• Después de este estudio, podemos afirmar que las magnitudes que hemos introducido permiten caracterizar movimientos reales, clasificándolos, incluso, en categorias o tipos (M. U., M. U. A., M. variado), y diferenciando movimientos del mismo tipo según los distintos valores de a, v y e. En el caso de movimientos no regulares, siempre es posible obtener valores medios de las magnitudes (v_m, a_m), e interpretar cualitativamente dicho movimiento.

• También cabe resaltar que dichas magnitudes contribuyen a avanzar hacia una explicación común y universal de todos los movimientos: con las mismas magnitudes hemos podido caracterizar y diferenciar movimientos tan dispares como el de la caída de una piedra o la ascensión de una burbuja de gas, sin tener en cuenta para nada la naturaleza del objeto que se mueve.

• Aún es posible, sin embargo, reforzar más la validez de e, v y a explorando y aprovechando su utilidad para realizar predicciones.

En efecto, el que existan movimientos tan regulares —con v *constante o* a *constante— ¿permitirá predecir dónde estará un móvil en el instante que determinemos?¿Qué interés puede tener el poder realizar dichas predicciones?*

2.3 APLICACIÓN DE LA CAPACIDAD PREDICTIVA DE LOS CONOCIMIENTOS CONSTRUIDOS A SITUACIONES DE INTERÉS.

• Ya hemos visto, al realizar el estudio gráfico del M. U. y del M. U. A., que era posible conocer el valor de la e o la v de un móvil sin necesidad de realizar mediciones: la regularidad de estos movimientos hace posible predecir dónde estará y qué rapidez tendrá un móvil en un instante determinado.

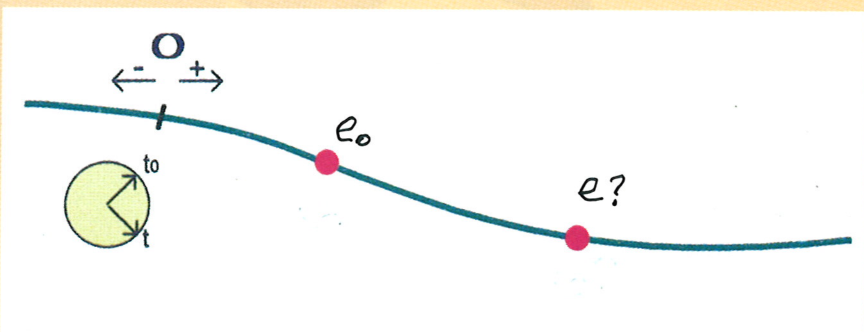
Esto, como veremos, abre un campo de aplicación de enorme interés práctico.

• Para explorar este campo, *intentaremos concretar, en primer lugar, la arriba indicada capacidad predictiva —que sólo hemos entrevisto gráficamente— en forma de relación entre las magnitudes cinemáticas y el tiempo. Una vez dispongamos de dichas relaciones* — e = f(t); v = f(t); y a = f(t) — llamadas «ecuaciones del movimiento», *exploraremos su aplicación a problemas concretos.*

2.3.1 ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO.

a) Movimiento uniforme.

A.36 Se sabe que el móvil de la figura tiene un movimiento uniforme, con rapidez v, y que cuando el reloj marcaba t_0, su posición era e_0. ¿Cuál será su rapidez y posición en el instante t?



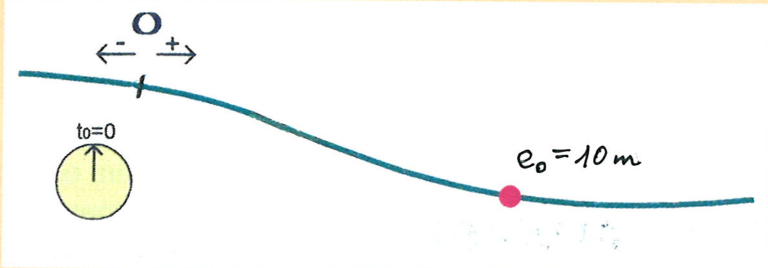
• En el intervalo de tiempo transcurrido de t_0 a t, $\Delta t = t - t_0$.
En ese intervalo, el cambio de posición experimentado por el móvil será $\Delta e = e - e_0$.
Y según nuestra definición de rapidez media, $v_m = \Delta e/\Delta t$, valdrá: $\Delta e = v_m \Delta t$.
Como, por ser uniforme, $v_m = v$; entonces: $e - e_0 = v\,(t - t_0)$; o también:

$$e = v\,(t - t_0) + e_0$$

Es decir, si se conoce la posición, e_0, en un instante cualquiera, t_0, podemos saber dónde estará el móvil en cualquier otro instante, t.

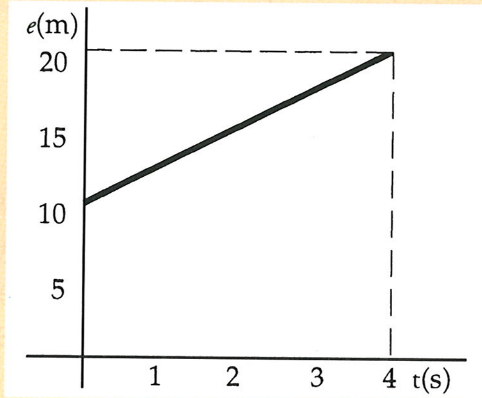
A.36.1 Un móvil va constantemente a 3 m/s. Suponiendo que en el instante $t_0 = 2$s se encuentra en la posición $e_0 = 8$ m, se pide:
a) Dar, sin utilizar las ecuaciones, la máxima información sobre este movimiento (descripción de la evolución de la posición a intervalos de 1 s, gráficas del movimiento...). b) Escribir su ecuación $e = f(t)$. c) Calcular dónde se encontrará en los instantes $t = 14'5$s, $t = 0$, y $t = 7$s.

A.36.2 Respecto del movimiento sobre la trayectoria adjunta:
a) Señalad tres posiciones a intervalos iguales de tiempo. b) Escribid la ecuación del movimiento y comprobad las posiciones señaladas en el apartado anterior. c) Calculad la posición en el instante 5'85s.

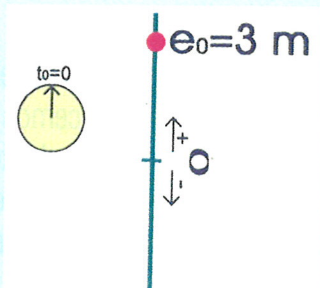


El objeto se mueve hacia la derecha siempre a 6m/s.

A. 36.3 A partir de la gráfica adjunta, se pide:
a) Calcular la rapidez.
b) Escribir su ecuación $e = f(t)$.
c) Averiguar la posición y la rapidez en el instante 2'5s.



E.6 Respecto del movimiento de la figura:
a) Señalad distintas posiciones sobre la trayectoria a intervalos iguales de tiempo.
b) Escribid las ecuaciones del movimiento.
c) Dibujad las gráficas: $e = f(t)$ y $v = f(t)$.



El objeto se mueve hacia abajo siempre a 4m/s.

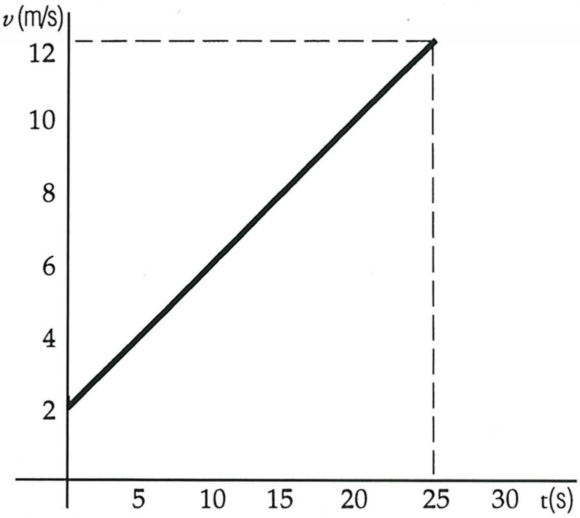
(Proponer después de A.37.2)

E.7 Dada la gráfica adjunta:

a) escribid las ecuaciones del movimiento, sabiendo que para t = 0s, e_0 = 10 m;

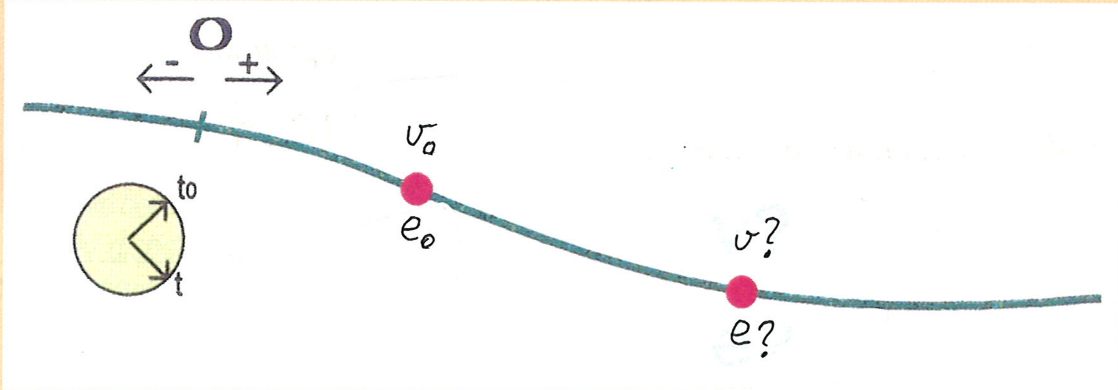
b) construid las gráficas e—t y a—t, e interpretadlas;

c) calculad la posición para t = 5s.



b) Movimiento uniformemente acelerado. (*Opcional.*)

A.37 Se sabe que el móvil de la figura tiene un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración sobre la trayectoria vale a, y que cuando el reloj marcaba t_0, su posición y su rapidez eran e_0 y v_0, respectivamente. ¿Cuáles serán su aceleración, su rapidez y su posición cuando el reloj marque t?



• La aceleración en el instante t será la misma que en el instante t_0, es decir, a, ya que es un M.U.A. En cambio, la rapidez habrá variado desde el instante t_0 al t, en una cantidad Δv, cuyo valor podemos hallar al conocer la a_m, ya que, como sabemos: $a_m = \Delta v / \Delta t \Longrightarrow \Delta v = a_m \Delta t$.

Es decir, $v - v_0 = a_m (t - t_0)$.

Y como $a_m = a$ (la misma en todo momento), el valor de la rapidez en el instante t será:

$$v = a(t - t_0) + v_0;$$

es decir, para un M.U.A., con aceleración conocida, podemos saber cuál será la rapidez del móvil, v, en cualquier instante, t, si conocemos cuál era su rapidez, v_0, en algún instante conocido, t_0.

• Del mismo modo, en el intervalo de tiempo transcurrido desde el instante t_0 —en el que sabemos que la posición era e_0— al instante t, se habrá producido un cambio de posición, Δe, cuyo valor podríamos hallar si conociéramos la rapidez media en dicho intervalo, pues, como sabemos:

$$v_m = \frac{\Delta e}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta e = v_m \Delta t \Longrightarrow e - e_0 = v_m (t - t_0).$$

• En el caso del M.U., al ser la rapidez siempre constante, $v_m = v$, no había dificultad para encontrar la ecuación del movimiento; pero en el caso del M.U.A., la rapidez va variando continuamente, y v_m no la podemos hallar mediante $\Delta e/\Delta t$, ya que no conocemos la posición al final del intervalo (¡es precisamente lo que buscamos!). Afortunadamente, el hecho de que el ritmo de variación de la rapidez sea siempre el mismo (al ser a constante) permite calcular la v_m de un modo sencillo: es el valor medio entre la rapidez al principio del intervalo, v_0, y la rapidez al final del mismo, v; es decir,

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

Por tanto,

$$e - e_0 = \frac{v_0 + v}{2}\,(t - t_0);$$

y como la rapidez, v, en el instante, t, vale, como acabamos de ver, $v = a\,(t - t_0) + v_0$, sustituyéndola y simplificando, queda:

$$e = \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + e_0$$

De modo que las ecuaciones del movimiento (las ecuaciones que nos permiten saber lo que valen v o e en un instante cualquiera, t), para el movimiento uniformemente acelerado son:

$$v = a\,(t - t_0) + v_0$$

$$e = \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + e_0$$

A.37.1 Un objeto inicialmente en reposo en la posición $e = 7$ m en el instante $t = 0$, comienza a moverse con una aceleración constante de 2 m/s².

a) Dad, sin utilizar las ecuaciones, la máxima información sobre este movimiento (descripción cualitativa de la evolución de la posición a intervalos de 1s, gráficas del movimiento...).

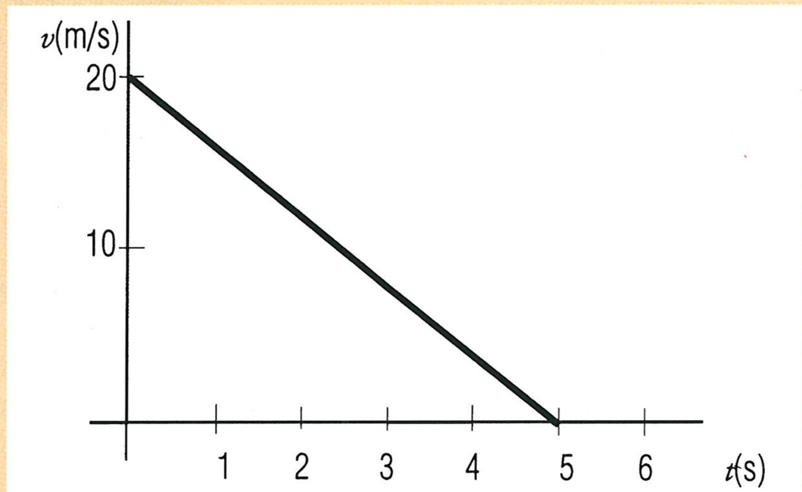
b) Escribid sus ecuaciones y calculad dónde se encontrará en el instante $t = 4'5$ s

A. 37.2 Dada la gráfica de la figura:

a) Analizad cualitativamente el movimiento.

b) Si suponemos que para $t = 0$, $e = 0$, escribid las ecuaciones del movimiento.

c) Calculad la posición y la rapidez en el instante 4'5 s.



E.8 Un cuerpo se mueve durante 6 segundos con un movimiento uniformemente acelerado de las características que siguen: la trayectoria es recta; $v_0 = 10$ m/s; $t_0 = 0$ s; $e_0 = 20$ m; $a = -2$ m/s^2. Se pide:

a) Explicad cualitativamente dicho movimiento señalando cruces sobre la trayectoria para las posiciones a intervalos iguales de tiempo.

b) Escribid las ecuaciones de movimiento.

c) Construid las gráficas e—t y v—t, e interpretadlas.

A.38 Se deja caer un cuerpo desde una altura de 30 m. Escribid las ecuaciones de su movimiento tomando como el origen de posiciones el punto desde el que se suelta. Hallad dónde estará el móvil dos segundos después de soltarlo; y cuánta será su rapidez en dicho instante.

• Acabamos de ver que la posibilidad de realizar predicciones sobre el movimiento de un objeto requiere necesariamente escribir las ecuaciones de su movimiento, que nos indican cuál será la rapidez y la posición en cualquier instante. Por tanto, saber escribir y utilizar la ecuación de un movimiento concreto es un requisito imprescindible para poder enfrentarse a problemas reales. Afortunadamente, el procedimiento es general y puede automatizarse en buena medida. Los pasos a seguir serían:

1. En primer lugar, *identificar qué tipo de movimiento es y escribir las ecuaciones generales para movimientos de ese tipo*: en este caso, una mínima reflexión cualitativa nos indica que el movimiento será uniformemente acelerado, y sabemos que las ecuaciones de la rapidez y la posición para cualquier M.U.A. son:

$$v = a\,(t - t_0) + v_0$$

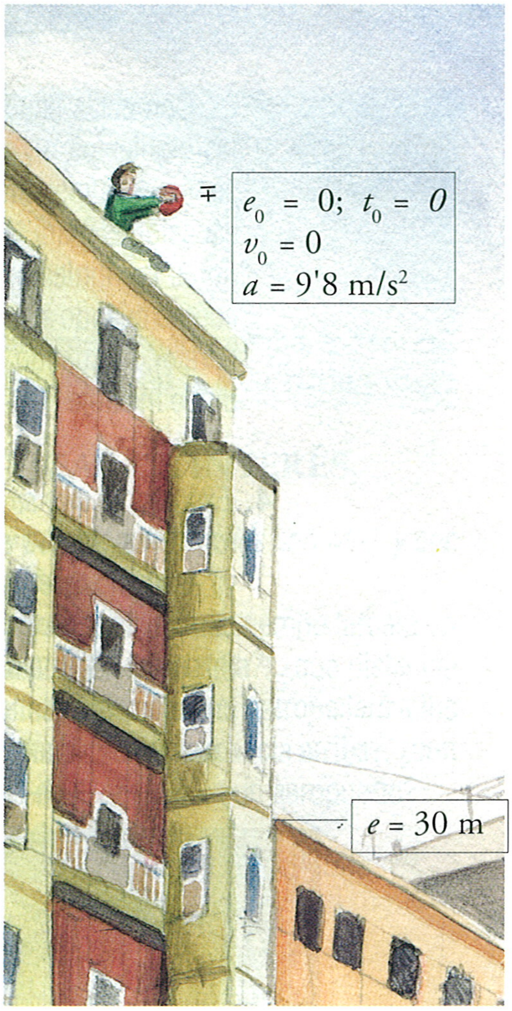
$$e = \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + e_0$$

Pero nosotros no deseamos las ecuaciones de cualquier movimiento sino la del movimiento concreto que nos interesa. Para ello necesitamos tener información sobre nuestro movimiento. Si conocemos cuáles son su rapidez y su posición en algún instante conocido (v_0 y e_0 en el instante t_0), y cuál es el valor de su aceleración, a, podremos particularizar las ecuaciones. Y para indicar lo que valen la posición y la rapidez en un instante conocido, necesitamos un sistema de referencia: un origen de posiciones, con el convenio de signos, y un origen de tiempos.

2. Sobre el dibujo de la situación, *elegir el sistema de referencia espacio-temporal y expresar en él la información que tengamos sobre el movimiento concreto.*

El origen de posiciones y el convenio podemos elegirlo dónde y cómo queramos. Una posibilidad puede ser tomar $e = 0$, en el punto donde se encuentra el objeto cuando se suelta, y empezar a contar el tiempo ($t = 0$) en el instante en que se suelta. Cuando el móvil esté por debajo del origen, su posición será positiva (convenio de signos).

Ahora ya tenemos información sobre nuestro movimiento: sabemos que, en un instante conocido, $t_0 = 0$, su rapidez era 0, y su posición era 0. El valor de la aceleración es, como para cualquier caída o subida libre en ausencia de rozamiento, 9'8 m/s², y el signo de la misma es el de Δv (¡atención!, el signo de a no es positivo o negativo según baje o suba, sino que depende del convenio de signos elegido, como se vio en la *A.11*). En este caso, según el cuerpo va cayendo, su rapidez será positiva, porque e es positiva, y cada vez mayor; de modo que Δv, para cualquier intervalo de tiempo, es positivo, y por tanto a (que vale $\Delta v/\Delta t$) es positiva.



3. *Utilizar la información que tenemos en el S de R. elegido para pasar de las ecuaciones generales a la ecuación particular del movimiento estudiado.*

Puede ser útil, para el orden, utilizar una tabla como la siguiente:

Tipo de movimiento	M.U.A. (a = cte.)
Ecuaciones generales	$v = a\,(t - t_0) + v_0$ $e = \frac{1}{2}\,a\,(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + e_0$
Características del movimiento en el S. de R. elegido (información que se tiene sobre él)	Para t = 0, su posición es e = 0, y su rapidez es v_0 = 0; la aceleración es a = 9'8m/s².
Ecuaciones para el movimiento concreto	1.) $v = 9'8\,(t - 0) + 0 \Longrightarrow v = 9'8\,t$ 2.) $e = \frac{1}{2} 9'8\,(t - 0)^2 + 0\,(t - 0) \Longrightarrow e = \frac{1}{2} 9'8 t^2$

La información que se puede extraer de las ecuaciones *1.* y *2.* estará referida, por supuesto, al S. de R. elegido. Así, la ecuación *2.* nos indica la posición del móvil medida desde el origen (que era el punto desde el que se dejó caer). Según va cayendo, la posición será, pues, cada vez mayor. Cuando llegue al suelo, la posición será e = 30 m.

Con estas ecuaciones podemos predecir/contestar, inmediatamente, preguntas como las siguientes: «¿qué rapidez tendrá 2 segundos después de haberse soltado?»; «¿cuál será en ese instante su posición?»; ello, sin más que sustituir el instante indicado en las ecuaciones (para $t = 2$ s, sale $v = 19'6$ m/s y $e = 19'6$ m). En otros casos, la respuesta no es tan inmediata, pero sí sencilla. Por ejemplo, si nos interesa saber dónde estará el cuerpo cuando alcance una rapidez de 15 m/s, tendremos que: 1°) hallar en *1.* lo que marca el reloj, t_*, cuando la rapidez tiene dicho valor; y, 2°) hallar en *2.* la posición del móvil en dicho instante ($15 = 9'8\, t_*$; $t_* = 1{,}53$ s; y la posición en ese instante será:

$$e = 1/2 \,.\, 9'8 \,.\, 1'53^2 = 11{,}47 \text{ m}).$$

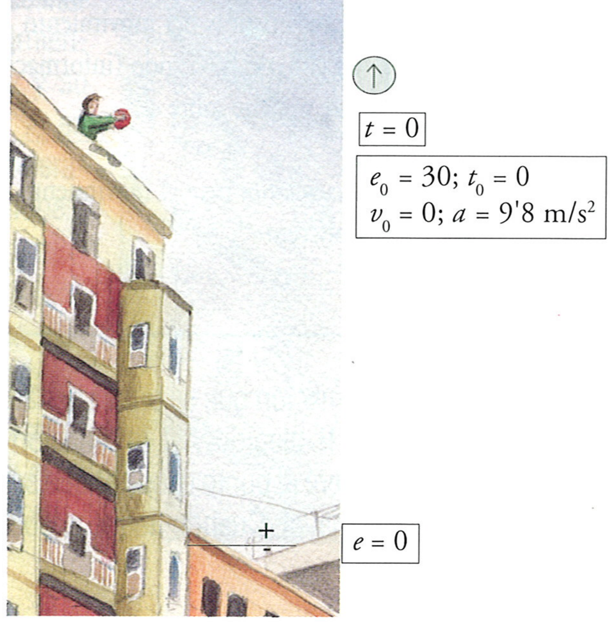
4. *Expresar lo que se desea conocer sobre el movimiento de un modo operativo, es decir, en forma cuantitativa en el S. de R. elegido.* Las preguntas anteriores eran inmediatas porque ya estaban «operativizadas». En la mayor parte de las situaciones, no obstante, lo que se busca está en lenguaje cotidiano, y es necesario «traducir» al lenguaje operativo en nuestro S. de R. Hacer esto se llama «operativizar» lo que se busca. Éste es un paso siempre presente en la solución de problemas reales, y no siempre es fácil. A modo de ejemplo, exponemos algunos casos referidos a la situación que estamos tratando:

Pregunta formulada en lenguaje cotidiano	Operativización de la pregunta en nuestro S. de R. («Traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje físico/matemático)
¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?	Hallar el instante, t, en que $e = 30$ m
¿Con qué rapidez llegará al suelo?	Hallar v en el instante en que $e = 30$ m
¿Qué rapidez tendrá cuando le falte 1 m para llegar al suelo?	Hallar v en el instante en que $e = 29$ m

A.38.1 **Se deja caer un cuerpo desde una altura de 30 m. Escribid las ecuaciones de su movimiento tomando, como origen de posiciones, el suelo. Hallad dónde estará dos segundos después de soltarlo; y cuánta será su rapidez en ese instante.**

• Se pueden desarrollar todos los pasos anteriores pero desde un S. de R. distinto: tomando el origen de posiciones, $e = 0$, en el suelo, justo en el punto de corte de la trayectoria con el suelo, con sentido positivo hacia arriba (si el cuerpo está sobre el suelo, su posición será positiva; si estuviera por debajo, sería negativa) y con el origen de tiempo, $t = 0$, en el instante en que se suelta el cuerpo.

Si se hace correctamente, la rapidez y la posición del móvil 2 segundos después de haberlo soltado deben ser -19'6 m/s y 10'4 m, respectivamente.



E.9 Un automóvil, inicialmente en reposo, acelera con $a = 2\ m/s^2$ durante 10 s. A continuación sigue con la rapidez alcanzada hasta que, a los 30 s (contados desde que empezó a moverse), frena consiguiendo detenerse en 5 s. Hallad la distancia total recorrida.

E.10 Desde lo alto de una torre de 50 m, se lanza verticalmente hacia arriba, a 20 m/s, una piedra. Hallad la rapidez con que chocará con el suelo, en la base de la torre.

2.3.2 APLICACIÓN A SITUACIONES PROBLEMÁTICAS DE INTERÉS.

• *Ahora que ya podemos realizar predicciones sobre la rapidez y posición de móviles con M.U. y con M.U.A., vamos a aplicarlas para situaciones de gran interés práctico y teórico.*

Se puede tratar de resolver situaciones problemáticas como las siguientes: ¿cuánto tiempo tardará un tren en atravesar un túnel?; ¿dónde se cruzarán dos vehículos que circulan por la carretera?; ¿qué distancia recorrerá un vehículo hasta quedar parado?; un conductor frena al ver el semáforo en rojo: ¿atropellará a los peatones que están cruzando?; ¿qué altura alcanzará un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba?, ¿con qué rapidez llegará al suelo?; ¿qué longitud mínima debe tener una pista de despegue de un aeropuerto?

• No hay regla alguna que asegure que la resolución de un verdadero problema va a ser «la correcta». Un problema es una situación para la que, en principio, no se tiene una respuesta ya hecha, y, por tanto, su proceso de resolución supone un camino con incertidumbres, atractivo en la medida en que se va abriendo dicho camino según se van tomando decisiones o reflexiones que permitan avanzar.

No obstante, aunque —afortunadamente— no hay «receta» alguna para aplicar repetitivamente, sí existen orientaciones de tipo metodológico/racional que favorecen la reflexión productiva ante un verdadero problema:

a) Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema para hacerlo abordable. Expresar de un modo operativo cuál es el problema, qué es lo que se busca. *(Planteamiento cualitativo.)*

b) Formular hipótesis fundadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia. Imaginar la situación en casos limites, de fácil interpretación fisica. *(Formulación de hipótesis.)*

c) Diseñar alguna estrategia (mejor si es más de una) que, utilizando los conocimientos establecidos, permita obtener una expresión donde esté relacionada la magnitud buscada con aquellas que se han supuesto conocidas. *(Elaboración de estrategias.)*

d) Llevar a cabo la resolución de acuerdo con la/s estrategia/s diseñada/s. Es decir, obtener una posible expresión para la magnitud buscada, realizando las operaciones algebraicas previstas en el diseño. *(Resolución.)*

e) Analizar el resultado obtenido en relación a las hipótesis emitidas. En concreto, probar si el resultado recoge todas las dependencias esperadas en la forma en que se había supuesto, así como los casos límite propuestos. *(Análisis del resultado.)* La no confirmación de la hipótesis supondrá un replanteamiento de todo el proceso.

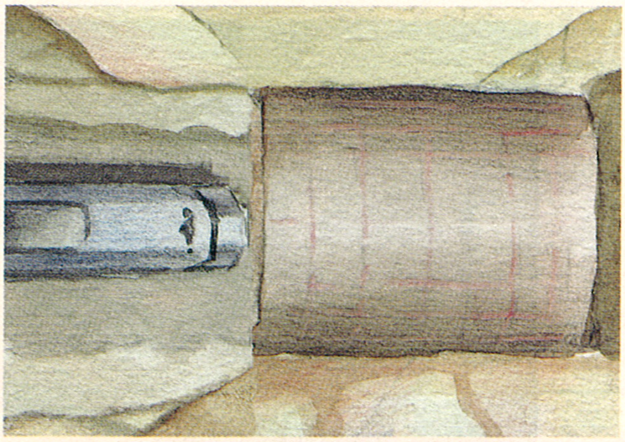
A.39 Siguiendo las orientaciones metodológicas expuestas, resolver el problema:

¿Cuánto tiempo tardará un tren en atravesar un túnel?

a) Planteamiento cualitativo.

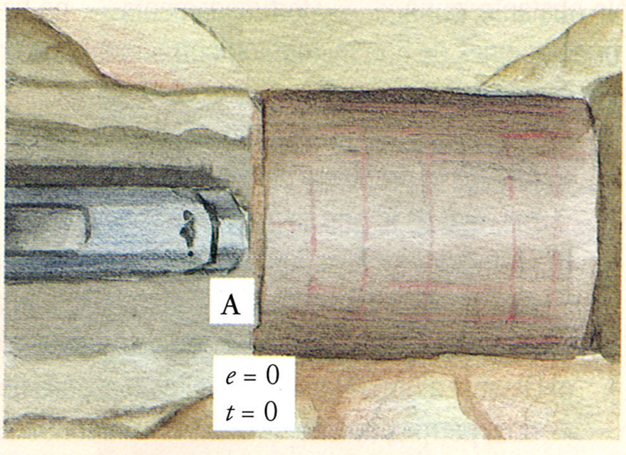
Es fácil imaginarse la situación: un tren que circula por la vía se acerca a un túnel y el problema es calcular el tiempo que tarda en atravesarlo.

Podemos hacer un dibujo. Pero, ¿cómo vamos a suponer que se mueve el tren? Podría ser que su rapidez variara irregularmente, mientras atraviesa el túnel; o que quedara parado a mitad y después arrancara; o que fuera acelerando constantemente desde que entra hasta que sale. Hemos, pues, de precisar las condiciones que vamos a suponer: consideraremos que el tren siempre tiene la misma rapidez, es decir, que lleva un movimiento uniforme.



Por supuesto que esto limitará la validez del resultado que obtengamos: siempre que los científicos se enfrentan a situaciones problemáticas abiertas, deben simplificarlas para poder avanzar en la solución. Posteriormente, si se dispone de mejores conocimientos, ya se impondrán condiciones más generales.

Así, pues, tenemos un tren con movimiento uniforme que entra en un túnel, y queremos saber el tiempo que tardará en atravesarlo.



Aunque todos entendamos lo que quiere decir «el tiempo que tardará en atravesarlo», el problema está expresado en lenguaje cotidiano, y es necesario expresar lo que buscamos en lenguaje operativo. Ello requiere que elijamos un S. de R. y expresemos en términos físicos precisos qué es lo que buscamos:

Si cogemos $e = 0$ al principio del túnel, y ponemos el reloj en marcha, $t = 0$, en el instante en que la locomotora pasa justo por ese punto, el tiempo que tarda el tren en atravesar el túnel será el que marque el reloj cuando la posición de A (cabeza de tren), sea $e = l + L$ (siendo l = longitud del tren, y L = longitud del túnel).

Así, pues, en nuestro S. de R., el problema de modo operativo es: hallar t cuando $e = l + L$.

b) Formulación de hipótesis.

¿De qué dependerá el tiempo, t_*, que tardará el tren en cruzar el túnel? Es lógico pensar que dependerá de la rapidez del tren, v, de la longitud del mismo, l, y de lo largo que sea el túnel, L. Es decir: $t_* = f(v, l, L)$.

Más aún, creemos que t_*: será menor si v es mayor; y también t_* será mayor cuanto mayores sean l y L.

Simbólicamente, podemos escribir el tipo de dependencia, que creemos que habrá, del siguiente modo:

—si $v\uparrow \Longrightarrow t_*\downarrow$
—si $l\uparrow \Longrightarrow t_*\uparrow$
—si $L\uparrow \Longrightarrow t_*\uparrow$

Incluso, podemos preveer situaciones-limite donde es fácil avanzar el resultado. Así:

—si $v = 0$, $t_* \Longrightarrow \infty$;
—si el túnel fuera una «línea vertical», $L = 0$, entonces t_* sería el tiempo que tardaría A en pasar de $e = 0$ a $e = l$, yendo con rapidez v; es decir: $t_* = l/v$;
— si la longitud del tren fuera cero, $l = 0$, entonces $t_* = L/v$.

Así, pues, no sólo creemos que el tiempo dependerá de dichos factores, sino que pensamos que el tipo de dependencia ha de ser de una forma determinada y sabemos lo que ha de valer el resultado en los citados casos-limite.

c) Elaboración de estrategias.

¿Cómo hallar el t en que se cumple que $e_* = l + L$?

Una posible estrategia puede ser: escribir la ecuación del movimiento para el punto A, en cualquier instante y hallar el instante, t_*, en que la $e_* = l + L$.

Si se encuentran estrategias alternativas, es importante también desarrollarlas: obtener un mismo resultado por caminos distintos es una buena garantía de la validez del mismo.

d) Resolución.

Será necesario escribir la ecuación de movimiento del punto A. Puesto que sabemos que es un movimiento uniforme, la ecuación de este tipo de movimiento es: $e = v(t - t_0) + e_0$; pero ésta es la ecuación de cualquier M.U., y nosotros queremos la del punto A.

Particularizando para A, sabemos algunas caracteristicas: para $t = 0$, $e = 0$, y su rapidez vale v; luego la ecuación de A quedará: $e = vt$.

Ésta ya es la ecuación que da la posición de A, en cualquier instante. El instante en que la posición vale $l + L$, será aquel, t_*, en que se cumpla: $l + L = v\,t_* \Longrightarrow t_* = \dfrac{l + L}{v}$

e) Análisis de resultados.

¿Cómo sabemos si está bien el resultado?

En primer lugar, los factores que influyen en el tiempo que tarda en cruzar y la forma de dependencia coinciden con lo avanzado en las hipótesis. Así:

—cuanto más rápido vaya (si $v\uparrow$), menos tiempo tardará en cruzar;

—cuanto mayor sea la longitud del tren, l, o la del túnel, L, más tiempo tardará en cruzar.

El resultado para los casos limite ($v = 0$; $l = 0$; $L = 0$) coincide con lo esperado.

Posiblemente, además, otras personas habrán operativizado el mismo problema de otro modo, o pensado en otra estrategia. Es conveniente comprobar si se llega a resultados equivalentes por caminos distintos.

En algunas ocasiones, el resultado obtenido no coincidirá con lo avanzado en las hipótesis y será necesario reflexionar sobre el proceso seguido y sobre la misma validez de las propias hipótesis, lo que obligará a profundizar en nuestras ideas sobre la situación y, en consecuencia, a aprender más.

Una vez obtenido el resultado con letras (si hubiéramos utilizado números no habríamos podido analizar el resultado ni extraer interpretaciones físicas generales), es muy conveniente pensar en posibles valores numéricos para las variables que aparecen en el problema: imaginar una posible longitud para el tren y para el túnel; una rapidez que pueda ser normal en un tren; realizar los cálculos y dar el valor numérico.

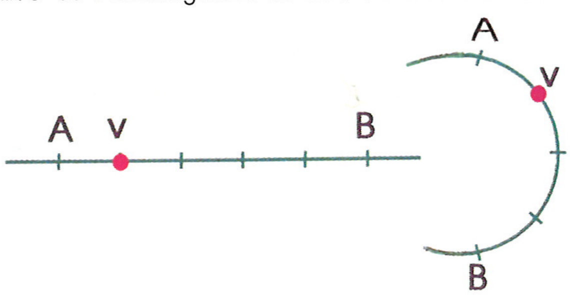
A.39.1 Siguiendo las mismas orientaciones, resolved alguna de las situaciones problemáticas propuestas. Por ejemplo: «¿Dónde se cruzarán dos vehículos que van por la carretera?».

3. LIMITACIONES DE LOS CONCEPTOS INVENTADOS. AMPLIACIÓN DE LAS MAGNITUDES CINEMÁTICAS.

• Hemos probado, pues, que, con las magnitudes cinemáticas e, v y a, podemos identificar movimientos reales, y describirlos dando valores numéricos de dichas magnitudes para un movimiento determinado. Hemos visto, además, la potencia de las mismas para resolver problemas haciendo uso de su capacidad de predicción.

No obstante, antes de realizar una recapitulación sobre lo que hemos avanzado respecto a las preguntas que nos hacíamos a principios del curso y del tema, *vamos a analizar las limitaciones que, como ya se dijo al final del* apartado 1.1, *tiene el haber elegido un estudio que sólo se puede realizar cuando se puede medir sobre la trayectoria.*

• Como ya advertimos al elegir la posición sobre la trayectoria, e, para indicar dónde se encuentra el móvil, su utilización se restringe a los casos en que se puede medir sobre la trayectoria. Será, probablemente, muy útil y sencillo para estudiar movimientos como el de vehículos, trenes..., donde se pueda indicar la posición midiendo la distancia desde el origen del SR hasta donde esté el móvil, siguiendo la trayectoria. En estos casos, decir que la rapidez tiene un determinado valor basta para hacernos una idea exacta de dónde estará el móvil, pues sólo puede ir sobre la trayectoria y podemos medir sobre ella. Esto equivale a ignorar la trayectoria. El cuentakilómetros y el velocímetro de un coche nos dan valores de la posición y de la rapidez, independientes tanto de que la trayectoria sea recta o curvilínea. Todo ello supone una pérdida de información para caracterizar los movimientos: con las magnitudes que hemos introducido hasta aquí, un movimiento rectilíneo realizado a $v = 5$ m/s es indistinguible de otro circular realizado con la misma $v = 5$ m/s.



• Y nosotros sabemos que dichos movimientos no son idénticos. De hecho, intuitivamente, pensamos que, en el caso del movimiento circular de la figura, la situación del móvil al pasar de A a B es análoga a la de haber experimentado un verdadero «retroceso».

Por tanto, el estudio sobre la trayectoria:

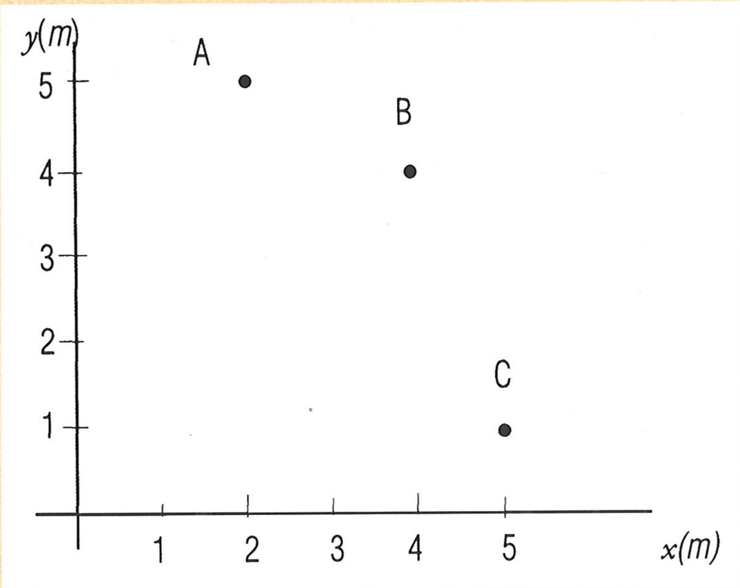
a) No es utilizable cuando no se puede medir sobre la trayectoria, como en el movimiento de la Luna, el de una piedra lanzada horizontalmente, etc.

b) No sirve para diferenciar movimientos de trayectorias distintas, ya que la *e, v, a* no dan información alguna sobre la trayectoria. Con estas magnitudes no se puede contestar la pregunta «¿en qué se diferencia un movimiento rectilíneo de otro circular?»; y no son de ayuda, por tanto, para avanzar en la solución del problema «¿cómo conseguir que el movimiento de un cuerpo sea de una forma determinada?

• Así pues, si buscamos explicaciones universales comunes para el movimiento de todas las cosas, tenemos poderosas razones para realizar un estudio del movimiento que permita tener en cuenta la existencia de trayectorias distintas. Esto sólo puede realizarse, de un modo general, si la posición del móvil se indica sin necesidad de medir sobre la trayectoria. *Vamos, por tanto, a contestar a las mismas cuestiones que antes, pero partiendo de este otro modo de indicar la posición.*

• Con este planteamiento nuevo, no obstante, realizaremos el estudio de un modo breve y cualitativo, pero suficiente para poder avanzar en la solución del problema que estructura el curso.

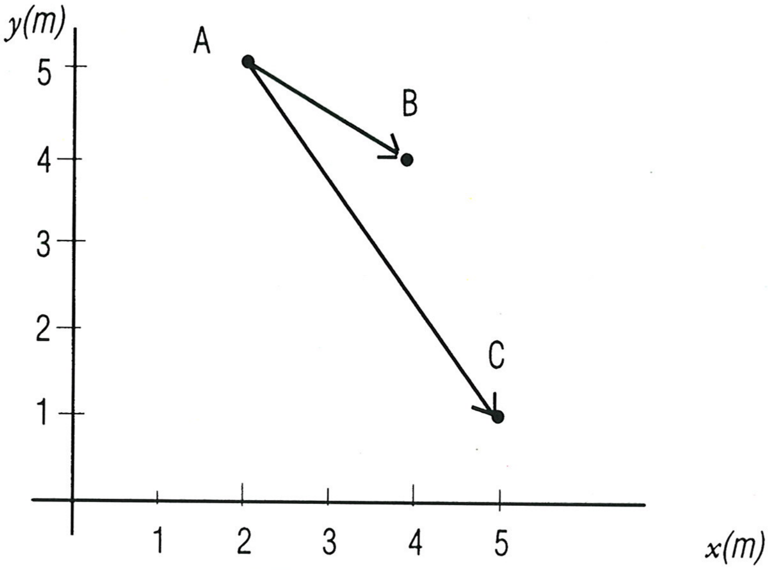
A.40 En caso de que no se puedan realizar mediciones sobre la trayectoria, indicad dónde se encuentra el móvil en las tres posiciones de la figura.



• Para indicar lo rápido que cambia la posición, debemos plantearnos, antes, alguna forma de expresar el desplazamiento del móvil:

A.41 Indicad alguna forma de expresar el desplazamiento del móvil, de la actividad anterior, cuando se mueve de A a B y cuando lo hace de A a C.

• Si se realizan mediciones sobre la figura, y con la escala indicada, podemos decir que los valores de los desplazamientos son 2'2 y 5 m en la dirección y sentido de la línea que une los puntos A y B o A y C, respectivamente. Cuando, para dar toda la información sobre una magnitud, no basta con dar un valor numérico (como ocurre con 10 s, o 62 kg), sino que es necesario indicar también su dirección (mediante la línea que pasa por las posiciones A y B o A y C) y el sentido (indicado por la punta de la flecha), se dice que es *una magnitud vectorial.*



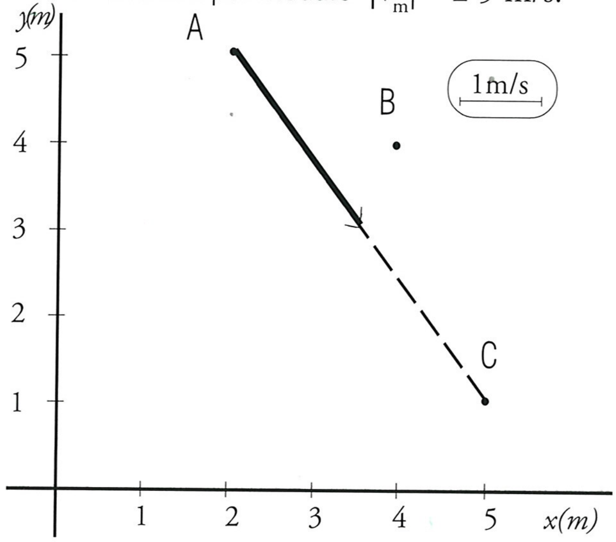
A.42 Expresad la rapidez con que cambia la posición del móvil.

- El vector *velocidad media*, $\mathbf{v}_m$, tendrá la misma dirección y sentido que el vector *desplazamiento*, $\Delta\mathbf{r}$, y por módulo $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t$, siendo Δt el tiempo empleado en el desplazamiento:

$$|\mathbf{v}_m| = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}$$

A.42.1 Dibujad el vector $\mathbf{v}_m$ en el desplazamiento de A a C, sabiendo que el tiempo empleado ha sido de 2 segundos.

- El vector *velocidad media* tendrá por módulo $|\mathbf{v}_m| = 2'5$ m/s.



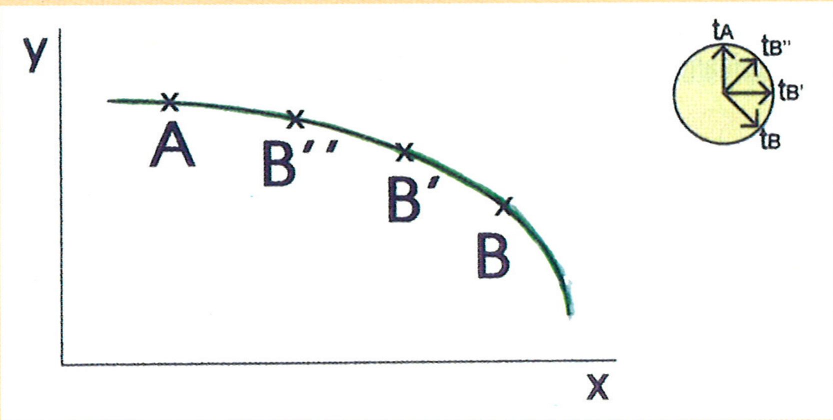
No obstante, como sabemos, lo que interesa para caracterizar completamente un movimiento no son valores medios, sino los valores en cada instante, es decir, nos interesa saber cuál es la dirección, sentido y módulo de la velocidad en un instante determinado.

A.43 La figura adjunta representa dos posiciones sucesivas (A y B) de un móvil sobre la trayectoria dibujada. Con objeto de precisar la dirección y sentido del vector *velocidad instantánea* cuando el móvil pasa por A, se han representado posiciones cada vez más próximas a A: B', B''. Dibujad:

a) un vector que pueda representar la velocidad media entre A y B;

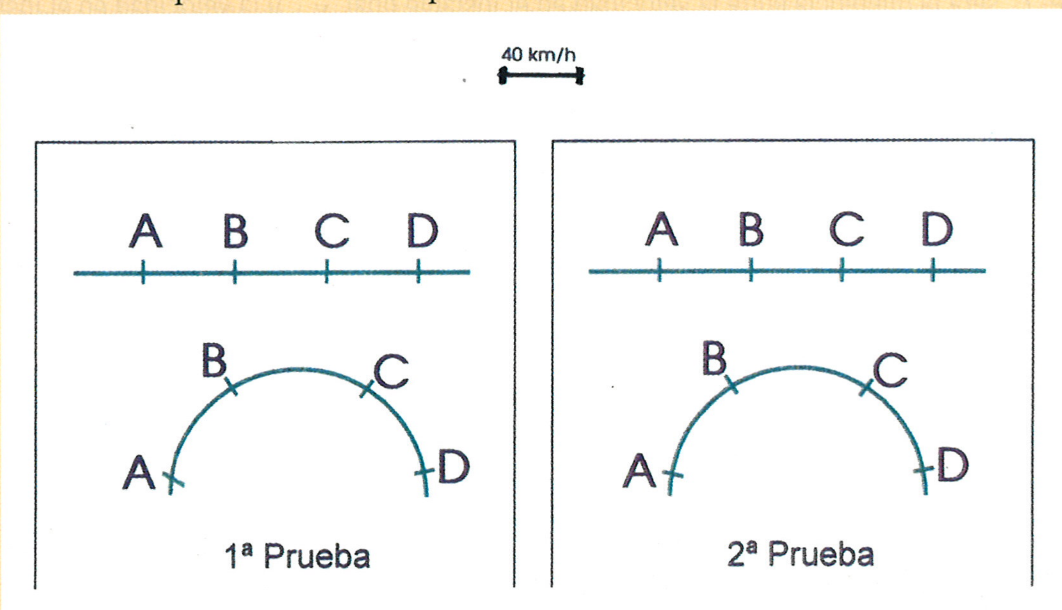
b) ídem, entre A y B' y entre A y B'';

c) dibujad, por último, el vector *velocidad instantánea* en A.



La velocidad instantánea, pues, es una magnitud vectorial cuya dirección es siempre tangente a la trayectoria en el punto considerado; y su módulo coincide con el valor absoluto de la rapidez (al realizar la actividad anterior, se habrá constatado que el valor de $|\Delta r|$ es cada vez más próximo al $|\Delta e|$, según el intervalo de tiempo considerado se va haciendo más pequeño, y, en el limite, cuando $t = 0$, serán iguales).

A.44 Las indicaciones del velocímetro de un coche en las posiciones A, B, C y D de las figuras (trayectoria rectilínea y curvilínea) se han tomado en dos pruebas distintas. En la primera prueba, siempre ha marcado 40 km/h. En la segunda, las lecturas han sido de 40, 60, 80 y 120 km/h. Dibujad los vectores *velocidad* en cada uno de los puntos en las dos pruebas.



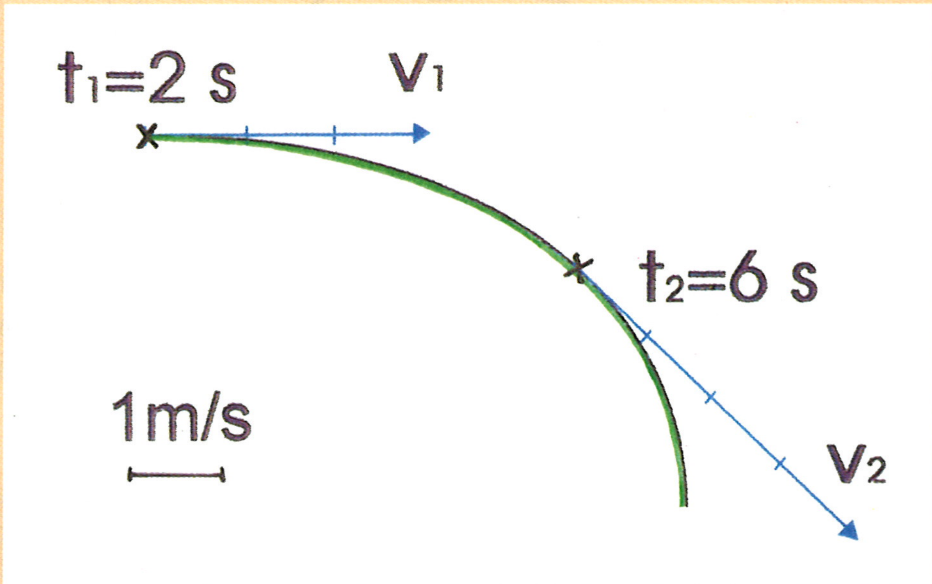
• Como vemos, la velocidad* sí es una magnitud que permite distinguir si un movimiento describe una trayectoria rectilínea o no: si varía su dirección, la trayectoria no puede ser rectilínea. El único caso en que no ha habido cambio de velocidad en la actividad anterior ha sido en la primera prueba sobre trayectoria rectilínea: la velocidad varía cuando varía su módulo, su dirección o ambas cosas a la vez. En una carretera con curvas, pues, puede circularse siempre con la misma rapidez, pero no con la misma velocidad**.

* De ahora en adelante, cuando hablemos de velocidad nos referiremos al vector *velocidad instantánea*, que tiene módulo, dirección y sentido. Cuando una magnitud sea vectorial, la pondremos en letras **negritas**

.** En el lenguaje cotidiano, cuando utilizamos el término *velocidad*, nos referimos al valor absoluto de la rapidez, o al módulo de la velocidad.

• Y ya que deseamos caracterizar los movimientos, será necesario plantearse cómo indicar los cambios de velocidad y lo rápidamente que se producen dichos cambios.

A. 45 Cuando varía la velocidad de un móvil, como en la figura, ¿cómo medir cuánto varía?; ¿y lo rápidamente que lo hace?



• Intuitivamente pensamos que la variación de velocidad que se ha producido entre el instante t_1, y el instante t_2 será la diferencia entre la velocidad en el instante final $\mathbf{v}_2$, y la velocidad en el instante inicial del intervalo $\mathbf{v}_1$. Y lo rápidamente que varía la velocidad vendría indicado por $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$, que recibe el nombre de vector *aceleración media*. Pero, ¿cómo se halla la diferencia de dos magnitudes vectoriales?, ¿cómo se restan?

A.46 Considerad los siguientes movimientos:

a) Un coche desplazándose en línea recta, con rapidez constante, en un instante de su recorrido.

b) Un coche desplazándose por una carretera, en línea recta, en un instante en que está aumentando su rapidez.

c) Ídem, disminuyendo su rapidez.

d) Tomando una curva circular con rapidez constante.

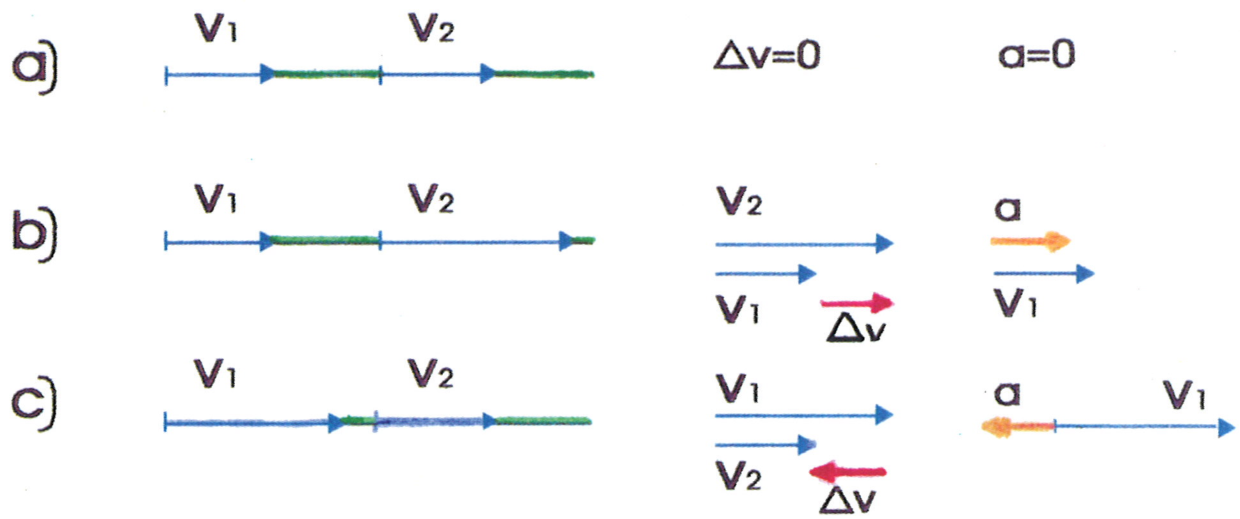
En cada caso, marcad cruces sobre la trayectoria a intervalos iguales de tiempo, para estudiar cualitativamente el movimiento. Luego, dibujad vectores representativos de la velocidad $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, en dos instantes t_1 y t_2. Por último, deducid la dirección y sentido del vector $\mathbf{v}$, y, por tanto, del vector $\mathbf{a}_m$ para ese intervalo de tiempo (de t_1 a t_2).

• Una vez dibujados sobre la trayectoria los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, que puedan representar la velocidad de un móvil en dos instantes, no es difícil deducir la dirección y sentido del vector $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ (y, por tanto, los del vector *aceleración*) correspondiente a ese intervalo de tiempo. La diferencia de velocidad la podremos encontrar si situamos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el mismo origen (respetando la dirección y sentido de cada uno), y los comparamos preguntándonos qué vector le añadiriamos para obtener como resultado $\mathbf{v}_2$. El vector $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ deberá ser aquel que comience en el extremo de $\mathbf{v}_1$ y termine en el extremo de $\mathbf{v}_2$. *

Su dirección y sentido coincidirán con los del vector *aceleración*.

De este modo, se obtienen los resultados que muestran las figuras siguientes:

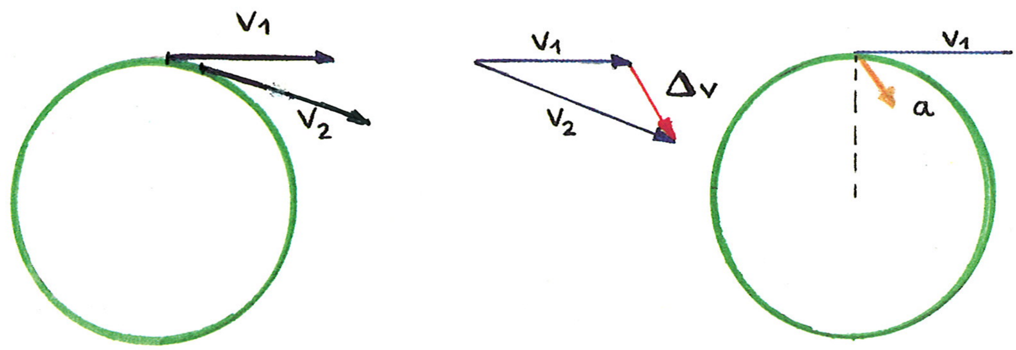
* En el anexo «Operaciones básicas con vectores» se hace un estudio más detallado de la operaci6n *resta* que aquí estamos aplicando.



• Vemos que a un movimiento rectilíneo uniforme le corresponde siempre un vector $\Delta\mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{v}_1$ es siempre igual a $\mathbf{v}_2$) y, por tanto, una aceleración nula. En cuanto a los movimientos rectilíneos uniformemente acelerados, les corresponde un vector $\Delta\mathbf{v}$ (y un vector *aceleración*) de igual dirección y sentido que los de sus velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, si aumenta la rapidez; y un vector $\Delta\mathbf{v}$ (y un vector *aceleración*) de igual dirección y sentido opuesto a los de sus velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ si disminuye la rapidez.

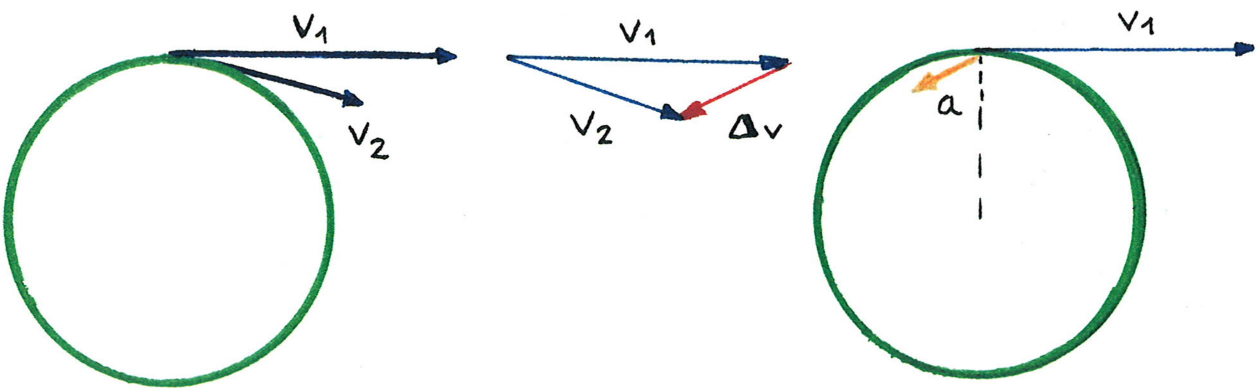
• Algo más dificil resulta deducir la dirección y sentido exactos de $\Delta\mathbf{v}$ —y, por tanto, de la aceleración— en el caso de un movimiento circular con rapidez constante. Para hacerlo con precisión, vamos a resolver dos situaciones, entre las cuales se halla el caso que estamos estudiando.

—La primera sería un movimiento circular, en el que la rapidez va aumentando, con lo cual los vectores *velocidad*, en t_1 y t_2, serían los indicados en la figura adjunta.



En el intervalo, $t_2 - t_1$, considerado muy pequeño, $\Delta\mathbf{v}$ será el representado en la figura; y la aceleración, $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$, tendrá la dirección y el sentido, en el punto A, que se indica.

—La segunda situación es un movimiento circular, en el que la rapidez disminuye y la aceleración sería como se indica en la figura:



• Es decir, en el caso en que aumente la **v** (en módulo) en un movimiento circular, la aceleración forma un ángulo menor de 90° con la **v**; cuanto mayor sea la diferencia entre los módulos de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, más pequeño será el ángulo entre **v** y **a**; y si la $|\mathbf{v}_2|$ se acerca a $|\mathbf{v}_1|$, más se acercará el ángulo a 90°.

Y en el caso en que disminuye la **v** (en módulo), el ángulo entre **v** y **a** es mayor de 90°; pero cuanto menor es la diferencia entre $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$, más se acerca al ángulo de 90 .

Luego, en el caso en que no varíe nada el módulo de la **v**, podemos afirmar que el ángulo entre **v** y **a** es 90°.

Podemos, pues, responder a la cuestión que ponía en evidencia las limitaciones de las magnitudes sobre la trayectoria.

A.47 Utilizando las magnitudes **v** y **a**, responded a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es lo que sería característico de un movimiento rectilíneo?

b) ¿Qué es lo que sería característico de un movimiento curvilíneo?

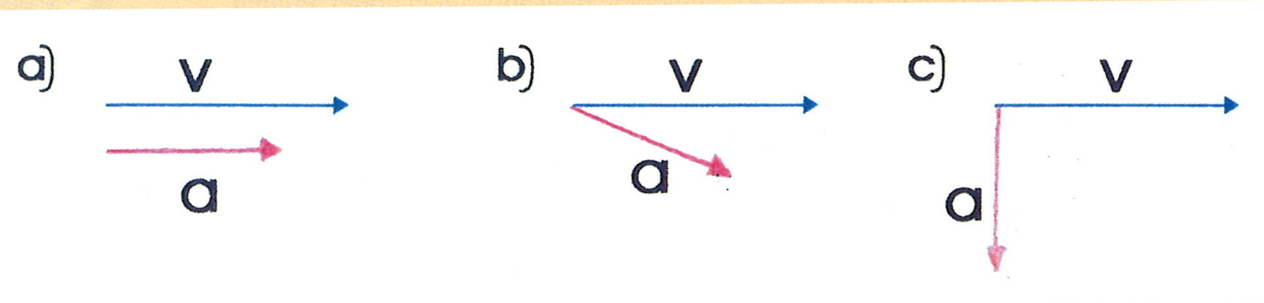
c) ¿Qué es lo que sería característico de un movimiento circular...

c.1) ...con $|\mathbf{v}|$ constante?

c.2) ...con $|\mathbf{v}|$ aumentando?

c.3) ...con $|\mathbf{v}|$ disminuyendo?

A.47.1 Dad la máxima información cualitativa sobre el tipo de movimiento que tendrá un móvil cuya velocidad y aceleración en un instante determinado son:



A.48 ¿Podemos afirmar que, si un cuerpo no se acelera sobre la trayectoria, no tiene aceleración?

Como la aceleración sobre la trayectoria, a, no «tenía en cuenta» los cambios en la dirección del movimiento, y el vector *aceleración*, $\mathbf{a}$, nos indica la rapidez con que cambian el módulo y la dirección del vector *velocidad*, $\mathbf{v}$, sólo coincidirán (en valor numérico) cuando no haya cambio de dirección, es decir, cuando el movimiento sea rectilíneo. En el el resto de los casos, el valor absoluto de a, no coincide con $|\mathbf{a}|$. Por ejemplo, en el movimiento circular uniforme, $a = 0$, y $|\mathbf{a}| \neq 0$.

A.49 Hemos tenido que inventar magnitudes vectoriales para poder diferenciar movimientos con trayectorias diferentes. Mostrad, poniendo ejemplos, que con los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ sí podemos hacerlo; y proponed una posible clasificación de los movimientos (tipos de movimiento), basada en la relación entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$.

- Como vemos, con las magnitudes $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, sí pueden caracterizarse y diferenciarse unos movimientos de otros. Una posible clasificación podría ser:

Cuando $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ tienen igual dirección (forman ángulo de 0º o 180º) → *el movimiento es* → rectilíneo $|\mathbf{a}| = |a|$

- *puede ser* → $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, igual sentido (aumenta $|\mathbf{v}|$)
- *puede ser* → $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, sentidos opuestos (disminuye $|\mathbf{v}|$)

Cuando $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ tienen distinta dirección (forman ángulo distinto de 0º o 180º) → *el movimiento es* → curvilíneo $|\mathbf{a}| \neq |a|$

- *puede ser* → $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ forman ángulo menor de 90º (curvilíneo aumentando $|\mathbf{v}|$
- *puede ser* → $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ son siempre perpendiculares (movimiento circular uniforme)
- *puede ser* → $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ forman ángulo mayor de 90º (curvilíneo disminuyendo $|\mathbf{v}|$)