Darwin, y potencial de marea de orden  $l = 2$ ), ésta es la única fuente de deformación permanente. Si hay otras, son indistinguibles por el modelo mecánico. Nótese que en nuestro caso el promedio temporal  $\langle \Delta \mathbf{I}_1 \rangle$  resulta una matriz diagonal, y en el caso de Escapa (2011) es nulo. Así pues,  $C_0 = C + \Delta C_{\text{sec}}$ , que es irrelevante desde el punto de vista de la representación numérica, ya que tal como se indicó en la nota al pie de la página 98,  $\kappa_p \simeq 10^{-8}C$ . La definición de Escapa (2011) para  $\mathbf{I}_0$  conlleva que  $H_1^* = H_{1\text{sec}}(p^*, q^*) = 0$ , frente a (4.84), y por lo tanto no se tiene variación en el movimiento de precesión de ninguna de las variables respecto del caso de la Tierra rígida, al resultar la perturbación puramente periódica. En nuestro caso existe una pequeña contribución vinculada a (4.90), que se añade a los términos de la precesión del caso rígido, dada la linealidad de las ecuaciones de Hamilton.

Sin embargo, la elección de Escapa (2011) conlleva recalculer los movimientos de nutación y precesión del caso rígido, ya que la modificación de los elementos de matriz de  $\mathbf{I}_0$  implica una modificación en  $T_0$ . Evidentemente conduce a la misma solución, ya que la energía cinética  $T_0$  en el caso rígido (modificado) incluirá una contribución secular equivalente a partir de

$$\frac{N^2}{2C_0} = \frac{N^2}{2(C + \Delta C_{\text{sec}})} \simeq \frac{N^2}{2C} - \frac{N^2}{2C^2} \Delta C_{\text{sec}} = \frac{N^2}{2C} + H_{1\text{sec}}, \quad (4.94)$$

donde  $H_{1\text{sec}}$  es el dado por (4.84). La contribución secular  $\Delta A_{\text{sec}}$  no participa en este orden aproximación debido a que  $M^2 - N^2 \sim O(\sigma^2)$ .

## 4.7. Movimiento de nutación

Calcularemos las nutaciones del eje de figura<sup>15</sup>, estudiando separadamente los términos de Poisson y Oppolzer. La dependencia con las variables canónicas de la función generatriz (4.89),  $W_1^* = W_1^*(M^*, N^*, \sigma^*, \nu^*)$ , nos lleva de manera inmediata a concluir que no existe contribución de los términos de Poisson, es decir, en las nutaciones de los ángulos direccionales del eje del momento angular. En efecto, las expresiones (3.18) y (3.19) conducen a

$$\Delta \lambda = 0, \quad \Delta I = 0. \quad (4.95)$$

Este resultado está en concordancia con la afirmación de Moritz y Mueller (1986, apdo. 3.3.2) de que, a primer orden de perturbación, la estructura de la Tierra no afecta al movimiento del momento angular, esto es, a los términos de Poisson. Esto es, el movimiento del eje de momento angular es el mismo para una Tierra rígida o elástica, salvo que en el modelo se introduzcan nuevos términos en la energía potencial del sistema, como veremos en el próximo capítulo.

La deformación de marea contribuye a las nutaciones a través de los términos de Oppolzer, es decir, en los ángulos direccionales del eje de figura en el sistema de Tisserand. A partir de (3.24)

$$\Delta(\phi - \lambda) = \left\{ \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*}, W_1^* \right\}, \quad \Delta(\theta - I) = \{ \sigma^* \cos \mu^*, W_1^* \}.$$

Es conveniente expandir

$$\text{sen}(\omega_E t - \tau \Theta_i - \nu^*) = \text{sen}(\omega_E t - \tau \Theta_i) \cos \nu^* - \cos(\omega_E t - \tau \Theta_i) \text{sen} \nu^* \quad (4.96)$$

para la realización de las derivadas y posterior agrupamiento con otros términos. Indicamos los pasos más relevantes de estos cálculos

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \frac{1}{M^* \text{sen } I^* \text{sen } \sigma^*} \left[ \text{sen } \mu^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \nu^*} + \sigma^* \cos \mu^* \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( M^* \text{sen } \sigma^* \frac{\partial W_1^*}{\partial M^*} + \cos \sigma^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} \right) \right], \quad (4.97) \end{aligned}$$

donde mantenemos sólo el orden  $O(\sigma^0)$ , y por tanto el término de la derivada  $\partial W_1^*/\partial M^*$  no se considera. Al agrupar las funciones trigonométricas de

<sup>15</sup> Observemos que como estamos calculando las nutaciones del eje de figura, no es necesario incluir los *términos convectivos* (Efroimsky y Escapa 2007, Escapa 2011).

$\partial W_1^*/\partial \nu^*$  y  $\partial W_1^*/\partial \sigma^*$  se tiene,

$$\begin{aligned} & \sin(\omega_E t - \tau \Theta_i) \cos(\mu^* + \nu^*) - \cos(\omega_E t - \tau \Theta_i) \sin(\mu^* + \nu^*) \\ &= \sin[\omega_E t - \tau \Theta_i - (\mu^* + \nu^*)] = -\sin[(\mu^* + \nu^*) - (\omega_E t - \tau \Theta_i)]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Finalmente resulta

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= \sum_{p=L,S} \frac{3\kappa_p}{\sin I^*} N^* \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I_0, \tau)}{(A-C)N^* + AC(\tau n_i - \omega_E)} \times \\ &\times \sin[(\mu^* + \nu^*) - (\omega_E t - \tau \Theta_i)] + O(\sigma^*). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Con una manipulación completamente análoga se llega a

$$\begin{aligned} \Delta(\theta - I) &= \frac{1}{M^* \sin \sigma^*} \left[ \cos \mu^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \nu^*} - \sigma^* \sin \mu^* \times \right. \\ &\times \left. \left( M^* \sin \sigma^* \frac{\partial W_1^*}{\partial M^*} + \cos \sigma^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.100)$$

que involucra las mismas derivadas que el caso anterior. El resultado es ahora

$$\begin{aligned} \Delta(\theta - I) &= \sum_{p=L,S} 3\kappa_p N^* \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_i(I_0, \tau)}{(A-C)N^* + AC(\tau n_i - \omega_E)} \times \\ &\times \cos[(\mu^* + \nu^*) - (\omega_E t - \tau \Theta_i)] + O(\sigma^*). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Teniendo en cuenta que  $\mu^* + \nu^* = \mu_0^* + \nu_0^* + \omega_E t$ , dado por (4.91), podemos realizar la sustitución:

$$\begin{aligned} \sin[(\mu^* + \nu^*) - (\omega_E t - \tau \Theta_i)] &\rightarrow \sin(\tau \Theta_i) = \tau \sin \Theta_i, \\ \cos[(\mu^* + \nu^*) - (\omega_E t - \tau \Theta_i)] &\rightarrow \cos \Theta_i, \end{aligned} \quad (4.102)$$

prescindiendo de la fase constante,  $\mu_0^* + \nu_0^*$ , en el argumento de las funciones trigonométricas, al igual que se hizo anteriormente (se cancelaría con  $\mu_0 + \nu_0$ ). Considerando (3.62)<sup>16</sup> y (4.92) es admisible numéricamente  $I^* = I_0^* = I_0$ , esto es, evaluarlo numéricamente en una época dada (J2000.0) tal como se hizo en la representación numérica de las nutaciones en el caso rígido. Usando finalmente que  $N_0^* \simeq C\omega_E$ , las amplitudes de las fórmulas de nutación pueden reescribirse como

$$\frac{N_0^*}{(A-C)N_0^* - AC\omega_E + \tau ACn_i} = -\frac{1}{C} \frac{1}{1 - \tau \frac{A n_i}{C \omega_E}}. \quad (4.103)$$

<sup>16</sup>La representación numérica de estas expresiones puede consultarse en Kinoshita (1975). Para  $\varepsilon = -I^*$  se tiene  $\varepsilon \simeq 23^\circ 26' 21''.47 - 46''.81559t - \dots$ , con  $t$  en centurias julianas desde J2000.0.

Las expresiones (4.99) y (4.101) resultan entonces

$$\begin{aligned}\Delta(\phi - \lambda) &= - \sum_{p=L,S} \frac{3\kappa_p}{C \operatorname{sen} I_0} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{\tau C_{i;p}(I_0, \tau)}{1 - \tau \frac{A n_i}{C \omega_E}} \operatorname{sen} \Theta_i, \\ \Delta(\theta - I) &= - \sum_{p=L,S} \frac{3\kappa_p}{C} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I_0, \tau)}{1 - \tau \frac{A n_i}{C \omega_E}} \cos \Theta_i,\end{aligned}\quad (4.104)$$

coincidentes con las ecuaciones (61) de Escapa (2011). Introduciendo el coeficiente  $K_t$  definido por Getino y Ferrándiz (1995), que en el caso simétrico es

$$K_{t;p} = 3D_{t;p} \frac{M}{C} \frac{2}{A} \simeq 3\kappa_p \frac{\omega_E}{A}, \quad (4.105)$$

y teniendo en cuenta que  $n_\mu^* = M_0^*/A \simeq C\omega_E/A$ , se recuperan los términos de Oppolzer (6.20) y (6.21) de esta referencia:

$$\begin{aligned}\Delta(\phi - \lambda) &= - \sum_{p=L,S} \frac{K_{t;p}}{\operatorname{sen} I_0} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{\tau C_{i;p}(I_0, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i} \operatorname{sen} \Theta_i, \\ \Delta(\theta - I) &= - \sum_{p=L,S} K_{t;p} \sum_{i,\tau=\pm 1} \frac{C_{i;p}(I_0, \tau)}{n_\mu^* - \tau n_i} \cos \Theta_i.\end{aligned}\quad (4.106)$$

El coeficiente  $K_t$  está relacionado con el orden de magnitud de la deformación de marea, y permite que estas expresiones sean, formalmente, muy similares a las del caso de la Tierra rígida, (3.29) y (3.32).

Dada la similitud formal (señalada por Kubo 1991) entre las expresiones de las nutaciones dadas por (4.106) y las correspondientes al caso rígido, (3.29) y (3.32), para la representación numérica se procede de forma análoga a lo indicado en la sección 3.2. Se toman los parámetros de las tablas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4. Para los valores de  $\kappa_p$  y el número de Love  $k$ , se emplean los dados por Kubo (1991) indicados en la nota al pie de la página 98. La unidad de las amplitudes es  $1 \mu\text{as}$  (microsegundo de arco).

Tabla 4.1: Nutaciones del plano de figura para los principales argumentos (amplitudes y comparación con Escapa 2011)

Argumento			Periodo		Longitud [ $\mu\text{s}$ ]		Oblicuidad [ $\mu\text{s}$ ]		
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	Calculado	E-11	Calculado	E-11
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	+1053.97	+1051.11	-312.32	-311.47
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	-20.58	-20.53	+7.51	+7.49
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	+0.29	+0.29	-42.22	-42.11
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	+19.64	+19.59	-7.17	-7.15
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	-2346.96	-2346.96	+857.33	+857.33
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	-137.89	-137.55	+50.40	+50.27
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+27.40	27.33	-302.19	-301.36
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	-5395.72	-5381.05	+1992.35	+1986.93
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	-1105.11	-1102.10	+341.03	+340.10
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	-1072.18	-1069.26	+397.97	+396.89



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 5

## Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución

### 5.1. Potencial de redistribución en variables canónicas

En este capítulo abordaremos la contribución a los movimientos de precesión y nutación de la Tierra elástica, dada por la energía potencial de redistribución a partir de (4.56), que denotaremos por  $V_t$  conforme a la expresión del hamiltoniano (4.30). El estudio se realiza a primer orden de perturbación siguiendo el método descrito y utilizado en los capítulos anteriores.

En virtud de las expresiones (4.56) y (4.57), para cada cuerpo perturbador  $p$  (inductor de deformación) de masa  $m_p$  y vector posición  $\mathbf{r}'$ , y cuerpo perturbado  $q$  (afectado gravitacionalmente por la deformación inducida) de masa  $m_q$ , referenciada a un sistema inercial geocéntrico, se tendrá un potencial dado por

$$V_{t;p,q} = k \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 \frac{G m_p m_q}{r'} \left( \frac{r}{r'} \right)^2 P_2(\cos \gamma). \quad (5.1)$$

Por aplicación de la fórmula de adición de los polinomios asociados de Legendre (Bell 1968), en terminos de los armónicos esféricos reales se tiene

$$P_2(\cos \gamma) = C_{20} C'_{20} + \frac{1}{3} [C_{21} C'_{21} + S_{21} S'_{21}] + \frac{1}{12} [C_{22} C'_{22} + S_{22} S'_{22}], \quad (5.2)$$

donde para abreviar la notación hemos escrito los armónicos esféricos de argumento  $(\eta, \alpha)$  como  $C_{ij}$  y  $S_{ij}$ , y los de argumento  $(\eta', \alpha')$  como  $C'_{ij}$  y  $S'_{ij}$ . Siguiendo el planteamiento del capítulo previo, los armónicos esféricos  $C'_{ij}$  y  $S'_{ij}$  son funciones conocidas del tiempo, es decir, no tendrán dependencia

con las variables canónicas del problema una vez expresados en el conjunto de variables de Andoyer como funciones conocidas del tiempo. Para éstos es admisible numéricamente el orden de aproximación  $O(\tilde{\sigma}^0)$  conforme a (4.79), donde hemos de añadir las expresiones correspondientes a los armónicos  $C'_{22}$  y  $S'_{22}$  a partir de las expresiones generales (2.125),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 C'_{20} &= 3 \sum_j B_j(\tilde{I}) \cos \tilde{\Theta}_j, \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 C'_{21} &= 3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} C_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{sen} \left( \tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 S'_{21} &= 3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} C_j(\tilde{I}, \tau) \cos \left( \tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 C'_{22} &= -3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} D_j(\tilde{I}, \tau) \cos \left( 2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 S'_{22} &= 3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} D_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{sen} \left( 2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Tal como se indicó en el capítulo anterior, empleamos el símbolo  $\sim$  para denotar las variables de Andoyer (coordenadas, momentos y funciones de éstos) relativas a los cuerpos perturbadores, al objeto de distinguir las funciones dependientes del tiempo de las variables canónicas del problema.

En el orden de aproximación de validez de estas expresiones, es común encontrar en la literatura una equivalencia de denominación entre el orden  $m$  de los armónicos, y por tanto la contribución *zonal* ( $m = 0$ ), *teseral* ( $m = 1$ ) y *sectorial* ( $m = 2$ ) del potencial, y la frecuencia aproximada o promedio del argumento asociado a estos armónicos, denominadas bandas, de *largo periodo*, *diurna* y *semidiurna*, respectivamente. Ello es debido a que el periodo aproximado de la combinación de variables  $\tilde{\mu} + \tilde{\nu}$  es de un día (frecuencia diurna), conforme a (4.80), y las expresiones (5.3) establecen la correspondencia

$$\begin{aligned}
C'_{20} &\rightarrow \text{argumento independiente de } \tilde{\mu} + \tilde{\nu} \rightarrow \text{banda de largo periodo,} \\
C'_{21}, S'_{21} &\rightarrow \text{argumento dependiente de } \tilde{\mu} + \tilde{\nu} \rightarrow \text{banda diurna,} \\
C'_{22}, S'_{22} &\rightarrow \text{argumento dependientes de } 2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} \rightarrow \text{banda semidiurna.} \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Igualmente establecen una correspondencia entre el orden del armónico y las

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 113

funciones  $\tilde{B}_j$ ,  $\tilde{C}_j$  y  $\tilde{D}_j$  involucradas

$$\begin{aligned} C'_{20} &\rightarrow \tilde{B}_j \text{ (contribución zonal),} \\ C'_{21}, S'_{21} &\rightarrow \tilde{C}_j \text{ (contribución teseral),} \\ C'_{22}, S'_{22} &\rightarrow \tilde{D}_j \text{ (contribución sectorial).} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nótese que estas correspondencias están vinculadas al orden de aproximación empleado (orden 0 en  $\sigma$ ) para la expresión de los armónicos esféricos relativos a los cuerpos perturbadores, esto es, aquellos que son funciones conocidas del tiempo en el desacople del problema.

Para el desarrollo en variables de Andoyer de los armónicos dependientes de las coordenadas esféricas de los cuerpos perturbados,  $(\eta, \alpha)$ , se habrá de mantener el primer orden en el ángulo  $\sigma$ , debido a que las ecuaciones del método de perturbaciones involucran derivadas respecto de éste, a fin de garantizar la completitud del orden  $O(\sigma^0)$  en las expresiones de la evolución temporal de las funciones canónicas. Se tendrá entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_q}{r}\right)^3 C_{20} &= 3 \sum_i B_i(I) \cos \Theta_i - \\ &\quad - 3\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu - \tau\Theta_i), \\ \left(\frac{a_q}{r}\right)^3 C_{21} &= 3 \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \sin(\mu + \nu - \tau\Theta_i) + \\ &\quad + \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} \left[ \frac{9}{2} B_i(I) \sin(\nu - \tau\Theta_i) - \frac{3}{2} D_i(I, \tau) \sin(2\mu + \nu - \tau\Theta_i) \right], \\ \left(\frac{a_q}{r}\right)^3 S_{21} &= 3 \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu + \nu - \tau\Theta_i) + \\ &\quad + \sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} \left[ \frac{9}{2} B_i(I) \cos(\nu - \tau\Theta_i) - \frac{3}{2} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + \nu - \tau\Theta_i) \right], \\ \left(\frac{a_q}{r}\right)^3 C_{22} &= -3 \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \cos(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) - \\ &\quad - 6\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i), \\ \left(\frac{a_q}{r}\right)^3 S_{22} &= 3 \sum_{i,\tau=\pm 1} D_i(I, \tau) \sin(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i) + \\ &\quad + 6\sigma \sum_{i,\tau=\pm 1} C_i(I, \tau) \sin(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i). \end{aligned} \quad (5.6)$$

En lo sucesivo, y siguiendo el convenio empleado, omitiremos el argumento de las funciones  $B$ ,  $C$  y  $D$ , y las denotaremos como  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  y  $\tilde{D}$  cuando éstas dependan de la función temporal  $\tilde{I}$ . Para evitar confusiones entonces con las variables e índices mudos (o sumados), en las expresiones anteriores se han denotado de forma diferente:  $\epsilon, j$  en (5.3) y  $\tau, i$  en (5.6).

La sustitución de (5.2) en (5.1), permite escribir el potencial de redistribución en la forma:

$$V_{t;p,q} = kGm_p m_q \frac{a_E^5}{a_p^3 a_q^3} \left( V_{t;p,q}^{(0)} + V_{t;p,q}^{(1)} + V_{t;p,q}^{(2)} \right), \quad (5.7)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{t;p,q}^{(0)} &= \left( \frac{a_q}{r} \right)^3 C_{20} \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 C'_{20}, \\ V_{t;p,q}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{a_q}{r} \right)^3 C_{21} \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 C'_{21} + \left( \frac{a_q}{r} \right)^3 S_{21} \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 S'_{21} \right], \\ V_{t;p,q}^{(2)} &= \frac{1}{12} \left[ \left( \frac{a_q}{r} \right)^3 C_{22} \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 C'_{22} + \left( \frac{a_q}{r} \right)^3 S_{22} \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 S'_{22} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aquí el superíndice (0), (1), (2) indica la contribución zonal, tesimal y sectorial, conforme a lo señalado anteriormente.

Ha de tenerse en cuenta además que se han de sumar cuatro expresiones del tipo (5.7) al considerarse dos cuerpos perturbados y dos perturbadores (Luna y Sol), dado que como sabemos las funciones  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$  (y las correspondientes con  $\sim$ ) dependen también de éstos.

Así pues, la energía potencial de redistribución resultará

$$V_t = \sum_{p,q=L,S} V_{t;p,q} = \sum_{p,q=L,S} kG \frac{a_E^5}{a_p a_q} m_p m_q \left( V_{t;p,q}^{(0)} + V_{t;p,q}^{(1)} + V_{t;p,q}^{(2)} \right), \quad (5.9)$$

constituída por cuatro bloques de productos de armónicos, los correspondientes a las combinaciones  $(p, q)$ :  $(L, L)$ ,  $(L, S)$ ,  $(S, L)$  y  $(S, S)$ , esto es, Luna-Luna, Luna-Sol, Sol-Luna y Sol-Sol, respectivamente.

Por conveniencia de notación reescribiremos el conjunto de constantes de la expresión (5.9) utilizando las constantes  $k_p$  dadas por (3.34), definidas por Kinoshita (1977) en el estudio de la Tierra rígida, y las  $\kappa_p$  (4.66) definidas por Kubo (1991) en el estudio de la Tierra elástica. Entonces

$$\begin{aligned} kG \frac{a_E^5}{a_p a_q} m_p m_q &= \left( km_p \frac{a_E^5}{a_p^3} \right) \left( G \frac{m_q}{a_q^3} \right) = (3\kappa_p) \left( \frac{1}{3} k_q \frac{\omega_E}{H_d} \right) = \\ &= \frac{\omega_E}{H_d} \kappa_p k_q. \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 115

Nótese que el producto  $\kappa_p k_q$  es simétrico para valores diferentes de los índices  $p$  y  $q$ , es decir

$$\kappa_p k_q = \kappa_q k_p. \quad (5.11)$$

Para realizar la sustitución de las expresiones (5.3) y (5.6) en (5.9) denotaremos los diferentes términos en la forma  $V_t^{(m)}[\sigma^s]$ , donde  $m = 0, 1, 2$  se refiere al término de (5.8) que se está calculando (esto es, el orden de los armónicos esféricos), y  $s = 0, 1$  el orden del ángulo  $\sigma$  en el desarrollo de los armónicos. Realizando los productos y atendiendo a las operaciones trigonométricas habituales obtenemos

$$V_t = V_t^{(0)}[\sigma^0] + V_t^{(1)}[\sigma^0] + V_t^{(2)}[\sigma^0] + V_t^{(0)}[\sigma^1] + V_t^{(1)}[\sigma^1] + V_t^{(2)}[\sigma^1], \quad (5.12)$$

donde los términos de orden  $O(\sigma^0)$  vienen dados por

$$\begin{aligned} V_t^{(0)}[\sigma^0] &= \frac{9\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q B_{i;p} \tilde{B}_{j;q} \cos(\tau\Theta_i - \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_t^{(1)}[\sigma^0] &= 3\frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q C_{i;p} \tilde{C}_{j;q} \cos(\mu + \nu - \tau\Theta_i - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_t^{(2)}[\sigma^0] &= \frac{3\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q D_{i;p} \tilde{D}_{j;q} \times \\ &\quad \times \cos(2\mu + 2\nu - \tau\Theta_i - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j), \end{aligned} \quad (5.13)$$

y los de orden  $O(\sigma^1)$  por

$$\begin{aligned} V_t^{(0)}[\sigma^1] &= -\frac{9\omega_E}{2H_d} \sigma \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q C_{i;p} \tilde{B}_{j;q} \cos(\mu - \tau\Theta_i + \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_t^{(1)}[\sigma^1] &= \frac{9\omega_E}{2H_d} \sigma \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q B_{i;p} \tilde{C}_{j;q} \cos(\nu - \tau\Theta_i - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j) - \\ &\quad - \frac{3\omega_E}{2H_d} \sigma \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q D_{i;p} \tilde{C}_{j;q} \times \\ &\quad \times \cos(2\mu + \nu - \tau\Theta_i - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_t^{(2)}[\sigma^1] &= \frac{3\omega_E}{2H_d} \sigma \sum_{p,q} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q C_{i;p} \tilde{D}_{j;q} \times \\ &\quad \times \cos(\mu + 2\nu - \tau\Theta_i - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j). \end{aligned} \quad (5.14)$$

## 5.2. Integración de primer orden

A resultas de la linealidad del método de Hori, y siguiendo el mismo procedimiento que en los capítulos precedentes, abordaremos la integración del término  $V_t$  dado por (5.12). Para establecer las contribuciones seculares y periódicas de esta perturbación, consideraremos los diferentes argumentos del coseno en las expresiones (5.13) y (5.14). La condición más general para obtener la parte secular del primero de los sumandos,  $V_t^{(0)}[\sigma^0]$ , es la anulación de la frecuencia argumento,  $\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j = 0$ , o equivalentemente en virtud de (2.114),  $\tau \Theta_i - \epsilon \tilde{\Theta}_j = 0$ . Complementariamente la parte periódica vendrá dada por las combinaciones del tipo  $\tau \Theta_i - \epsilon \tilde{\Theta}_j$  no nulas.

Para la descomposición del resto de sumandos hemos de considerar cómo procederemos en el paso siguiente tras el cálculo de la función generatriz,  $W_{t,1}$ , es decir, en la aplicación de las ecuaciones del método de perturbaciones (2.150) para obtener el movimiento del sistema. Éstas involucran derivadas respecto de las variables canónicas del problema y los ángulos auxiliares. Una vez que se hayan realizado, y como consecuencia de que los cuerpos perturbados y perturbadores son los mismos, se podrá identificar, y cancelar cuando proceda, las variables canónicas con las funciones temporales, esto es, las variables con y sin  $\sim$ .

Tal como se señaló en la sección 2.8, en esta situación pueden provocarse resonancias que anularían la convergencia del método si no se selecciona adecuadamente qué términos formarán parte del hamiltoniano secular. Si consideramos, por ejemplo, la integración de la función trigonométrica del segundo de los sumandos,  $V_t^{(1)}[\sigma^0]$ , nos producirá un factor en la amplitud de la forma  $1/(n_\mu + n_\nu - \tau n_i - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} + \epsilon \tilde{n}_j)$ , donde tras la aplicación de las ecuaciones del método podremos identificar  $n_\mu = n_{\tilde{\mu}}$ ,  $n_\nu = n_{\tilde{\nu}}$  y  $\tilde{n}_j = n_j^1$ , resultando  $1/(\epsilon n_j - \tau n_i)$ . Esto provocará un cero en el denominador salvo que se excluya la posibilidad de que  $\epsilon n_j - \tau n_i = 0$ , o equivalentemente, no se consideren las combinaciones  $\tau \Theta_i - \epsilon \tilde{\Theta}_j = 0$  para la construcción de la función generatriz. Así pues, la condición de contribución secular es la misma para los dos primeros sumandos, y análogamente para el tercero, esto es, para todos los términos de orden 0 en  $\sigma$ . En los términos de orden 1 en  $\sigma$  no puede darse esta situación ya que no hay cancelación de todas las variables canónicas de los argumentos, y por lo tanto se incluirán para el cálculo de la función generatriz, es decir, contribuyen exclusivamente a la parte periódica del hamiltoniano.

---

<sup>1</sup>Esto no es estrictamente cierto, ya que las variables canónicas y las funciones temporales no describen exactamente el mismo movimiento, puesto que el cálculo de la función generatriz se hace sobre el caso no perturbado. Numéricamente, sin embargo, es admisible la equivalencia.

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 117

El hamiltoniano de perturbación es  $H_1 = V_t$ . Por lo tanto el hamiltoniano secular, a partir de (5.13), vendrá dado por

$$H_1^* = H_{1\text{sec}}(p^*, q^*) = V_{t,\text{sec}}^{(0)}[\sigma^0] + V_{t,\text{sec}}^{(1)}[\sigma^0] + V_{t,\text{sec}}^{(2)}[\sigma^0], \quad (5.15)$$

donde

$$\begin{aligned} V_{t,\text{sec}}^{(0)}[\sigma^0] &= \frac{9\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} \cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_{t,\text{sec}}^{(1)}[\sigma^0] &= 3\frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} \times \\ &\quad \times \cos(\mu^* + \nu^* - \tau\Theta_i^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j), \\ V_{t,\text{sec}}^{(2)}[\sigma^0] &= \frac{3\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} \times \\ &\quad \times \cos(2\mu^* + 2\nu^* - \tau\Theta_i^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j). \end{aligned} \quad (5.16)$$

La parte periódica del hamiltoniano de perturbación será entonces  $H_{1\text{per}} = H_1 - H_{1\text{sec}}$ , y la función generatriz se construye siguiendo el método descrito en los capítulos precedentes, a partir de (2.149)

$$\begin{aligned} W_1^* &= W_1^{*(0)}[\sigma^0] + W_1^{*(1)}[\sigma^0] + W_1^{*(2)}[\sigma^0] + \\ &\quad + W_1^{*(0)}[\sigma^1] + W_1^{*(1)}[\sigma^1] + W_1^{*(2)}[\sigma^1], \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde los términos de orden  $O(\sigma^0)$  vienen dados por

$$W_1^{*(0)}[\sigma^0] = \frac{9\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q \frac{B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j),$$

$$\begin{aligned}
W_1^{*(1)}[\sigma^0] &= 3 \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\mu^* + n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \text{sen} \left( \mu^* + \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right), \\
W_1^{*(2)}[\sigma^0] &= \frac{3}{4} \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{2n_\mu^* + 2n_\nu^* - 2n_{\tilde{\mu}} - 2n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \text{sen} \left( 2\mu^* + 2\nu^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right), \tag{5.18}
\end{aligned}$$

y los de orden  $O(\sigma^1)$  por

$$\begin{aligned}
W_1^{*(0)}[\sigma^1] &= -\frac{9}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( \mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right), \\
W_1^{*(1)}[\sigma^1] &= \frac{9}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \frac{B_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \text{sen} \left( \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) - \\
&\quad - \frac{3}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{2n_\mu^* + n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \text{sen} \left( 2\mu^* + \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right), \\
W_1^{*(2)}[\sigma^1] &= \frac{3}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{n_\mu^* + 2n_\nu^* - 2n_{\tilde{\mu}} - 2n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \text{sen} \left( \mu^* + 2\nu^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j \right). \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Por último, antes de proceder al cálculo de las contribuciones en los movimientos de precesión y nutación, distinguiremos la contribución de la denominada *marea permanente*, ya que ésta será discriminada en la representación numérica de estos movimientos. Ésta está relacionada con la deformación permanente definida en la sección 4.1. Si consideramos la expresión (4.79) para los elementos de la matriz de inercia que incluye la deformación,  $\mathbf{I}_1$ , en la notación actual tendremos

$$\Delta C_p = -2\kappa_p \left( \frac{a_p}{r'} \right)^3 C'_{20} = -6\kappa_p \sum_j \tilde{B}_j \cos \tilde{\Theta}_j, \tag{5.20}$$

que da una contribución permanente a  $\Delta C$  (debida a la perturbación del cuerpo  $p$ ) si se tiene que  $\tilde{\Theta}_j = 0$ . Nótese que esto no puede ocurrir con el resto de variaciones de los elementos de la matriz de inercia ya que en el argumento de las funciones trigonométricas aparecen también las funciones temporales  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\nu}$ . Por lo tanto, las contribuciones de la marea permanente a los movimientos de precesión y nutación se tendrán con la condición  $\tilde{\Theta}_j = 0$ , y sólo en aquellos términos que dependan de las funciones  $\tilde{B}_j$ .

### 5.3. Movimiento de precesión

Como ya se expuso en la sección 3.3, el movimiento de precesión no es resoluble analíticamente para el problema definido por el hamiltoniano  $H_0^* + H_{1\text{sec}}^{\text{Ríg}}$ , donde con el superíndice “Ríg” denotamos que se trata del hamiltoniano secular (3.8). Este hecho condujo a la necesidad de obtener desarrollos en serie temporal para las variables  $\lambda^*$  e  $I^*$ , tales como (3.62). Evidentemente la situación persiste al introducir en el problema nuevas contribuciones seculares, como las obtenidas en el apartado previo.

En estas condiciones la contribución de éstas al movimiento de precesión se estudia a partir de la variación de las velocidades de precesión  $n_\lambda^* = d\lambda^*/dt$  y  $n_I^* = dI^*/dt$  inducidas por el nuevo hamiltoniano de perturbación, tal y como permite la linealidad el problema establecida por las ecuaciones de Hamilton (3.16).

La variación se limita al primer orden de los desarrollos en serie temporal, en virtud de las magnitudes involucradas. Funcionalmente, y dada la linealidad del problema y las derivadas, las variaciones en las velocidades de precesión se calculan mediante las expresiones (3.39) y (3.40). Dado que el hamiltoniano secular lo tenemos fragmentado en las contribuciones (5.16), trataremos estas variaciones separadamente definiendo

$$\begin{aligned} \delta_k \left( \frac{d\lambda^*}{dt} \right) &\equiv \delta_k n_\lambda = -\frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial V_{t,\text{sec}}^{(k)}[\sigma^0]}{\partial I^*}, \\ \delta_k \left( \frac{dI^*}{dt} \right) &\equiv \delta_k n_I = \frac{1}{M^* \sin I^*} \frac{\partial V_{t,\text{sec}}^{(k)}[\sigma^0]}{\partial \lambda^*}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \delta n_\lambda &= \delta_0 n_\lambda + \delta_1 n_\lambda + \delta_2 n_\lambda, \\ \delta n_I &= \delta_0 n_I + \delta_1 n_I + \delta_2 n_I. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Tal como apuntábamos en la sección anterior, una vez realizadas estas derivadas se podrá identificar, y cancelar cuando proceda, las variables

canónicas con las funciones temporales, esto es, las variables con y sin  $\sim$ , dada la coincidencia entre cuerpos perturbadores y perturbados.

Para la variación en la velocidad de precesión en longitud, realizamos las derivadas respecto a  $I^*$  conforme a (5.21), cuya dependencia se encuentra implícitamente en las funciones,  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$ . Atendiendo a las cancelaciones entre variables canónicas y funciones temporales resulta, con la sustitución  $M^* = C\omega_E$  justificada en secciones precedentes, se tiene:

$$\delta n_\lambda = -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon), \quad (5.23)$$

donde se ha definido

$$T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon) = \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q}. \quad (5.24)$$

En la obtención de esta expresión se ha usado que  $\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j) = 1$ , que elimina la dependencia explícita de los argumentos  $\Theta_i$ .

Sigue existiendo una dependencia implícita dada por la tabulación con éstos de las constantes  $A_{i;p}^{(j)}$  de la teoría orbital (tablas 3.3 y 3.4), a través de las funciones  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$ , y a la condición del sumatorio  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0$ . Como veremos además esta anulación sólo ocurre en el caso elástico, al no existir ningún defase adicional en los argumentos. La expresiones (5.23) y (5.24) son equivalentes a las dadas por Escapa et al. (2004).

La variación en la velocidad de precesión en oblicuidad es nula, ya que al derivar respecto de  $\lambda^*$ , las tres contribuciones (5.16) conducen a términos proporcionales a  $\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)$ , sujetos a la condición  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0$ , es decir, términos nulos. Por lo tanto

$$\delta n_I = 0. \quad (5.25)$$

Sin embargo, por conveniencia para la generalización que se hará de estos resultados en capítulos posteriores, daremos la expresión explícita de esta contribución a partir de (5.21):

$$\begin{aligned} \delta n_I = & -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(n_I)}(\tau, \epsilon) \times \\ & \times \text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j), \end{aligned} \quad (5.26)$$

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 121

donde se ha definido

$$T_{ijpq}^{(n_l)}(\tau, \epsilon) = \tau m_{5i} \left( \frac{9}{4} B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} + 3C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{4} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} \right). \quad (5.27)$$

El factor entero  $m_{5i}$  procede de la función derivada parcial  $\partial\Theta_i^*/\partial\lambda^*$  a partir de (2.113).

La representación numérica de (5.23) se realiza con los mismos valores para las constantes que las secciones precedentes 4.5 y 3.2. Numéricamente las funciones con y sin tilde son coincidentes. En la tabla 5.1 se dan los valores para las diferentes contribuciones<sup>2</sup> zonal ( $\delta_0 n_\lambda$ , términos con funciones  $\tilde{B}_{j;q}$ ), teseral ( $\delta_1 n_\lambda$ , términos con funciones  $\tilde{C}_{j;q}$ ) y sectorial ( $\delta_2 n_\lambda$ , términos con funciones  $\tilde{D}_{j;q}$ ). Utilizamos esta denominación porque en virtud de (5.8) éstas proceden de las correspondientes del potencial de redistribución para armónicos de orden 0, 1 y 2, siguiendo entonces la denominación dada por Kaula (1964) para los coeficientes del geopotencial. Además la contribución zonal se divide en dos partes, diferenciado la procedente de la marea permante del resto, tal como se indicó en la sección previa. Esto se hace en interés de discusiones posteriores sobre los resultados numéricos, ya que existe la posibilidad de replantear todo el problema sin incluir esta contribución de la marea permanente en el cálculo de los movimientos de precesión y nutación. Esta cuestión ya se analizó en la sección 4.5, al estudiar la equivalencia de resultados al considerar o no la deformación permanente en los elementos diagonales de la matriz de inercia del caso rígido.

Conviene además determinar para cada contribución a la velocidad de precesión,  $\delta n_\lambda$ , la corrección equivalente en la elipticidad dinámica, que denotaremos por  $\delta H$ . Ello es debido a que, aunque las contribuciones (o correcciones) a primer orden de perturbación para la velocidad de precesión son lineales como se ha señalado, y por tanto aditivas, el parámetro  $H_d$  se ajusta a partir de observaciones, lo que requiere fijar un modelo teórico de Tierra que proporcione una relación formal entre las observaciones de precesión y el valor de la elipticidad dinámica.

Siguiendo el planteamiento y desarrollos de la sección 3.3, se asume para  $\lambda_{\text{obs}}$  (denotamos así el valor medido u observado de la precesión en longitud) un desarrollo en serie de potencias del tiempo, del tipo

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_0 + n_{\lambda,\text{obs}} t + O(t^2), \quad (5.28)$$

donde  $t$  se mide en centurias julianas desde J2000 ( $t = 0$ ). Se tiene entonces que

$$n_{\lambda,\text{obs}} = \left. \frac{d\lambda_{\text{obs}}}{dt} \right|_{t=0} \quad (5.29)$$

---

<sup>2</sup>Recuérdese la correlación (5.5).

El estudio de la precesión en un modelo de Tierra Rígida nos condujo a la relación (3.46) para la derivada temporal de la variable canónica  $\lambda^*$ . Podemos reescribir esta expresión considerando que todos los términos de la función  $\tilde{R}(I^*)$ , dada por (3.44), son proporcionales a las constantes  $k_L$  o  $k_S$ , definidas por (3.34), y por tanto directamente proporcionales a la elipticidad dinámica,  $H_d$

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = F_1(I^*)H_d + F_2(\lambda^*, I^*, t), \quad (5.30)$$

donde la función  $F_2(\lambda^*, I^*, t)$  agrupa los términos procedentes de la no inercialidad. Esta expresión permite, a partir de una observación dada del tipo (5.28), obtener el parámetro  $H_d$  mediante la predicción teórica en el instante  $t = 0$  de la velocidad de la precesión en longitud, esto es

$$n_{\lambda,\text{obs}} = F_1(I_0)H_d. \quad (5.31)$$

En esta expresión se ha despreciado, por magnitud<sup>3</sup>, el término  $F_2(\lambda_0, I_0, 0)$ .

Cuando en el modelo analítico se incluyen correcciones aditivas del tipo  $\delta n_\lambda$ , no tiene sentido sumarlas a la predicción teórica dada por el segundo miembro de (5.31) manteniendo el mismo valor de  $H_d$ , ya que este parámetro se ha ajustado observacionalmente con un modelo primario, es decir, que no incluye tales contribuciones.

Una posibilidad es entonces introducir una corrección aditiva a la elipticidad dinámica,  $\delta H$ , asociada a  $\delta n_\lambda$ , de manera que se verique

$$n_{\lambda,\text{obs}} = F_1(I_0)(H_d + \delta H) + \delta n_\lambda = F_1(I_0)H_d, \quad (5.32)$$

de donde, dividiendo ambos miembros por  $H_d$  y usando de nuevo (5.31), se tiene

$$\frac{\delta H}{H_d} = -\frac{\delta n_\lambda}{n_{\lambda,\text{obs}}}. \quad (5.33)$$

Esta expresión, salvo notación, es la utilizada por Ferrándiz et al. (2012). Los valores de  $\delta H$  se han tabulado también en la representación numérica (5.23).

Tabla 5.1: Evaluación numérica: precesión en longitud [mas/cent]

	Zonal		teseral	Sectorial	Total
	$B_0$ (m.p.)	$B - B_0$	$C$	$D$	
$\delta n_\lambda$	42.0639	-3.9604	-64.1250	26.0214	0.0000
$\delta H$	$-27.34 \cdot 10^{-9}$	$2.59 \cdot 10^{-9}$	$41.75 \cdot 10^{-9}$	$-16.94 \cdot 10^{-9}$	0.0000

<sup>3</sup>Considerando Fukushima (2003), en J2000 se tiene  $n_{\lambda,\text{obs}} \simeq 5028''.7955 \text{ cent}^{-1}$  y  $p_0 \simeq 4''.1976 \text{ cent}^{-1}$  (véase nota al pie de la página 75) de modo que  $F_2(\lambda_0, I_0, 0) \simeq -p_0 \cot I_0 \simeq -9''.6843 \text{ cent}^{-1}$ .

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 123

En la tabla anterior, las contribuciones de  $\delta n_\lambda$  están expresadas en milisegundos de arco por centuria juliana. Las de  $\delta H$  son adimensionales. Para la velocidad de precesión observacional se ha tomado el valor de referencia  $n_{\lambda, \text{obs}} = 5028''.795492447 \text{ cent}^{-1}$  (Fukushima 2003). Las tres contribuciones armónicas (zonal, teseral y sectorial) debidas al potencial de redistribución se cancelan entre sí, para dar una contribución total nula. Esta anulación numérica es del orden de la precisión numérica empleada (aunque en la tabulación anterior, por cuestiones de formato, sólo se haya representado con cuatro cifras decimales). Es decir,

$$\delta n_\lambda = 0 \text{ (numéricamente)}. \quad (5.34)$$

Por lo tanto los valores correspondientes a la marea permanente no pueden ser usados para corregir el valor observado de la precesión (o equivalentemente, los de la elipticidad de dinámica), tal y como se apuntaba en Lambert y Capitaine (2004), debido a que su efecto en la precesión se cancela con el resto de las contribuciones armónicas de grado 2. Este hecho ya fue indicado en Escapa et al. (2004), y más recientemente en Ferrándiz et al. (2012). Como se verá en el próximo capítulo, la anulación de  $\delta n_\lambda$  obtenida de las expresiones (5.23) y (5.24) es analítica y está fundamentada por las características físicas del potencial de redistribución para el modelo de Tierra en estudio.

### 5.4. Movimiento de nutación

#### 5.4.1. Términos de Poisson

A partir de la expresión para la función generatriz (5.17), podemos obtener los términos de Poisson (o nutaciones del eje de momento angular) y Oppolzer (que completan las nutaciones del plano de figura). Para los primeros de éstos, aplicamos las ecuaciones de perturbación (3.18) y (3.19), en particular

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -\frac{1}{M^* \text{sen } I^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial I^*}, \\ \Delta I &= \{I^*, W_1^*\} = -\frac{\cot I^*}{M^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} + \frac{1}{M^* \text{sen } I^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \lambda^*}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

El cálculo bajo la misma aproximación numérica de los casos precedentes, a orden 0 en  $\sigma^*$ , nos permite despreciar aquí la parte (5.19) de la función generatriz,  $W_1^{*(k)}[\sigma^1]$ , que participará en el cálculo de los términos de Oppolzer dependientes de la derivada respecto de  $\sigma^*$ . La derivación respecto de las variables canónicas se efectúa bajo las mismas consideraciones ya expuestas en

el cálculo de la velocidad de la precesión en el apartado previo. Igualmente para obtener expresiones analíticas finales, una vez realizadas las derivadas de las ecuaciones de perturbación, se procederá a identificar variables canónicas y funciones temporales. Esto conduce, también en el caso de los términos de Poisson, a argumentos de las funciones trigonométricas del tipo  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j$ . La posibilidad de términos resonantes, fue evitada en la construcción de la función generatriz (5.18), como se discutió en su momento.

Las derivadas respecto a  $I^*$  conduce a derivadas de las funciones  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$ . Para las derivadas respecto a las variables canónicas  $\mu^*$  y  $\lambda^*$  se procede como en la sección precedente.

Atendiendo a todas estas consideraciones, se tiene para la nutación en longitud

$$\Delta \lambda = -\frac{1}{\sin I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \frac{\sin(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j}, \quad (5.36)$$

donde

$$T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) = \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q}. \quad (5.37)$$

De forma análoga, para la nutación en oblicuidad se obtiene

$$\Delta I = -\frac{1}{\sin I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j}, \quad (5.38)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \tau m_{5i} B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} + \\ &+ 3C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} (\tau m_{5i} - \cos I^*) + \frac{3}{4} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} (\tau m_{5i} - 2 \cos I^*). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nótese por comparación de (5.24) y (5.37) que

$$T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) = T_{ijpq}^{(n\lambda)}(\tau, \epsilon). \quad (5.40)$$

Éstas expresiones son equivalentes a las dadas en Escapa et al. (2004).

En la siguiente tabla se representan numéricamente las contribuciones de los argumentos principales para estas nutaciones. Nótese que aunque existe coincidencia en casi todas las componentes de la tabla con los argumentos de

entrada (los dados por las tablas 3.3 y 3.4), los que se muestran en ésta son combinaciones entre argumentos del tipo  $\tau\Theta_i - \epsilon\Theta_j \neq 0$ .

Además, en virtud de las expresiones (5.36) y (5.38) y la paridad de las funciones trigonométricas, los valores de las nutaciones se dan para la suma entre las correspondientes al argumento indicado y su opuesto. Al igual que en el caso de la velocidad de precesión, y con el mismo interés, la contribución zonal se divide en la parte procedente de la marea permanente y el resto.

Como resultado de esta representación numérica, se produce la cancelación de las tres contribuciones armónicas de segundo grado, como en el caso de la precesión. La anulación numérica es del orden de la precisión numérica empleada en el cálculo. Es decir, se tiene que

$$\Delta \lambda = 0, \quad \Delta I = 0 \quad (\text{numéricamente}). \quad (5.41)$$

La anulación analítica se abordará en el siguiente capítulo.

Cabe señalar respecto al contenido de las tablas siguientes, que la representación numérica de cada contribución está compuesta por muchos términos (todas las combinaciones  $\tau\Theta_i - \epsilon\Theta_j$ ), pero por cuestión de formato y con propósito comparativo, sólo se han incluido aquellas combinaciones que producen alguno de los argumentos principales utilizados en la representaciones numéricas de las secciones precedentes. Esto es,  $\tau\Theta_i - \epsilon\Theta_j = \gamma\Theta_k$ , con  $\gamma = \pm 1$  y  $\Theta_k$  uno de los argumentos principales. Adicionalmente se ha incluido el componente  $(0, +2, -2, +2, -2)$  por la magnitud de sus amplitudes, si bien, teniendo en cuenta que su periodo es de aproximadamente  $2 \times 10^7$  días, es más adecuado considerarlo como una contribución al movimiento de precesión que al de nutación.

Nótese que en caso de no considerarse la contribución de la marea permanente en las componentes del movimiento, éstas resultarían numéricamente significativas.

Tabla 5.2: Nutación en longitud, términos de Poisson.

Argumento		Periodo		Zonal		teseral	Sectorial	Total [ $\mu\text{s}$ ]		
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	$B_0$ (m.p.)	$B - B_0$	$C$	$D$	
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	-144.2534	+162.6620	+39.1759	-57.5844	+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	-1.7350	-2.6598	+5.8160	-1.4212	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	-1.0501	-0.9454	+2.6249	-0.6295	+0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	-0.1778	+0.1696	+0.0213	-0.0131	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	+10.5981	-3.2953	-19.0049	+11.7020	-0.0000
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	+0.4141	-0.0908	-0.8414	+0.5181	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.5653	+0.4258	-2.0023	+1.0112	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	-1.7051	+0.5435	+3.0676	-1.9060	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.2863	-0.3256	-0.0808	+0.1200	+0.0000
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	+0.2182	-0.0240	-0.5055	+0.3112	+0.0000
+0	+2	-2	+2	-2	$2 \times 10^7$	+0.0000	-53.4973	+139.2214	-85.7241	-0.0000

Tabla 5.3: Nutación en oblicuidad, términos de Poisson.

Argumento		Periodo		Zonal		teseral		Sectorial		Total [ $\mu\text{s}$ ]	
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	$B_0$ (m.p.)	$B - B_0$	$C$	$D$		
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	-77.0186	+8.0320	+126.0033	-57.0167		+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.7522	+1.7084	-3.2618	+0.8012		-0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000		+0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	+0.0771	-0.0719	-0.0114	+0.0062		-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	-4.5948	-0.0018	+10.1469	-5.5503		+0.0000
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	-0.1795	-0.0240	+0.4492	-0.2457		+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000		+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	+0.7392	-0.0057	-1.6366	+0.9030		-0.0000
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.1529	-0.0164	-0.2531	+0.1166		-0.0000
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	-0.0946	-0.0276	+0.2699	-0.1476		+0.0000
+0	+2	-2	+2	-2	$2 \times 10^7$	+0.0000	+33.6730	-74.3319	+40.6590		-0.0000

### 5.4.2. Términos de Oppolzer

La obtención de las expresiones para los términos de Oppolzer (o nutaciones del eje de figura) se realiza de forma análoga, a partir de las ecuaciones de perturbación (2.150) a primer orden

$$\Delta(\phi - \lambda) = \left\{ \sigma^* \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*}, W_1^* \right\}, \quad \Delta(\theta - I) = \{ \sigma^* \cos \mu^*, W_1^* \}. \quad (5.42)$$

Para las nutaciones en longitud, considerando la expresión (5.17) de la función generatriz, se tiene

$$\Delta(\phi - \lambda) = \frac{1}{M^*} \frac{\cos \mu^*}{\text{sen } I^*} \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} + \frac{1}{\sigma^*} \frac{1}{M^*} \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} \left( \frac{\partial W_1^*}{\partial \nu^*} - \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} \right). \quad (5.43)$$

Aunque el factor  $1/\sigma^*$  en el segundo de los sumandos puede hacer pensar en la aparición de un problema de pequeños denominadores, veamos que al igual que ocurriera en la integración del caso rígido, éste es sólo aparente. Los sumandos (5.19), denotados por  $W_1^{*(k)}[\sigma^1]$ , incluyen el factor  $\sigma^*$  que cancela con  $1/\sigma^*$ . Los sumandos (5.18), denotados por  $W_1^{*(k)}[\sigma^0]$ , son nulos en virtud de que para  $k = 0$  no se tiene dependencia con las variables canónicas  $\mu^*$  y  $\nu^*$ , y en el resto de casos se tiene la misma dependencia en  $\mu^*$  y  $\nu^*$ , lo que anula la resta de derivadas. Es decir

$$\left( \frac{\partial}{\partial \nu^*} - \frac{\partial}{\partial \mu^*} \right) W_1^{*(k)}[\sigma^0] = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (5.44)$$

Por otra parte la derivada  $\partial/\partial\sigma^*$  es no nula sólo para los términos  $W_1^{*(k)}[\sigma^1]$ .

Explicitando el cálculo de las derivadas, y atendiendo directamente a la posterior identificación entre variables canónicas y funciones temporales para simplificar la escritura de las expresiones, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} = & -\frac{9}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( \mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j \right) \\ & + \frac{9}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{B_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( -\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j \right) \\ & - \frac{3}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( \mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j \right) \\ & + \frac{3}{2} \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( -\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial W_1^*}{\partial \nu^*} - \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} \\
 = & \frac{9}{2} \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \\
 & + \frac{9}{2} \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{B_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(-\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \\
 & + 3 \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \\
 & - \frac{3}{2} \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \\
 & + 3 \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(-\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \\
 & - \frac{3}{2} \sigma^* \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q} \sum_{i,j;\tau,\epsilon}^{L,S} \kappa_p k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \cos(-\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j).
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Tenemos por lo tanto funciones trigonométricas con argumentos del tipo  $\rho\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j$  con  $\rho$ ,  $\tau$  y  $\epsilon$  tomando los valores  $\pm 1$ . Podemos agrupar las contribuciones correspondientes a un mismo argumento definiendo las cantidades

$$\begin{aligned}
 P_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{B}_{j;q}(I^*) + \frac{3}{2} D_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon), \\
 Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} B_{i;p}^*(I^*) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon) + \frac{3}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{D}_{j;q}(I^*, \epsilon), \tag{5.47}
 \end{aligned}$$

donde hemos explicitado, a modo de recordatorio, la dependencia funcional de las funciones orbitales. Nótese la relación existente entre ambas, mediante permutación de los pares de índices  $(i, j)$  y  $(p, q)$  y las variables  $(\tau, \epsilon)$

$$Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) = P_{jiqp}(\epsilon, \tau) \tag{5.48}$$

Utilizando estas expresiones y sustituyendo el valor de las derivadas en

(5.43), obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi - \lambda) = & \frac{\omega_E}{H_d} \frac{1}{M^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \times \\
& \times \left[ -\frac{\cos \mu^*}{\text{sen } I^*} P_{ijpq}(\tau, \epsilon) \frac{\text{sen}(\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon\tilde{n}_j} + \right. \\
& + \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} P_{ijpq}(\tau, \epsilon) \frac{\cos(\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon\tilde{n}_j} + \\
& + \frac{\cos \mu^*}{\text{sen } I^*} Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) \frac{\text{sen}(-\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon\tilde{n}_j} + \\
& \left. + \frac{\text{sen } \mu^*}{\text{sen } I^*} Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) \frac{\cos(-\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{-n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon\tilde{n}_j} \right]. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Atendiendo a la simplicación de los productos de funciones trigonométricas en términos de la suma y resta de ángulos se provoca la desaparición de la variable canónica  $\mu^*$  de los argumentos. Finalmente, con la sustitución habitual  $M^* = C\omega_E$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi - \lambda) = & -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \times \\
& \times \left[ \frac{P_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j - n_\mu^*} - \frac{Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j). \quad (5.50)
\end{aligned}$$

El cálculo de la expresión para las nutaciones en oblicuidad,  $\Delta(\theta - I)$ , a partir de (5.42), es completamente análogo. Notése además que a partir de

$$\Delta(\theta - I) = -\frac{1}{M^*} \text{sen } \mu^* \frac{\partial W_1^*}{\partial \sigma^*} + \frac{1}{\sigma^*} \frac{1}{M^*} \cos \mu^* \left( \frac{\partial W_1^*}{\partial \nu^*} - \frac{\partial W_1^*}{\partial \mu^*} \right), \quad (5.51)$$

depende de las mismas derivadas de la función generatriz, y sólo varía el producto final entre funciones trigonométricas.

La expresión final resulta entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(\theta - I) = & -\frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \times \\
& \times \left[ \frac{P_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j - n_\mu^*} + \frac{Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j), \quad (5.52)
\end{aligned}$$

## 5. Tierra elástica: contribución del potencial de redistribución 131

que depende de las mismas cantidades  $P_{ijpq}(\tau, \epsilon)$ ,  $Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)$  definidas en (5.47).

Es posible reescribir estas expresiones para los términos de Oppolzer de manera que sean formalmente más parecidas a las obtenidas en los casos precedentes: las correspondientes a la contribución de la energía cinética de redistribución, expresiones (4.106), y las correspondientes al modelo de Tierra rígida, expresiones (3.29) y (3.32). Por parecido formal entendemos en este caso que ambos términos puedan escribirse con una misma expresión para el numerador de las amplitudes, salvo posibles factores  $\pm 1$ , y que en el denominador se aisle el movimiento medio de  $\mu^*$  de las frecuencias correspondientes a los argumentos  $\Theta_i$ .

Esto lo conseguimos introduciendo un índice adicional  $\rho = \pm 1$ , de forma que

$$\frac{1}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j - \rho n_\mu^*} = -\frac{1}{\rho [n_\mu^* - \rho (\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)]} = -\frac{\rho}{n_\mu^* - \rho (\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)}. \quad (5.53)$$

Adicionalmente definiremos la cantidad

$$T_{ijpq}(\tau, \epsilon, \rho) = -\frac{1}{2}(\rho + 1)P_{ijpq}(\tau, \epsilon) - \frac{1}{2}(\rho - 1)Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) \quad (5.54)$$

que nos permite reescribir los términos de Oppolzer en la forma

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon,\rho} \kappa_p \kappa_q \frac{\rho T_{ijpq}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho (\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \times \\ &\quad \times \text{sen} \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \\ \Delta(\theta - I) &= -\frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon,\rho} \kappa_p \kappa_q \frac{T_{ijpq}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho (\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \times \\ &\quad \times \cos \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

En la tabla siguiente se representan numéricamente estas contribuciones del movimiento de nutación. Para facilitar la comparación, se han incluido para las mismas combinaciones de argumentos que en el caso previo (tablas 5.2 y 5.3). En virtud de la paridad de las funciones trigonométricas, las amplitudes están dadas igualmente para la suma entre las correspondientes al argumento indicado y a su opuesto. La contribución zonal se divide en la parte procedente de la marea permanente y el resto.

Como en los casos anteriores, se produce la cancelación de las tres contribuciones armónicas de segundo grado. La anulación numérica es del orden

de la precisión numérica empleada en el cálculo. Es decir,

$$\Delta(\phi - \lambda) = 0, \quad \Delta(\theta - I) = 0 \text{ (numéricamente)}. \quad (5.56)$$

El estudio de la cancelación analítica se abordará en el siguiente capítulo.



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

Tabla 5.4: Nutación en longitud, términos de Oppolzer.

Argumento			Periodo			Zonal			teseral		Sectorial		Total [ $\mu$ as]	
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	$B_0$ (m.p.)	$B - B_0$	$C$	$D$	$C$	$D$	$C$	$D$	
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	+0.0283	-0.0030	-0.0463	+0.0210	+0.0463	+0.0210	+0.0463	+0.0210	
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.0006	+0.0013	-0.0024	+0.0006	-0.0024	+0.0006	-0.0024	+0.0006	
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	-0.0005	+0.0005	+0.0001	-0.0000	+0.0001	-0.0000	+0.0001	-0.0000	
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	+0.0632	-0.0001	-0.1394	+0.0763	-0.1394	+0.0763	-0.1394	+0.0763	
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	+0.0037	+0.0005	-0.0093	+0.0051	-0.0093	+0.0051	-0.0093	+0.0051	
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.0007	+0.0006	-0.0026	+0.0013	-0.0026	+0.0013	-0.0026	+0.0013	
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	-0.1450	+0.0039	+0.3173	-0.1762	+0.3173	-0.1762	+0.3173	-0.1762	
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.0297	-0.0048	-0.0471	+0.0221	-0.0471	+0.0221	-0.0471	+0.0221	
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	+0.0288	+0.0074	-0.0808	+0.0446	-0.0808	+0.0446	-0.0808	+0.0446	
+0	+2	-2	+2	-2	$2 \times 10^7$	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	

Tabla 5.5: Nutación en oblicuidad, términos de Oppolzer.

Argumento			Periodo			Zonal			teseral	Sectorial	Total [ $\mu$ as]
$l$	$l'$	$F$	$\Omega$	$D$	Días	$B_0$	(m.p.)	$B - B_0$	$C$	$D$	
+0	+0	+0	+1	+0	-6793.48	+0.0084		-0.0095	-0.0023	+0.0034	+0.0000
+0	+0	+0	+2	+0	-3396.74	-0.0002		-0.0003	+0.0007	-0.0002	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	-0.0011		-0.0010	+0.0028	-0.0007	+0.0000
+0	-1	+2	+2	-2	+365.25	+0.0002		-0.0002	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	+2	-2	+182.63	-0.0231		+0.0071	+0.0414	-0.0255	+0.0000
+0	+1	+2	+2	-2	+121.75	-0.0014		+0.0003	+0.0028	-0.0017	+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.0081		+0.0061	-0.0288	+0.0145	+0.0000
+0	+0	+2	+2	+0	+13.66	+0.0535		-0.0158	-0.0980	+0.0603	-0.0000
+0	+0	+2	+1	+0	+13.63	+0.0092		-0.0096	-0.0037	+0.0041	+0.0000
+1	+0	+2	+2	+0	+9.13	-0.0107		+0.0007	+0.0254	-0.0154	-0.0000
+0	+2	-2	-2	$2 \times 10^7$		-0.0000		+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000

## Capítulo 6

# Tierra elástica: cancelación de los efectos del potencial de redistribución

### 6.1. Introducción

La representación numérica de las expresiones analíticas derivadas en el capítulo anterior, para el estudio de la contribución del potencial de redistribución a los movimientos de precesión y nutación, revelan que éste no influye en el caso del modelo de Tierra elástica desarrollado en el capítulo 4. La cancelación numérica, empero, puede deberse a muchos factores. No en vano, tal como se mencionó en la introducción de esta memoria, algunos autores (Souchay y Folgueira 2000, Lambert y Capitaine 2004) han dado contribuciones no nulas del potencial de redistribución bajo las mismas consideraciones de modelado.

El objetivo de este capítulo es demostrar que las cancelaciones numéricas encontradas en el capítulo precedente, para el caso de la perturbación dada por el potencial de redistribución (5.12), atienden a una cancelación exacta o analítica de la velocidad de precesión (5.23), los términos de Poisson (5.36) y (5.37) y los términos de Oppolzer (5.50) y (5.52), tal como fue apuntado y parcialmente demostrado en Escapa et al. (2004). Desde el punto de vista físico, este hecho está relacionado con la anulación del torque asociado al potencial de redistribución, tal como se indica en Krasinsky (1999). Si bien esto último, y a diferencia con este autor, se demostrará haciendo uso de la mecánica hamiltoniana, por consistencia con el formalismo empleado en la construcción de toda la teoría<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Aunque en el caso de sistemas mecánicos se obtengan resultados equivalentes mediante

Veremos que las características de este modelo están directamente relacionadas con este hecho, así como ciertas propiedades satisfechas por los desarrollos empleados para el movimiento orbital de los cuerpos perturbadores, incorporados de la teoría hamiltoniana de Kinoshita (1977) para la rotación de la Tierra rígida.

La construcción del potencial de redistribución realizada en la sección 4.3, y que establece por lo tanto las hipótesis de aplicación de las expresiones analíticas derivadas, supone que en el estado no perturbado, la Tierra es esférica y no rotante. La generalización de estas hipótesis a casos más próximos a la realidad (modelos de Tierra anelástica) constituyen la materia del próximo capítulo. Aunque ya se ha estudiado anteriormente, conviene recordar que la característica de estado no perturbado sin rotación, hace referencia al modelo elástico empleado para el cálculo del campo de vectores desplazamiento, como una primera aproximación al problema. Así, la aplicación de la segunda ley de Newton en la expresión (4.41) no incluye las fuerzas no inerciales (centrífuga y de Coriolis) que necesariamente habrían de incluirse de suponer una rotación del sólido respecto de un sistema inercial.

Por otro lado, las expresiones (2.112) correspondientes a las relaciones 5.9, 5.10 y 5.11 de Kinoshita (1977), introducen en la expresión de los armónicos esféricos, la información relativa al movimiento orbital de los cuerpos perturbadores, vía la dependencia funcional con las variables de Delaunay en los argumentos, y las constantes  $A_{i,p}^{(j)}$  para las amplitudes de las series trigonométricas.

Estas expresiones incluyen, implícitamente, las siguientes condiciones indicadas por Kinoshita (1977) y Kinoshita y Souchay (1990):

$$\begin{aligned} A_{i,p}^{(0)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 1, 2, \\ A_{i,p}^{(1)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 0, 2, \\ A_{i,p}^{(2)} &= 0 \text{ si } m_{5i} = 0, 1, \end{aligned} \tag{6.1}$$

propiedades que por lo tanto también se incluyen, implícitamente, en la expresión del potencial perturbador a través de las relaciones (2.125) para los armónicos esféricos referidos a la eclíptica de la fecha. Dado que el valor entero  $m_{5i}$  sólo toma los valores 0, 1 y 2 en el caso de un potencial que incluya armónicos de segundo grado<sup>2</sup>, las anteriores propiedades son aplicables en todos los casos de nuestro problema, y por lo tanto permiten la simplificación

---

el uso de los formalismos hamiltoniano y newtoniano, éstos no son completamente equivalentes desde un punto de vista de matemático. A priori no está justificado que puedan mezclarse en los procesos de derivación de las ecuaciones de movimiento del sistema.

<sup>2</sup>Véase las tablas 3.3 y 3.4 de la teoría orbital.

de las expresiones para las funciones  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$ , discriminando según valores de  $m_{5i}$ . Esta simplificación, además de aconsejable para el manejo de expresiones analíticas más sencillas, es determinante para la exploración de propiedades matemáticas de las expresiones analíticas derivadas en capítulos previos.

Antes de proseguir, comprobaremos la validez de las expresiones (6.1). Para ello debemos recordar de la sección 2.7, que Kinoshita (1977) sustituye las coordenadas angulares esféricas  $(\eta', \alpha')$  para los cuerpos perturbadores por  $(\eta', \alpha' - \lambda)$ , o lo que es equivalente, se excluye la rotación  $\mathbf{R}_3(\lambda)$  de la secuencia de rotaciones (2.38), ya que se incluye en las series armónicas de la teoría orbital, lo que provoca la dependencia de los argumentos con la variable canónica  $\lambda$ , a través de  $\Omega = h - \lambda$ . Considerando entonces la siguiente relación de (2.112)

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{20}(\eta', \alpha' - \lambda) = - \sum_i A_i^{(0)} \cos \Theta_i, \quad (6.2)$$

dado que  $C_{20}(\eta', \alpha' - \lambda) = (3 \cos^2 \eta' - 1)/2$ , no depende de  $\lambda$ , pero  $\Theta_i$  sí lo hace conforme a (2.113),  $\Theta_i = \Theta_{i0} - m_{5i}\lambda$ , si  $m_{5i} \neq 0$  ( $m_{5i} = 1, 2$ ) necesariamente  $A_i^{(0)} = 0$ , que es la primera de las condiciones (6.1). Análogamente, considerando

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 S_{21}(\eta', \alpha' - \lambda) = 3 \sum_i A_i^{(1)} \cos \Theta_i, \quad (6.3)$$

como  $S_{21}(\eta', \alpha' - \lambda) = 3 \cos \eta' \sin \eta' \sin(\alpha' - \lambda)$ , si desarrollamos

$$\begin{aligned} \cos \Theta_i &= \cos(\Theta_{i0} - m_{5i}\lambda) = \cos(\Theta_{i0}) \cos(m_{5i}\lambda) + \sin(\Theta_{i0}) \sin(m_{5i}\lambda), \\ \sin(\alpha' - \lambda) &= \sin(\alpha') \cos(\lambda) - \cos(\alpha') \sin(\lambda), \end{aligned} \quad (6.4)$$

la igualdad (6.3) en el caso de  $m_{5i} \neq 1$  ( $m_{5i} = 0, 2$ ) sólo puede darse si  $A_i^{(1)} = 0$ , que es la segunda de las condiciones (6.1). Finalmente, tomando

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 C_{22}(\eta', \alpha' - \lambda) = 3 \sum_i A_i^{(2)} \cos \Theta_i, \quad (6.5)$$

dado que  $C_{22}(\eta', \alpha' - \lambda) = 3 \sin^2 \eta' \cos 2(\alpha' - \lambda)$ , si desarrollamos

$$\begin{aligned} \cos \Theta_i &= \cos(\Theta_{i0}) \cos(m_{5i}\lambda) + \sin(\Theta_{i0}) \sin(m_{5i}\lambda), \\ \cos 2(\alpha' - \lambda) &= \cos 2\alpha' \cos 2\lambda + \sin 2\alpha' \sin 2\lambda, \end{aligned} \quad (6.6)$$

la igualdad (6.5) si  $m_{5i} \neq 2$  ( $m_{5i} = 0, 1$ ) implica que  $A_i^{(2)} = 0$ , que es la tercera y última de las condiciones (6.1).

Por aplicación de las relaciones (6.1), las expresiones de las funciones  $B_{i;p}$ ,  $C_{i;p}$  y  $D_{i;p}$  dadas por (2.120), (2.122) y (2.124) respectivamente, quedan simplificadas considerablemente, para cada caso del valor entero  $m_{5i}$ :

- Si  $m_{5i} = 0$

$$\begin{aligned} B_{i;p}(I) &= -\frac{1}{6}A_{i;p}^{(0)}(3\cos^2 I - 1), \quad \frac{\partial B_{i;p}}{\partial I} = \frac{1}{2}A_{i;p}^{(0)}\sin 2I, \\ C_{i;p}(I, \tau) &= -\frac{1}{4}A_{i;p}^{(0)}\sin 2I, \quad \frac{\partial C_{i;p}}{\partial I} = -\frac{1}{2}A_{i;p}^{(0)}\cos 2I, \\ D_{i;p}(I, \tau) &= -\frac{1}{4}A_{i;p}^{(0)}\sin^2 I, \quad \frac{\partial D_{i;p}}{\partial I} = -\frac{1}{2}A_{i;p}^{(0)}\sin 2I. \end{aligned} \quad (6.7)$$

- Si  $m_{5i} = 1$

$$\begin{aligned} B_{i;p}(I) &= -\frac{1}{2}A_{i;p}^{(1)}\sin 2I, \quad \frac{\partial B_{i;p}}{\partial I} = -A_{i;p}^{(1)}\cos 2I, \\ C_{i;p}(I, \tau) &= A_{i;p}^{(1)}\left(-\frac{1}{2} + \cos^2 I + \frac{1}{2}\tau \cos I\right), \\ \frac{\partial C_{i;p}}{\partial I} &= -A_{i;p}^{(1)}\left(\sin 2I + \frac{1}{2}\tau \sin I\right), \\ D_{i;p}(I, \tau) &= A_{i;p}^{(1)}\left(\frac{1}{2}\sin 2I + \tau \sin I\right), \\ \frac{\partial D_{i;p}}{\partial I} &= A_{i;p}^{(1)}(\cos 2I + \tau \cos I). \end{aligned} \quad (6.8)$$

- Si  $m_{5i} = 2$

$$\begin{aligned} B_{i;p}(I) &= -\frac{1}{4}A_{i;p}^{(2)}\sin^2 I, \quad \frac{\partial B_{i;p}}{\partial I} = -\frac{1}{4}A_{i;p}^{(2)}\sin 2I, \\ C_{i;p}(I, \tau) &= A_{i;p}^{(2)}\left(\frac{1}{8}\sin 2I + \frac{1}{4}\tau \sin I\right), \\ \frac{\partial C_{i;p}}{\partial I} &= \frac{1}{4}A_{i;p}^{(2)}(\cos 2I + \tau \cos I), \\ D_{i;p}(I, \tau) &= -\frac{1}{4}A_{i;p}^{(2)}(1 + \cos^2 I + 2\tau \cos I), \\ \frac{\partial D_{i;p}}{\partial I} &= \frac{1}{4}A_{i;p}^{(2)}(\sin 2I + 2\tau \sin I). \end{aligned} \quad (6.9)$$

En la simplificación de las expresiones anteriores se ha hecho uso de que  $\tau^2 = 1$ .

## 6.2. Cancelación de la velocidad de precesión

La contribución a primer orden de la perturbación dada por el potencial de redistribución, a la velocidad de precesión, viene dada por las expresiones (5.23) y (5.24)

$$\delta n_\lambda = -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon), \quad (6.10)$$

donde

$$T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon) = \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q}. \quad (6.11)$$

La suma sobre los índices  $i, j$  y  $\tau, \epsilon$ , está sujeta a la condición  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0$ . En la expresión para  $\delta n_\lambda$ , y a pesar de la notación mantenida por cuestiones de forma, ya se ha realizado la equivalencia entre las magnitudes asociadas a los cuerpos perturbados y los perturbadores, de modo que, salvo diferencias en el índice, se tiene que  $\Theta_i^* = \tilde{\Theta}_i$ . Por lo tanto la condición  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0$  se traduce en las condiciones simultáneas

$$\{i = j, \tau = \epsilon\}, \quad (6.12)$$

y únicas, esto es, independientes de la igualdad o no en los índices  $p$  y  $q$ .

Discriminando según los valores de  $m_{5i}$ , la sustitución de las relaciones (6.7), (6.8) y (6.9) en (6.11) conduce a que  $T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon)$  puede descomponerse como suma de las cantidades

$$T_{ijpq}^{(n_\lambda; m_{5i})}(\tau, \epsilon) = f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}; \quad m_{5i} = 0, 1, 2. \quad (6.13)$$

Las funciones<sup>3</sup>  $f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)$  bajo aplicación de la condición (6.12) verifican la propiedad

$$f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \pm\tau) = \tau f_{m_{5i}}^\pm(I^*), \quad (6.14)$$

de manera que

$$T_{ijpq}^{(n_\lambda)}(\tau, \tau) = \sum_{m_{5i}=0,1,2} \tau f_{m_{5i}}^+(I^*) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}. \quad (6.15)$$

<sup>3</sup>En concreto, estas funciones son, tras manipulación trigonométrica:

$$\begin{aligned} f_0(I^*, \tau, \epsilon) &= 0, \\ f_1(I^*, \tau, \epsilon) &= -3/4 \text{sen } I^* [\epsilon - \tau + \cos^2 I^* (\tau + 2\epsilon)], \\ f_2(I^*, \tau, \epsilon) &= -3/32 \text{sen}^3 I^* (2\epsilon + \tau), \end{aligned}$$

comprobándose que verifican  $f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \pm\tau) = \tau f_{m_{5i}}^\pm(I^*)$ .

Por lo tanto, y por sustitución directa en (6.10), se tiene

$$\delta n_\lambda = -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_i \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{i;q}^{(m_{5i})} f_{m_{5i}}^+(I^*) \sum_{\tau=\pm 1} \tau, \quad (6.16)$$

que muestra que la contribución a la velocidad de la precesión es exactamente nula debido a la suma del índice  $\tau$

$$\delta n_\lambda = 0. \quad (6.17)$$

### 6.3. Cancelación de los términos de Poisson

La contribución de primer orden a los términos de Poisson del movimiento de mutación terrestre, debida al potencial de redistribución, viene dada por las expresiones (5.36), (5.37), (5.38) y (5.39).

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j}, \\ \Delta I &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde

$$\begin{aligned} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q}, \\ T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \tau m_{5i} B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} + \\ &\quad + 3C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} (\tau m_{5i} - \cos I^*) + \frac{3}{4} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} (\tau m_{5i} - 2 \cos I^*). \end{aligned} \quad (6.19)$$

En este caso la suma sobre los índices  $i, j, \tau, \epsilon$  está restringida por la condición  $\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0$ , que es la complementaria a (6.12), y por lo tanto equivalente a las siguientes condiciones independientes:

$$\{i = j, \tau = -\epsilon\} \cup \{i \neq j\}. \quad (6.20)$$

Abordaremos en primer lugar el estudio de la contribución a la mutación en longitud,  $\Delta\lambda$ .

Dado que se verifica la relación (5.40),  $T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) = T_{ijpq}^{(n\lambda)}(\tau, \epsilon)$ , haremos uso de los desarrollos de la sección previa (6.13):

$$\begin{aligned} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda; m_{5i})}(\tau, \epsilon) &= f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}; \quad m_{5i} = 0, 1, 2, \\ f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \pm\tau) &= \tau f_{m_{5i}}^\pm(I^*). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Consideremos entonces la suma en los índices  $\tau, \epsilon$  de (6.18), bajo las condiciones (6.20):

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j} = \\ &= \sum_{m_{5i}=0,1,2} A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} \sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} f_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon\tilde{n}_j} \equiv \\ &\equiv \sum_{m_{5i}=0,1,2} A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} \sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon), \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde hemos introducido la cantidad  $S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon)$  por comodidad de notación. En aplicación de las restricciones sobre los índices sumados, realizamos la descomposición

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon) = \\ &= \sum_{\tau=\pm 1} S_{ii}^{(m_{5i})}(\tau, -\tau) + \sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon) = \\ &= \sum_{\tau=\pm 1} S_{ii}^{(m_{5i})}(\tau, -\tau) + \sum_{\substack{\tau=\pm 1 \\ \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \tau) + \sum_{\substack{\tau=\pm 1 \\ \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, -\tau). \end{aligned} \quad (6.23)$$

En virtud de las relaciones (6.21), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=\pm 1} S_{ii}^{(m_{5i})}(\tau, -\tau) &= \sum_{\tau=\pm 1} \tau f_{m_{5i}}^-(I^*) \frac{\text{sen}(2\tau\Theta_i^*)}{2\tau n_i} = \\ &= f_{m_{5i}}^-(I^*) \frac{\text{sen}(2\Theta_i^*)}{2n_i} \sum_{\tau=\pm 1} \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\tau=\pm 1} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \tau) &= \sum_{\tau=\pm 1} \tau f_{m_{5i}}^+(I^*) \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \tau\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \tau\tilde{n}_j} = \\
&= f_{m_{5i}}^+(I^*) \frac{\text{sen}(\Theta_i^* - \tilde{\Theta}_j)}{n_i - \tilde{n}_j} \sum_{\tau=\pm 1} \tau, \\
\sum_{\tau=\pm 1} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, -\tau) &= \sum_{\tau=\pm 1} \tau f_{m_{5i}}^-(I^*) \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* + \tau\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i + \tau\tilde{n}_j} = \\
&= f_{m_{5i}}^-(I^*) \frac{\text{sen}(\Theta_i^* + \tilde{\Theta}_j)}{n_i + \tilde{n}_j} \sum_{\tau=\pm 1} \tau, \tag{6.24}
\end{aligned}$$

que son todos nulos al realizar la suma en el índice  $\tau$ .

Entonces, por sustitución directa de (6.21) en (6.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} \times \\
&\times \sum_{\substack{\tau, \epsilon = \pm 1 \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} S_{ij}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon), \tag{6.25}
\end{aligned}$$

que implica la nulidad exacta de esta contribución

$$\Delta \lambda = 0. \tag{6.26}$$

Estudiaremos ahora la contribución a la mutación en oblicuidad,  $\Delta I$ . En este caso la estrategia de la demostración es diferente, ya que la cancelación no se provoca por el mismo motivo que en los casos anteriores. Ello es debido a que con la restricción,  $i \neq j$ , no se tiene una anulación directa al realizar la suma sobre los índices  $\tau$  y  $\epsilon$ , debido a que al menos en el caso  $\tau = \epsilon$  se tiene una contribución no nula por cancelación de la variable  $\tau$  procedente de las funciones

$$\sum_{\tau=\pm 1} \tau \frac{\cos[\tau(\Theta_i^* - \tilde{\Theta}_j)]}{\tau(n_i - \tilde{n}_j)} = 2 \frac{\cos(\Theta_i^* - \tilde{\Theta}_j)}{n_i - \tilde{n}_j} \neq 0. \tag{6.27}$$

Discriminando según los valores de  $m_{5i}$ , la sustitución de las relaciones (6.7), (6.8) y (6.9) en (6.19) conduce a que  $T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon)$  puede descomponerse como suma de las cantidades

$$T_{ijpq}^{(\Delta I; m_{5i})}(\tau, \epsilon) = g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}; m_{5i} = 0, 1, 2. \tag{6.28}$$

Las funciones<sup>4</sup>  $g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)$  bajo permutación de los índices  $\tau, \epsilon$  son simétricas, esto es,

$$g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) = g_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau). \quad (6.29)$$

Por lo tanto podemos escribir

$$T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) = \sum_{m_{5i}=0,1,2} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}. \quad (6.30)$$

Consideramos las sumas existentes en la expresión de  $\Delta I$

$$\begin{aligned} & \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \{i=j,\tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} = \\ & = \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \{i=j,\tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

y definimos por conveniencia las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(m_{5i})} &= \sum_{\substack{\tau,\epsilon \\ \{i=j,\tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j}, \\ s_{ij}^{(m_{5i})} &= \sum_{p,q}^{L,S} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Nótese que en la definición de  $s_{ij}^{(m_{5i})}$  no es preciso mantener la restricción sobre la suma ya que, en lo referente a los índices  $i, j$  se tienen todos los casos, esto es, que puedan ser iguales o diferentes entre sí. Estudiemos las propiedades de simetría que tienen bajo permutación de los índices  $i, j$ . Hemos de recordar para ello que,  $\Theta_i^* = \tilde{\Theta}_i \equiv \Theta_i$  y  $n_i = \tilde{n}_i$ , esto es, que pese a la notación mantenida por cuestiones de forma, las expresiones

<sup>4</sup>En concreto, estas funciones son, tras manipulación trigonométrica:

$$\begin{aligned} g_0(I^*) &= -3/8 \operatorname{sen}^2 I^* \cos I^* (1 + \cos^2 I^*), \\ g_1(I^*, \tau, \epsilon) &= 3/4 \operatorname{sen}^2 I^* (\tau + \epsilon - 2\tau\epsilon \cos I^* - \cos I^* + 2 \cos^3 I^*), \\ g_2(I^*, \tau, \epsilon) &= -3/32 \operatorname{sen}^2 I^* [\cos^3 I^* - 5 \cos I^* - 4\tau\epsilon \cos I^* - 4(\tau + \epsilon)], \end{aligned}$$

comprobándose que se verifica  $g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) = g_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)$ .

de las contribuciones estudiadas ya incluyen la equivalencia entre cuerpos perturbadores y perturbados. Para ello consideramos en primer lugar

$$\begin{aligned}
r_{ji}^{(m_{5i})} &= \sum_{\substack{\tau, \epsilon \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_j - \epsilon\Theta_i)}{\tau n_j - \epsilon n_i} \quad (1) \\
&= \sum_{\substack{\tau, \epsilon \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau) \frac{\cos(\epsilon\Theta_j - \tau\Theta_i)}{\epsilon n_j - \tau n_i} \quad (2) \\
&= - \sum_{\substack{\tau, \epsilon \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i - \epsilon\Theta_j)}{\tau n_i - \epsilon n_j} = -r_{ij}^{(m_{5i})}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

En (1) hemos intercambiado el nombre de los índices  $\tau$  y  $\epsilon$  (por tratarse de índices mudos), y en (2) se ha aplicado la propiedad de simetría (6.29) y que la función coseno es par. Así pues, la cantidad  $r_{ji}^{(m_{5i})}$  es antisimétrica bajo la permutación de sus índices.

Para el estudio de  $s_{ij}^{(m_{5i})}$  hemos de recordar la simetría del producto de constantes  $\kappa_p k_q = \kappa_q k_p$  dado por (5.11). Entonces

$$\begin{aligned}
s_{ji}^{(m_{5i})} &= \sum_{p,q}^{L,S} \kappa_p k_q A_{j;p}^{(m_{5i})} A_{i;q}^{(m_{5i})} \stackrel{(1)}{=} \sum_{p,q}^{L,S} \kappa_q k_p A_{j;q}^{(m_{5i})} A_{i;p}^{(m_{5i})} \stackrel{(2)}{=} \\
&= \sum_{p \neq q}^{L,S} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} = s_{ij}^{(m_{5i})},
\end{aligned} \tag{6.34}$$

donde en (1) se ha intercambiado el nombre de los índices mudos  $p$  y  $q$  y en (2) se ha hecho uso de la simetría en el producto de constantes. Así pues, la cantidad  $s_{ij}^{(m_{5i})}$  es simétrica bajo la permutación de sus índices.

Podemos reescribir la expresión de  $\Delta I$  en términos de estas cantidades. Mediante sustitución directa en (6.18) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Delta I &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{i,j} \sum_{p,q}^{L,S} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{\tau, \epsilon \\ \{i=j, \tau=-\epsilon\} \cup \{i \neq j\}}} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \\
&= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{i,j} s_{ij}^{(m_{5i})} r_{ij}^{(m_{5i})},
\end{aligned} \tag{6.35}$$

que demuestra la nulidad exacta de esta contribución al tratarse del producto de una cantidad simétrica por otra antisimétrica bajo permutación de los mismos índices sumados

$$\Delta I = 0. \quad (6.36)$$

## 6.4. Cancelación de los términos de Oppolzer

La contribución de primer orden a los términos de Oppolzer del movimiento de mutación terrestre, debida al potencial de redistribución, viene dada por las expresiones (5.50), (5.52)

$$\begin{aligned} \Delta(\phi - \lambda) &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \times \\ &\quad \times \left[ \frac{P_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j - n_\mu^*} - \frac{Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \text{sen} \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right). \\ \Delta(\theta - I) &= -\frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \kappa_p k_q \times \\ &\quad \times \left[ \frac{P_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j - n_\mu^*} + \frac{Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \cos \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde las funciones  $P_{ijpq}(\tau, \epsilon)$  y  $Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)$  se definen en (5.47)

$$\begin{aligned} P_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{B}_{j;q}(I^*) + \frac{3}{2} D_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon), \\ Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} B_{i;p}^*(I^*) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon) + \frac{3}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{D}_{j;q}(I^*, \epsilon), \end{aligned} \quad (6.38)$$

A diferencia con los casos anteriores, no existe restricción en la suma sobre los índices  $i, j, \tau, \epsilon$ .

Estudiaremos en primer lugar la contribución a la mutación en longitud,  $\Delta(\phi - \lambda)$ . Para ello mediante la sustitución de las expresiones (6.7), (6.8) y (6.9) en (6.38), discriminando según los valores de  $m_{5i}$ , se obtiene<sup>5</sup> que

$$P_{ijpq}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon) = h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}. \quad (6.39)$$

<sup>5</sup>En concreto, estas funciones son, tras manipulación trigonométrica

$$\begin{aligned} h_0(I^*) &= 3/16 \text{sen } 2I^* (3 \cos^2 I^* - 1 + \text{sen}^2 I^*), \\ h_1(I^*, \tau, \epsilon) &= -3/4 \text{sen } I^* [4 \cos^3 I^* + \cos^2 I^* (\tau - \epsilon) + \tau - \tau \epsilon \cos I^* - 2 \cos I^*], \\ h_2(I^*, \tau, \epsilon) &= 3/32 \text{sen } I^* [2 \cos^3 I^* + \cos^2 I^* (\tau - \epsilon) - 3\tau - \epsilon - 2\tau \epsilon \cos I^* - 4 \cos I^*]. \end{aligned}$$

En virtud de la propiedad (5.48),  $Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) = P_{jiqp}(\epsilon, \tau)$ , se tiene que

$$Q_{ijpq}^{(m_{5i})}(\tau, \epsilon) = h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau) A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})}, \quad (6.40)$$

es decir, se diferencian en la permutación de los índices  $\epsilon$  y  $\tau$ . Teniendo en cuenta que  $\Theta_i^* = \tilde{\Theta}_i \equiv \Theta_i$  y  $n_i = \tilde{n}_i$ , estudiemos las propiedades de simetría frente a permutación de los índices  $i, j$ , de la cantidad  $r_{ij}$  definida según

$$r_{ij}^{(m_{5i})} = \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon n_j - n_\mu^*} - \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_i - \epsilon n_j + n_\mu^*} \right] \text{sen}(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j). \quad (6.41)$$

Consideramos

$$\begin{aligned} r_{ji}^{(m_{5i})} &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_j - \epsilon n_i - n_\mu^*} - \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_j - \epsilon n_i + n_\mu^*} \right] \text{sen}(\tau \Theta_j - \epsilon \Theta_i) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\epsilon n_j - \tau n_i - n_\mu^*} - \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\epsilon n_j - \tau n_i + n_\mu^*} \right] \text{sen}(\epsilon \Theta_j - \tau \Theta_i) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\epsilon n_j - \tau n_i + n_\mu^*} - \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\epsilon n_j - \tau n_i - n_\mu^*} \right] \text{sen}(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j) = \\ &= - \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon n_j - n_\mu^*} - \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_i - \epsilon n_j + n_\mu^*} \right] \text{sen}(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j) = \\ &= -r_{ij}^{(m_{5i})}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde en (1) hemos intercambiado el nombre entre los índices mudos  $\epsilon, \tau$ , y en (2) se ha aplicado que el seno es una función impar para cambiar el signo de los sumandos. Por lo tanto  $r_{ij}^{(m_{5i})}$  es una cantidad antisimétrica bajo permutación de sus índices. A su vez, la cantidad  $s_{ij}^{(m_{5i})}$  definida en (6.32) es simétrica bajo permutación de sus índices, tal y como se probó en la sección anterior.

$$s_{ij}^{(m_{5i})} = \sum_{p,q}^{L,S} \kappa_p \kappa_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} = s_{ji}^{(m_{5i})} \quad (6.43)$$

Por lo tanto, y por sustitución directa en (6.37), se tiene

$$\Delta(\phi - \lambda) = -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen} I^*} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{i,j} r_{ij}^{(m_{5i})} s_{ij}^{(m_{5i})}, \quad (6.44)$$

o, equivalentemente, que

$$\Delta(\phi - \lambda) = 0.$$

Para el caso de la contribución a la nutación en oblicuidad,  $\Delta(\theta - I)$ , la situación es análoga, definiendo la cantidad

$$r_{ij}^{(m_{5i})} = \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon n_j - n_\mu^*} + \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_i - \epsilon n_j + n_\mu^*} \right] \cos(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j), \quad (6.45)$$

que es antisimétrica bajo permutación de sus índices en virtud de

$$\begin{aligned} r_{ji}^{(m_{5i})} &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_j - \epsilon n_i - n_\mu^*} + \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_j - \epsilon n_i + n_\mu^*} \right] \cos(\tau \Theta_j - \epsilon \Theta_i) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\epsilon n_j - \tau n_i - n_\mu^*} + \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\epsilon n_j - \tau n_i + n_\mu^*} \right] \cos(\epsilon \Theta_j - \tau \Theta_i) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\epsilon n_j - \tau n_i - n_\mu^*} + \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\epsilon n_j - \tau n_i + n_\mu^*} \right] \cos(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j) = \\ &= - \sum_{\tau, \epsilon} \left[ \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon n_j - n_\mu^*} + \frac{h_{m_{5i}}(I^*, \epsilon, \tau)}{\tau n_i - \epsilon n_j + n_\mu^*} \right] \cos(\tau \Theta_i - \epsilon \Theta_j) = \\ &= -r_{ij}^{(m_{5i})}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

donde en (1) hemos intercambiado el nombre entre los índices mudos  $\epsilon$ ,  $\tau$ , y en (2) se ha aplicado que el coseno es una función par. Por sustitución en (6.37) se tiene, finalmente,

$$\Delta(\theta - I) = -\frac{1}{CH_d} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{i,j} r_{ij}^{(m_{5i})} s_{ij}^{(m_{5i})}, \quad (6.47)$$

que implica la anulación idéntica

$$\Delta(\theta - I) = 0. \quad (6.48)$$

## 6.5. Cancelación del torque del potencial de redistribución

La nulidad de las contribuciones de primer orden que se han estudiado en las secciones precedentes, se debe a la cancelación del momento de la fuerza gravitatoria resultante, que sobre la Tierra elástica (y sus particularidades de modelado) ejerce el potencial de redistribución.

Este hecho ya fue puesto de manifiesto por Krasinsky (1999), mediante mecánica vectorial de forma similar a la que sigue, a partir de la expresión

vectorial de esta contribución del potencial gravitatoria dada por (4.60):

$$V_p(\mathbf{r}) = -k \frac{Gm_p}{2} \frac{1}{r_p^5} \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 [3(\mathbf{r}\mathbf{r}_p)^2 - r^2 r_p^2]. \quad (6.49)$$

En esta expresión, referida a un sistema terrestre, el cuerpo perturbador  $p$  (o inductor de deformación) tiene masa  $m_p$  y vector posición  $\mathbf{r}_p$ , y  $\mathbf{r}$  es el punto campo terrestre que experimenta la interacción gravitatoria de deformación. El torque vendrá dado por

$$\mathbf{N}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} V_p(\mathbf{r}). \quad (6.50)$$

Realizando las operaciones de derivación y producto vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} V_p(\mathbf{r}) &= -k \frac{Gm_p}{2} a_E^5 \left\{ -\frac{5 [3(\mathbf{r}\mathbf{r}_p)^2 - r^2 r_p^2]}{r^7 r_p^5} \mathbf{r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(\mathbf{r}\mathbf{r}_p) \mathbf{r}_p - 2r_p^2 \mathbf{r}}{r^5 r_p^5} \right\}, \\ \mathbf{N}_p(\mathbf{r}) &= -3k Gm_p a_E^5 \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_p}{r^5 r_p^5} \mathbf{r} \times \mathbf{r}_p \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) \mathbf{r} \times \mathbf{r}_p, \end{aligned} \quad (6.51)$$

Esta expresión para  $\mathbf{N}_p(\mathbf{r})$ , salvo notación, es la dada por Krasinsky (1999). En la expresión anterior se ha definido  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p)$  por agilizar la notación, que verifica  $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p) = f(\mathbf{r}_p, \mathbf{r})$ .

En el modelo elástico estudiado en los capítulos precedentes, la posición de los cuerpos perturbadores es una función conocida del tiempo. Además, como primera aproximación al problema dinámico de la deformación, se consideró éste como una sucesión de soluciones del problema estático (sección 4.3). En cada una de estas instantáneas del movimiento tenemos, por un lado, la deformación creada por el cuerpo perturbador  $p$  sobre la Tierra, y por otro, la variación de la interacción gravitatoria con el cuerpo perturbado  $q$ , inducida por esta deformación (potencial de redistribución)<sup>6</sup>. De manera que, en un instante dado, el torque asociado a la variación del potencial gravitatorio de interacción con el cuerpo  $q$  (en ese sentido es perturbado) de posición  $\mathbf{r}_q$ ,

<sup>6</sup>Como veremos en el próximo capítulo, los modelos anelásticos introducen un retardo temporal entre estos dos efectos, la deformación y la interacción.

será<sup>7</sup>  $\mathbf{N}_p(\mathbf{r}_q)$ . El torque resultante será entonces

$$\mathbf{N} = \sum_{p,q}^{L,S} \mathbf{N}_p(\mathbf{r}_q) = \mathbf{N}_L(\mathbf{r}_L) + \mathbf{N}_L(\mathbf{r}_S) + \mathbf{N}_S(\mathbf{r}_L) + \mathbf{N}_S(\mathbf{r}_S). \quad (6.52)$$

El cálculo de esta expresión, a partir de (6.51), es inmediato:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_L(\mathbf{r}_L) &= f(\mathbf{r}_L, \mathbf{r}_L) \mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_L = \mathbf{0}, \\ \mathbf{N}_S(\mathbf{r}_S) &= f(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S) \mathbf{r}_S \times \mathbf{r}_S = \mathbf{0}, \\ \mathbf{N}_L(\mathbf{r}_S) &= f(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_L) \mathbf{r}_S \times \mathbf{r}_L = -f(\mathbf{r}_L, \mathbf{r}_S) \mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_S = -\mathbf{N}_S(\mathbf{r}_L), \end{aligned} \quad (6.53)$$

de donde, finalmente,

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (6.54)$$

Nuestro propósito ahora es llegar a este mismo resultado con las expresiones utilizadas para el potencial de redistribución en el formalismo canónico de las variables de Andoyer (sección 5.1), como verificación del modelo empleado para el estudio del movimiento de rotación terrestre, y de los resultados de las secciones precedentes.

En la formulación hamiltoniana el cálculo de los momentos gravitatorios se realiza a través del formalismo del trabajo virtual ( $\delta W$ ) que realizan las fuerzas ( $\mathbf{F}$ ) que actúan sobre el sistema en un desplazamiento virtual ( $\delta \mathbf{r}$ ) (Goldstein 1987):

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (6.55)$$

Por desplazamiento virtual se entiende un desplazamiento infinitesimal arbitrario en el espacio de fases del sistema, que sea compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en un instante dado. En nuestro problema éste viene dado por una rotación infinitesimal expresada en el conjunto canónico de Andoyer, que atiende al caso más general en el sentido de que vincula coordenadas y momentos para describirla. Esto es, además de las coordenadas canónicas  $\lambda, \mu, \nu$  se precisa de los ángulos auxiliares  $\sigma, I$  que son función de los momentos canónicos  $\Lambda, M, N$ .

En virtud de la expresión (2.40) para una rotación infinitesimal en variables de Andoyer, el desplazamiento virtual vendrá dado:

$$\delta \mathbf{R} = \mathbf{b}_3 \delta \nu + \mathbf{m} \delta \sigma + \mathbf{u}_L \delta \mu + \mathbf{n} \delta I + \mathbf{s}_3 \delta \lambda, \quad (6.56)$$

---

<sup>7</sup>Este torque es una contribución al torque total asociado a la interacción gravitatoria con el cuerpo perturbado  $q$ , la debida al potencial de redistribución. Nótese que éste no depende de la masa  $m_q$ , debido a que esta contribución es la inducida por el cuerpo perturbador  $p$  a través de la deformación. Además, y por aplicación de la tercera Ley de Newton, el torque que la Tierra ejerce sobre  $q$  es el mismo, pero de sentido contrario, que el ejercido por  $q$  sobre la Tierra. Evidentemente  $p$  y  $q$  pueden referirse al mismo o a distinto astro.

que se escribe en términos de las variaciones infinitesimales de las coordenadas y momentos del conjunto canónico, diferenciando en (2.13),

$$\begin{aligned}\cos \sigma &= \frac{N}{M} \rightarrow \delta \sigma = -\frac{\delta N}{M \operatorname{sen} \sigma} + \cos \sigma \frac{\delta M}{M \operatorname{sen} \sigma}, \\ \cos I &= \frac{\Lambda}{M} \rightarrow \delta I = -\frac{\delta \Lambda}{M \operatorname{sen} I} + \cos I \frac{\delta M}{M \operatorname{sen} I}.\end{aligned}\quad (6.57)$$

Paralelamente, la rotación infinitesimal y el desplazamiento virtual se relacionan a través de la conocida representación vectorial para rotaciones infinitesimales (Goldstein 1987):

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R} \times \mathbf{r}, \quad (6.58)$$

de modo que (Escapa 2006)

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\delta \mathbf{R} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{R} = \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R}, \quad (6.59)$$

donde  $\mathbf{N}$  es el torque o momento de la fuerza  $\mathbf{F}$ . La expresión (6.56) nos permite vincular las fuerzas generalizadas asociadas al conjunto canónico, que denotaremos por  $\{Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\Lambda, Q_M, Q_N\}$ , con el desplazamiento virtual, y éste con las componentes del torque a través de (6.59). Dado que por construcción<sup>8</sup> se tiene

$$\delta W = Q_\lambda \delta \lambda + Q_\mu \delta \mu + Q_\nu \delta \nu + Q_\Lambda \delta \Lambda + Q_M \delta M + Q_N \delta N, \quad (6.60)$$

igualando esta expresión a la resultante de sustituir (6.56) en (6.59), obtenemos una relación entre las fuerzas generalizadas y las proyecciones del torque sobre los ejes de las rotaciones infinitesimales, y a la postre sus componentes

$$\begin{aligned}Q_\lambda &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{s}_3, \quad Q_\mu = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_L, \quad Q_\nu = \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}_3, \\ Q_\Lambda &= -\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{M \operatorname{sen} I}, \\ Q_M &= \frac{\cos I}{M \operatorname{sen} I} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} + \frac{\cos \sigma}{M \operatorname{sen} \sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{m}, \\ Q_N &= -\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}}{M \operatorname{sen} \sigma}.\end{aligned}\quad (6.61)$$

<sup>8</sup>La construcción habitual (Meirovitch 1970, Gantmájér 1996, entre otros) supone un desplazamiento virtual sólo en las coordenadas del sistema  $q_i$ , de modo que  $\delta W = \sum Q_i \delta q_i$  (es el caso, por ejemplo, de los ángulos de Euler y en general de los sistemas langrangianos). Mediante una transformación canónica (Escapa 2006) esta expresión puede escribirse en términos de un nuevo conjunto canónico donde el desplazamiento virtual del sistema dependa tanto de las nuevas coordenadas como de los nuevos momentos  $(Q_i, P_i)$ , esto es,  $\delta W = \sum Q_{P_i} \delta P_i + Q_{Q_i} \delta Q_i$  (es el caso, por ejemplo, del conjunto canónico de Andoyer).

Por otro procedimiento y con otro propósito, las expresiones (6.61) fueron obtenidas por Getino y Ferrándiz (1997).

Dado que el sistema está sometido a un potencial, en nuestro problema el de redistribución  $V_t$  (5.12), que no depende de las velocidades generalizadas (el campo gravitatorio es conservativo), las fuerzas generalizadas derivan de éste (Goldstein 1987), y podemos escribir

$$(Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\Lambda, Q_M, Q_N) = - \left( \frac{\partial V_t}{\partial \lambda}, \frac{\partial V_t}{\partial \mu}, \frac{\partial V_t}{\partial \nu}, \frac{\partial V_t}{\partial \Lambda}, \frac{\partial V_t}{\partial M}, \frac{\partial V_t}{\partial N} \right), \quad (6.62)$$

que nos permite, junto a las relaciones (6.61), obtener el momento gravitatorio en función de derivadas del potencial respecto del conjunto canónico.

Podemos obtener las componentes del torque  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$  en el sistema celeste, geocéntrico de base ortonormal  $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ , haciendo uso de las relaciones más convenientes de entre las (6.61). Así por ejemplo, la primera de ellas nos da directamente la tercera componente del torque

$$Q_\lambda = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s}_3 = N_3 = - \frac{\partial V_t}{\partial \lambda}. \quad (6.63)$$

Las expresiones para  $Q_\mu$  y  $Q_\Lambda$  nos permiten formar un sistema de ecuaciones del que obtener el resto de componentes. Para ello, recordando (2.37),  $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \cos \lambda + \mathbf{s}_2 \sin \lambda$ , escribimos

$$\begin{aligned} Q_\Lambda &= - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}}{M \sin I} = -N_1 \frac{\cos \lambda}{M \sin I} - N_2 \frac{\sin \lambda}{M \sin I} = - \frac{\partial V_t}{\partial \Lambda}, \\ \frac{\partial V_t}{\partial \Lambda} &= \left( \frac{\partial V_t}{\partial \lambda} \right) - \frac{1}{M \sin I} \frac{\partial V_t}{\partial I} = - \frac{1}{M \sin I} \frac{\partial V_t}{\partial I}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

donde se ha usado (3.17) y que  $V_t$  no tiene dependencia explícita con el momento  $\Lambda$ . Igualando obtenemos

$$N_1 \cos \lambda + N_2 \sin \lambda = - \frac{\partial V_t}{\partial I}. \quad (6.65)$$

Paralelamente,  $\mathbf{u}_L = \mathbf{L}/M = (\sin I \sin \lambda, -\sin I \cos \lambda, \cos I)$ , haciendo uso de (2.46), entonces

$$\begin{aligned} Q_\mu &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_L = N_1 \sin I \sin \lambda - N_2 \sin I \cos \lambda + N_3 \cos I = - \frac{\partial V_t}{\partial \mu} \rightarrow \\ &\rightarrow N_1 \sin I \sin \lambda - N_2 \sin I \cos \lambda = - \frac{\partial V_t}{\partial \mu} + \cos I \frac{\partial V_t}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

donde se ha usado (6.63). La solución del sistema formado por (6.65) y (6.66), nos permite obtener las componentes  $N_2$  y  $N_3$  del torque. Recopilando los

resultados<sup>9</sup>, obtenemos

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \frac{\partial V_t}{\partial I} - \frac{\sen \lambda}{\sen I} \frac{\partial V_t}{\partial \mu} + \sen \lambda \frac{\cos I}{\sen I} \frac{\partial V_t}{\partial \lambda} \\ -\sen \lambda \frac{\partial V_t}{\partial I} + \frac{\cos \lambda}{\sen I} \frac{\partial V_t}{\partial \mu} - \cos \lambda \frac{\cos I}{\sen I} \frac{\partial V_t}{\partial \lambda} \\ -\frac{\partial V_t}{\partial \lambda} \end{pmatrix}. \quad (6.67)$$

El proceso de obtención de la forma explícita de estas componentes, a partir de la expresión del potencial de redistribución, es análogo al seguido para la derivación de las contribuciones al movimiento de rotación en el capítulo anterior. Por ello, y por abreviar la exposición, omitiremos los detalles del cálculo que ya han sido expuestos con anterioridad.

Sí es importante, empero, resaltar la principal diferencia respecto al proceso de derivación de tales contribuciones, en lo concerniente a la expresión (5.12) empleada para el potencial de redistribución. Ésta procedía del producto (5.2) de las expresiones de los armónicos esféricos, los referidos a los cuerpos perturbadores dependientes de variables de Andoyer como funciones conocidas del tiempo (denotadas por  $\sim$ ), y los referidos a los cuerpos perturbados, dependientes de las variables canónicas del problema.

Para los primeros, dados por las expresiones (5.3) sólo era necesario admitir el orden de aproximación  $O(\tilde{\sigma}^0)$ , mientras que para los segundos, con las expresiones (5.6), era necesario mantener el orden  $O(\sigma^1)$  a fin de garantizar la completitud del orden  $O(\sigma^0)$  en las contribuciones derivadas del movimiento, pues éstas incluían derivadas respecto de  $\sigma$ .

Ahora, sin embargo, dado que las expresiones (6.67) no incluyen derivadas respecto a este ángulo auxiliar, y considerando que tras los procesos de derivación se aplicará de igual manera la equivalencia entre variables canónicas y funciones del tiempo, y en particular  $\sigma = \tilde{\sigma}$ , es necesario mantener el orden  $O(\tilde{\sigma}^1)$  a fin de estudiar las posibles cancelaciones en este orden de aproximación. Así pues, para los armónicos esféricos correspondientes a los cuerpos

<sup>9</sup>Esta expresión para las componentes del torque puede recuperarse por un camino alternativo, en virtud de la la relación general  $\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt$ . Dado que disponemos de la expresión (2.46) del momento angular como función del conjunto canónico, la derivada temporal de ésta vendrá dada (ecuaciones de Hamilton) por el corchete de Poisson:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \{\mathbf{L}, V_t\},$$

ya que  $\mathbf{N}$  es la contribución aditiva al torque total asociada al hamiltoniano  $V_t$ .

perturbadores, se tomarán también las expresiones (5.6) con la sustitución de las variables sin  $\sim$  por variables con  $\sim$ , esto es, funciones conocidas del tiempo.

Atendiendo a estas consideraciones, procedemos a indicar el resultado del proceso de cálculo de las derivadas para cada orden de aproximación, y de las componentes del torque.

A la expresión (5.12) del potencial de distribución, que incluye los términos que denotamos con  $[\sigma^0]$  y  $[\sigma^1]$ , hay que añadir entonces el cruce de los términos  $O(\sigma^0)$  con  $O(\tilde{\sigma}^1)$ , que denotaremos por<sup>10</sup>  $[\tilde{\sigma}^1]$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} = \frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\sigma^0] + \frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\sigma^1] + \frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\tilde{\sigma}^1] \quad (6.68)$$

con

$$\frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\sigma^0] = \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q \tau m_{5i} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \text{sen}(\tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j) \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\sigma^1] &= \sigma \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q \tau m_{5i} \left[ P_{ijpq}(\tau, \epsilon) \text{sen}(\mu^* - \tau \Theta_i^* + \epsilon \tilde{\Theta}_j) \right. \\ &\quad \left. + Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) \text{sen}(\mu^* + \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j) \right], \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\tilde{\sigma}^1] = -\frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} [\sigma^1], \quad (6.71)$$

donde las funciones  $T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon)$ ,  $P_{ijpq}(\tau, \epsilon)$  y  $Q_{ijpq}(\tau, \epsilon)$  son las definidas por (5.37) y (5.47) respectivamente.

Como se aprecia los términos de orden 1 en  $\sigma$  cancelan entre sí en virtud de (6.71). El término de orden 0 en  $\sigma$  puede demostrarse que es nulo siguiendo un procedimiento análogo a las secciones previas, dado que en aplicación de (6.21), la suma sobre los índices  $\tau, \epsilon$  es nula

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau,\epsilon=\pm 1} \tau T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \text{sen}(\tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j) \quad (6.72) \\ &= A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} \left[ f^+(I^*) \text{sen}(\Theta_i^* - \tilde{\Theta}_j) + f^-(I^*) \text{sen}(\Theta_i^* + \tilde{\Theta}_j) \right] \sum_{\tau=\pm 1} \tau = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial V_t}{\partial \lambda^*} = 0. \quad (6.73)$$

<sup>10</sup>Se trata sólo de una notación para identificar el origen del términos, pues  $\sigma = \tilde{\sigma}$ .

Para las demás derivadas el proceso es análogo:

$$\frac{\partial V_t}{\partial I^*} = \frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\sigma^0] + \frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\sigma^1] + \frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\tilde{\sigma}^1], \quad (6.74)$$

con

$$\frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\sigma^0] = \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j) \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\sigma^1] &= -\sigma \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q \left[ P_{ijpq}^{(V_I)}(\tau, \epsilon) \cos(\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j) \right. \\ &\quad \left. - Q_{ijpq}^{(V_I)}(\tau, \epsilon) \cos(\mu^* + \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j) \right], \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\tilde{\sigma}^1] = -\frac{\partial V_t}{\partial I^*} [\sigma^1], \quad (6.77)$$

donde se han definido las funciones

$$\begin{aligned} P_{ijpq}^{(V_I)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} + \frac{3}{2} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q}, \\ Q_{ijpq}^{(V_I)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{2} \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Los términos de orden 1 en  $\sigma$  cancelan entre sí en virtud de (6.77). El término de orden 0 en  $\sigma$  puede demostrarse que es nulo por el mismo motivo que el caso anterior (6.72). Por lo tanto, se tiene

$$\frac{\partial V_t}{\partial I^*} = 0. \quad (6.79)$$

Por último, la derivada respecto a  $\mu^*$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} = \frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^0] + \frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^1] + \frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\tilde{\sigma}^1], \quad (6.80)$$

donde

$$\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^0] = \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q T_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) \sin(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j), \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^1] &= \sigma \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j} \sum_{\tau,\epsilon}^{\pm 1} \kappa_p k_q \left[ P_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) \sin(\mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j) \right. \\ &\quad \left. + Q_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) \sin(\mu^* + \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j) \right], \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\tilde{\sigma}^1] = -\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^1], \quad (6.83)$$

donde se han definido las funciones:

$$\begin{aligned} T_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) &= 3C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} + \frac{3}{2} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}, \\ P_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} C_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} + 3D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}, \\ Q_{ijpq}^{(V\mu)}(\tau, \epsilon) &= \frac{3}{2} C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

La cancelación de los términos de orden 1 en  $\sigma$  es directa a partir de (6.83). El término de orden 0 en  $\sigma$  es nulo, lo que puede evidenciarse a partir de resultados previos. Así, en virtud de la definición de las cantidades  $T_{ijpq}^{(V\mu)}$ ,  $T_{ijpq}^{(\Delta I)}$  y  $T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}$  dadas por (6.84), (5.39) y (5.37) respectivamente, se tiene la relación

$$T_{ijpq}^{(\Delta I)} = \tau m_{5i} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)} - \cos I^* T_{ijpq}^{(V\mu)}. \quad (6.85)$$

Teniendo en cuenta el caso anterior (6.72), la suma sobre los índices  $\tau, \epsilon$  en el término correspondiente a  $\tau m_{5i} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}$  es nula. Para el término correspondiente a  $\cos I^* T_{ijpq}^{(V\mu)}$ , en aplicación de (6.30) se puede definir las cantidades antisimétrica y simétrica bajo permutación de sus índices:

$$\begin{aligned} r_{ij}^{(m_{5i})} &= \sum_{\tau, \epsilon} g_{m_{5i}}(I^*, \tau, \epsilon) \operatorname{sen}(\tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j) = -r_{ji}^{(m_{5i})}, \\ s_{ij}^{(m_{5i})} &= \sum_{p, q}^{L, S} \kappa_p k_q A_{i;p}^{(m_{5i})} A_{j;q}^{(m_{5i})} = s_{ji}^{(m_{5i})}, \end{aligned} \quad (6.86)$$

tales que

$$\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} [\sigma^0] = -\frac{\omega_E}{H_d} \frac{1}{\cos I^*} \sum_{m_{5i}=0,1,2} \sum_{i,j} r_{ij}^{(m_{5i})} s_{ij}^{(m_{5i})} = 0. \quad (6.87)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial V_t}{\partial \mu^*} = 0. \quad (6.88)$$

En resumen, y dado que todas las derivadas que intervienen en la expresión de las componentes del torque (6.67) son nulas, tal como queríamos probar

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (6.89)$$

Realmente hemos probado que el torque es nulo a primer orden en  $\sigma$  y  $\tilde{\sigma}$ , esto es, en el orden de aproximación en el que se han derivado las fórmulas de rotación. Nótese además que los motivos matemáticos por los que se provocan las distintas cancelaciones en las componentes del torque son, como cabía

esperar, los mismos que provocan la cancelación de las contribuciones a los movimientos de precesión y nutación (y de éste, en particular, los términos de Poisson).



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 7

## Tierra elástica: generalizaciones

### 7.1. Generalización del modelo elástico

En los capítulos 4 y 5 se ha estudiado analíticamente el movimiento de rotación de una Tierra elástica. El modelo elástico se construye sobre la hipótesis simplificadora de que la Tierra, en el estado no perturbado, es esférica y sin rotación, a efectos de modelar el campo de vectores desplazamiento (solución del problema elástico) y, a la postre, la forma del potencial de redistribución. En el capítulo 6 se ha demostrado que las características de este modelo implican que no existe influencia del potencial de redistribución en el movimiento de rotación de la Tierra, aunque sí de la energía cinética de redistribución.

Paralelamente las hipótesis simplificadoras de este modelo conducen a que los números de Love son independientes tanto de las frecuencias del movimiento (que son combinación de las frecuencias orbitales inductoras de la deformación y las propias de la rotación terrestre) como del orden  $m$  de los armónicos esféricos componentes del desarrollo del potencial gravitatorio, (4.47) y (4.51). Este hecho contraviene desarrollos más precisos del potencial de redistribución (Wahr 1981, Mathews et al. 1995, IERS 2010).

Un modelado más cercano a la realidad consiste en incluir la elipticidad y la rotación en el estado no deformado de la Tierra, para la resolución del problema elástico, y por ende condicionan la naturaleza matemática de los números de Love que describen la respuesta elástica del sistema. Modelos con estas características han sido desarrollados por Simth (1974), Shen y Mansinha (1976) y Wahr (1979 y 1981) entre otros.

A lo largo de las próximas secciones estudiaremos las contribuciones a la rotación de la Tierra debidas al potencial de redistribución y a la energía cinética de redistribución, bajo las hipótesis de esta generalización del modelo

elástico, y con inclusión de efectos anelásticos. Hasta la fecha la contribución de la energía cinética de redistribución sólo ha sido calculada para la reología terrestre simplificada (estado no deformado esférico y sin rotación), tal como se ha especificado en el capítulo 4. En Krasinsky (1999) y Lambert y Mathews (2006) encontramos antecedentes de cálculo de la contribución asociada al potencial de redistribución, con consideraciones elásticas más generales y efectos anelásticos. En ambos casos, sin embargo, el problema se aborda con una formulación muy diferente de las ecuaciones dinámicas, que supone mayores simplificaciones en el cálculo numérico o en la derivación de las expresiones, pese a compartir similiares hipótesis de modelado con alguno de los casos que se tratarán en las próximas secciones.

Dada la complejidad de estos modelos reológicos, y que no forman parte de nuestro objetivo, no se incluye aquí sus desarrollos, aunque mencionaremos sus líneas generales. En éstos, en las ecuaciones del problema elástico, en oposición a (4.41), existe dependencia temporal en el campo de desplazamientos,  $\mathbf{s}(\mathbf{r},t)$ , y no se dispone de simetría esférica radial en  $\rho(\mathbf{r})$ . Adicionalmente se han de incorporar las fuerzas inerciales, centrífuga y de Coriolis, en la ecuación del movimiento. Bajo estas condiciones el problema no es reducible a ecuaciones diferenciales separadas para cada armónico  $Y_{lm}$ . Es decir, un potencial de marea con un término  $Y_{2m}$  como en nuestro caso, provoca que las funciones incógnitas del problema, tales como el campo de desplazamientos  $\mathbf{s}(\mathbf{r},t)$  o las componentes del tensor de tensiones elástico, tengan contribuciones acopladas con armónicos  $Y_{lm}$  con  $l \neq 2$ .

La formulación del problema en ecuaciones diferenciales de funciones escalares (Smith 1974) permite la separación en funciones de tipo esférico ( $\sigma_{lm}$ ) y toroidal ( $\tau_{lm}$ ). En el caso de un estado deformado esférico y sin rotación, no existe acoplamiento entre estos tipos de funciones, y de hecho, el problema se formula sólo con funciones  $\sigma_{lm}$  (es el caso, por ejemplo, de la expresión 4.53 para la expresión del potencial de redistribución). Cuando se introduce rotación y elipticidad estos escalares se combinan siguiendo ciertas reglas de acoplamiento (Shen y Mansinha 1976), y la respuesta elástica del sistema se describe, ante un potencial externo de tipo  $Y_{lm}$ , con la serie truncada de funciones escalares dada por (Wahr 1981):

$$u = \sigma_{l-2,m} + \tau_{l-1,m} + \sigma_{lm} + \tau_{l+1,m} + \sigma_{l+2,m}, \quad (7.1)$$

que para el caso  $l = 2$  se reduce a

$$u = \tau_{1,m} + \sigma_{2,m} + \tau_{3,m} + \sigma_{4,m}. \quad (7.2)$$

El hecho de usar una serie truncada es equivalente a ignorar ciertos términos de acoplamiento en las ecuaciones dinámicas, pero resulta necesario para

poder acometer el estudio. La precisión del truncamiento es de, al menos, una parte en 300 (nótese que  $H_d \simeq 1/300$ ). Bajo estas condiciones, la expresión correspondiente en este modelo a (4.53), para las componentes del potencial de redistribución, viene dada por (Wahr 1981, Dehant et al. 1999)

$$V_m(r, \theta, \phi) = k_{2m} \left(\frac{a_E}{r}\right)^3 Y_{2m}(\theta, \phi) + k_{2m}^{(+)} \left(\frac{a_E}{r}\right)^5 Y_{4m}(\theta, \phi), \quad r \geq a_E, \quad (7.3)$$

donde  $k_{2m}$  y  $k_{2m}^{(+)}$  son escalares (generalización del número de Love) que son combinación lineal adimensional de los escalares solución (7.2), y por ello dependen de  $m$  (y para una perturbación más general, de  $l$ ) y en principio, también de las frecuencias de la perturbación.

Numéricamente, dado que estamos desarrollando una teoría a primer orden, podemos despreciar la contribución del término asociado a  $k_{2m}^{(+)}$  (véase tabla 6.3. de IERS 2010) que se transcribe a continuación como tabla 7.1, y la mayor potencia del factor<sup>1</sup>  $a_E/r$ , de modo que consideraremos

$$V_m(r, \theta, \phi) = k_{2m} \left(\frac{a_E}{r}\right)^3 Y_{2m}(\theta, \phi), \quad r \geq a_E. \quad (7.4)$$

Nótese, por comparación con (4.53), que la introducción en el modelo elástico de la elipticidad y rotación se ha traducido en la sustitución del número de Love  $k$  por un conjunto de números de Love  $k_{2m}$  ( $m = 0, 1, 2$ ), dependientes del orden del armónico de perturbación, con una precisión aproximada de al menos una parte en 300.

Es conveniente aclarar que, a resultas de la expresión (4.51),  $R_m(a_E) = k$ , no es correcta su sustitución directa por  $R_m(a_E) = k_{2m}$  bajo la consideración de que es una generalización natural dada la dependencia con  $m$  de la solución radial. Tal planteamiento es erróneo, pues la utilización del conjunto de números de Love  $k_{2m}$  no tiene cabida con un modelo elástico donde el estado no deformado sea esférico y sin rotación (salvo la solución trivial  $k_{2m} = k$ ,  $m = 0, 1, 2$ ), y por el contrario es la manifestación de las hipótesis más generales consideradas.

Tabla 7.1: Números de Love para Tierra elástica (IERS 2010, Tabla 6.3)

$(l, m)$	$k_{lm}$	$k_{lm}^{(+)}$
(2, 0)	0.29525	-0.00087
(2, 1)	0.29470	-0.00079
(2, 2)	0.29801	-0.00057

<sup>1</sup>Véase la nota al pie en la página 34.

A partir de (7.4) generalizaremos la expresión del potencial de redistribución,  $V_{t;p,q}$  dado por (5.1) y (5.2), reconstruyendo su forma a partir de (4.54), sustituyendo  $k$  por  $k_{2m}$ , esto es

$$V(\mathbf{r}) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=0}^2 \alpha_m V_m(\mathbf{r}) \right] = \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 \sum_{m=0}^2 k_{2m} \operatorname{Re} [\alpha_m U_m]. \quad (7.5)$$

Reescribimos en términos de los armónicos esféricos reales, definidos por (2.95), teniendo en cuenta la relación

$$Y_{lm}(\eta, \alpha) = N_{lm} [C_{lm}(\eta, \alpha) + iS_{lm}(\eta, \alpha)], \text{ con } N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}. \quad (7.6)$$

donde por consistencia de notación con los capítulos precedentes, hemos denotado las coordenadas angulares esféricas por  $(\eta, \alpha)$ . A partir de las expresiones (4.39), y para  $l = 2$ , se tiene

$$\alpha_m = c_m N_{2m} (C'_{2m} - iS'_{2m}), \quad U_m = \frac{r^2}{a_E^2} N_{2m} (C_{2m} + iS_{2m}), \quad (7.7)$$

donde recordamos que las primas hacen referencia al argumento  $(\eta', \alpha')$ . Por lo tanto

$$\operatorname{Re} [\alpha_m U_m] = c_m \frac{r^2}{a_E^2} N_{2m}^2 (C_{2m} C'_{2m} + S_{2m} S'_{2m}). \quad (7.8)$$

Sustituyendo en (7.5), con los valores

$$c_0 = \frac{4\pi}{5} \frac{Gm}{r'^3} a_E^2, \quad c_1 = c_2 = 2c_0, \quad (7.9)$$

$$N_{20}^2 = \frac{5}{4\pi}, \quad N_{21}^2 = \frac{1}{6} \frac{5}{4\pi}, \quad N_{22}^2 = \frac{1}{24} \frac{5}{4\pi}, \quad (7.10)$$

se obtiene la generalización de la expresión de la energía potencial de redistribución :

$$V_{t;p,q} = \frac{a_E^5}{r^3 r'^3} Gm_p m_q \left[ k_{20} C_{20} C'_{20} + k_{21} \frac{1}{3} (C_{21} C'_{21} + S_{21} S'_{21}) + k_{22} \frac{1}{12} (C_{22} C'_{22} + S_{22} S'_{22}) \right]. \quad (7.11)$$

Como vemos, esta nueva expresión se obtiene a partir de la dada por (5.1) y (5.2), con la sustitución de  $k$  por  $k_{2m}$ , e introduciendo éstos como factor de los armónicos  $C'_{2m}$  y  $S'_{2m}$ . Siguiendo esta regla, el proceso de construcción

de la expresión del potencial de redistribución en términos de las variables de Andoyer y la introducción de las series de movimiento orbital, es análogo. Esto permite recuperar la expresión (5.12) con la sustitución de  $\kappa_p$  por  $\kappa_{m;p}$  en cada término  $V_t^{(m)}[\sigma^k]$  ( $m = 0, 1, 2$ ) dado por (5.13) y (5.14), definiendo

$$\kappa_{m;p} = \frac{1}{3} k_{2m} m_p a_E^2 \left( \frac{a_E}{a_p} \right)^3, \quad (7.12)$$

conforme a (4.66). Como hasta ahora, dado que  $l = 2$ , lo omitimos de la notación.

Estudiaremos ahora la generalización de la expresión (4.67) de  $\mathbf{I}_1$ , esto es, la dependencia temporal del tensor de inercia. Para ello reescribiremos en primer lugar la expresión de  $\mathbf{I}_1$  en términos de los armónicos esféricos reales, a partir de las relaciones (2.91):

$$\mathbf{I}_1 = \kappa \left( \frac{a}{r'} \right)^3 \begin{pmatrix} C'_{20} - \frac{1}{2} C'_{22} & -\frac{1}{2} S'_{22} & -C'_{21} \\ -\frac{1}{2} S'_{22} & C'_{20} + \frac{1}{2} C'_{22} & -S'_{21} \\ -C'_{21} & -S'_{21} & -2C'_{20} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Siguiendo el proceso de deducción realizado en la sección 4.4, compararemos (7.11) con la expresión dada por la fórmula de MacCullagh (2.101), en términos de los armónicos esféricos de segundo grado (recuérdese que se ha cambiado el signo para comparar con la expresión del potencial de redistribución, ya que de origen se han derivado con convenios de signo distinto):

$$V_{t;p,q} = -\frac{Gm_q}{r^3} \left[ \frac{2\Delta C - \Delta A - \Delta B}{2} C_{20} + \frac{\Delta A - \Delta B}{4} C_{22} + EC_{21} + DS_{21} + \frac{1}{2} FS_{22} \right], \quad (7.14)$$

La comparación de los términos de los coeficientes que acompañan a los armónicos  $C_{20}$  y  $C_{22}$ , junto al teorema de Darwin demostrado en la sección 4.4, conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\Delta C - \Delta A - \Delta B &= -2 \left( a_E^5 / r'^3 \right) m_p k_{20} C'_{20}, \\ \Delta A - \Delta B &= \frac{1}{3} \left( a_E^5 / r'^3 \right) m_p k_{22} C'_{22}, \\ \Delta A + \Delta B + \Delta C &= 0, \end{aligned} \quad (7.15)$$

cuya solución es, introduciendo convenientemente las constantes (7.12)

$$\begin{aligned}\Delta A &= (a_E^5/r'^3) \left( \kappa_{20} C'_{20} - \frac{1}{2} \kappa_{22} C'_{22} \right), \\ \Delta B &= (a_E^5/r'^3) \left( \kappa_{20} C'_{20} + \frac{1}{2} \kappa_{22} C'_{22} \right), \\ \Delta C &= -2 (a_E^5/r'^3) \kappa_{20} C'_{20}.\end{aligned}\quad (7.16)$$

El resto de términos están desacoplados, y directamente se obtiene

$$\begin{aligned}E &= - (a_E^5/r'^3) \kappa_{21} C'_{21}, \\ D &= - (a_E^5/r'^3) \kappa_{21} S'_{21}, \\ F &= -\frac{1}{2} (a_E^5/r'^3) \kappa_{22} S'_{22}.\end{aligned}\quad (7.17)$$

En virtud de estos resultados, la expresión (7.13), para el caso de un modelo elástico con consideración de la elipticidad y la rotación, queda modificada según

$$\mathbf{I}_1 = \left( \frac{a}{r'} \right)^3 \begin{pmatrix} \kappa_{20} C'_{20} - \frac{1}{2} \kappa_{22} C'_{22} & -\frac{1}{2} \kappa_{22} S'_{22} & -\kappa_{21} C'_{21} \\ -\frac{1}{2} \kappa_{22} S'_{22} & \kappa_{20} C'_{20} + \frac{1}{2} \kappa_{22} C'_{22} & -\kappa_{21} S'_{21} \\ -\kappa_{21} C'_{21} & -\kappa_{21} S'_{21} & -2\kappa_{20} C'_{20} \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

que como se aprecia obedece a la misma regla de generalización: la sustitución de  $k$  por  $k_{2m}$ , o equivalentemente  $\kappa$  por  $\kappa_{2m}$ , e introduciendo éstos como factor de los armónicos  $C'_{2m}$  y  $S'_{2m}$ . La expresión (7.18) es equivalente, salvo notación, a la dada por Lambert y Mathews (2006).

Como se estudió en la sección 4.5, la influencia de la matriz  $\mathbf{I}_1$  en las ecuaciones del movimiento es a través del término de energía cinética de redistribución,  $T_t$ , dado por (4.76) en el hamiltoniano del sistema. Éste depende de  $\Delta C$ ,  $E$  y  $D$ , dados por las expresiones (4.82), que ahora quedan modificadas según

$$\begin{aligned}\Delta C &= -6 \sum_j \kappa_{20,j} \tilde{B}_j(I_0) \cos \tilde{\Theta}_j, \\ E &= -3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} \kappa_{21,j} \tilde{C}_j(I_0, \tau) \operatorname{sen} \left( \omega_E t - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right), \\ D &= -3 \sum_{j,\epsilon=\pm 1} \kappa_{21,j} \tilde{C}_j(I_0, \tau) \cos \left( \omega_E t - \epsilon \tilde{\Theta}_j \right).\end{aligned}\quad (7.19)$$

En estas expresiones se ha empleado la notación  $\kappa_{2m,j}$  para evidenciar que, tal como se indicó anteriormente, los valores de  $k_{2m}$ , y por ende los

de  $\kappa_{2m}$ , dependerán de la frecuencia de perturbación,  $\epsilon\tilde{n}_j$ , en el modelo de Tierra considerado (estado no perturbado elipsoidal y con rotación). Por ello en las expresiones anteriores se ha introducido  $\kappa_{2m}$  dentro de la suma sobre el índice  $j$ . La frecuencia de excitación de la respuesta elástica de la Tierra depende de forma más explícita de la frecuencia asociada a los argumentos de los armónicos (5.3), o equivalentemente la correspondencia (5.5), esto es, de la frecuencia de perturbación vista desde el sistema terrestre. Podremos escribir entonces, a nivel de notación,

$$k_{2m,j} \equiv k_{2m}(m\omega_E - \epsilon\tilde{n}_j) \equiv k_{2m}(\epsilon\tilde{n}_j).$$

En primera aproximación, siguiendo criterios numéricos que se emplearán bajo ciertas consideraciones de modelado en las secciones siguientes, es posible ignorar la dependencia con la frecuencia de perturbación, y considerar valores nominales por banda de frecuencia, es decir,  $k_{2m,j} = k_{2m}$ . Esto se indicará, a través de esta notación, cuando sea procedente.

En virtud de (7.19), y de las (5.3) para los armónicos esféricos, existe una correspondencia directa entre las funciones  $\tilde{B}_j$ ,  $\tilde{C}_j$  y  $\tilde{D}_j$  y el orden  $m$  de los armónicos y el factor  $\kappa_{2m}$  que los acompaña, y que generaliza la dada por (5.5):

$$\begin{aligned} C'_{20} &\rightarrow \kappa_{20} \rightarrow \tilde{B}_j, \\ C'_{21}, S'_{21} &\rightarrow \kappa_{21} \rightarrow \tilde{C}_j, \\ C'_{22}, S'_{22} &\rightarrow \kappa_{22} \rightarrow \tilde{D}_j. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Dado que todos los resultados de secciones precedentes se han obtenido bajo el orden de aproximación de validez de esta correspondencia, nos facilita la generalización de las fórmulas de rotación, una vez garantizada en cada caso la equivalencia del proceso de deducción.

## 7.2. Modelos de comportamiento anelástico

La introducción en el modelo de deformación de la Tierra de comportamientos no elásticos persigue una mayor cercanía del modelado teórico con el comportamiento real del sólido deformable.

En la literatura específica se siguen dos estrategias, casi equivalentes desde un punto de vista numérico como se mostrará, para introducir este tipo de efectos sin acometer el complejo problema reológico que supondría modelar un comportamiento anelástico (deformación no elástica, pero recuperable) o inelástico (deformación irrecuperable).

La primera es la seguida por Mignard (1979), Krasinsky (1999) y Getino y Ferrándiz (1991 y 2001) entre otros, y consiste en la introducción *ad hoc* de un retardo temporal en la respuesta elástica de la Tierra.

La segunda, reglada a través de las IERS Conventions (2010), introduce *ab initio* unos números de Love complejos (y en general, dependientes de las frecuencias). En ambos casos la respuesta de la Tierra es anelástica, manteniendo la linealidad de la respuesta que introduce el formalismo de números de Love y se incorporan desfases angulares en los argumentos de las fórmulas de rotación.

El modelo del retardo, pese a su simplicidad de partida y carácter *ad hoc*, permite la construcción e interpretación física de las magnitudes involucradas, reproduce la aparición de términos fuera de fase en el movimiento de rotación, y proporciona una justificación razonable para la generalización que supone la segunda de las estrategias. Comenzaremos con éste.

La construcción que se va a incluir a continuación trata de deducir e interpretar las expresiones que en las referencias relacionadas (las incluidas en la tabla 7.2, en la página 168) se introducen de forma no justificada.

Supondremos para la respuesta elástica de la Tierra un retardo temporal constante<sup>2</sup>, denotado por  $\Delta t$ , de forma que la posición de los cuerpos perturbadores, inductores de la deformación en un instante  $t$ , referida al sistema de Tisserand, se evaluará en el instante  $t - \Delta t$ . Es decir, un cuerpo perturbado por el potencial de redistribución, lo está por la marea creada elásticamente por el cuerpo perturbador en el instante  $t - \Delta t$ .

Matemáticamente se traduce en determinar las magnitudes correspondientes a los cuerpos perturbadores en el instante retardado, en nuestro caso el tensor de inercia y el potencial de redistribución, esto es,  $\mathbf{I}_1(t - \Delta t)$  y en  $V_{t;p,q}$  los términos correspondientes. Por ello no se precisa reconstruir tales funciones como ocurrió en la sección previa, ya que la introducción del retardo es directa sobre los argumentos dependientes del tiempo.

Por conveniencia formal, al igual que se hizo con el potencial de redistribución en las ecuaciones (5.13) y (5.14), separaremos la expresión de  $\mathbf{I}_1(t)$  dada por (7.18) según los diferentes órdenes de la contribución armónica,  $\mathbf{I}_1^{(m)}(t)$ , y sustituimos las expresiones (5.3):

$$\mathbf{I}_1^{(0)}(t) = 3\kappa_{20} \sum_j \tilde{B}_j(I_0) \begin{pmatrix} \cos \tilde{\Theta}_j & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\Theta}_j & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cos \tilde{\Theta}_j \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

<sup>2</sup>Una de las críticas, justificada, a esta hipótesis de partida según Efroimsky (2012), es que el retardo temporal debe depender tanto del grado de los armónicos como de las frecuencias de perturbación. Con la notación empleada, esto es,  $\Delta t = \Delta t_{2m}(\epsilon \tilde{n}_j)$ .

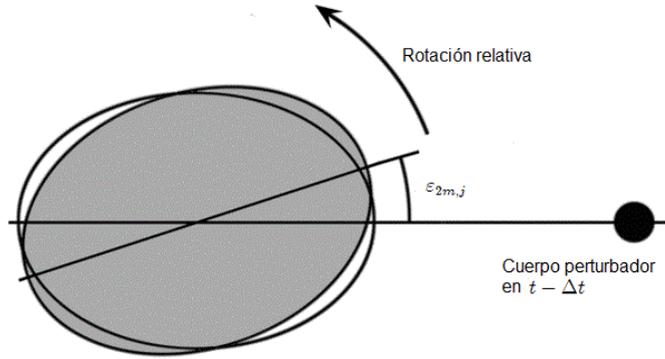


Figura 7.1: Visión esquemática del modelo anelástico del retardo temporal.

$$\mathbf{I}_1^{(1)}(t) = -3\kappa_{21} \sum_{j,\epsilon=\pm 1} \tilde{C}_j(I_0, \epsilon) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{sen}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) \\ 0 & 0 & \text{cos}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) \\ \text{sen}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & \text{cos}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_1^{(2)}(t) = -\frac{3}{2}\kappa_{22} \sum_{j,\epsilon=\pm 1} \tilde{D}_j(I_0, \epsilon) \times \begin{pmatrix} -\text{cos}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & \text{sen}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & 0 \\ \text{sen}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & \text{cos}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$\mathbf{I}_1(t) = \mathbf{I}_1^{(0)}(t) + \mathbf{I}_1^{(1)}(t) + \mathbf{I}_1^{(2)}(t). \quad (7.22)$$

Estas expresiones se han evaluado en una época determinada ( $\tilde{I} = I_0$ , para J2000), y para las funciones se asume las usuales dependencias temporales (4.80) y (2.114)

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} + \tilde{\nu} &= \mu_0 + \nu_0 + \omega_E t, \\ \tilde{\Theta}_j(t) &= \tilde{n}_j t + \Theta_{j0}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

La sustitución  $t \rightarrow t - \Delta t$  conduce a diferentes desfases angulares en los argumentos de las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_j(t - \Delta t) &= \tilde{\Theta}_j(t) + \varepsilon_{20,j}, \\
\left(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j\right)(t - \Delta t) &= \left(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j\right)(t) + \varepsilon_{21,j}, \\
\left(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j\right)(t - \Delta t) &= \left(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon\tilde{\Theta}_j\right)(t) + \varepsilon_{22,j},
\end{aligned} \tag{7.24}$$

donde se han definido

$$\varepsilon_{20,j} = -\Delta t \tilde{n}_j, \quad \varepsilon_{21,j} = -\Delta t (\omega_E - \epsilon \tilde{n}_j), \quad \varepsilon_{22,j} = -\Delta t (2\omega_E - \epsilon \tilde{n}_j), \tag{7.25}$$

o, equivalentemente,

$$\varepsilon_{2m,j} = -\Delta t \{m\omega_E - [\epsilon - \delta_{m0}(1 + \epsilon)] \tilde{n}_j\}, \quad m = 0, 1, 2. \tag{7.26}$$

El desfase angular<sup>3</sup> es diferente para cada contribución armónica o banda de frecuencias, en virtud de las correspondencias (5.5) y (5.4). Esto motiva la conveniencia de separar por contribuciones del tensor de inercia. Las expresiones (7.21) quedan modificadas entonces por las sustitución de los argumentos (7.24), o equivalentemente, por la determinación de las matrices  $\mathbf{I}_1^{(m)}(t - \Delta t)$  para el estudio del movimiento del sistema en el instante  $t$ .

Si se desprecia la contribución al desfase del movimiento orbital de los cuerpos perturbadores a efectos de la respuesta elástica del sistema, lo que matemáticamente es aceptable con la aproximación  $\tilde{n}_j \ll \omega_E$ , el desfase angular se reduce a

$$\varepsilon_{2m,j} \simeq -\Delta t m \omega_E = \varepsilon_{2m}, \tag{7.27}$$

que es el valor empleado, por ejemplo, en Getino y Ferrándiz (1991), y sólo depende de la banda (zonal, tesimal o sectorial).

Esta aproximación nos facilita la interpretación geométrica de lo que supone la introducción del desfase angular en los argumentos. Para ello supondremos que  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de posición, en el sistema de Tisserand, del astro perturbador. Bajo la aproximación de despreciar el movimiento orbital de éste, respecto al sistema celeste se tendrá  $\tilde{n}_j = 0$  ( $\tilde{\Theta}_j$  constante). Si  $\omega_E$  es el vector velocidad angular terrestre, se tiene a partir de la relación general entre sistema inercial y rotatorio (Goldstein 1987)

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \mathbf{0} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_E \times \mathbf{r} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega_E \times \mathbf{r}, \tag{7.28}$$

<sup>3</sup>Nótese que el desfase  $\varepsilon_{2m,j}$  depende también de  $\epsilon$ . Realmente su dependencia es con la frecuencia de excitación del sistema, asociada al argumento  $m(\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) - \epsilon\tilde{\Theta}_j$ , esto es,  $m\omega_E - \epsilon\tilde{n}_j$ . Una notación más completa sería entonces,

$$\varepsilon_{2m,j} \equiv \varepsilon_{2m}(m\omega_E - \epsilon\tilde{n}_j) \equiv \varepsilon_{2m}(\epsilon\tilde{n}_j).$$

donde  $d\mathbf{r}^*/dt$  representa la velocidad del cuerpo perturbador para un observador en el sistema inercial, que es nula bajo la hipótesis de trabajo. Para la posición retardada del astro perturbador,  $\mathbf{r}(t - \Delta t)$ , y si se considera que  $\Delta t$  es pequeño frente a los tiempos de movimiento característicos del sistema (en la tabla 7.2 se muestran distintos valores de referencia para el valor del retardo temporal), se tiene

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) \simeq \mathbf{r}(t) - \Delta t \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}(t) - \Delta t (-\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}), \quad (7.29)$$

(esta aproximación se sigue análogamente en Mignard 1978). Con un modelo de uniformidad en el movimiento de rotación terrestre, podemos escribir  $\boldsymbol{\omega}_E = \omega_E \mathbf{b}_3$ , donde  $\mathbf{b}_3$  es el vector unitario en la dirección del eje de figura terrestre (siguiendo la notación de capítulos precedentes), que se asume fijo en el sistema celeste. Por lo tanto

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) \simeq \mathbf{r}(t) + \Delta t \omega_E \mathbf{b}_3 \times \mathbf{r}(t). \quad (7.30)$$

Esta relación vectorial se corresponde con la aproximación para un ángulo  $-\Delta t \omega_E$  suficientemente pequeño, de una rotación<sup>4</sup> de eje  $\mathbf{b}_3$ , es decir

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) \simeq \mathbf{R}(-\Delta t \omega_E, \mathbf{b}_3) \mathbf{r}(t). \quad (7.31)$$

Teniendo en cuenta que los vectores en los sistemas de referencia terrestre y celeste están conectados vía la secuencia de rotaciones (2.37) en ángulos de Andoyer, la introducción del retardo  $\Delta t$  es equivalente a introducir una rotación adicional (7.31) en la secuencia, esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t - \Delta t) &= \mathbf{R}(-\Delta t \omega_E, \mathbf{b}_3) \mathbf{r}(t) \\ &= \mathbf{R}(-\Delta t \omega_E, \mathbf{b}_3) \mathbf{R}(\nu, \mathbf{b}_3) \mathbf{R}(\sigma, \mathbf{m}) \times \\ &\quad \times \mathbf{R}(\mu, \mathbf{u}_L) \mathbf{R}(I, \mathbf{n}) \mathbf{R}(\lambda, \mathbf{s}_3) \mathbf{r}^* \\ &= \mathbf{R}(\nu - \Delta t \omega_E, \mathbf{b}_3) \mathbf{R}(\sigma, \mathbf{m}) \mathbf{R}(\mu, \mathbf{u}_L) \mathbf{R}(I, \mathbf{n}) \mathbf{R}(\lambda, \mathbf{s}_3) \mathbf{r}^*, \end{aligned} \quad (7.32)$$

o equivalentemente, en las expresiones en términos de las variables de Andoyer como funciones conocidas del tiempo, la sustitución

$$\tilde{\nu} \rightarrow \tilde{\nu} - \Delta t \omega_E. \quad (7.33)$$

<sup>4</sup>En efecto, la expresión vectorial de una rotación de ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi[$  (en sentido antihorario) y eje de giro según el versor  $\mathbf{n}$ , viene dada por (Goldstein 1987)

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) \mathbf{r} = \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) (\mathbf{n}\mathbf{r}) \mathbf{n} + \sin \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{n}).$$

Si  $\alpha \ll 1$  se tiene  $\cos \alpha \simeq 1$ ,  $1 - \cos \alpha \simeq 0$ ,  $\sin \alpha \simeq \alpha$ , de modo que

$$\mathbf{R}(\alpha, \mathbf{n}) \mathbf{r} \simeq \mathbf{r} + \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{n}).$$

Trasladado esto a los argumentos del tensor de inercia, se recuperan las expresiones (7.24) con el desfase angular (7.27),  $\varepsilon_{2m,j} \simeq -\Delta t m \omega_E = \varepsilon_{2m}$ . La relación (7.33) es la considerada directamente por Getino y Ferrándiz (1991, 2001<sup>5</sup>) entre otros.

Tabla 7.2: Valores de referencia para el retardo temporal

$\Delta t$	Fuente
4.67 min	Getino y Ferrándiz (2001)
8.64 min	Getino y Ferrándiz (1991)
$\simeq 10$ min	Mignard (1978)
9.30 min	Krasinsky (1999)

Notemos además que las expresiones del tensor de inercia dadas por (7.21),  $\mathbf{I}_1^{(m)}$ , y las relaciones (5.3) para los armónicos esféricos de los cuerpos perturbadores, que participan directamente en la expresión del potencial de redistribución (7.11),  $V_{t;p,q}$ , comparten los mismos argumentos en las funciones trigonométricas. Por lo tanto la sustitución  $t \rightarrow t - \Delta t$  conduce en ambas expresiones a las relaciones (7.24) y la definición de los mismos desfases angulares.

Paralelamente, si consideramos cualquiera de los argumentos de (7.24), afectados por el retardo temporal y que reescribimos de forma compacta como

$$\Psi_{m,j}(t - \Delta t) = \Psi_{m,j}(t) + \varepsilon_{2m,j} \quad (7.34)$$

donde

$$\Psi_{m,j} = m(\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) - [\epsilon - \delta_{m0}(1 + \epsilon)] \tilde{\Theta}_j, \quad (7.35)$$

su inserción en las funciones trigonométricas se puede expresar como

$$\begin{aligned} \cos(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}) &= \cos \Psi_{m,j} \cos \varepsilon_{2m,j} - \operatorname{sen} \Psi_{m,j} \operatorname{sen} \varepsilon_{2m,j}, \\ \operatorname{sen}(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}) &= \operatorname{sen} \Psi_{m,j} \cos \varepsilon_{2m,j} + \cos \Psi_{m,j} \operatorname{sen} \varepsilon_{2m,j}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

El primer sumando de cada expresión mantiene la función y argumento originales, multiplicados por  $\cos \varepsilon_{2m,j}$ . Tras un proceso de construcción paralelo al seguido en los capítulos precentes, generarán las fórmulas de rotación conocidas, y que se denominan *términos en fase*. Los segundos sumandos provocarán la aparición de nuevas contribuciones a las fórmulas de rotación,

<sup>5</sup>El valor del retardo temporal dado por esta referencia, incluido en la tabla 7.2, procede de un ajuste de parámetros en un modelo de Tierra de dos capas (manto inelástico y núcleo líquido) a partir de series de mutación. Debido a la diferencia en la reología con el modelo aquí tratado, su uso tiene un carácter estrictamente comparativo.

denominadas *términos fuera de fase*<sup>6</sup>. Aunque existen otras contribuciones que pueden provocar la aparición de términos fuera de fase (véase por ejemplo la nota al pie en la página 60), constituyen una de las principales consecuencias de introducción de la anelasticidad en el modelo.

Desde un punto de vista operativo las relaciones (7.36), con el objetivo de mantener una estructura formal similar al caso elástico, inducen el empleo de magnitudes complejas que permitan el tratamiento conjunto de los términos en fase y fuera de fase. Con este propósito se puede definir el conjunto de números de Love complejos según

$$\bar{k}_{2m,j} = k_{2m} e^{i\varepsilon_{2m,j}} \in \mathbb{C}, \quad \bar{\kappa}_{2m,j} = \kappa_{2m} e^{i\varepsilon_{2m,j}} \in \mathbb{C}, \quad (7.37)$$

donde  $k_{2m}$  son los números de Love reales del caso elástico y  $\kappa_{2m}$  las constantes definidas por (7.12).

Estrictamente, en este modelo basado en el retardo temporal, no puede suponerse que los números de Love reales tengan dependencia con la frecuencia de la perturbación (asociada al argumento  $\Psi_{m,j}$ ). Esto se debe al conflicto que supondría tener en la expresión del potencial de redistribución unos números de Love dependientes de la frecuencia de  $\Psi_{m,j}$  en el instante  $t$ , para describir la respuesta elástica de la Tierra en el instante retardado,  $t - \Delta t$ . En cuanto a notación, este hecho se refleja en que  $k_{2m}$  no incluye el subíndice  $j$ .

Al utilizar su forma compleja que depende de las frecuencias del argumento a través de (7.26),  $\varepsilon_{2m,j}$ , se ha de introducir dentro de la suma sobre el índice  $j$  en las expresiones del tensor de inercia y el potencial de redistribución. Así pues, estas magnitudes, dependientes de los productos  $\kappa_{2m,j} \cos(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j})$  y  $\kappa_{2m,j} \sin(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j})$ , se pueden reescribir en virtud de:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\bar{\kappa}_{2m,j} e^{i\Psi_{m,j}}] &= \operatorname{Re} [\kappa_{2m,j} e^{i(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j})}] = \kappa_{2m,j} \cos(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}), \\ \operatorname{Re} [-i\bar{\kappa}_{2m,j} e^{i\Psi_{m,j}}] &= \operatorname{Re} [-i\kappa_{2m,j} e^{i(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j})}] = \kappa_{2m,j} \sin(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Por lo tanto, en los elementos del tensor de inercia, y del potencial de redistribución, que incluyan los argumentos (7.24), se habrá de realizar las siguientes sustituciones para obtener sus formas complejas  $\bar{\mathbf{I}}_1^{(m)}(t)$  y  $\bar{V}_{t;p,q}$ :

$$\begin{aligned} k_{2m}, \kappa_{2m} &\rightarrow \bar{k}_{2m,j}, \bar{\kappa}_{2m,j}, \\ \cos(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}) &\rightarrow e^{i\Psi_{m,j}}, \\ \sin(\Psi_{m,j} + \varepsilon_{2m,j}) &\rightarrow -ie^{i\Psi_{m,j}}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

<sup>6</sup>Véase las expresiones (1.4) de la introducción.

donde

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{2m,j} &= k_{2m} e^{i\varepsilon_{2m,j}}, \quad \bar{\kappa}_{2m,j} = \kappa_{2m} e^{i\varepsilon_{2m,j}}, \\
\Psi_{m,j} &= m(\tilde{\mu} + \tilde{\nu}) - [\epsilon - \delta_{m0}(1 + \epsilon)] \tilde{\Theta}_j, \\
\varepsilon_{2m,j} &= -\Delta t \{m\omega_E - [\epsilon - \delta_{m0}(1 + \epsilon)] \tilde{n}_j\}. \\
(m = 0, 1, 2)
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Entonces las magnitudes físicas que incluyen el modelo de anelasticidad quedan definidas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1^{(m)}(t - \Delta t) &= \text{Re} \left[ \bar{\mathbf{I}}_1^{(m)}(t) \right], \\
V_{t;p,q} &= \text{Re} \left[ \bar{V}_{t;p,q} \right].
\end{aligned} \tag{7.41}$$

Nótese además que, en las expresiones explícitas de  $\mathbf{I}_1^{(m)}$  y  $V_{t;p,q}$ , así como en las fórmulas de rotación derivadas (siguiente sección), la dependencia con la frecuencia de los números de Love implica que  $\bar{\kappa}_{2m,j}$  debe introducirse en el sumatorio sobre el índice  $j$ .

A modo de ejemplo, la primera de las componentes (7.21) quedará escrita como

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1^{(0)}(t) &= 3 \sum_j |\bar{\kappa}_{20,j}| \tilde{B}_j(I_0) \times \\
&\times \begin{pmatrix} \cos(\tilde{\Theta}_j - \varepsilon_{20,j}) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\Theta}_j - \varepsilon_{20,j}) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cos(\tilde{\Theta}_j - \varepsilon_{20,j}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Este modelo, tal como se ha desarrollado, da una forma concreta para el desfase angular  $\varepsilon_{2m,j}$ , dependiente de las constantes conocidas del problema de rotación, y la magnitud adicional  $\Delta t$ .

La generalización del modelo parece entonces inmediata, eliminando esta dependencia funcional del desfase angular, y permitiendo que sus valores puedan ser datos de entrada independientes de la teoría (como de hecho lo es el retardo temporal), tales como los ofrecidos por IERS (2010) en las tablas 6.3 (se transcribe en la tabla 7.3) y 6.5a, o procedentes de alguna reología particular.

A efectos de cálculo, esta generalización supondría la sustitución de la definición (7.37) de los números de Love complejos, por

$$\bar{k}_{2m,j} = |\bar{k}_{2m,j}| e^{i\varepsilon_{2m,j}} \tag{7.43}$$

en función de las magnitudes independientes  $\text{Re } \bar{k}_{2m,j}$  e  $\text{Im } \bar{k}_{2m,j}$ , y la aplicación de las relaciones (7.39) y (7.41). Con el subíndice  $j$  denotamos la posible dependencia del número de Love con la frecuencia de excitación del sistema, de forma que

$$\bar{k}_{2m,j} \equiv \bar{k}_{2m} (m\omega_E - \epsilon \tilde{n}_j) \equiv \bar{k}_{2m} (\epsilon \tilde{n}_j). \quad (7.44)$$

Nótese que por economía de notación no se ha empleado el subíndice  $\epsilon$ , sin embargo la dependencia implícita con éste, a través de la frecuencia, deberá ser considerada para la aplicación de las fórmulas de rotación que se derivarán en la siguiente sección.

Sin embargo, no podemos obviar el carácter *ad hoc* de la introducción del retardo temporal en el planteamiento del modelo anelástico, esto es sobre expresiones construidas sin él para el tensor de inercia y el potencial de redistribución. Por tanto, la obtención de las equivalencias (7.41) no está garantizada con una imposición de la definición (7.43) *ab initio* en el modelo. Nos planteamos entonces reconstruir estas expresiones, tal como se hizo en la sección previa, siguiendo esta segunda estrategia para el modelado del comportamiento anelástico del sistema.

Tabla 7.3: Números de Love para Tierra anelástica (IERS 2010, Tabla 6.3)

$(l, m)$	$\text{Re } \bar{k}_{lm}$	$\text{Im } \bar{k}_{lm}$	$k_{lm}^{(+)}$
(2, 0)	0.30190	-0.00000	-0.00089
(2, 1)	0.29830	-0.00144	-0.00080
(2, 2)	0.30102	-0.00130	-0.00057

Para ello partimos de la expresión (7.5) de la sección previa, donde se considera que<sup>7</sup>  $\bar{k}_{2m} = |\bar{k}_{2m}| e^{i\epsilon_{2m}} \in \mathbb{C}$ ,

$$V(\mathbf{r}) = \text{Re} \left[ \sum_{m=0}^2 \alpha_m V_m(\mathbf{r}) \right] = \left( \frac{a_E}{r} \right)^5 \sum_{m=0}^2 \text{Re} [\bar{k}_{2m} \alpha_m U_m]. \quad (7.45)$$

Entonces resulta

$$\begin{aligned} \text{Re} [\bar{k}_{2m} \alpha_m U_m] &= |\bar{k}_{2m}| \text{Re} (e^{i\epsilon_{2m}} \alpha_m U_m) = \\ &= |\bar{k}_{2m}| [\cos \epsilon_{2m} \text{Re} (\alpha_m U_m) - \text{sen } \epsilon_{2m} \text{Im} (\alpha_m U_m)], \end{aligned} \quad (7.46)$$

<sup>7</sup>Por simplicidad prescindiremos ahora del subíndice  $j$  ya que en estas expresiones no se realiza la suma sobre él.

donde  $\text{Re}(\alpha_m U_m)$  viene dado por (7.8), y se tiene una nueva contribución dada por  $\text{Im}(\alpha_m U_m)$

$$\begin{aligned}\text{Re}(\alpha_m U_m) &= c_m \frac{r^2}{a_E^2} N_{2m}^2 (C_{2m} C'_{2m} + S_{2m} S'_{2m}), \\ \text{Im}(\alpha_m U_m) &= -c_m \frac{r^2}{a_E^2} N_{2m}^2 (C_{2m} S'_{2m} - S_{2m} C'_{2m}).\end{aligned}\quad (7.47)$$

El primero de los sumandos conduce a la expresión equivalente a (7.11) del potencial de redistribución, que denotamos por  $V_{t;p,q}^{(1)}$ ,

$$\begin{aligned}V_{t;p,q}^{(1)} &= \frac{a_E^5}{r^3 r'^3} G m_p m_q \left[ |\bar{k}_{20}| \cos \varepsilon_{20} C_{20} C'_{20} \right. \\ &\quad + |\bar{k}_{21}| \cos \varepsilon_{21} \frac{1}{3} (C_{21} C'_{21} + S_{21} S'_{21}) \\ &\quad \left. + |\bar{k}_{22}| \cos \varepsilon_{22} \frac{1}{12} (C_{22} C'_{22} + S_{22} S'_{22}) \right],\end{aligned}\quad (7.48)$$

y la nueva contribución,  $V_{t;p,q}^{(2)}$ , viene dada por

$$\begin{aligned}V_{t;p,q}^{(2)} &= \frac{a_E^5}{r^3 r'^3} G m_p m_q \left[ |\bar{k}_{21}| \sin \varepsilon_{21} \frac{1}{3} (C_{21} S'_{21} - S_{21} C'_{21}) \right. \\ &\quad \left. + |\bar{k}_{22}| \sin \varepsilon_{22} \frac{1}{12} (C_{22} S'_{22} - S_{22} C'_{22}) \right],\end{aligned}\quad (7.49)$$

Es importante señalar que ésta última no tiene componente zonal,  $m = 0$ , debido a la nulidad de los armónicos  $S_{20}$ .

Mediante manipulaciones trigonométricas usuales, es posible reescribir estos términos introduciendo las fases  $\varepsilon_{2m}$  en los argumentos de los armónicos  $C'_{2m}$  y  $S'_{2m}$ . Así, y en virtud de su definición (2.95), podemos escribir

$$\begin{aligned}C'_{2m} \cos \varepsilon_{2m} + S'_{2m} \sin \varepsilon_{2m} &= C'_{2m} \left( \eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{2m}}{m} \right), \\ S'_{2m} \cos \varepsilon_{2m} - C'_{2m} \sin \varepsilon_{2m} &= S'_{2m} \left( \eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{2m}}{m} \right), \quad m = 1, 2.\end{aligned}\quad (7.50)$$

La expresión (7.11) queda entonces generalizada, para números de Love complejos denotados según (7.43), como  $V_{t;p,q} = V_{t;p,q}^{(1)} + V_{t;p,q}^{(2)}$

$$\begin{aligned}V_{t;p,q} &= \frac{a_E^5}{r^3 r'^3} G m_p m_q \left\{ |\bar{k}_{20}| \cos \varepsilon_{20} C_{20} C'_{20} \right. \\ &\quad + |\bar{k}_{21}| \frac{1}{3} [C_{21} C'_{21} (\eta', \alpha' - \varepsilon_{21}) + S_{21} S'_{21} (\eta', \alpha' - \varepsilon_{21})] \\ &\quad \left. + |\bar{k}_{22}| \frac{1}{12} \left[ C_{22} C'_{22} \left( \eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{22}}{2} \right) + S_{22} S'_{22} \left( \eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{22}}{2} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Observemos que con este modelo de anelasticidad se provoca un desfase en el argumento de los armónicos esféricos de los cuerpos perturbadores, dependiente de  $m$ , pero no en la contribución zonal,  $m = 0$ . Para estudiar su trasposición a los argumentos dependientes de  $\tilde{\Theta}_j$ , utilizamos las relaciones (7.50) y (5.3) para los armónicos referidos al sistema de Tisserand

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 C'_{21}(\eta', \alpha' - \varepsilon_{21}) &= 3 \sum_{j, \epsilon = \pm 1} C_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{sen}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21}), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 S'_{21}(\eta', \alpha' - \varepsilon_{21}) &= 3 \sum_{j, \epsilon = \pm 1} C_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{cos}(\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21}), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 C'_{22}\left(\eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{22}}{2}\right) &= -3 \sum_{j, \epsilon = \pm 1} D_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{cos}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22}), \\
\left(\frac{a_p}{r'}\right)^3 S'_{22}\left(\eta', \alpha' - \frac{\varepsilon_{22}}{2}\right) &= 3 \sum_{j, \epsilon = \pm 1} D_j(\tilde{I}, \tau) \operatorname{sen}(2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22}).
\end{aligned} \tag{7.52}$$

A partir de estas relaciones, las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_1^{(m)}$  se obtienen de  $V_{t,p,q}$ , como en la sección precedente, mediante la conexión dada por la fórmula de MacCullag.

Las expresiones resultantes, tanto para el tensor de inercia como para el potencial de redistribución, son equivalentes a realizar las siguientes sustituciones en las expresiones del caso elástico generalizado:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_j(t) &\rightarrow \tilde{\Theta}_j \quad (m = 0), \\
\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j &\rightarrow \tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \quad (m = 1), \\
2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j &\rightarrow 2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22,j} \quad (m = 2). \\
k_{2m} &\rightarrow |\bar{k}_{2m,j}|, \quad \kappa_{2m} \rightarrow |\bar{\kappa}_{2m,j}|
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Nótese, por comparación con las equivalentes del modelo del retardo temporal (7.24), que la diferencia estriba en que no existe modificación en la contribución zonal.

Ésta, no obstante, puede introducirse por uniformidad de notación en todas la contribuciones, exigiendo la nulidad del desfase para  $m = 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_j(t) &\rightarrow \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{20;j} \quad (m = 0), \\
\varepsilon_{20;j} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Esta condición se satisface por el conjunto de números de Love complejos dado en la tabla 7.3,  $\operatorname{Im} \bar{k}_{20} = |\bar{k}_{20}| \operatorname{sen} \varepsilon_{20} = 0$ , es decir,  $\varepsilon_{20} = 0$ .

Además este modelo sí permite considerar dependencia de los números de Love reales,  $|\bar{k}_{2m,j}|$ , con la frecuencia de los argumentos  $\Psi_{m,j}$ . Valores numéricos de esta dependencia, por argumento  $\tilde{\Theta}_j$ , están disponibles en las tablas 6.5a, 6.5b y 6.5 de las IERS Conventions (2010).

Como en el caso del modelo del retardo, al mismo resultado se llega realizando una sustitución directa en las expresiones del caso elástico generalizado de los números de Love reales por los números de Love complejos, y de las funciones trigonométricas conforme a (7.39). A partir de las formas complejas del tensor de inercia y el potencial de redistribución,  $\bar{\mathbf{I}}_1^{(m)}(t)$  y  $\bar{V}_{t;p,q}$ , se obtienen las magnitudes físicas tomando la parte real (7.41).

### 7.3. Fórmulas de rotación generalizadas

La trasposición de los modelos de comportamiento anelástico estudiados en la sección previa a los hamiltonianos de perturbación desarrollados en los capítulos 4 y 5, no supone una variación significativa del proceso de derivación de las ecuaciones del movimiento. Esto se debe a que el desfase adicional en los argumentos de las funciones trigonométricas no depende de las variables canónicas del problema, ni de las variables de Andoyer como funciones temporales. Tampoco afecta en este sentido la correspondencia (7.20) que nos permite generalizar el comportamiento elástico. Este hecho es una ventaja del formalismo hamiltoniano empleado, ya que con otros planteamientos de las ecuaciones dinámicas no ocurre así.

Una de los propósitos de esta investigación es, entonces, dar una formulación general de las componentes del movimiento de rotación, independiente del modelo reológico. Es decir, que permitan la incorporación de cambios en el modelo reológico (esto es, en el conjunto de números de Love empleados), sin necesidad de rehacer la formulación. Se persigue cierta similitud con el modo en que los coeficientes orbitales se introducen en el formalismo de base, que se pueden considerar como una entrada numérica de la teoría de la rotación.

Así pues, la función generatriz dada por (4.89) para el estudio de la contribución de la energía cinética de redistribución, quedará reescrita en la

forma

$$\begin{aligned}
W_1^* = & \sum_{p=L,S} \left\{ 3 \frac{N^{*2}}{C^2} \sum_{j \neq 0} |\bar{k}_{20,j;p}| \tilde{B}_{j;p}(I_0) \operatorname{sen} \left( \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{20,j} \right) - \right. \\
& - 3M^* N^* \sigma^* \sum_{j,\epsilon=\pm 1} |\bar{k}_{21,j;p}| \frac{\tilde{C}_{j;p}(I_0, \epsilon)}{(A-C)N^* + AC(\epsilon\tilde{n}_j - \omega_E)} \times \\
& \left. \times \operatorname{sen} \left( \omega_E t - \epsilon\tilde{\Theta}_j - \nu^* + \varepsilon_{21,j} \right) \right\}. \quad (7.55)
\end{aligned}$$

Para el estudio de la contribución del potencial de redistribución, se han de generalizar siguiendo las reglas de sustitución establecidas, las expresiones (5.15) y (5.16) del hamiltoniano secular  $H_1^*$

$$H_1^* = H_{1\text{sec}}(p^*, q^*) = V_{t,\text{sec}}^{(0)}[\sigma^0] + V_{t,\text{sec}}^{(1)}[\sigma^0] + V_{t,\text{sec}}^{(2)}[\sigma^0], \quad (7.56)$$

donde

$$\begin{aligned}
V_{t,\text{sec}}^{(0)}[\sigma^0] &= \frac{9\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} |\bar{k}_{20,j;p}| k_q B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} \cos \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{20,j} \right), \\
V_{t,\text{sec}}^{(1)}[\sigma^0] &= 3 \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} |\bar{k}_{21,j;p}| k_q C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} \times \\
&\quad \times \cos \left( \mu^* + \nu^* - \tau\Theta_i^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right), \\
V_{t,\text{sec}}^{(2)}[\sigma^0] &= \frac{3\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} |\bar{k}_{22,j;p}| k_q D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} \times \\
&\quad \times \cos \left( 2\mu^* + 2\nu^* - \tau\Theta_i^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22,j} \right); \quad (7.57)
\end{aligned}$$

y las (5.17), (5.18) y (5.19) de la función generatriz  $W_1^*$ :

$$\begin{aligned}
W_1^* = & W_1^{*(0)}[\sigma^0] + W_1^{*(1)}[\sigma^0] + W_1^{*(2)}[\sigma^0] + \\
& + W_1^{*(0)}[\sigma^1] + W_1^{*(1)}[\sigma^1] + W_1^{*(2)}[\sigma^1], \quad (7.58)
\end{aligned}$$

donde los términos de orden  $O(\sigma^0)$  son

$$\begin{aligned}
W_1^{*(0)}[\sigma^0] &= \frac{9\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} |\bar{k}_{20,j;p}| k_q \frac{B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \operatorname{sen} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{20,j} \right), \\
W_1^{*(1)}[\sigma^0] &= 3 \frac{\omega_E}{H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} |\bar{k}_{21,j;p}| k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\mu^* + n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( \mu^* + \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right), \\
W_1^{*(2)}[\sigma^0] &= \frac{3\omega_E}{4H_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} |\bar{k}_{22,j;p}| k_q \frac{D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{2n_\mu^* + 2n_\nu^* - 2n_{\tilde{\mu}} - 2n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( 2\mu^* + 2\nu^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22,j} \right),
\end{aligned} \tag{7.59}$$

y los de orden  $O(\sigma^1)$

$$\begin{aligned}
W_1^{*(0)}[\sigma^1] &= -\frac{9\omega_E}{2H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} |\bar{k}_{20,j;p}| k_q \frac{C_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q}}{n_\mu^* - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( \mu^* - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{20,j} \right), \\
W_1^{*(1)}[\sigma^1] &= \frac{9\omega_E}{2H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \frac{|\bar{k}_{21,j;p}| k_q B_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right) - \\
&\quad - \frac{3\omega_E}{2H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \frac{|\bar{k}_{21,j;p}| k_q D_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q}}{2n_\mu^* + n_\nu^* - n_{\tilde{\mu}} - n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( 2\mu^* + \nu^* - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right), \\
W_1^{*(2)}[\sigma^1] &= \frac{3\omega_E}{2H_d} \sigma^* \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \frac{|\bar{k}_{22,j;p}| k_q C_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q}}{n_\mu^* + 2n_\nu^* - 2n_{\tilde{\mu}} - 2n_{\tilde{\nu}} - \tau n_i + \epsilon \tilde{n}_j} \times \\
&\quad \times \operatorname{sen} \left( \mu^* + 2\nu^* - 2\tilde{\mu} - 2\tilde{\nu} - \tau\Theta_i^* + \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{22,j} \right). \tag{7.60}
\end{aligned}$$

### 7.3.1. Velocidades de precesión

Emplearemos a partir de ahora los subíndices  $T$  y  $V$  para distinguir las contribuciones del movimiento de rotación que proceden, respectivamente, de las energías cinética y potencial de redistribución.

En el caso de la contribución de la energía cinética de redistribución, el hamiltoniano secular no produce contribución a las velocidades de precesión, al ser toda la perturbación periódica

$$\delta_T n_\lambda = 0, \quad \delta_T n_I = 0. \quad (7.61)$$

Con un proceso de derivación análogo al seguido en la sección 5.3, la contribución de primer orden del potencial de redistribución a las velocidades de precesión viene dada por

$$\begin{aligned} \delta_V n_\lambda &= -\frac{1}{\sin I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \sum_m^{0,1,2} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q T_{ijpq,m}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon) \cos \varepsilon_{2m,j}, \\ \delta_V n_I &= -\frac{1}{\sin I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j = 0}} \sum_m^{0,1,2} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q T_{ijpq,m}^{(n_I)}(\tau, \epsilon) \sin \varepsilon_{2m,j}, \end{aligned} \quad (7.62)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} T_{ijpq,m}^{(n_\lambda)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} \delta_{m0} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} \delta_{m1} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q} \delta_{m2}, \\ T_{ijpq,m}^{(n_I)}(\tau, \epsilon) &= \tau m \delta_i \left( \frac{9}{4} B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} \delta_{m0} - 3 C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} \delta_{m1} - \frac{3}{4} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} \delta_{m2} \right), \end{aligned} \quad (7.63)$$

Nótese que la condición de secular dada por la anulación de la frecuencia del argumento es la misma en este caso que en la sección 5.2,  $\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j = 0$ , dado que  $\varepsilon_{2m,j}$  es constante. En las expresiones (7.62) aparecen por lo tanto los factores  $\text{Re } \bar{\kappa}_{2m,j;p} = |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| \cos \varepsilon_{2m,j}$  e  $\text{Im } \bar{\kappa}_{2m,j;p} = |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| \sin \varepsilon_{2m,j}$ , respectivamente.

Es significativo que, sólo en el caso anelástico (con algún  $\varepsilon_{2m,j} \neq 0$ ), existe una contribución no nula para la velocidad de precesión en oblicuidad,  $\delta n_I$ . Se trata por lo tanto de un efecto puramente anelástico, de suma importancia debido a que el valor nominal de la velocidad de precesión en oblicuidad es pequeño en comparación, por ejemplo, con la velocidad de precesión en longitud (véase la sección 3.3).

Tanto en las expresiones anteriores, como en el resto de contribuciones que se derivarán a continuación, con la condición  $\varepsilon_{2m,j} = 0$  se recuperan las fórmulas para el modelo de Tierra elástica.

### 7.3.2. Términos de Poisson

En consecuencia, con un proceso de derivación análogo al seguido en la sección 4.5, las expresiones a primer orden de perturbación de la energía cinética de redistribución, para los términos de Poisson de las mutaciones, son

$$\Delta_T \lambda = 0, \quad \Delta_T I = 0. \quad (7.64)$$

En lo referente al potencial de redistribución, paralelamente a la sección 5.4 se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_V \lambda &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \sum_m^{0,1,2} |\bar{k}_{2m,j;p}| k_q T_{ijpq,m}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) \times \\ &\quad \times \frac{\text{sen}(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j})}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j}, \\ \Delta_V I &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{\substack{i,j;\tau,\epsilon \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \sum_m^{0,1,2} |\bar{k}_{2m,j;p}| k_q T_{ijpq,m}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) \times \\ &\quad \times \frac{\cos(\tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j})}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j}, \end{aligned} \quad (7.65)$$

donde se han definido las cantidades

$$\begin{aligned} T_{ijpq}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \frac{\partial B_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{B}_{j;q} \delta_{m0} + 3 \frac{\partial C_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{C}_{j;q} \delta_{m1} + \frac{3}{4} \frac{\partial D_{i;p}^*}{\partial I^*} \tilde{D}_{j;q} \delta_{m2}, \\ T_{ijpq}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{4} \tau m_{5i} B_{i;p}^* \tilde{B}_{j;q} \delta_{m0} + 3 C_{i;p}^* \tilde{C}_{j;q} (\tau m_{5i} - \cos I^*) \delta_{m1} + \\ &\quad + \frac{3}{4} D_{i;p}^* \tilde{D}_{j;q} (\tau m_{5i} - 2 \cos I^*) \delta_{m2}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

### 7.3.3. Términos de Oppolzer

Los términos de Oppolzer para la contribución de la energía cinética de redistribución resultan

$$\begin{aligned}\Delta_T(\phi - \lambda) &= -\frac{1}{\text{sen } I_0} \sum_p^{L,S} \sum_{j,\epsilon=\pm 1} K_{t;21,j;p} \frac{\epsilon C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen} \left( \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right), \\ \Delta_T(\theta - I) &= -\sum_p^{L,S} \sum_{j,\epsilon=\pm 1} K_{t;21,j;p} \frac{C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \cos \left( \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{21,j} \right),\end{aligned}\quad (7.67)$$

donde a partir de (4.105) se ha definido  $K_{t;21,j;p} = 3 |\bar{\kappa}_{21,j;p}| \omega_E / A$ .

Para la contribución del potencial de redistribución se tiene

$$\begin{aligned}\Delta_V(\phi - \lambda) &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \sum_m^{0,1,2} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \times \\ &\quad \times \left[ \frac{P_{ijpq,m}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j - n_\mu^*} - \frac{Q_{ijpq,m}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \times \\ &\quad \times \text{sen} \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j} \right), \\ \Delta_V(\theta - I) &= -\frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon} \sum_m^{0,1,2} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \times \\ &\quad \times \left[ \frac{P_{ijpq,m}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j - n_\mu^*} + \frac{Q_{ijpq,m}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j + n_\mu^*} \right] \times \\ &\quad \times \cos \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j} \right),\end{aligned}\quad (7.68)$$

con

$$\begin{aligned}P_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{B}_{j;q}(I^*) \delta_{m0} + \frac{3}{2} D_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon) \delta_{m1}, \\ Q_{ijpq}(\tau, \epsilon) &= \frac{9}{2} B_{i;p}^*(I^*) \tilde{C}_{j;q}(I^*, \epsilon) \delta_{m1} + \frac{3}{2} C_{i;p}^*(I^*, \tau) \tilde{D}_{j;q}(I^*, \epsilon) \delta_{m2}.\end{aligned}\quad (7.69)$$

Estos términos se pueden reescribir en la forma

$$\begin{aligned}
\Delta_V(\phi - \lambda) &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon,\rho} \sum_m^{0,1,2} |\bar{k}_{2m,j;p}| k_q \times \\
&\quad \times \frac{\rho T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \text{sen} \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j} \right), \\
\Delta_V(\theta - I) &= -\frac{1}{CH_d} \sum_{p,q}^{L,S} \sum_{i,j;\tau,\epsilon,\rho} \sum_m^{0,1,2} |\bar{k}_{2m,j;p}| k_q \times \\
&\quad \times \frac{T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \cos \left( \tau \Theta_i^* - \epsilon \tilde{\Theta}_j + \varepsilon_{2m,j} \right),
\end{aligned} \tag{7.70}$$

donde se ha definido

$$T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho) = -\frac{1}{2}(\rho + 1) P_{ijpq,m}(\tau, \epsilon) - \frac{1}{2}(\rho - 1) Q_{ijpq,m}(\tau, \epsilon). \tag{7.71}$$

### 7.3.4. Términos en fase y fuera de fase

La incorporación del desfase angular en las fórmulas de rotación provoca la aparición de términos fuera de fase, según se deduce de (7.65), (7.68) y (7.70). Las contribuciones en fase y fuera de fase obedecen a la estructura que se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 7.4: Términos en fase y fuera de fase

Contribución	Términos en fase		Términos fuera de fase	
	Función	Amplitud $\times$	Función	Amplitud $\times$
$\Delta\lambda, \Delta(\phi - \lambda)$	sen	$\cos \varepsilon_{2m,j}$	cos	sen $\varepsilon_{2m,j}$
$\Delta I, \Delta(\theta - I)$	cos	$\cos \varepsilon_{2m,j}$	sen	$-\text{sen } \varepsilon_{2m,j}$

Considerando que la energía cinética de redistribución no contribuye a los términos de Poisson, podemos dar expresiones para las fórmulas de nutación en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\Delta_V \lambda &= \sum_{\substack{p,q,i,j;\tau,\epsilon,m \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \left[ L_{ijpq,m}^{\text{in},1} \text{sen} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) + L_{ijpq,m}^{\text{out},1} \text{cos} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) \right], \\
\Delta_V I &= \sum_{\substack{p,q,i,j;\tau,\epsilon,m \\ \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \neq 0}} \left[ O_{ijpq,m}^{\text{in},1} \text{cos} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) + O_{ijpq,m}^{\text{out},1} \text{sen} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) \right], \\
\Delta_T (\phi - \lambda) &= \sum_{p,j;\epsilon} \left( L_{ijpq,m}^{\text{in},2} \text{sen} \tilde{\Theta}_j + L_{ijpq,m}^{\text{out},2} \text{cos} \tilde{\Theta}_j \right), \\
\Delta_T (\theta - I) &= \sum_{p,j;\epsilon} \left( O_{ijpq,m}^{\text{in},2} \text{cos} \tilde{\Theta}_j + O_{ijpq,m}^{\text{out},2} \text{sen} \tilde{\Theta}_j \right), \\
\Delta_V (\phi - \lambda) &= \sum_{p,q,i,j;\tau,\epsilon,m} \left[ L_{ijpq,m}^{\text{in},3} \text{sen} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) + L_{ijpq,m}^{\text{out},3} \text{cos} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) \right], \\
\Delta_V (\theta - I) &= \sum_{p,q,i,j;\tau,\epsilon,m} \left[ O_{ijpq,m}^{\text{in},3} \text{cos} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) + O_{ijpq,m}^{\text{out},3} \text{sen} \left( \tau\Theta_i^* - \epsilon\tilde{\Theta}_j \right) \right],
\end{aligned} \tag{7.72}$$

donde las amplitudes para la longitud y oblicuidad de los términos en fase,

$L_{ijpq,m}^{\text{in},k}$  y  $O_{ijpq,m}^{\text{in},k}$ , y fuera de fase,  $L_{ijpq,m}^{\text{out},k}$  y  $O_{ijpq,m}^{\text{out},k}$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned}
L_{ijpq,m}^{\text{in},1} &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \frac{T_{ijpq,m}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{in},1} &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \frac{T_{ijpq,m}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
L_{ijpq,m}^{\text{out},1} &= -\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \frac{T_{ijpq,m}^{(\Delta\lambda)}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{out},1} &= +\frac{1}{\text{sen } I^*} \frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \frac{T_{ijpq,m}^{(\Delta I)}(\tau, \epsilon)}{\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}, \\
L_{ijpq,m}^{\text{in},2} &= -\frac{1}{\text{sen } I_0} K_{t;21,j;p} \frac{\epsilon C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{in},2} &= -K_{t;21,j;p} \frac{C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
L_{ijpq,m}^{\text{out},2} &= -\frac{1}{\text{sen } I_0} K_{t;21,j;p} \frac{\epsilon C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{out},2} &= +K_{t;21,j;p} \frac{C_{i;p}(I_0, \epsilon)}{n_\mu^* - \epsilon \tilde{n}_j} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}, \\
L_{ijpq,m}^{\text{in},3} &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \sum_{\rho=\pm 1} \frac{\rho T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{in},3} &= -\frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \sum_{\rho=\pm 1} \frac{T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \cos \varepsilon_{2m,j}, \\
L_{ijpq,m}^{\text{out},3} &= -\frac{1}{CH_d} \frac{1}{\text{sen } I^*} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \sum_{\rho=\pm 1} \frac{\rho T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}, \\
O_{ijpq,m}^{\text{out},3} &= +\frac{1}{CH_d} |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| k_q \sum_{\rho=\pm 1} \frac{T_{ijpq,m}(\tau, \epsilon, \rho)}{n_\mu^* - \rho(\tau n_i - \epsilon \tilde{n}_j)} \text{sen } \varepsilon_{2m,j}. \quad (7.73)
\end{aligned}$$

## 7.4. Representaciones numéricas

La representación numérica de las fórmulas anteriores para los movimientos de precesión y nutación, permite realizar una comparación entre estas contribuciones para los diferentes modelos de comportamiento elástico y anelástico de la Tierra considerados.

En los casos en que se quiera modelar la dependencia del conjunto de números de Love (reales o complejos) con la frecuencia de excitación del

sistema, son relevantes los trabajos de Wahr (1979, 1981), Mathews et al. (1995) y especialmente Dehant et al. (1999), entre otros. En este capítulo se siguen los modelos analíticos incluidos en las IERS Conventions (2010), que se basan en los trabajos referenciados, para los números de Love en las bandas diurna y de largo periodo,  $\bar{k}_{21,j}$  y  $\bar{k}_{20,j}$ . La dependencia con la frecuencia de  $\bar{k}_{20,j}$  dada por estas referencias no es significativa, y se tomarán los valores nominales dados en la tabla 7.3.

Cabe decir que las expresiones analíticas siguientes para los números de Love proceden de modelos reológicos de dos capas (manto y núcleo). Las emplearemos, empero, en nuestro caso para obtener el orden de magnitud de los movimientos de precesión y nutación. Esta inconsistencia provoca que la representación numérica de la contribución de la energía cinética de redistribución, a través de los términos de Oppolzer, pueda ser significativamente diferente a la que se obtendría en el problema con un estado no perturbado de dos capas. Su interés, sin embargo, radica en evidenciar la importancia de emplear en el modelado una dependencia con la frecuencia en los números de Love. Paralelamente, la contribución del potencial de redistribución no se verá significativamente afectada por el empleo de estas expresiones analíticas, respecto del modelo de dos capas, debido a que los términos numéricamente dominantes son los de Poisson. Como ya se ha indicado, éstos no dependen del modelo de Tierra, en el sentido de que  $I$  y  $\lambda$  tienen la misma solución para el problema no perturbado, independientemente del modelo de Tierra que se considere.

La dependencia con la frecuencia de  $\bar{k}_{21,j} = \bar{k}_{21}(\epsilon\tilde{n}_j)$  puede representarse mediante la fórmula de resonancia

$$\bar{k}_{21}(\sigma) = L_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{L_\alpha}{\sigma - \sigma_\alpha}, \quad (7.74)$$

donde  $\sigma_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) son las frecuencias de resonancia asociadas con el periodo de Chandler (CW, *Chandler wobble*), y las del movimiento libre de nutación del núcleo (FCN, *free core nutation*). Dada una frecuencia  $f$  de excitación del potencial de marea ( $\omega_E - \epsilon\tilde{n}_j$ ), en grados por hora,  $\sigma$  y  $\sigma_\alpha$  se expresan en ciclos por día sidéreo (cpsd) mediante  $\sigma = f / (15 \times 1.002737909)$ , donde el factor 1.002737909 es el número de días sidéreos por día solar. Las frecuencias de resonancia y los parámetros de la fórmula (7.74) vienen dados en la tabla 7.5.

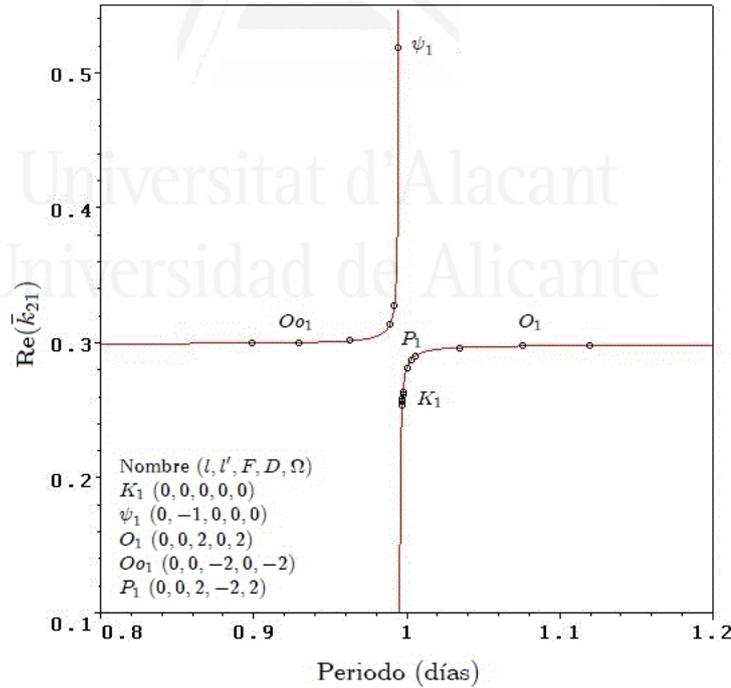
Tabla 7.5: Parámetros para fórmula de resonancia (IERS 2010, Tabla 6.4)

$\alpha$	$L_\alpha$	$\sigma_\alpha$
0	$0.29954 - 0.1412 \times 10^{-2}i$	
1	$-0.77896 \times 10^{-3} - 0.3711 \times 10^{-4}i$	$-0.0026010 - 0.0001361i$
2	$0.90963 \times 10^{-4} - 0.2963 \times 10^{-5}i$	$1.0023181 + 0.000025i$
3	$-0.11416 \times 10^{-5} + 0.5325 \times 10^{-7}i$	$0.999026 + 0.000780i$

Para la variación con la frecuencia de la contribución zonal,  $\bar{k}_{20,j} = \bar{k}_{20}(\epsilon\tilde{n}_j)$ , se tomará la representación

$$\bar{k}_{20}(f) = 0.29525 - 5.796 \times 10^{-4} \left\{ \cot \frac{\alpha\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{f_m}{f} \right)^\alpha \right] + i \left( \frac{f_m}{f} \right)^\alpha \right\}, \quad (7.75)$$

donde  $f$  es aquí la frecuencia de la componente del potencial de marea ( $\epsilon\tilde{n}_j$ ),  $f_m$  es una frecuencia de referencia, equivalente a un periodo de 200 s, y  $\alpha = 0.15$ .



Dependencia con la frecuencia del número de Love en la banda diurna.

Los detalles de construcción e hipótesis de cada modelo se han abordado en los capítulos correspondientes, y establecen la siguiente clasificación. Las

fórmulas de rotación en cada caso se derivan de las generales del capítulo 7.3, a partir de las equivalencias que se señala:

1. **Modelo de Tierra elástica**, con un estado no perturbado esférico y sin rotación.

El movimiento se rige por las fórmulas de rotación derivadas en los capítulos 4 y 5, que se obtienen mediante la sustitución

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2m,j} &= k \in \mathbb{R} \\ &\rightarrow |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| = \kappa_p, \\ &\rightarrow \varepsilon_{2m,j} = 0.\end{aligned}\tag{7.76}$$

Esto es, el conjunto de números de Love complejos se reduce al número de Love  $k$  definido por (4.48), que es una constante independiente de la teoría dada por algún modelo reológico o procedimiento observacional. En estas condiciones en el capítulo 6 se demostró que la energía potencial de redistribución no contribuye al movimiento de rotación. La representación numérica en este caso se reduce a la tabla 4.1.

2. **Modelo de Tierra elástica general**, con un estado no perturbado elipsoidal y con rotación.

Las fórmulas de rotación se derivan siguiendo las consideraciones de la sección 7.1, que conduce a la equivalencia:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2m,j} &= k_{2m,j} \in \mathbb{R} \\ &\rightarrow |\bar{\kappa}_{2m,j;p}| = \kappa_{2m,j;p}, \\ &\rightarrow \varepsilon_{2m,j} = 0.\end{aligned}\tag{7.77}$$

Se tiene un conjunto de números de Love reales dependientes del orden de los armónicos (o la banda de frecuencias para  $\tilde{\mu} + \tilde{\nu}$ ) y, en el caso general, de las frecuencias de la perturbación ( $\varepsilon\tilde{n}_j$ ). Sus valores proceden de modelos reológicos o procedimientos observacionales. Un conjunto de valores nominales de estos números viene dado en la tabla 6.3 de las IERS Conventions (2010) (tabla 7.1). Como funciones dependientes de la frecuencia, a efectos comparativos, se dispone de la parte real de las representaciones (7.74) y (7.75).

3. **Modelo de Tierra anelástica basado en el retardo temporal**, con un estado no perturbado elipsoidal y con rotación.

Los números de Love complejos son de la forma (7.37), con la fase definida por (7.26):

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2m,j} &= k_{2m} e^{i\varepsilon_{2m,j}} \in \mathbb{C} & (7.78) \\ \rightarrow |\bar{k}_{2m,j;p}| &= \kappa_{2m;p}, \\ \rightarrow \varepsilon_{2m,j} &= -\Delta t \{m\omega_E - [\varepsilon - \delta_{m0} (1 + \varepsilon)] \tilde{n}_j\}.\end{aligned}$$

donde  $k_{2m;p}$  y  $\kappa_{2m;p}$  son las constantes definidas en el caso elástico, no dependientes de la frecuencia de excitación. El retardo  $\Delta t$  es una constante independiente de la teoría (la tabla 7.2 contiene algunos valores de referencia).

#### 4. Modelo de Tierra anelástica general, con un estado no perturbado elipsoidal y con rotación.

Se aplican las formulas generales de rotación, para números de Love complejos del tipo (7.43):

$$\begin{aligned}\bar{k}_{2m,j} &= |\bar{k}_{2m,j}| e^{i\varepsilon_{2m,j}} \in \mathbb{C} & (7.79) \\ \rightarrow \bar{k}_{2m,j;p} &= |\bar{k}_{2m,j;p}| e^{i\varepsilon_{2m,j}}\end{aligned}$$

Los valores numéricos de sus partes real e imaginaria dependen del orden de los armónicos y, en el caso general, de las frecuencias de la perturbación. Éstos proceden de modelos reológicos o procedimientos observacionales. Un conjunto de valores nominales de estos números viene dado en la tabla 6.3 de las IERS Conventions (2010) (tabla 7.3). Como funciones dependientes de la frecuencia se dispone de las representaciones (7.74) y (7.75).

A continuación se incluyen las representaciones numéricas correspondientes a los casos anteriores y a las contribuciones al movimiento de rotación que se han generalizado en la sección precedente. Éstas son las debidas a la energía cinética de redistribución y el potencial de redistribución, en la velocidad de precesión en longitud y oblicuidad, y los términos de Poisson y Oppolzer de las mutaciones. En las nuevas contribuciones de la energía cinética de redistribución los términos de Poisson son nulos en todos los casos. Se verá que existen diferencias significativas en los términos de Oppolzer, respecto al modelo de reología simplificada (estado no deformado esférico y sin rotación) estudiado hasta la fecha, que llegan a alcanzar los 140  $\mu\text{as}$  en longitud y 50  $\mu\text{as}$  en oblicuidad. Para las nuevas contribuciones del potencial de redistribución, los términos dominantes numéricamente son los de Poisson, cuya magnitud es del orden de 5  $\mu\text{as}$  en longitud y 10  $\mu\text{as}$  en oblicuidad. En lo

referente a las velocidades de precesión, en las que no existe contribución en el caso elástico simplificado, se obtienen aproximadamente  $6 \text{ mas/cent}^{-1}$  en longitud y de  $0.8 \text{ mas/cent}^{-1}$  en oblicuidad, al considerar el modelo reológico con números de Love dependientes de la frecuencia.

El carácter original de la mayor parte de los resultados que se presentan en este capítulo, no permite la comparación con la literatura existente relacionada. Así, los principales antecedentes con modelos de Tierra que incluyen consideraciones elásticas o anelásticas más generales que las de la reología simplificada, Lambert y Mathews (2006) y Krasinsky (1999), no son comparables por diversos motivos.

En ambos casos el cálculo se aborda con un formalismo totalmente diferente al empleado en esta investigación, que no conduce a expresiones analíticas para las componentes del movimiento (Lambert y Mathews 2006), o éstas se consiguen con mayores simplificaciones de modelado (Krasinsky 1999). Además en la primera de estas referencias, el modelo de Tierra incluye la contribución de las mareas oceánicas, que no puede desacoplarse de los resultados numéricos, invalidando cualquier posible comparación.

Las simplificaciones de modelado en Krasinsky (1999) conducen a diferencias numéricas no despreciables con respecto a nuestra representación. La reología es, sin embargo, comparable (modelo anelástico del retardo temporal). Se ha constatado, sin embargo, que la única forma de reproducir sus resultados numéricos consiste en despreciar, en buena medida, la expresión precisa del movimiento orbital dentro del potencial perturbador. En virtud de la base del formalismo hamiltoniano desarrollado por Kinoshita (1977), no se considera que ésta sea una simplificación aceptable para estos propósitos.

La cuantificación de las contribuciones netas permite valorar comparativamente la influencia del comportamiento anelástico y de la dependencia con la frecuencia del conjunto de números de Love. A tenor de los resultados, esta dependencia con la frecuencia en la respuesta elástica de la Tierra, principalmente en la banda diurna, resulta especialmente significativa en virtud de los efectos resonantes indicados anteriormente. A esta cuestión se retornará en las conclusiones finales.

Tabla 7.6: Precesión en longitud y oblicuidad

	Zonal			Sectorial			Total
	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$B$	$C$	$D$	
Caso 1: Tierra elástica (estado no perturbado esférico sin rotación).							
$\delta n_\lambda$ [mas/cent]	42.0639	-3.9604	-64.1250	26.0214			0.0000
$\delta H$	$-27.34 \times 10^{-9}$	$2.59 \times 10^{-9}$	$41.75 \times 10^{-9}$	$-16.94 \times 10^{-9}$			$0.00 \times 10^{-9}$
$\delta n_I$ [mas/cent]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000
Caso 2: Tierra elástica (general). Números de Love reales con valor nominal por banda de frecuencia.							
$\delta n_\lambda$ [mas/cent]	42.8254	-4.0321	-65.1642	26.7401			0.3693
$\delta H$	$-27.88 \times 10^{-9}$	$2.62 \times 10^{-9}$	$42.42 \times 10^{-9}$	$-17.41 \times 10^{-9}$			$-0.24 \times 10^{-9}$
$\delta n_I$ [mas/cent]	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000			0.0000
Caso 3: Tierra anelástica (modelo del retardo temporal).							
$\delta n_\lambda$ [mas/cent]	42.8254	-4.0321	-65.1513	26.7194			0.3615
$\delta H$	$-27.87 \times 10^{-9}$	$2.62 \times 10^{-9}$	$42.41 \times 10^{-9}$	$-17.39 \times 10^{-9}$			$-0.24 \times 10^{-9}$
$\delta n_I$ [mas/cent]	0.0000	0.0000	0.5103	6.0390			6.5493
Caso 4a: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos con valor nominal por banda de frecuencia.							
$\delta n_\lambda$ [mas/cent]	43.7900	-4.1229	-65.9603	27.0102			0.7171
$\delta H$	$-28.51 \times 10^{-9}$	$2.68 \times 10^{-9}$	$42.94 \times 10^{-9}$	$-17.58 \times 10^{-9}$			$-0.47 \times 10^{-9}$
$\delta n_I$ [mas/cent]	0.0000	0.0000	0.1301	0.6656			0.7957
Caso 4b: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos dependientes de la frecuencia.							
$\delta n_\lambda$ [mas/cent]	43.7900	-4.1389	-60.6554	27.0102			6.0059
$\delta H$	$-28.51 \times 10^{-9}$	$2.69 \times 10^{-9}$	$39.49 \times 10^{-9}$	$-17.58 \times 10^{-9}$			$-3.91 \times 10^{-9}$
$\delta n_I$ [mas/cent]	0.0000	-0.0118	0.1209	0.6656			0.7748

Precesión en longitud y oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.

Nutaciones: contribución de la energía cinética de redistribución.  
 Caso 1: Tierra elástica (estado no perturbado esférico sin rotación).

$l$	Argumento			Periodo			Longitud [ $\mu\text{as}$ ]			Oblicuidad [ $\mu\text{as}$ ]		
	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	Poisson	Oppolzer	Total	Poisson	Oppolzer	Total	
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	+0.00	+1053.97	+1053.97	+0.00	-312.32	-312.32	
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.00	-20.58	-20.58	+0.00	+7.51	+7.51	
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	+0.00	+0.29	+0.29	+0.00	-42.22	-42.22	
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	+0.00	+19.64	+19.64	+0.00	-7.17	-7.17	
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	+0.00	-2346.96	-2346.96	+0.00	+857.33	+857.33	
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	+0.00	-137.89	-137.89	+0.00	+50.40	+50.40	
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.00	+27.40	+27.40	+0.00	-302.19	-302.19	
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	+0.00	-5395.72	-5395.72	+0.00	+1992.35	+1992.35	
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.00	-1105.11	-1105.11	+0.00	+341.03	+341.03	
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	+0.00	-1072.18	-1072.18	+0.00	+397.97	+397.97	

Tabla 7.7: Nutaciones.

Nutaciones: contribución de la energía cinética de redistribución.  
 Caso 2: Tierra elástica (general). Números de Love reales con valor nominal por banda de frecuencia.

Argumento			Periodo			Longitud [ $\mu\text{as}$ ]			Oblicuidad [ $\mu\text{as}$ ]		
$l$	$l'$	$D$	$\Omega$	Días	Poisson	Oppolzer	Total	Poisson	Oppolzer	Total	
+0	+0	+0	+1	-6793.48	+0.00	+1071.05	+1071.05	+0.00	-317.38	-317.38	
+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.00	-20.92	-20.92	+0.00	+7.63	+7.63	
+0	+1	+0	+0	+365.26	+0.00	+0.29	+0.29	+0.00	-42.90	-42.90	
+0	-1	+2	+2	+365.25	+0.00	+19.96	+19.96	+0.00	-7.29	-7.29	
+0	+0	+2	+2	+182.63	+0.00	-2385.00	-2385.00	+0.00	+871.23	+871.23	
+0	+1	+2	+2	+121.75	+0.00	-140.13	-140.13	+0.00	+51.21	+51.21	
+1	+0	+0	+0	+27.55	+0.00	+27.85	+27.85	+0.00	-307.08	-307.08	
+0	+0	+2	+2	+13.66	+0.00	-5483.16	-5483.16	+0.00	+2024.64	+2024.64	
+0	+0	+2	+1	+13.63	+0.00	-1123.02	-1123.02	+0.00	+346.56	+346.56	
+1	+0	+2	+2	+9.13	+0.00	-1089.56	-1089.56	+0.00	+404.42	+404.42	

Tabla 7.8: Nutaciones.



Tabla 7.10: Nutaciones.

Nutaciones: contribución de la energía cinética de redistribución.  
Caso 4a: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos con valor nominal por banda de frecuencia.

Argumento		Período		Longitud [ $\mu\text{s}$ ]		Oblicuidad [ $\mu\text{s}$ ]					
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	Días	Poisson	Oppolzer	Total	Poisson	Oppolzer	Total
							Términos en fase				
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	+0.00	+1084.14	+1084.14	+0.00	-321.26	-321.26
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.00	-21.17	-21.17	+0.00	+7.73	+7.73
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	+0.00	+0.30	+0.30	+0.00	-43.43	-43.43
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	+0.00	+20.20	+20.20	+0.00	-7.38	-7.38
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	+0.00	-2414.13	-2414.13	+0.00	+881.87	+881.87
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	+0.00	-141.84	-141.84	+0.00	+51.84	+51.84
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.00	+28.19	+28.19	+0.00	-310.83	-310.83
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	+0.00	-5550.15	-5550.15	+0.00	+2049.37	+2049.37
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.00	-1136.74	-1136.74	+0.00	+350.79	+350.79
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	+0.00	-1102.87	-1102.87	+0.00	+409.36	+409.36
							Términos fuera de fase				
+0	+0	+0	+0	+1	-6793.48	+0.00	-5.23	-5.23	+0.00	-1.55	-1.55
+0	+0	+0	+0	+2	-3396.74	+0.00	+0.10	+0.10	+0.00	+0.04	+0.04
+0	+1	+0	+0	+0	+365.26	+0.00	-0.00	-0.00	+0.00	-0.21	-0.21
+0	-1	+2	-2	+2	+365.25	+0.00	-0.10	-0.10	+0.00	-0.04	-0.04
+0	+0	+2	-2	+2	+182.63	+0.00	+11.65	+11.65	+0.00	+4.26	+4.26
+0	+1	+2	-2	+2	+121.75	+0.00	+0.68	+0.68	+0.00	+0.25	+0.25
+1	+0	+0	+0	+0	+27.55	+0.00	-0.14	-0.14	+0.00	-1.50	-1.50
+0	+0	+2	+0	+2	+13.66	+0.00	+26.79	+26.79	+0.00	+9.89	+9.89
+0	+0	+2	+0	+1	+13.63	+0.00	+5.49	+5.49	+0.00	+1.69	+1.69
+1	+0	+2	+0	+2	+9.13	+0.00	+5.32	+5.32	+0.00	+1.98	+1.98



Tabla 7.12: Nutación en longitud.

Nutación en longitud: contribución del potencial de redistribución.  
 Caso 1: Tierra elástica (estado no perturbado esférico sin rotación).

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{as}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{as}$ ]					
$l$	$l'$	$F$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
+0	+0	+0	+1	-144.2534	+162.6620	+39.1759	-57.5844	+0.0000	+0.0283	-0.0030	-0.0463	+0.0210	+0.0000
+0	+0	+0	+2	-1.7350	-2.6598	+5.8160	-1.4212	+0.0000	+0.0006	+0.0013	-0.0024	+0.0006	-0.0000
+0	+1	+0	+0	-1.0501	-0.9454	+2.6249	-0.6295	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	-1	+2	+2	-0.1778	+0.1696	+0.0213	-0.0131	+0.0000	-0.0005	+0.0005	+0.0001	-0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	+2	+10.5981	-3.2953	-19.0049	+11.7020	-0.0000	+0.0632	-0.0001	-0.1394	+0.0763	-0.0000
+0	+1	+2	+2	+0.4141	-0.0908	-0.8414	+0.5181	-0.0000	+0.0037	+0.0005	-0.0093	+0.0051	+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0.5653	+0.4258	-2.0023	+1.0112	+0.0000	+0.0007	+0.0006	-0.0026	+0.0013	+0.0000
+0	+0	+2	+0	-1.7051	+0.5435	+3.0676	-1.9060	+0.0000	-0.1450	+0.0039	+0.3173	-0.1762	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+0.2863	-0.3256	-0.0808	+0.1200	+0.0000	+0.0297	-0.0048	-0.0471	+0.0221	-0.0000
+1	+0	+2	+0	+0.2182	-0.0240	-0.5055	+0.3112	+0.0000	+0.0288	+0.0074	-0.0808	+0.0446	-0.0000
+0	+2	-2	+2	+0.0000	-53.4973	+139.2214	-85.7241	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000

Tabla 7.13: Nutación en oblicuidad.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]					
$l$	$l'$	$F$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
+0	+0	+0	+1	-77.0186	+8.0320	+126.0033	-57.0167	+0.0000	+0.0084	-0.0095	-0.0023	+0.0034	+0.0000
+0	+0	+0	+2	+0.7522	+1.7084	-3.2618	+0.8012	-0.0000	-0.0002	-0.0003	+0.0007	-0.0002	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0011	-0.0010	+0.0028	-0.0007	+0.0000
+0	-1	+2	-2	+0.0771	-0.0719	-0.0114	+0.0062	-0.0000	+0.0002	-0.0002	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	-4.5948	-0.0018	+10.1469	-5.5503	+0.0000	-0.0231	+0.0071	+0.0414	-0.0255	+0.0000
+0	+1	+2	-2	-0.1795	-0.0240	+0.4492	-0.2457	+0.0000	-0.0014	+0.0003	+0.0028	-0.0017	+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0081	+0.0061	-0.0288	+0.0145	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+0.7392	-0.0057	-1.6366	+0.9030	-0.0000	+0.0535	-0.0158	-0.0980	+0.0603	-0.0000
+0	+0	+2	+0	+0.1529	-0.0164	-0.2531	+0.1166	-0.0000	+0.0092	-0.0096	-0.0037	+0.0041	+0.0000
+1	+0	+2	+0	-0.0946	-0.0276	+0.2699	-0.1476	+0.0000	-0.0107	+0.0007	+0.0254	-0.0154	-0.0000
+0	+2	-2	-2	+0.0000	+33.6730	-74.3319	+40.6590	-0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000

Nutación en oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.

Caso 1: Tierra elástica (estado no perturbado esférico sin rotación)

Tabla 7.14: Nutación en longitud.

Nutación en longitud: contribución del potencial de redistribución.  
 Caso 2: Tierra elástica (general). Números de Love reales con valor nominal por banda de frecuencia.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{as}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{as}$ ]						
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
+0	+0	+0	+0	+1	-146.8649	+165.5173	+39.7064	-59.2050	-0.8462	+0.0288	-0.0030	-0.0471	+0.0216	+0.0003
+0	+0	+0	+0	+2	-1.7664	-2.7084	+5.9090	-1.4587	-0.0245	+0.0006	+0.0013	-0.0024	+0.0006	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	-1.0672	-0.9625	+2.6658	-0.6471	-0.0110	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	-0.1807	+0.1727	+0.0213	-0.0135	-0.0002	-0.0005	+0.0005	+0.0001	-0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+10.7714	-3.3549	-19.2963	+12.0272	+0.1474	+0.0642	-0.0001	-0.1415	+0.0784	+0.0010
+0	+1	+2	-2	+2	+0.4209	-0.0924	-0.8544	+0.5325	+0.0065	+0.0038	+0.0005	-0.0094	+0.0052	+0.0001
+1	+0	+0	+0	+0	+0.5755	+0.4331	-2.0343	+1.0392	+0.0134	+0.0007	+0.0006	-0.0027	+0.0014	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	-1.7359	+0.5529	+3.1160	-1.9570	-0.0239	-0.1476	+0.0040	+0.3223	-0.1809	-0.0023
+0	+0	+2	+0	+1	+0.2915	-0.3313	-0.0819	+0.1234	+0.0017	+0.0302	-0.0048	-0.0478	+0.0227	+0.0003
+1	+0	+2	+0	+2	+0.2222	-0.0244	-0.5135	+0.3196	+0.0039	+0.0293	+0.0075	-0.0821	+0.0458	+0.0006
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	-54.4687	+141.4798	-88.0910	-1.0799	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000

Tabla 7.15: Nutación en oblicuidad.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]						
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
+0	+0	+0	+0	+1	-78.4129	+8.1774	+127.9768	-58.6046	-0.8633	+0.0085	-0.0096	-0.0023	+0.0034	+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	+0.7658	+1.7393	-3.3140	+0.8227	+0.0138	-0.0002	-0.0003	+0.0007	-0.0002	-0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0012	-0.0010	+0.0029	-0.0007	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0783	-0.0732	-0.0114	+0.0064	+0.0001	+0.0002	-0.0002	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	-4.6700	-0.0018	+10.3025	-5.7027	-0.0720	-0.0235	+0.0073	+0.0421	-0.0262	-0.0003
+0	+1	+2	-2	+2	-0.1825	-0.0244	+0.4562	-0.2525	-0.0032	-0.0014	+0.0003	+0.0028	-0.0017	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0083	+0.0062	-0.0292	+0.0149	+0.0002
+0	+0	+2	+0	+2	+0.7526	-0.0058	-1.6624	+0.9273	+0.0117	+0.0545	-0.0161	-0.0995	+0.0619	+0.0008
+0	+0	+2	+0	+1	+0.1556	-0.0167	-0.2571	+0.1198	+0.0018	+0.0093	-0.0097	-0.0038	+0.0042	+0.0001
+1	+0	+2	+0	+2	-0.0963	-0.0281	+0.2742	-0.1516	-0.0019	-0.0109	+0.0007	+0.0258	-0.0158	-0.0002
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+34.2837	-75.5377	+41.7819	+0.5279	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000

Nutación en oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.

Caso 2: Tierra elástica (general). Números de Love reales con valor nominal por banda de frecuencia.

Tabla 7.16: Nutación en longitud.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]					
$l$	$i'$	$F$	$D$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
Nutación en longitud: contribución del potencial de redistribución.													
Caso 3: Tierra enelástica (modelo del retardo temporal). $\Delta t = 4.67$ min.													
Términos en fase													
+0	+0	+0	+0	+1	-146.8649	+165.5173	+39.6996	-59.1624	-0.8104	+0.0288	-0.0030	+0.0215	+0.0003
+0	+0	+0	+0	+2	-1.7664	-2.7084	+5.9077	-1.4575	-0.0246	+0.0006	+0.0013	+0.0006	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	-1.0672	-0.9625	+2.6652	-0.6466	-0.0110	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	-0.1807	+0.1727	+0.0213	-0.0135	-0.0002	-0.0005	+0.0001	-0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+10.7714	-3.3549	-19.2923	+12.0172	+0.1414	+0.0642	-0.0001	+0.0783	+0.0010
+0	+1	+2	-2	+2	+0.4209	-0.0924	-0.8542	+0.5320	+0.0063	+0.0038	+0.0005	+0.0052	+0.0001
+1	+0	+0	+0	+0	+0.5755	+0.4331	-2.0339	+1.0384	+0.0130	+0.0007	-0.0027	+0.0014	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	-1.7359	+0.5529	+3.1154	-1.9555	-0.0230	-0.1476	+0.0040	+0.3222	-0.0022
+0	+0	+2	+0	+1	+0.2915	-0.3313	-0.0819	+0.1233	+0.0017	+0.0302	-0.0048	+0.0227	+0.0003
+1	+0	+2	+0	+2	+0.2222	-0.0244	-0.5134	+0.3194	+0.0038	+0.0293	+0.0075	+0.0458	+0.0006
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	-54.4687	+141.4504	-88.0176	-1.0359	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
Términos fuera de fase													
+0	+0	+0	+0	+1	+0.0000	-0.0792	-0.7368	+2.2502	+1.4341	-0.0000	+0.0000	-0.0008	+0.0001
+0	+0	+0	+0	+2	+0.0000	-0.0000	-0.1208	+0.0596	-0.0612	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0544	+0.0263	-0.0280	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0000	-0.0000	-0.0005	+0.0006	+0.0001	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0004	+0.3931	-0.4899	-0.0964	-0.0000	-0.0000	-0.0032	-0.0003
+0	+1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0174	-0.0217	-0.0043	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0002	+0.0397	-0.0403	-0.0007	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	+0.0000	-0.0008	-0.0611	+0.0768	+0.0148	+0.0000	+0.0000	+0.0071	+0.0008
+0	+0	+2	+0	+1	+0.0000	+0.0004	+0.0014	-0.0047	-0.0030	-0.0000	+0.0000	-0.0009	+0.0000
+1	+0	+2	+0	+2	+0.0000	+0.0001	+0.0100	-0.0123	-0.0022	-0.0000	+0.0016	-0.0018	-0.0002
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+0.0030	-2.8810	+3.5940	+0.7160	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000

Tabla 7.17: Nutación en oblicuidad.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]			Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]						
$l$	$l'$	$F$	$D$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	
Términos en fase													
+0	+0	+0	+0	+1	-78.4129	+127.9517	-58.5597	-0.8434	+0.0085	-0.0096	-0.0023	+0.0034	+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	+0.7658	-3.3133	+0.8220	+0.0138	-0.0002	-0.0003	+0.0007	-0.0002	-0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0012	-0.0010	+0.0029	-0.0007	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0783	-0.0114	+0.0064	+0.0001	+0.0002	-0.0002	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	-4.6700	+10.3004	-5.6980	-0.0694	-0.0235	+0.0073	+0.0421	-0.0262	-0.0003
+0	+1	+2	-2	+2	-0.1825	+0.4561	-0.2523	-0.0031	-0.0014	+0.0003	+0.0028	-0.0017	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0083	+0.0062	-0.0292	+0.0149	+0.0002
+0	+0	+2	+0	+2	+0.7526	-1.6621	+0.9266	+0.0113	+0.0545	-0.0161	-0.0995	+0.0618	+0.0007
+0	+0	+2	+0	+1	+0.1556	-0.2570	+0.1197	+0.0017	+0.0093	-0.0097	-0.0038	+0.0042	+0.0001
+1	+0	+2	+0	+2	-0.0963	+0.2741	-0.1515	-0.0019	-0.0109	+0.0007	+0.0258	-0.0158	-0.0002
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+34.2837	-75.5220	+41.7471	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
Términos fuera de fase													
+0	+0	+0	+0	+1	+0.0000	+0.0123	+2.5291	-2.2941	+0.2473	-0.0000	-0.0000	+0.0001	+0.0001
+0	+0	+0	+0	+2	+0.0000	-0.0000	-0.0677	+0.0336	-0.0341	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0001	-0.0000	+0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0000	-0.0000	+0.0002	+0.0003	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+0.0000	-0.0000	+0.2100	-0.2324	-0.0224	+0.0000	+0.0009	-0.0011	-0.0002
+0	+1	+2	-2	+2	+0.0000	-0.0000	+0.0093	-0.0103	-0.0010	+0.0000	+0.0001	-0.0001	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0001	+0.0000	-0.0006	+0.0006	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	+0.0000	-0.0000	-0.0328	+0.0366	+0.0038	-0.0000	-0.0020	+0.0024	+0.0005
+0	+0	+2	+0	+1	+0.0000	+0.0000	-0.0051	+0.0048	-0.0003	-0.0000	-0.0001	+0.0002	+0.0001
+1	+0	+2	+0	+2	+0.0000	-0.0000	+0.0054	-0.0059	-0.0006	+0.0000	+0.0005	-0.0006	-0.0001
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+0.0019	-1.5387	+1.7046	+0.1678	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000

Nutación en oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.

Caso 3: Tierra enelástica (modelo del retardo temporal).  $\Delta t = 4.67$  min.

Tabla 7.18: Nutación en longitud.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]					
$l$	$i'$	$F$	$D$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
Nutación en longitud: contribución del potencial de redistribución.													
Caso 4a: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos con valor nominal por banda de frecuencia.													
+0	+0	+0	+0	+1	-150.1728	+169.2453	+40.1915	-59.8030	-0.5390	+0.0295	-0.0031	+0.0218	+0.0005
+0	+0	+0	+0	+2	-1.8062	-2.7694	+5.9811	-1.4735	-0.0679	+0.0006	+0.0013	+0.0006	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	-1.0912	-0.9842	+2.6984	-0.6536	-0.0307	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	-0.1848	+0.1766	+0.0216	-0.0136	-0.0002	-0.0005	+0.0001	-0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+11.0140	-3.4305	-19.5320	+12.1487	+0.2002	+0.0657	-0.0001	+0.0792	+0.0015
+0	+1	+2	-2	+2	+0.4303	-0.0945	-0.8648	+0.5378	+0.0089	+0.0039	-0.0005	+0.0053	+0.0001
+1	+0	+0	+0	+0	+0.5885	+0.4428	-2.0592	+1.0496	+0.0218	+0.0008	-0.0027	+0.0014	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	-1.7750	+0.5654	+3.1541	-1.9767	-0.0323	-0.1510	+0.0041	-0.1828	-0.0034
+0	+0	+2	+0	+1	+0.2981	-0.3388	-0.0829	+0.1247	+0.0011	+0.0309	-0.0049	+0.0230	+0.0005
+1	+0	+2	+0	+2	+0.2272	-0.0249	-0.5198	+0.3229	+0.0053	+0.0300	+0.0077	+0.0463	+0.0009
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	-55.6955	+143.2080	-88.9807	-1.4682	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
Términos fuera de fase													
+0	+0	+0	+0	+1	+0.0000	+0.0000	-0.1940	+0.2583	+0.0642	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0001
+0	+0	+0	+0	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0289	+0.0064	-0.0225	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0130	+0.0028	-0.0102	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0001	-0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0943	-0.0525	+0.0418	+0.0000	+0.0000	-0.0003	+0.0003
+0	+1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0042	-0.0023	+0.0019	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	+0.0099	-0.0045	+0.0054	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	+0	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0152	+0.0085	-0.0067	+0.0000	+0.0000	+0.0008	-0.0008
+0	+0	+2	+0	+1	+0.0000	+0.0000	+0.0004	-0.0005	-0.0001	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0001
+1	+0	+2	+0	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0025	-0.0014	+0.0011	+0.0000	+0.0004	-0.0002	+0.0002
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+0.0000	-0.6913	+0.3843	-0.3070	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000

Tabla 7.19: Nutación en oblicuidad.

Nutación en oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.  
Caso 4a: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos con valor nominal por banda de frecuencia.

Argumento		Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]				Total				
$l$	$l'$	$F$	$D$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
Términos en fase														
+0	+0	+0	+0	+1	-80.1790	+8.3616	+129.5401	-59.1965	-1.4738	+0.0087	-0.0099	-0.0023	+0.0035	+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	+0.7831	+1.7785	-3.3545	+0.8310	+0.0381	-0.0002	-0.0003	+0.0007	-0.0002	-0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0012	-0.0011	+0.0029	-0.0007	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0801	-0.0749	-0.0115	+0.0064	+0.0001	+0.0002	-0.0002	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	-4.7752	-0.0019	+10.4284	-5.7603	-0.1090	-0.0240	+0.0074	+0.0426	-0.0265	-0.0004
+0	+1	+2	-2	+2	-0.1866	-0.0250	+0.4617	-0.2550	-0.0048	-0.0014	+0.0003	+0.0028	-0.0018	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0085	+0.0064	-0.0296	+0.0151	+0.0003
+0	+0	+2	+0	+2	+0.7696	-0.0059	-1.6827	+0.9366	+0.0176	+0.0557	-0.0165	-0.1007	+0.0625	+0.0010
+0	+0	+2	+0	+1	+0.1592	-0.0170	-0.2602	+0.1210	+0.0030	+0.0095	-0.0100	-0.0038	+0.0043	+0.0000
+1	+0	+2	+0	+2	-0.0985	-0.0288	+0.2775	-0.1531	-0.0029	-0.0111	+0.0007	+0.0261	-0.0160	-0.0003
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+35.0559	-76.4604	+42.2039	+0.7994	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
Términos fuera de fase														
+0	+0	+0	+0	+1	+0.0000	+0.0000	+0.6253	-0.2556	+0.3697	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+0	+0	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0162	+0.0036	-0.0126	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0503	-0.0249	+0.0255	+0.0000	+0.0000	+0.0002	-0.0001	+0.0001
+0	+1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0022	-0.0011	+0.0011	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0001	-0.0001
+0	+0	+2	+0	+2	+0.0000	+0.0000	-0.0081	+0.0040	-0.0041	+0.0000	+0.0000	-0.0005	+0.0003	-0.0002
+0	+0	+2	+0	+1	+0.0000	+0.0000	-0.0013	+0.0005	-0.0007	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
+1	+0	+2	+0	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0013	-0.0007	+0.0007	+0.0000	+0.0000	+0.0001	-0.0001	+0.0001
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+0.0000	-0.3691	+0.1823	-0.1868	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000

Tabla 7.20: Nutación en longitud.

Argumento				Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]						
$l$	$i'$	$F$	$D$	$\Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
Términos en fase														
+0	+0	+0	+0	+1	-150.1728	+174.3351	+41.0459	-59.8030	+5.4052	+0.0295	-0.0031	-0.0439	+0.0218	+0.0043
+0	+0	+0	+0	+2	-1.8062	-2.8971	+5.1164	-1.4735	-1.0603	+0.0006	+0.0014	-0.0021	+0.0006	+0.0004
+0	+1	+0	+0	+0	-1.0912	-1.0027	+2.8783	-0.6536	+0.1307	-0.0000	-0.0000	-0.0013	-0.0000	-0.0013
+0	-1	+2	-2	+2	-0.1848	+0.1801	+0.0208	-0.0136	+0.0025	-0.0005	+0.0005	+0.0001	-0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+11.0140	-3.4763	-17.8198	+12.1487	+1.8666	+0.0657	-0.0001	-0.1315	+0.0792	+0.0132
+0	+1	+2	-2	+2	+0.4303	-0.0951	-0.8451	+0.5378	+0.0279	+0.0039	+0.0005	-0.0093	+0.0053	+0.0003
+1	+0	+0	+0	+0	+0.5885	+0.4446	-1.9892	+1.0496	+0.0935	+0.0008	+0.0006	-0.0024	+0.0014	+0.0003
+0	+0	+2	+0	+2	-1.7750	+0.5655	+2.9427	-1.9767	-0.2435	-0.1510	+0.0042	+0.3045	-0.1828	-0.0251
+0	+0	+2	+0	+1	+0.2981	-0.3421	-0.0862	+0.1247	-0.0056	+0.0309	-0.0052	-0.0458	+0.0230	+0.0029
+1	+0	+2	+0	+2	+0.2272	-0.0246	-0.4934	+0.3229	+0.0321	+0.0300	+0.0077	-0.0789	+0.0463	+0.0051
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	-56.7052	+122.7176	-88.9807	-22.9684	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000
Términos fuera de fase														
+0	+0	+0	+0	+1	+0.0000	-0.0000	-0.1203	+0.2583	+0.1379	-0.0000	-0.0003	+0.0001	-0.0001	-0.0002
+0	+0	+0	+0	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0009	+0.0064	+0.0072	-0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0	+0	+0	+0.0000	+0.0000	+0.0020	+0.0028	+0.0049	-0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	-1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0007	+0.0001	+0.0008	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0434	-0.0525	-0.0091	-0.0000	+0.0002	+0.0003	-0.0003	+0.0002
+0	+1	+2	-2	+2	+0.0000	+0.0000	+0.0010	-0.0023	-0.0013	-0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000
+1	+0	+0	+0	+0	+0.0000	-0.0000	+0.0079	-0.0045	+0.0033	+0.0000	-0.0002	+0.0000	-0.0000	-0.0001
+0	+0	+2	+0	+2	+0.0000	-0.0000	-0.0090	+0.0085	-0.0005	+0.0000	-0.0003	-0.0009	+0.0008	-0.0004
+0	+0	+2	+0	+1	+0.0000	+0.0000	+0.0004	-0.0005	-0.0002	-0.0000	+0.0002	+0.0001	-0.0001	+0.0003
+1	+0	+2	+0	+2	+0.0000	-0.0000	+0.0017	-0.0014	+0.0003	-0.0000	+0.0000	+0.0003	-0.0002	+0.0001
+0	+2	-2	+2	-2	+0.0000	+0.0000	-0.7954	+0.3843	-0.4111	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000

Nutación en longitud: contribución del potencial de redistribución.

Caso 4b: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos dependientes de la frecuencia.

Tabla 7.21: Nutación en oblicuidad.

Nutación en oblicuidad: contribución del potencial de redistribución.  
 Caso 4b: Tierra anelástica (general). Números de Love complejos dependientes de la frecuencia.

Argumento			Términos de Poisson [ $\mu\text{s}$ ]				Términos de Oppolzer [ $\mu\text{s}$ ]				Total	
$l$	$l'$	$F \ D \ \Omega$	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total	$B_0$	$B - B_0$	$C$	$D$	Total
Términos en fase												
+0	+0	+0 +0 +1	-80.1790	+8.3545	+119.4465	-59.1965	-11.5745	+0.0087	-0.0101	-0.0024	+0.0035	-0.0003
+0	+0	+0 +0 +2	+0.7831	+1.8578	-2.8821	+0.8310	+0.5898	-0.0002	-0.0003	+0.0006	-0.0002	-0.0001
+0	+1	+0 +0 +0	+0.0000	+0.0001	-0.1904	-0.0000	-0.1904	-0.0012	-0.0011	+0.0031	-0.0007	+0.0001
+0	-1	+2 -2 +2	+0.0801	-0.0763	-0.0136	+0.0064	-0.0033	+0.0002	-0.0002	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	+0	+2 -2 +2	-4.7752	-0.0019	+9.5749	-5.7603	-0.9625	-0.0240	+0.0075	+0.0389	-0.0265	-0.0041
+0	+1	+2 -2 +2	-0.1866	-0.0254	+0.4521	-0.2550	-0.0149	-0.0014	+0.0003	+0.0028	-0.0018	-0.0001
+1	+0	+0 +0 +0	+0.0000	-0.0001	+0.0025	-0.0000	+0.0024	+0.0085	+0.0064	-0.0286	+0.0151	+0.0013
+0	+0	+2 +0 +2	+0.7696	-0.0062	-1.5705	+0.9366	+0.1295	+0.0557	-0.0165	-0.0940	+0.0625	+0.0078
+0	+0	+2 +0 +1	+0.1592	-0.0186	-0.2459	+0.1210	+0.0158	+0.0095	-0.0101	-0.0038	+0.0043	-0.0001
+1	+0	+2 +0 +2	-0.0985	-0.0288	+0.2635	-0.1531	-0.0170	-0.0111	+0.0007	+0.0248	-0.0160	-0.0016
+0	+2	-2 +2 -2	+0.0000	+35.6914	-69.3596	+42.2039	+8.5358	+0.0000	+0.0000	-0.0000	+0.0000	+0.0000
Términos fuera de fase												
+0	+0	+0 +0 +1	+0.0000	+0.0000	+0.2949	-0.2556	+0.0393	-0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+0	+0	+0 +0 +2	+0.0000	+0.0000	-0.0007	+0.0036	+0.0028	+0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000
+0	+1	+0 +0 +0	+0.0000	+0.0000	+0.0045	-0.0000	+0.0045	-0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
+0	-1	+2 -2 +2	+0.0000	+0.0000	+0.0005	+0.0000	+0.0005	-0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000
+0	+0	+2 -2 +2	+0.0000	+0.0000	+0.0248	-0.0249	-0.0001	+0.0000	+0.0000	+0.0001	-0.0001	-0.0000
+0	+1	+2 -2 +2	+0.0000	+0.0000	+0.0006	-0.0011	-0.0005	+0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000	-0.0000
+1	+0	+0 +0 +0	+0.0000	-0.0000	+0.0001	+0.0000	+0.0001	+0.0000	+0.0000	-0.0001	+0.0001	-0.0000
+0	+0	+2 +0 +2	+0.0000	-0.0000	-0.0048	+0.0040	-0.0008	-0.0000	-0.0000	-0.0003	+0.0003	-0.0000
+0	+0	+2 +0 +1	+0.0000	-0.0000	-0.0008	+0.0005	-0.0002	-0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000
+1	+0	+2 +0 +2	+0.0000	-0.0000	+0.0009	-0.0007	+0.0003	+0.0000	-0.0000	+0.0001	-0.0001	-0.0000
+0	+2	-2 +2 -2	+0.0000	+0.0000	-0.3323	+0.1823	-0.1500	+0.0000	-0.0000	-0.0000	+0.0000	-0.0000



Tabla 7.23: Comparativa

Nutaciones: contribución de la energía potencial de redistribución.

Argumento		Longitud [ $\mu$ as]				Oblicuidad [ $\mu$ as]					
$l$	$l'$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4a	Caso 4b	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4a	Caso 4b
					Términos en fase						
+0	+0	+0.0000	-0.8459	-0.8101	-0.5385	+5.4095	+0.0000	-0.8633	-0.8434	-1.4738	-11.5748
+0	+0	+0.0000	-0.0245	-0.0246	-0.0679	-1.0599	-0.0000	+0.0138	+0.0138	+0.0381	+0.5897
+0	+1	+0.0000	-0.0110	-0.0110	-0.0307	+0.1294	+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0000	-0.1903
+0	-1	+0.0000	-0.0002	-0.0002	-0.0002	+0.0025	-0.0000	+0.0001	+0.0001	+0.0001	-0.0033
+0	+0	-0.0000	+0.1484	+0.1424	+0.2017	1.8798	+0.0000	-0.0723	-0.0697	-0.1094	-0.9666
+0	+1	-0.0000	+0.0066	+0.0064	+0.0090	+0.0282	+0.0000	-0.0032	-0.0031	-0.0048	-0.0150
+1	+0	+0.0000	+0.0134	+0.0130	+0.0218	+0.0938	+0.0000	+0.0002	+0.0002	+0.0003	+0.0037
+0	+0	+0.0000	-0.0262	-0.0252	-0.0357	-0.2686	-0.0000	+0.0125	+0.0120	+0.0186	+0.1373
+0	+0	+0.0000	+0.0020	+0.0020	+0.0016	-0.0027	-0.0000	+0.0019	+0.0018	+0.0030	+0.0157
+1	+0	+0.0000	+0.0045	+0.0044	+0.0062	+0.0372	+0.0000	-0.0021	-0.0021	-0.0032	-0.0186
+0	+2	-0.0000	-1.0799	-1.0359	-1.4682	-22.9684	-0.0000	+0.5279	+0.5088	+0.7994	+8.5358
					Términos fuera de fase						
+0	+0	+0	+1.4342	+0.0643	+0.1377			+0.2474	+0.2474	+0.3697	+0.0393
+0	+0	+0	-0.0612	-0.0225	+0.0072			-0.0341	-0.0341	-0.0126	+0.0028
+0	+1	+0	-0.0280	-0.0102	+0.0049			+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0045
+0	-1	+2	+0.0001	+0.0000	+0.0008			+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0005
+0	+0	+2	-0.0967	+0.0421	-0.0089			-0.0226	-0.0226	+0.0256	-0.0001
+0	+1	+2	-0.0043	+0.0019	-0.0013			-0.0010	-0.0010	+0.0011	-0.0005
+1	+0	+0	-0.0007	+0.0054	+0.0032			-0.0001	-0.0001	-0.0001	+0.0001
+0	+0	+2	+0.0156	-0.0075	-0.0009			+0.0043	-0.0043	-0.0043	-0.0008
+0	+0	+2	-0.0030	+0.0000	+0.0001			-0.0002	-0.0002	-0.0007	-0.0002
+1	+0	+2	-0.0024	+0.0013	+0.0004			-0.0007	-0.0007	+0.0008	+0.0003
+0	+2	-2	+0.7160	-0.3070	-0.4111			+0.1678	+0.1678	-0.1868	-0.1500



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# Capítulo 8

## Conclusiones

Resumiremos por capítulos las contribuciones presentadas en esta memoria señalando aquéllas que son originales, bien por la construcción o cálculo de nuevas expresiones, bien por la diferencia de enfoque o camino en su derivación.

El contexto general de este trabajo es el formalismo hamiltoniano de la rotación de la Tierra introducido originariamente por el doctor Hiroshi Kinoshita (1977) y profusamente desarrollado en las últimas décadas por los doctores José Manuel Ferrándiz, Juan Getino y Alberto Escapa. La línea argumental del estudio consiste en el cálculo del movimiento forzado de rotación de la Tierra por la acción gravitatoria de la Luna y el Sol, para diferentes modelos de Tierra.

### 1. Capítulos 2 y 3:

Se ha presentado el formalismo hamiltoniano del problema de la rotación de la Tierra rígida, que sirve de base al desarrollo posterior basado en el cálculo perturbativo. Se ha construido el conjunto canónico de Andoyer a partir de la técnica de las funciones generatrices, como alternativa a las diferentes construcciones que, de estas variables, puede encontrarse en la literatura. Se ha presentado un método original para la obtención de la expresión de los armónicos esféricos de grado dos del potencial perturbador (o de marea), en variables de Andoyer del sistema de referencia terrestre, eludiendo la aplicación del Teorema de Wigner como en la construcción original de Kinoshita. Se ha presentado el método de perturbaciones de Lie-Hori como herramienta estructural del trabajo. Finalmente se han reproducido los principales resultados de Kinoshita (1977) para los movimientos de nutación y precesión, y comparado la representación numérica de estos movimientos, señalando algunas diferencias de planteamiento.

## 2. Capítulo 4:

Se ha presentado la formulación canónica del problema de una Tierra elástica con deformación de marea, siguiendo el enfoque de números de Love para la solución del problema elástico y la construcción del potencial de redistribución. Ésta se basa en un modelo de Tierra que en el estado no perturbado es esférica y sin rotación. Con especial énfasis se ha mostrado el uso de la traza del tensor de inercia para el desacople del sistema de ecuaciones que conduce a la expresión de la dependencia temporal del tensor de inercia, y realizado una demostración particularizada del Teorema de Darwin, consistente con el modelo reológico empleado. Se ha estudiado la contribución a los movimientos de nutación y precesión de la perturbación dada por la energía cinética de redistribución. Se han comparado los resultados y representación numérica con Escapa (2011), señalando las diferencias de planteamiento.

## 3. Capítulo 5:

Se ha estudiado la contribución a los movimientos secular y periódico dada por el potencial de redistribución. En lo referente al movimiento de precesión en longitud y de los términos de Poisson de la nutación se han reproducido los resultados de Escapa et al. (2004) y de Ferrándiz et al. (2012) que muestran numéricamente la no influencia del potencial de redistribución del modelo elástico en éstos, por cancelación de las contribuciones armónicas zonal, tesimal y sectorial. Adicionalmente se han derivado las expresiones analíticas para los términos de Oppolzer de las nutaciones y representado numéricamente, comprobando que también en éstos se produce la cancelación de las distintas contribuciones armónicas.

## 4. Capítulo 6:

Se ha realizado una demostración de la cancelación exacta de los efectos del potencial de redistribución en las expresiones analíticas derivadas para los movimientos de precesión y nutación previos. Esta anulación está directamente relacionada con las características del modelo elástico, así como ciertas propiedades matemáticas satisfechas por los desarrollos con los que se introduce el movimiento orbital de la Luna y el Sol en la expresión del potencial perturbador. Las condiciones de simetría inducidas en las fórmulas analíticas conducen a su cancelación.

Por consistencia necesaria se ha demostrado que los mismos motivos provocan la cancelación exacta del torque asociado al potencial de redistribución, empleando el formalismo canónico de fuerzas generalizadas.

Aunque este hecho físico fue puesto de manifiesto con anterioridad (p. ej. Krasinsky 1999) a partir de la expresión vectorial (o newtoniana) del potencial de redistribución, era necesario llegar a este mismo resultado desde el formalismo hamiltoniano empleado para el cálculo de las expresiones analíticas del movimiento. Esto es, bajo las mismas consideraciones de aproximación y modelado.

### 5. Capítulo 7:

Se ha replanteado el problema de derivación de expresiones analíticas para el movimiento de rotación, considerando la solución del problema elástico para el caso de la Tierra deformable con un estado no perturbado elipsoidal y con rotación.

Se han introducido también modelos de respuesta anelástica del sólido deformable, en particular el inducido por un retardo temporal constante y el formalismo general basado en la introducción de un conjunto de números de Love complejos y dependientes de la frecuencia de excitación del sistema. Bajo estas condiciones no se produce la cancelación exacta de los efectos del potencial de redistribución, y se han construido fórmulas de rotación generalizadas para la velocidad de precesión y los términos de Poisson y Oppolzer de las nutaciones.

Se tiene entonces una formulación general independiente del modelo reológico (esto es, del conjunto de números de Love empleados en cada caso), que permite la incorporación de diferentes modelos de Tierra como una entrada numérica de la teoría de la rotación.

Se ha interpretado el modelo anelástico del retardo temporal justificando la forma en que éste provoca la entrada de desfases angulares en el argumento de los armónicos esféricos. Se ha evidenciado que la formulación anelástica conduce a la aparición de términos fuera de fase en las nutaciones, y de contribución a la velocidad de precesión en oblicuidad.

Las diferentes representaciones numéricas realizadas muestran una contribución especialmente significativa en el caso de existir dependencia con la frecuencia del conjunto de números de Love, debido a los procesos resonantes, en la banda diurna de frecuencias, entre la respuesta elástica de la Tierra (estrictamente del manto terrestre) y las frecuencias asociadas al periodo de Chandler (CW) y el movimiento libre de nutación del núcleo (FCN). Éstas se introducen en el cálculo mediante su representación en fórmula de resonancias, siguiendo las referencias indicadas.

Las tablas comparativas incluidas muestran la mayor o menor relevancia en el movimiento de rotación, de los diferentes modelos reológicos considerados. Resultan destacables las diferencias significativas existentes en las velocidades de precesión (aproximadamente  $6 \text{ mas/cent}^{-1}$  en longitud y  $0.8 \text{ mas/cent}^{-1}$  en oblicuidad) y en la contribución de la energía cinética de redistribución (aproximadamente  $140 \mu\text{as}$  en longitud y  $50 \mu\text{as}$  en oblicuidad, en las componentes con mayores diferencias).

En todos los casos se ha señalado la parte de la contribución correspondiente a la marea permanente. Es de destacar que si el modelo básico considerado, esto es, sobre el que se considera la perturbación elástica, incluye la marea permanente (o dicho de otra forma, ésta se incluye en la “parte rígida”), las contribuciones adquieren mayor relevancia numérica.

La adaptación de las fórmulas de rotación obtenidas, al modelo de dos capas desarrollado en Getino y Ferrándiz (2001) siguiendo el formalismo hamiltoniano, es la continuación natural del trabajo que se ha presentado.

# Bibliografía

Andoyer, H.: Cours de Mécanique Céleste, Vol.1, Gauthier-Villars, Paris (1923)

Arnold, V.I.: Mathematical methods of classical mechanics, 1st ed. Springer-Verlag, New York (1978)

Bell, W.W.: Special Functions for Scientists and Engineers. Dover Publications Inc., New York (1968)

Bretagnon, P., Rocher, P., Simon, J.L.: Theory of the rotation of the rigid Earth. *Astron. Astrophys.*, 319, 305-317 (1997)

Brouwer, D.: Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astron. J.* 64, 378 (1959)

Brown, E.: An introductory treatise on the Lunar theory. Cambridge Univ. Press (1896)

Brown, E.: *Mem. Roy. Astron. Soc.* 59, 1-103 (1910)

Capitaine, N.: Definition and realization of the celestial intermediate reference system. In: Jin, W., Platais, I., Perryman, M. A. C. (eds.) *A Giant Step: from Milli to Micro-arcsecond Astrometry*. Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, 248, 367–373 (2008)

Capitaine, N.: Micro-arcsecond Celestial Reference Frames: definition and realization - Impact of the recent IAU Resolutions. *Research in Astron. Astrophys.*, Vol. 12, No. 8, 1162-1184 (2012)

Cottareau, L., Souchay, J.: Rotation of rigid Venus: a complete precession–nutation model. *Astron. Astrophys.* 507, 1635-1648 (2009)

Darwin, G.H.: *Scientific Papers*, vol. 3, Cambridge University Press, London (1910)

- Dehant, V., Arias, F., Bizouard, Ch., Bretagnon, P., Brzezinski, A., Buffett, B., Capitaine, N., Defraigne, P., de Viron, O., Feissel, M., Fliegel, H., Forte, A., Gambis, D., Getino, J., Gross, R., Herring, T., Kinoshita, H., Klioner, S., Mathews, P. M., McCarthy, D., Moisson, X., Petrov, S., Ponte, R. M., Roosbeek, F., Salstein, D., Schuh, H., Seidelmann, K., Soffel, M., Souchay, J., Vondrak, J., Wahr, J. M., Weber, R., Williams, J., Yatskiv, Y., Zharov, V., Zhu, S. Y.: Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 72, 245–310 (1999)
- Dehant, V., Defraigne, P., Wahr, J.M.: Tides for a convective Earth. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 104, No. B1, 1035-1058 (1999)
- Deprit, A.: Free rotation of a Rigid body studied in the phase plane. Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington (1967)
- Deprit, A., Elipe, A.: Complete reduction of the Euler-Poinsot problem. *J. Astron. Sci.*, 4, 603-628 (1993)
- D’Hoedt, S., Noyelles, B., Dufet, J., Lemaître, A.: A secondary resonance in Mercury’s rotation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 107, 93–100 (2010)
- Eckert, W. J., Walker, M. J., Eckert, D.: Transformations of the lunar coordinates and orbital parameters. *The Astronomical Journal*, 71, 314 (1966)
- Efroimsky, M.: On the theory of canonical perturbations and its application to Earth rotation. In: Capitaine, N. (ed.) *Proceedings of Journées 2004: Systèmes de référence spatio-temporels*. l’Observatoire de Paris, 74–81 (2005)
- Efroimsky, M.: Gauge freedom in orbital mechanics. *Ann. New York Acad. Sci.* 1065, 346–374 (2006)
- Efroimsky, M.: Justification of the two-bulge method in the theory of bodily tides. *A&A* 544, A133 (2012)
- Efroimsky, M., Escapa, A.: The theory of canonical perturbations applied to attitude dynamics and to the Earth rotation. Osculating and nonosculating Andoyer variables. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 98, 251–283 (2007)
- Efroimsky, M., Goldreich, P.: Gauge symmetry of the N-body problem in the Hamilton-Jacobi approach. *J. Math. Phys.* 44, 5958–5977 (2003)
- Efroimsky, M., Goldreich, P.: Gauge freedom in the N-body problem of celestial mechanics. *Astron. Astrophys.* 415, 1187–1199 (2004)

Efroimsky, M., Makarov, V.V.: Tidal friction and tidal lagging. Applicability limitations of a popular formula for the tidal torque. *The Astrophysical Journal*, 764:26 (2013)

Escapa, A.: Desarrollos complementarios en la teoría hamiltoniana de la rotación de una Tierra no rígida y verificación de términos de segundo orden. Tesis de Licenciatura. Universidad de Valladolid (1997)

Escapa, A., Getino, J.: Complementary developments in the Hamiltonian theory of the non-rigid Earth. *Int. Jour. Appl. Sci. and Comp.* 7, 142–147 (2000)

Escapa, A., Getino, J., Ferrándiz, J.M.: On the effect of the redistribution tidal potential on the rotation of the non-rigid Earth: Discrepancies and clarifications. *Proceedings Journées 2004. Paris, 20-22 sep.* (2004)

Escapa, A.: Nuevas contribuciones al estudio hamiltoniano de la rotación de la Tierra: Influencia del núcleo interno sólido y de la triaxialidad en las nutaciones libres y forzadas. Tesis doctoral. Universidad de Alicante (2006)

Escapa, A.: Corrections stemming from the non-osculating character of the Andoyer variables used in the description of rotation of the elastic Earth. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 110, 99-142 (2011)

Escapa, A., Getino, J., Ferrándiz, J. M.: Canonical approach to the free nutations of a three-layer Earth model. *J. Geophys. Res.* 106, 11387–11397 (2001)

Escapa, A., Getino, J., Ferrándiz, J. M.: Indirect effect of the triaxiality in the Hamiltonian theory for the rigid Earth nutations. *Astron. Astrophys.* 389, 1047–1054 (2002)

Escapa, A., Getino, J., Ferrándiz, J.M., Baenas, T.: On the changes of IAU 200 Nutation theory stemming from IAU 2006 precession theory. *Journées 2013 systèmes de référence spatio-temporels. Paris* (2013).

Ferrándiz, J.M., Baenas, T., Escapa, A.: Effect of the potential due to lunisolar deformations on the Earth precession. 2012 EGU General Assembly. Session G5.1, 23 Apr. (2012)

Ferrándiz, J. M., Getino, J.: On the tidal variation of geopotential. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 57, 279–292 (1993)

- Ferrándiz, J. M., Navarro, J. F., Escapa, A., Getino, J.: Precession of the nonrigid Earth: Effect of the Fluid Outer Core. *Astron. J.* 128, 1407–1411 (2004)
- Ferraz–Mello, S.: *Canonical Perturbation Theories: Degenerate Systems and Resonance*. Springer, New York (2007)
- Fukushima, T.: A new precession formula. *Astron. J.* 126, 494–434 (2003)
- Fukushima, T.: Canonical and universal elements of the rotational motion of a triaxial rigid body. *Astron J.* 136, 1728–1735 (2008)
- Gantmájér, F.R.: *Mecánica Analítica*. Editorial URSS (1996).
- Getino, J.: *Teoría hamiltoniana del movimiento de rotación de una Tierra deformable*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid (1989)
- Getino, J.: Forced nutations of a rigid mantle–liquid core earth model in canonical formulation. *Geophys. J. Int.* 122, 803–814 (1995)
- Getino, J., Ferrándiz, J. M.: A Hamiltonian theory for an elastic earth – Canonical variables and kinetic energy. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 49, 303–326 (1990)
- Getino, J., Ferrándiz, J.M.: A Hamiltonian theory for an elastic earth – Secular rotational acceleration. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 52, 381–396 (1991)
- Getino, J., Ferrándiz, J.M.: A Hamiltonian theory for an elastic earth – Energy of deformation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 51, 17–34 (1990)
- Getino, J., Ferrándiz, J. M.: On the effect of the mantle elasticity on the Earth’s rotation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 61, 117–180 (1995)
- Getino, J., Ferrándiz, J.M.: A Hamiltonian approach to dissipative phenomena between the Earth’s mantle and core, and effects on free nutations. *Geophys. J. Int.* 130, 326–334 (1997)
- Getino, J., Ferrándiz, J. M.: Forced nutations of a two layer Earth model. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 322, 785–799 (2001)
- Getino, J., González, A. B., Escapa, A.: The Rotation of a non–rigid, non–symmetrical Earth II: Free nutations and dissipative effects. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 76, 1–21 (2000)
- Getino, J., Ferrándiz, J. M., Escapa, A.: Hamiltonian theory for the non–rigid Earth: Semidiurnal terms. *Astron. Astrophys.* 370, 330–341 (2001)

Getino, J., Escapa, A., Miguel, D.: General theory of the rotation of the non-rigid Earth at the second order. I. The rigid model in Andoyer variables. *Astron. J.* 139, 1916–1934 (2010)

Goldstein, H.: *Mecánica clásica*. Editorial Reverté (1987)

Gurfil, P., Elife, A., Tangren, T., Efroimsky, E.: The Serret–Andoyer formalism in rigid–body dynamics: I. Symmetries and perturbations. *Regul. Chaot. Dyn.* 12, 389–425 (2007)

Henrad, J.: *Analytic Lunar Ephemeris: A Report*. Pub. Dept. Math., University of Namur, Belgium (1972)

Henrad, J.: *Ibid*, Report 78/11 (1978)

Henrad, J.: The Rotation of Europa. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 91, 131–149 (2005)

Hilton, J. L.; Capitaine, N.; Chapront, J.; Ferrandiz, J. M.; Fienga, A.; Fukushima, T.; Getino, J.; Mathews, P.; Simon, J.-L.; Soffel, M.; Vondrak, J.; Wallace, P.; Williams, J.: Report of the International Astronomical Union Division I Working Group on Precession and the Ecliptic. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 94, 3, 351–367 (2006)

Hori, G. I.: Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *Publ. Astron. Soc. Jpn.* 18, 287–296 (1966)

Hori, G. I.: Theory of General Perturbations. In: Tapley, B. D., Szebehely, V. (eds.) *Recent Advances in Dynamical Astronomy*. Astrophysics and Space Science Library 39, 231–249 (1973)

IERS Conventions 2010, IERS Technical Note 36, eds. G. Petit and Brian Luzum, Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie (2010)

Jackson, J. D.: *Electrodinámica clásica*. Editorial Alhambra (1980)

Jeffreys, H.: *The Earth*, 6th ed. Cambridge University Press, Cambridge (1976)

Kaplan, G.H.: *The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models*. Circular No. 179. United States Naval Observatory (2005)

- Kaula, W. M.: Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Rev. Geophys. Space Phys.* 2, 661–685 (1964)
- Kaula, W.H.: *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell, Waltham, MA. (1966)
- Kinoshita, H.: First-order perturbations of the two finite-body problem. *Pub. Astron. Soc. Jpn.* 24, 423–457 (1972)
- Kinoshita, H.: Formulas for precession. *Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report*, No. 364. (1975)
- Kinoshita, H.: Theory of the rotation of the rigid Earth. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 15, 277–326 (1977)
- Kinoshita, H., Sasao, T.: Theoretical aspects of the Earth rotation. In: Kovalsky, J. et al. (eds.) *Reference Frames in Astronomy and Geophysics. Astrophysics and Space Science Library* 154, 173–211 (1989)
- Kinoshita, H., Souchay, J.: The theory of the nutation for the rigid-Earth model at the second order. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 48, 187–265 (1990)
- Kinoshita, H., Nakajima, K., Kubo, Y., Nakagawa, I., Sasao, T., Yokoyama, K.: Note on nutation in ephemerides. *Publi. Int. Latitude Observat. Mizusawa XII(1)*, 71–108 (1978)
- Kopeikin, S. M., Pavlis, E., Pavlis, D., Brumberg, V. A., Escapa, A., Getino, J., Gusev, A., Mueller, J., Ni, W. T., Petrova, N.: Prospects in the orbital and rotational dynamics of the Moon with the advent of sub-centimeter lunar laser ranging. *Adv. Space Res.*, 42, 1378–1390 (2008)
- Krasinsky, G.A.: Tidal effects in the Earth-Moon system and the Earth's rotation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 75, 39-66 (1999)
- Kubo, Y.: Solution to the rotation of the elastic Earth by method of rigid dynamics. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 50, 165–187 (1991)
- Kubo, Y.: Rotation of the elastic Earth: the role of the angular-velocity-dependence of the elasticity-caused perturbation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 105, 261–274 (2009)
- Lambert, S.B., Mathews, P.M.: Second-order torque on the tidal redistribution and the Earth's rotation. *A&A* 453, 363-369 (2006)
- Lambert, S., Capitaine, N.: Effects of zonal deformations and the Earth's rotation rate variations on precession-nutation. *A&A* 428, 255-260 (2004)

Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York Dover Publications. 4th Edition. (1944)

Lieske J, Lederle T, Fricke W, Morando B: Expression for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants. A&A 58:1-16 (1977)

MacCullagh, J.: Proc. Royal Irish Academy 2, 520-526, 542-545 (1844)

Mathews, P.M., Buffet, B.A., Shapiro, I.I.: Love numbers for a rotating spheroidal Earth: New definitions and numerical values. Geophysical Research Letters, 22 No. 5, 579-582 (1995)

Marion, J. B.: Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Editorial Reverté (1992)

Meirovitch, L.: Methods of Analytical Dynamics. McGraw-Hill, Advanced engineering series, New York (1970)

Mignard, F.: Multiple expansion of the tidal potential. Celest. Mech. 18, 287-294 (1978)

Mignard, F.: The evolution of the lunar orbit revisited I. The Moon and the Planets 20, 301-315 (1979)

Moritz, H., Mueller, I.: Earth rotation. Frederic Ungar, New York (1986)

Munk, W. K., MacDonald, G. J. F.: The rotation of the Earth: a geophysical discussion. Cambridge University Press, Cambridge (1960)

Navarro, J. F.: Teoría analítica de la rotación de la Tierra rígida mediante manipulación simbólica específica. Tesis doctoral. Universidad de Alicante (2001)

Newcomb, S.: Tables of the motion of the earth on its axis and around the sun. Astron Papers. Am. Ephemeris 6, pt 1 (1895)

Newcomb, S.: A compendium of spherical astronomy. Macmillan, New York, Chap. 10 (1906)

Peale, S.J.: Rotation of solid bodies in the Solar System. Rev. Geophys. Space. Phys., 11, 4, 767-793 (1973)

Poincarè, H.: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars, Vol. II. Paris (1893)

- Rañada, A.: *Dinámica clásica*. Alianza Universidad Textos (1990)
- Rochester, M.G., Smylie, D.E.: On Changes in the Trace of the Earth's Inertia Tensor. *J. Geophys. Res.* 79, 32, 4948-4951 (1974)
- Routh, E. J.: *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 6th ed., rev. and enl. Dover Publications, New York (1955)
- Sasao, T., Okubo, S. and Saito, M.: *Proceedings of IAU Symposium 78*, ed. E. P. Federvo, M. L. Smith and P. L. Bender, 165. (1980)
- Shen, P-Y, Mansinha, L.: Oscillation, nutation and wobble of an elliptical rotating Earth with liquid outer core. *Geophys. J.R. astr. Soc.* 46, 467-496 (1976)
- Smith, M.L.: The scalar equations of infinitesimal elastic-gravitational motion for a rotating, slightly elliptical earth. *Geophys. J.R. astr. Soc.* 37, 491-526 (1974)
- Soffel, M., Langhans, R.: *Space-Time Reference Systems*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer (2013)
- Souchay, J., Folgueira, M.: The effect of zonal tides on the dynamical ellipticity of the Earth and its influence on the nutation. *Earth, Moon and Planets*, v. 81, 3, 201-216 (2000)
- Souchay, J., B. Losley, H. Kinoshita, Folgueira, M.: Corrections and new developments in rigid earth nutation theory. III. Final tables "REN-2000" including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* 135, 111-131 (1999)
- Takeuchi, H.: On the Earth tide of the compressible Earth of variable density and elasticity. *Transactions of the American Geophysical Union*, 31, 651 (1950)
- Vilhena de Moraes, R., Santos Cabette, R. E., Zanardi, M. C., Stuchi, T. J., Kennety Formiga, J.: Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 104, 337-353 (2009)
- Wahr, J.M.: *The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth*. PhD thesis, University of Colorado (1979)
- Wahr, J.M.: Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth. *Geophys. J. R. astr. Soc* 64, 677-703 (1981)

Wahr, J.: Geodesy and Gravity. Samizdat Press (1996)

Wahr, J. M., Sasao, T., Smith, M.: Effect of the fluid core on changes in the length of day due to long period tides. *Geophys. J. Int.* 64, 635–650 (1981)

Wigner, E.: Group theory. Academic Press (1959)

Wintner, A.: The analytical foundations of Celestial Mechanics. Princeton University Press, Princeton (1941)

Zeipel, H. von: Recherches sur le mouvement des petites planètes. *Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys.* 11, No.1, No. 7 (1916)



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante