UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

ANALISIS SOBRE LA RESOLUBILIDAD DE MODELOS LINEALES DE PRODUCCION CONJUNTA

Memoria presentada por

JOSEP ENRIC PERIS i FERRANDO

para optar al grado de Doctor

en Ciencias Económicas

CARMEN HERRERO, CATEDRATICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE,

CERTIFICA: Que la presente Memoria "ANALISIS SOBRE LA RESOLUBILIDAD DE MODELOS LINEALES DE PRODUCCION CONJUNTA", ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Fundamentos del Análisis Económico de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Alicante, por el Licenciado en Matemáticas, En Josep Enric Peris i Ferrando, y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Económicas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Universidad de Alicante la referida Tesis Doctoral, firmando el presente certificado en

Alicante, a 28 de Enero de 1987

Un trabajo de investigación, y este entiendo que lo es, no es cosa únicamente del que lo realiza, sino también de las personas que lo rodean que con su apoyo, moral o material, ayudan a llevar a feliz término dicho trabajo. Es por esto que quiero agradecer a mis compañeros del Departamento de Fundamentos, en esta Universidad, su cariño, ayuda y paciencia. En especial a los más cercanos, Bego y José Angel. Las ayudas y sugerencias de Ignacio Jiménez Raneda han tenido gran valor para mi, así como los comentarios efectuados por Antonio Villar.

Claramente, un trabajo sin dirección no puede llevar buen rumbo. He de reconocer mi suerte al tener como directora de éste a Carmen Herrero, a quien debo agradecer no sólo el haber podido realizar esta memoria, sino también el haberme introducido en los temas de Económia Matemática.

Por último, agradezco a la Fundación Gil Albert de la Diputación de Alicante la ayuda económica concedida a este trabajo.

A pesar de que todos se solidarizarían, he de reconocer que, si hay algún error, la responsabilidad es exclusivamente mia.

En Alacant a 27 de Gener de 1987

INDICE


¡¡SOPA!! YA SE VOLVIÓ A OLVIDAR DE LA DEDICATORIA

INTRODUCCION

El conjunto de relaciones de producción e intercambio de un sistema económico sólo puede captarse adecuadamente mediante una modelización en términos desagregados. Los modelos económicos multisectoriales constituyen, sin duda, uno de los instrumentos análiticos más poderosos, tanto dentro del campo de la economía teórica (teoria del valor, de la distribución, del crecimiento, etc.), como del campo de la economía aplicada (análisis de la estructura industrial, contabilidad nacional, programación económica, etc.).

Un grupo de modelos multisectoriales, con características específicas, son los que se suelen asociar a los nombres de Leontief, Von Neumann y Sraffa. El elemento común a estos modelos puede resumirse señalando que todos ellos poseen una cierta "orientación clásica", en el sentido de que los problemas que abordan y los elementos analíticos que enfatizan están próximos a las obras de autores como los fisiócratas, Ricardo o Marx. Esta orientación clásica se traduce, por una parte, en el enfoque reproductivo de la producción y el intercambio (lo que lleva a colocar en primer plano los aspectos productivos, relegando en parte la teoría de los consumidores), por otra la preocupación por la distribución y la acumulación como aspectos clave del análisis, y, finalmente, en la consideración de la competencia como una situación de mercado caracterizada por la libre entrada, lo que comporta una tendencia a la igualación de los tipos de beneficio sectoriales.

En este contexto existe un notable desequilibrio entre el número de trabajos realizados bajo el marco de producción simple y el de producción conjunta. Salvo la destacable excepción del trabajo de Von Neumann, puede afirmarse que el análisis económico clásico ha dedicado mucho mayor esfuerzo a la fundamentación teórica de los modelos de producción simple. Algunos autores (véase Kurz, 1986) se preguntan si este desequilibrio estará fundado en dos causas básicas

(a) la mayor importancia empírica de los modelos de producción simple

(b) la creencia de que los resutados obtenidos en los modelos de producción simple son fácilmente generalizables al caso de producción conjunta.

En relación a la segunda causa señalada, debemos afirmar que los diferentes estudios teóricos arrojan serias dudas de que sea posible generalizar, sin más, los resultados de producción simple a producción conjunta (pueden verse, en este sentido, Steedman (1982, 1985) y Woods (1984)).

Por otro lado, si bien es cierto que los trabajos empíricos se han concentrado en la producción simple (el empleo de tablas input-output como modelización empírica de la producción está universalmente extendido), cabe preguntarse si ello no es debido más a la falta de soporte teórico consistente para la construcción de modelos empíricos de producción conjunta que a la mayor relevancia real de las tablas tradicionales (véanse los comentarios de Schefold (1985) acerca de la construcción de tablas input-output con producción conjunta, o los intentos de elaboraciones metodológicas para la construcción de las llamadas tablas mercancía-por-industria (ONU (1970, 1974), Hoffman & Kent (1976)).

Al margen de las consideraciones previas, existen una serie de motivaciones que avalan el interés de la investigación de modelos con producción conjunta. Por una parte, no es aventurado afirmar que la mayor parte de los procesos de producción reales funcionan en régimen de producción conjunta (la existencia de una sola industria que produzca varios bienes, sería suficiente para alterar cualitativamente las características del sistema productivo en su conjunto). En este sentido, es interesante recordar que ya Jevons afirmaba "estos casos de producción conjunta, lejos de ser algunos casos particulares, forman la regla general". Un punto de vista similar ha sido recientemente expresado por Steedman, aportando numerosos ejemplos de producción conjunta.

En segundo lugar, un adecuado análisis de determinados problemas exige una modelización en términos de producción conjunta; así por ejemplo los estudios sobre eliminación de residuos (basura, polución, etc.), o el tratamiento del capital fijo (las máquinas son consideradas como inputs del proceso obteniendo, como outputs del mismo, otras máquinas un periodo más viejas, junto a los bienes producidos).

Una vez fijada la importancia de realizar una modelización teórica adecuada en términos de producción conjunta, debe decidirse el marco en que se va a efectuar el estudio. Dentro de los módelos clásicos multisectoriales, existen dos alternativas claras, modelos tipo Von Neumann, o bien en la linea de Sraffa-Leontief. Aunque conceptualmente distintos, estos dos modelos presentan una "equivalencia matemática" (Schefold, 1980) y, bajo ciertas condiciones proporcionan idénticas soluciones. No obstante, el modelo de Von Neumann presenta determinadas limitaciones. Dado su planteamiento matemático como resultado de un programa lineal y su dual, proporciona siempre soluciones semipositivas para los precios. Sin embargo, algunos de los problemas relevantes previamente señalados, como el caso del análisis de eliminación de residuos, exigen la posibilidad de obtención de precios negativos, que se interpretan como costes de eliminación. Este tipo de limitaciones nos llevan a seleccionar como marco de referencia el modelo planteado por Sraffa (1960).

Una vez situados en el contexto del modelo de Sraffa, sorprende constatar la diferencia cualitativa y cuantitativa en el desarrollo teórico de los modelos de producción simple y producción conjunta. Dejando al margen cuestiones estructurales, que se analizarán posteriormente, aparecen una primera serie de preguntas inmediatas: ¿por qué estudiar el caso particular y no el general? (al fin y al cabo, no son más que sistemas de ecuaciones lineales); ¿por qué no hay condiciones que aseguren la viabilidad de un modelo de producción conjunta? (como la productividad en producción simple); ¿por qué no se construyen tablas empíricas con producción conjunta? ...

La no existencia de respuestas, incluso en casos muy especificos, puede dar idea del vacio que existe sobre el tema. Un ejemplo servirá para ilustrar esta afirmación.

Supóngase que algún sector produce más de una mercancía (bien), pero, en términos de output neto, cada proceso está asociado a un único bien; este caso, técnicamente de producción conjunta, se puede decir que "en realidad" es de producción simple y, sin embargo, no existen condiciones que aseguren su buen comportamiento (existencia de precios de equilibrio positivos, tasa de beneficio no negativa, etc.), aunque uno pueda pensar que su funcionamiento será análogo al de un sistema de producción simple (?). En el capítulo 4 se da una referencia más amplia de este caso, viendo que esta sospecha es así en realidad. En definitiva, ¿ qué ocurre con la producción conjunta ?, ¿existen siempre anomalías o es posible encontrar condiciones que garanticen un comportamiento "aceptable" ?.

Quizá desde el punto de vista de una persona con formación básicamente matemática ("Matemáticas, esa maldita herramienta que siempre se acaba utilizando") pueden existir otras razones por las que el modelo de producción simple ha sido ampliamente analizado y el de producción conjunta únicamente esbozado. Para descubrirlas es útil realizar un estudio detenido y comparativo de ambos sistemas, siempre dentro del marco elegido del modelo de Sraffa. Ambos casos dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales, pero en el caso de producción simple la matriz del sistema es cuadrada, es una N-matriz (clase de matrices extensamente estudiada) y existe una relación biunívoca entre mercancías y procesos productivos. El teorema de Perron-Frobenius resulta de utilidad en la determinación de la tasa máxima de beneficio, la mercancía patrón y la relación entre las variables distributivas. Finalmente, bajo hipótesis sencillas y razonables (por ejemplo, la productividad) dan lugar a sistemas de producción con buenas propiedades. Todas estas características no son extensibles de modo natural, a los modelos de producción conjunta. En este caso, la matriz no tiene por qué ser una N-matriz[(1)] , ni siquiera tiene por qué ser cuadrada, lo cual dificulta la discusión teórica de la resolubilidad al no disponer de una clase conocida de matrices donde se situen estos modelos. Por otro lado , las mercancías ya no están asociadas a un único sector productivo (desaparece la relación biunívoca) y la producción de un bien puede realizarse activando distintos procesos, o todos ellos a la vez. Bajo las hipótesis realizadas en los modelos de producción simple, no se puede garantizar, en general, la posibilidad de satisfacer cualquier demanda final, ni la existencia de precios de equilibrio positivos para una tecnica dada. Tampoco

(1) En Punzo (1985) se dice que, para ser un sistema de producción conjunta resoluble, es condición necesaria que su matriz sea una N-matriz. Como se prueba en este trabajo, esta apreciación no es cierta (véase capítulo 4).

resulta de utilidad el teorema de Perron-Frobenius, por lo cual los temas de distribución, así como la existencia de mercancía patrón, no quedan claros.

Esta memoria constituye un estudio sobre cómo deben ser los modelos de producción conjunta, para que se comporten de modo similar a los de producción simple, buscando hipótesis sobre las matrices de outputs e inputs para conseguirlo y de modo que la producción simple y sus propiedades se obtengan como caso particular de los modelos introducidos.

En el capítulo 1 se introduce el modelo económico que va a ser objeto de estudio (modelo Sraffa-Leontief), planteando tanto el caso de producción simple como conjunta. Se definen los conceptos de resolubilidad, según el caso estudiado, y se marcan los objetivos del trabajo.

Los capítulos 2 y 3 constituyen el análisis matemático del problema, siendo, en el primer caso, la matriz cuadrada y regular, mientras el otro está dedicado a matrices no invertibles. En el capítulo 2 se analiza la semipositividad de la inversa de la matriz del sistema. Para ello se buscan extensiones, a partir de la conocida clase de las N-matrices, de tal forma que las generalizaciones disponibles del teorema de Perron-Frobenius sean aplicables (en particular, la generalización de Mangasarian). Aparecen así, sucesivamente las N* y B-matrices, clases para las que se obtiene un grupo de condiciones, necesarias y suficientes, que garantizan la semipositividad de la inversa. Se concluye con un resultado importante: la clase de las matrices con inversa semipositiva está incluida en la de las B-matrices, con lo cual se pone fin a las sucesivas generalizaciones.

En el capítulo 3, se trabaja con matrices que no son invertibles, lo que da lugar a la utilización de inversas generalizadas. Además de las clases de matrices introducidas en el capítulo anterior, se estudia aquí una nueva clase, con el nombre de B-matrices generalizadas, que contiene a las matrices que dan lugar a sistemas resolubles.

Es en los capítulos 4 y 5 donde se definen los modelos de producción conjunta con las propiedades deseadas. En el capítulo 4, dedicado a sistemas con tantos bienes como procesos, se analizan tres modelos distintos, según las condiciones impuestas sobre la matriz del sistema. En el último de los modelos definidos se verifica el cumplimiento de idénticas propiedades que en la producción simple. Hay que resaltar que los modelos de producción simple verifican todas las hipótesis utilizadas en la definición de estos modelos.

El capítulo 5 está dividido en dos partes: una dedicada al estudio de modelos cerrados y otra en la que se plantea el caso general de producción conjunta, con un número de bienes y de procesos independiente . En ambos casos se estudia la resolubilidad del modelo, obteniendo para el primero un "buen funcionamiento" de las B-matrices singulares, y definiendo para el segundo un nuevo modelo, cuya matriz está en la clase de las B-matrices generalizadas, que tiene un comportamiento similar al caso de producción simple, siendo este un caso mucho más general.

Finalmente, la memoria contiene tres apéndices dedicados a temas relacionados con el estudio realizado, o utilizados como herramientas de trabajo. Estos son:

1. Teoremas de Perron-Frobenius
2. Matrices de signos
3. Inversas generalizadas

En todos ellos, se recogen un resumen de la literatura al respecto y se realiza alguna aplicación de utilidad en el desarrollo de la memoria.

Señalar, por último, que la notación utilizada en la memoria es la habitual, remarcando que, en la comparación de vectores,

$x > y$, significa que $x_i > y_i$ $i=1,2,\ldots,n$

$x \geq y$, significa que $x_i \geq y_i$ $i=1,2,\ldots,n$

$x \neq y$, significa que existe $k \mid x_k \neq y_k$

CAPITULO 1

EL MODELO ECONOMICO DE PRODUCCION CONJUNTA

1.1 INTRODUCCION

En este capítulo se define el modelo general de un sistema produtivo que va a ser el marco de estudio de esta memoria. Como se ha comentado con anterioridad, el modelo elegido corresponde al planteado por Sraffa en "Producción de mercancías por medio de mercancías" (1960).

En la sección 1.2 se dan los supuestos que caracterizan al sistema económico, realizando además algunas especificaciones sobre los requerimientos de inputs (mercancías y trabajo) utilizados en la producción, así como de los outputs que se obtienen. Dadas las hipótesis realizadas (en particular el hecho de que prevalezcan rendimientos constantes a escala) este tipo de modelos económicos de producción pueden formalizarse mediante identidades lineales

$$Bx = Ax + d \qquad (1)$$

$$pB = (1+r)pA + wa \qquad (2)$$

conocidas, respectivamente, como sistema de cantidades y sistema de precios. Se introducen, sobre este modelo, las nociones de productividad, rentabilidad y resolubilidad. A continuación se diferencia entre producción simple y producción conjunta, viendo las divergencias de los sistemas a que dan lugar cada uno de estos casos.

En la sección 1.3 se intenta ver, desde las propiedades de los modelos de producción simple (conocidas y bien analizadas en la literatura sobre el tema), como es el modelo de producción conjunta y si conserva las propiedades de aquel. Se plantean finalmente los objetivos perseguidos en este trabajo.

1.2 EL MODELO ECONOMICO DE PRODUCCION CONJUNTA

Se considera una economia cerrada y sin sector público, que produce n mercancias mediante mercancias y trabajo homogeneo, a traves de m sectores productivos que verifican los siguientes supuestos :

1. Todas las mercancias tienen el mismo periodo de producción. Se dispone de los inputs al inicio de dicho periodo y los outputs se obtienen al final del mismo.
2. El trabajo (que se supone homogeneo) es el único input primario de la producción, cuya participación se requiere en todos los procesos. Se considera que prevalecen condiciones competitivas en el mercado de trabajo, de modo que el salario es uniforme.
3. Existen rendimientos constantes a escala.
4. Cualquier número real no negativo puede representar cierta cantidad de cualquier mercancia (divisibilidad de los bienes).
5. Sólo existe una técnica a disposición de cada uno de los sectores productivos.

Un proceso productivo constituye una especificación de los inputs requeridos por un sector y los outputs que dicho sector produce. Teniendo en cuenta los supuestos establecidos, es posible representar las posibilidades productivas de cada sector, actuando a un cierto "nivel unitario" prefijado(1), mediante una terna

$$a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})'$$
$$b^j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj})'$$
$$a_j \in R$$

donde $a_{ij} \geq 0$, es la cantidad de mercancia i utilizada como input en el proceso j; $a_j > 0$ la cantidad de trabajo homogeneo y b_{kj} la cantidad de mercancia k producida por dicho proceso, actuando al nivel unitario.

El conjunto de métodos productivos definen la técnica del sistema económico, que viene descrita por la terna

$$(A \ , \ a \ ; \ B)$$

donde $A = (a_{ij})_{n \times m}$ es la matriz de inputs,

---

(1) Dada la perfecta divisibilidad de los bienes, y el hecho de que prevalezcan rendimientos constantes a escala, no es importante cual es el nivel que se fija como unitario. Se supondrá uno prefijado arbitrariamente.

$a = (a_i)_{1\times n}$ es el vector de requerimientos de trabajo y $B = (b_{ij})_{n\times m}$ la matriz de outputs, todo ello al nivel unitario prefijado. Claramente, las matrices A y B son semipositivas, siendo el vector a estrictamente positivo (por el supuesto 2). Se realizan finalmente, algunas especificaciones sobre los términos de las matrices de inputs y outputs

a) Para que el sistema pueda reproducirse, cada bien debe ser producido en, al menos, un sector, esto es

$$b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{im}) \neq 0$$

para $i=1,2,\dots,n$.

b) Cada proceso utiliza alguna mercancía como medio de producción, es decir

$$a^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})' \neq 0$$

para $j=1,2,\dots,m$.

c) Cada sector produce, al menos, un bien, con lo cual

$$b^j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})' \neq 0$$

para $j=1,2,\dots,m$.

se asume competencia, en el sentido clásico del término, y se toma una tasa de beneficio homogenea r para todos los procesos productivos, deberán prevalecer unos precios

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \geq 0 ,$$

de manera que

$$rpA + wa = v$$

o, escrito de otra forma

$$pB = (1+r)pA + wa \qquad (2)$$

donde $r \geq 0$ es la tasa de beneficio y $w \geq 0$ la tasa de salario unitario. La ecuación (2) es conocida como **sistema de precios del modelo.**

DEFINICION 1.-

El modelo económico se dice que es **productivo** si existe un nivel de actividad $x \geq 0$, tal que

$$Bx > Ax ,$$

esto es, el sistema es capaz de producir output neto de todos los bienes.

Si se representa por $\hat{x}_j \geq 0$, un cierto nivel de actividad para el j-ésimo sector, y siendo

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$$

el vector de niveles de actividad, se tendrá que:

$a\hat{x}$ es la cantidad total de trabajo empleado

$A\hat{x}$ es el vector de consumo intermedio de inputs

$B\hat{x}$ es el vector de outputs brutos totales

El vector $\hat{d} = (B - A)\hat{x}$ representa el output neto de la economía (oferta). Para satisfacer exactamente una demanda final de los n bienes dada por el vector

$$d = (d_1, \ldots, d_n),$$

el sistema debería actuar a un nivel

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \geq 0,$$

tal que

$$Bx = Ax + d \qquad (1)$$

ecuación a la que se denomina **sistema de cantidades** del modelo.

Si $\hat{p}_i$ es el precio del bien i-ésimo, el producto

$$\hat{p}(B - A) = \hat{v}$$

denota el vector de valores añadidos unitarios. Si

DEFINICION 2.-

Se dice que el modelo es **rentable** si existen precios $p \geq 0$, tales que

$$pB > pA \ ,$$

es decir, en cada sector el valor añadido es positivo.

DEFINICION 3.-

El modelo se dice que es **totalmente productivo** si es capaz de satisfacer cualquier demanda final, esto es,

para todo $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Bx = Ax + d$$

Se dice también que el sistema es **fuertemente resoluble**.

DEFINICION 4.-

El sistema se dice que es de **producción simple**, si cada sector produce un solo bien, y cada mercancía es producida por un único sector.

Esto implica que aparecerán tantos sectores como bienes y la matriz de outputs será diagonal salvo permutación, pudiendo elegir el nivel unitario del modelo para que sea la matriz identidad.

DEFINICION 5.-

El modelo es de **producción conjunta** cuando algún proceso produce más de una mercancía.

En este caso, las matrices no serán necesariamente cuadradas y, en caso de ser cuadradas, la matriz de outputs no podrá ser diagonal.

1.3 RESOLUBILIDAD DEL MODELO

Los modelos de producción simple poseen, para sus sistemas de cantidades y de precios, estructuras más sencillas

$$x = Ax + d \qquad (1)$$

$$p = (1+r)pA + wa \qquad (2)$$

Además, para estos modelos, las condiciones de productividad, rentabilidad y resolubilidad fuerte son equivalentes, siendo el sistema de precios también resoluble siempre que la tasa de beneficio no supere un valor máximo R, que viene dado por

$$R = \frac{1}{\lambda^*(A)} - 1$$

donde $\lambda^*(A)$ es la raíz de Frobenius de la matriz A de requisitos de inputs.

Esta propiedad, así como otras que poseen los modelos de producción simple, no se conservan en general cuando la producción es conjunta. Aunque son habituales las hipótesis de productividad y rentabilidad, este tipo de supuestos (incluso ambos) no garantizan la resolubilidad en el sistema de cantidades o en el de precios. Se intenta, en este trabajo, establecer condiciones que garanticen la resolubilidad de un sistema de producción conjunta, así como estudiar qué propiedades de los modelos de producción simple pueden conservarse. En particular se está interesado en analizar los siguientes aspectos :

1. Resolubilidad de los sistemas de cantidades y de precios

2. Existencia de una única tasa de beneficio R

3. Existencia de la mercancía patrón de Sraffa

4. Comportamiento de los precios (en particular, comprobar si los precios, medidos en términos de salario, crecen cuando lo hace r y divergen en la tasa máxima de beneficio R, como en el caso de producción simple)

Existe además un problema adicional, provocado por el hecho de que en producción conjunta las matrices pueden no ser cuadradas, que es la posibilidad de que el sistema no pueda satisfacer cualquier vector de demanda final. En este caso la definición de resolubilidad no tiene significado, debiendo relajarse en el sentido de que

$$\text{para todo} \quad d \geq 0, \; d \in \mathrm{Im}(M), \; \text{existe } x \geq 0 \;\; | \;\; Bx = Ax + d \,,$$

es decir, cualquier vector semipositivo que el sistema sea capaz de producir, deberá poder obtenerse mediante niveles de actividad no negativos. Según el contexto se utilizará una u otra definición de resolubilidad.

En resumen, en este tipo de modelos aparecen dos sistemas

$$(B - A)x = d \qquad (1)$$

$$p(B - (1+r)A) = wa \qquad (2)$$

en los que se desea analizar la resolubilidad. Denominando

$$M(r) = B - (1+r)A \quad ; \; M = M(0)$$

ambos sistemas poseen la misma estructura matemática

$$M(r)x = z \qquad (3)$$

El estudio se divide en dos partes, según la matriz M sea invertible o no. Estos se analizan en distintos capítulos, tanto en el estudio matemático como económico.

CAPITULO 2

SISTEMAS REGULARES : SEMIPOSITIVIDAD DE LA INVERSA

2.1 INTRODUCCION

El presente capítulo está dedicado al estudio de la existencia y semipositividad de la inversa de una matriz cuadrada M, condición equivalente a la llamada "resolubilidad fuerte" del sistema de matriz M, es decir, a la existencia de solución semipositiva, para todo $d \geq 0$, en el sistema

$$Mx = d$$

El problema planteado se resuelve analizando descomposiciones de la matriz M en la forma

$$M = B - A \quad , \quad B, A \geq 0$$

que se denominarán "descomposiciones semipositivas" de M. Según el tipo de descomposición que M admite, se encuentran condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia y semipositividad de M^{-1}.

La sección 2.2 recoge una serie de condiciones que, en cualquier situación (es decir, independientemente del tipo de descomposición que admite M) son necesarias y suficientes para la existencia y semipositividad de M^{-1}. Junto a las conocidas en la literatura, se ofrece una nueva condición necesaria y suficiente: la acotación por la unidad del radio espectral generalizado $\rho(A_B)$ para cualquier descomposición semipositiva de M.

Las secciones siguientes obtienen condiciones necesarias y suficientes por subclases de matrices particulares, clasificadas de acuerdo al tipo de descomposición semipositiva que admiten. Así, la sección 2.3 está dedicada a las **N-matrices**, que son aquellas que admiten una descomposición del tipo

$$M = r(I-A) \quad , \quad r > 0 \quad , \quad A \geq 0 \quad ,$$

I la matriz identidad

Para este tipo de matrices hay un conjunto amplio de condiciones necesarias y suficientes para la existencia y semipositividad de la inversa, presentadas por diversos autores (Hawkins & Simon, Debreu & Herstein, Gale, Nikaido, etc.). En esta sección se añade una nueva condición a las ya listadas, denominada SMD (semimonotonía débil).

La sección 2.4 presenta una primera extensión de las N-matrices, denominadas **N*-matrices**, como aquellas que admiten una descomposición semipositiva en la forma

$$M = B - A \qquad B \text{ regular} \quad , \quad B^{-1} \geq 0$$

Para las N*-matrices se generalizan las condiciones equivalentes obtenidas para las N-matrices que, en este caso, continuan teniendo sentido. El alcance de esta extensión resulta patente una vez se ha probado que todo N*-matriz es equivalente por permutación a una N-matriz.

La sección 2.5 estudia un nuevo tipo de matrices, las **B-matrices**, que poseen una descomposición semipositiva M = B - A satisfaciendo las condiciones:

- **descomposición no dominante:**

$$Bx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Ax \geq 0$$

- **compatible:**

$$Mx \geq 0 \quad , \quad Bx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

Para este tipo de matrices (que incluyen a las N* y, por tanto, a las N) se encuentran un grupo de condiciones equivalentes a la existencia y semipositividad de la inversa de M, que coinciden con alguna de las analizadas en los casos anteriores.

Finalmente, se prueba que el camino de

extensiones sucesivas realizado termina aqui: se prueba que la familia de matrices M que admite inversa semipositiva es un subconjunto de las B-matrices, subconjunto que se caracteriza.

2.2 ALGUNOS RESULTADOS GENERALES

Berman & Plemmons (1979), proporcionan una serie de condiciones equivalentes a la existencia y semipositividad de la inversa de una matriz cuadrada M, que se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 1.-

Para una matriz cuadrada M, son equivalentes:

(1) M es regular y M^{-1} es semipositiva

(2) $\forall\ d \geq 0, \exists\ x \geq 0$ tal que $Mx = d$

(3) $\forall\ x \in R^n$ tal que $Mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

(4) Existen dos matrices regulares D, F con $D^{-1} \geq 0$, $F^{-1} \geq 0$ tales que

$$D \leq M \leq F$$

(5) M posee una descomposición convergente regular, esto es,

$$M = B - A \quad , \quad B^{-1} \geq 0 \quad , \quad A \geq 0 \quad , \quad AB^{-1} \text{ convergente}$$

(6) M posee una descomposición convergente débilmente regular, esto es,

$$M = B - A \quad , \quad B^{-1} \geq 0 \quad , \quad AB^{-1} \geq 0 \text{ convergente}$$

(7) Existe una matriz regular D, con $D^{-1} \geq 0$ tal que

$$I - D^{-1}M \geq 0 \quad \text{y esta matriz es convergente}$$

Las condiciones (5), (6) de este teorema relacionan la semipositividad de M^{-1}, con la existencia de una descomposición de la matriz M como diferencia de dos matrices

$$M = B - A$$

satisfaciendo determinadas propiedades. No se exige que las matrices A y B sean semipositivas. Sin embargo las descomposiciones de una matriz como diferencia de dos matrices semipositivas (descomposición semipositiva)

$$M = B - A \qquad B \geq 0 \quad , \quad A \geq 0 \quad ,$$

son útiles en la discusión del problema planteado (p.e. las N-matrices $M = I - A$, $I \geq 0$, $A \geq 0$).

Si se analizan las distintas descomposiciones semipositivas de una matriz M, un primer paso sería separar los términos positivos de esta matriz por un lado (M^+) y los negativos por otro (M^-). Así

$$M = M^+ - M^- \qquad M^+ \geq 0 \quad , \quad M^- \geq 0$$

El resto de estas descomposiciones de M serían de la forma

$$M = (M^+ + C) - (M^- + C), \; C \geq 0 \text{ arbitraria.}$$

Otra forma de descomposición semipositiva consistirá en buscar, para una de las matrices A, B, la mayor sencillez posible. Un ejemplo sería construir la matriz B con todas sus componentes iguales a una constante dada b, para lo cual basta tomar

$$b \geq \max_{i,j} \{ m_{ij} \} .$$

El siguiente teorema proporciona una nueva condición equivalente a las listadas en el teorema anterior, que se refiere a una propiedad de las descomposiciones semipositivas de la matriz M.

Teorema 2.-

Dada una matriz cuadrada M, son equivalentes :

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) Para toda descomposición semipositiva de M

$$M = B - A \qquad B \geq 0 \ , \ A \geq 0$$

existen $v \in R^n$, $v \geq 0$ y $\lambda^* \in [0,1[$

tales que $Av = \lambda^* Bv$

Además $\lambda^* = \rho(A_B) = \max\{ \lambda \mid \det (A - \lambda B) = 0\}$

Demostración.

(1) ⟹ (2)

Dada una descomposición semipositiva de M

$$M = B - A \quad B \geq 0 \ , \ A \geq 0 \ ,$$

la matriz $M^{-1}B$ es semipositiva, pudiendose aplicar el teorema de Perron-Frobenius a esta matriz. Por tanto, existen

$$v \geq 0 \qquad v \in R^n$$

$$\mu \geq 0 \qquad \mu \in R$$

tales que

$$(M^{-1}B)v = \mu v \qquad [1]$$

Dado que $M^{-1}B = I + M^{-1}A \geq I$, por las propiedades de la raiz de Frobenius, $\mu \geq 1$.

Premultiplicando por la matriz M la expresión [1] se obtiene

$$Bv = \mu Mv = \mu (B - A)v \ ,$$

de donde

$$Av = (1 - \frac{1}{\mu})Bv \ .$$

Llamando $\lambda^* = 1 - \frac{1}{\mu}$, resulta

$$Av = \lambda^* Bv$$

donde $\lambda^* \in [0,1[$ al ser $\mu \geq 1$.

Sólo restaría probar que $\lambda^* = \rho(A_B)$. Para ello sea $\lambda \in R$ tal que $\det(A - \lambda B) = 0$. Al ser esta matriz singular existirá un vector $u \in R^n$, $u \neq 0$

tal que

$$(A - \lambda B)u = 0.$$

Multiplicando la matriz M por este vector

$$Mu = Bu - Au = (1-\lambda)\ Bu$$

de donde

$$M^{-1}Bu = \frac{1}{1-\lambda}\ u$$

$\lambda \neq 1$ por ser M regular.

Por las propiedades de la raiz de Frobenius

$$\frac{1}{1-\lambda} \leq \mu$$

luego

$$1-\lambda \geq \frac{1}{\mu}\ ,$$

dè donde

$$\lambda \leq 1 - \frac{1}{\mu} = \lambda^* .$$

Así pues $\lambda^* = \rho\,(A_B)$ y la demostración está completa.

(2) ⟹ (1)

Ya que $\lambda^* = \rho\,(A_B)$ y $\lambda^* < 1$, se tiene que, para cualquier descomposición semipositiva

$\det(B - A) \neq 0$, esto es, $\det M \neq 0$,

y por tanto la matriz M es regular.

La prueba de $M^{-1} \geq 0$ se hará por reducción al absurdo. Si se supone que $M^{-1} \ngeq 0$, y se denota

$$M^{-1} = (t_{ij})\ ,$$

existirá un término $t_{ij} < 0$.

Sea, entonces

$$s = \text{máximo}\left\{ \frac{|t_{ik}|}{|t_{ij}|} \quad , k=1,\ldots,n \right\}$$

Una descomposición semipositiva de M viene dada por

$$M = B - A \quad , \text{ donde}$$

$$B = \begin{pmatrix} b & b & \ldots & b \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ b+k & b+k & \ldots & b+k \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ b & b & \ldots & b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{j1}+k & a_{j2}+k & \ldots & a_{jn}+k \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

siendo $b \geq 0$, y tomando $k > 0$ arbitrario.

Para esta descomposición se tendrá que existen

$$\lambda \in [\, 0,1 \,[$$

$$v \in R^n \,, \quad v \geq 0$$

tales que

$$Av = \lambda\, Bv$$

de donde

$$Mv = (1-\lambda)Bv.$$

Sea $w = Bv$, entonces

$$w_i = b(v_1+v_2+\ldots+v_n) \qquad \text{para cada } i \neq j$$

$$w_j = (b+k)(v_1+v_2+\ldots+v_n)$$

Se cumple que para todo $i \neq j$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{b}{b+k}$$

Tomando k suficientemente grande se puede conseguir

$$\frac{b}{b+k} < \frac{1}{ns+1} \quad .$$

Por otro lado

$$M^{-1}w = M^{-1}Bv = \frac{1}{1-\lambda}\, v \geq 0 \quad .$$

Examinando la i-ésima componente de este vector

$$(t_{i1},\ldots,t_{ij},\ldots,t_{in})\circ(w_1,\ldots,w_j,\ldots,w_n) =$$

$$= w_j(t_{i1},\ldots,t_{ij},\ldots,t_{in})\circ\left(\frac{b}{b+k},\ldots,1,\ldots,\frac{b}{b+k}\right) \leq$$

$$\leq |t_{ij}|w_j(s,\ldots,-1,\ldots,s)\circ\left(\frac{b}{b+k},\ldots,1,\ldots,\frac{b}{b+k}\right)$$

siendo este último valor negativo, por la elección de s y k, lo cual contradice el hecho de que $M^{-1}w$ es no negativo. Por tanto se tiene que M^{-1} es semipositiva.

C.Q.D.

NOTAS

1. De la prueba del teorema 2, se observa que no es necesario exigir la segunda condición para cualquier descomposición semipositiva de la matriz M, sino que basta con que se cumpla para descomposiciones como las utilizadas en la demòstración, variando j desde 1 hasta n, y donde el número real k se considera tan grande como se desee.

2. No basta, en general, exigir que la propiedad se cumpla para alguna descomposición determinada, como prueba el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

si se considera la descomposición

$$M = M^{+} - M^{-} \quad ,\text{esto es,}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se cumple que satisface la condición (2) del teorema 2, con

$$\lambda^{*} = 0 \;,\; v = (1,0,0) \;.$$

Sin embargo M^{-1} no es semipositiva.

Los teoremas que aparecen en esta sección, proporcionan condiciones equivalentes a la existencia y semipositividad de la inversa de una matriz cuadrada M, pero no aportan ninguna información sobre las características de esta matriz. La nueva condición obtenida en el teorema 2, indica que, para cualquier descomposición semipositiva de M, el radio espectral, $\rho(A_B)$, debe ser menor que la unidad.

Ya se ha visto que no basta para alguna descomposición. La cuestión planteada es si será posible encontrar una descomposición particular

$$M = B - A \quad , B \geq 0 \ , \ A \geq 0$$

de modo que si $\rho(A_B) < 1$, esto se verifique para cualquier descomposición semipositiva de M y, por tanto, $M^{-1} \geq 0$. En las secciones siguientes se trata de responder a esta pregunta, analizando clases de matrices que poseen una descomposición "especial".

2.3 N-MATRICES

Una matriz cuadrada M se dice que es una **N-matriz**, si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son no positivos. Una N-matriz se puede escribir en la forma

$$M = r\,(I - A) \quad , \; r > 0 \; , \; A \geq 0 \; .$$

Existen numerosos estudios sobre la semi-positividad de la inversa de una N-matriz. En el siguiente teorema se ofrecen algunas de las condiciones equivalentes.

Teorema 3.-

Dada una N-matriz, $M = r\,(I - A)$, $r > 0$, $A \geq 0$, las siguientes condiciones son equivalentes

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) Para todo $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$.

(3) Existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$.

(4) M cumple las condiciones H-S.

(5) M es una P-matriz.

(6) M posee diagonal dominante.

(7) $\lambda^*(A) < 1$.

(8) A es convergente.

(9) M no invierte el signo de los vectores de R^n.

(10) M no invierte el signo de los vectores semipositivos de R^n.

(11) Para toda matriz D diagonal, $d_i = \pm 1$ se verifica

$$\left.\begin{array}{l} p \geq 0 \\ pDMD \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p=0$$

La equivalencia entre las cinco primeras condiciones aparece en el trabajo de Hawkins & Simon (1949). La condición (6) se debe a Mckenzie (1960). Debreu & Herstein (1953) vinculan al resto la (7). En Gale-Nikaido (1965) aparecen las condiciones (9) y (11).Nikaido (1970) proporciona la (8). Finalmente, la condición (10) se debe a Silva (1984).La prueba de la equivalencia entre las ocho primeras condiciones puede verse en Herrero-Silva-Villar (1984).

En el siguiente teorema se añade una nueva condición a las listadas en el teorema 3.

Teorema 4.-

Sea M una N-matriz. La condición "M es **semimonótona débil (SMD)**", definida por

$$\left.\begin{array}{l} p \geq 0 \\ pM \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p=0$$

es equivalente a las condiciones del teorema 3.

Demostración.

Obviamente la condición (SMD) es un caso particular de la condición (11), tomando D = I; por tanto, (11) implica (SMD). Para ver el recíproco se probará que (SMD) implica (7).

Sea $\lambda^* = \lambda^*(A)$. Aplicando el teorema de Perron-Frobenius, existe un vector semipositivo asociado a la matriz A, tanto por la derecha como por la izquierda, así pues, existe $v \geq 0$, $v \neq 0$ tal que

$$vA = \lambda^* v \ .$$

La condición (SMD) implica que $vM \nleq 0$, por tanto, existe una componente de este vector que es positiva. Por otro lado

$$vM = v - vA = (1-\lambda^*)v \ .$$

Para la componente $(vM)_i > 0$,

$$(vM)_i = (1-\lambda^*)v_i > 0,$$

por tanto

$$(1-\lambda^*) > 0 \quad , \quad y \qquad \lambda^* < 1 \ .$$

C.Q.D.

NOTA

La condición (SMD), equivalente en el caso de N-matrices a las (1)-(11), es generalmente más débil, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.2

Sea

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para ver que no satisface la condición (11) basta tomar

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \ p = (1,0).$$

Sin embargo cumple la condición (SMD) ya que si

$$(p_1,p_2) \geq 0 \quad y \quad (p_1,p_2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \leq 0 \ ,$$

se tiene

$$\left.\begin{array}{l} -p_1+2p_2 \leq 0 \\ 2p_1-\ p_2 \leq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad p_1 \leq 0, \ p_2 \leq 0$$

y, por tanto, p=0.

2.4 N*-MATRICES

DEFINICION 1.-

Una matriz cuadrada M, se dice que es una **N*-matriz** si posee una descomposición semipositiva

$$M = B - A \;, \; B \geq 0, \; A \geq 0$$

tal que B es regular y $B^{-1} \geq 0$.

Claramente, toda N-matriz es una N*-matriz ($B = rI$, $r > 0$) pero el recíproco no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Esta no es una N-matriz ya que no puede descomponerse en la forma $M = r(I - A)$ con $A \geq 0$, $r > 0$. Sin embargo, tomando la descomposición

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

luego es una N*-matriz. Por tanto, la clase de las N-matrices está estrictamente contenida en la de las N*-matrices.

El siguiente teorema proporciona condiciones equivalentes a la existencia y semipositividad de la inversa de una N*-matriz.

Teorema 5.-

Sea M una N*-matriz, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) Para todo $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$.

(3) Existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$.

(4) $\left.\begin{array}{l} p \geq 0 \\ pM \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p=0.$

(5) $\rho(A_B) < 1$.

(6) AB^{-1} es convergente.

Demostración.

En este caso, la condición (6) indica que la matriz M posee una descomposición convergente regular, y, por aplicación del teorema 1, se tiene la equivalencia entre esta condición y la (1).

Por otro lado, dado que $B^{-1} \geq 0$, se puede aplicar el teorema de Mangasarian (1971), dándose que

$$\rho(A_B) = \lambda^*(AB^{-1})$$

y, por tanto, la equivalencia entre las condiciones (5) y (6).

El resto de condiciones se prueba mediante el siguiente esquema

(1) —> (2) —> (3) —> (1)

(1) —> (4) —> (5)

(1) —> (2)

Dado $d \geq 0$, el sistema $Mx = d$ posee solución única

$$x = M^{-1}d$$

y al ser $M^{-1} \geq 0$, se tiene que $x \geq 0$.

(2) —> (3)

Obvia, basta tomar $d > 0$; entonces existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d > 0$$

(3) => (1)

En este caso existe un vector $x \geq 0$, tal que $Mx > 0$. La matriz M se puede expresar en la forma

$$M = (I - AB^{-1})B$$

donde $I - AB^{-1}$ es una N-matriz. Llamando

$$y = Bx \geq 0 ,$$

se tiene que existe $y \geq 0$ tal que

$$(I - AB^{-1})y > 0$$

y, aplicando el teorema 3

$$(I - AB^{-1})^{-1} \geq 0 .$$

Como $B^{-1} \geq 0$, por ser M una N*-matriz, entonces

$$M^{-1} = B^{-1}(I - AB^{-1})^{-1} \geq 0.$$

(1) => (4)

Sea $p \geq 0$, tal que $pM \leq 0$. Post-multiplicando este último vector por la matriz $M^{-1} \geq 0$, se tiene que

$$(pM)\, M^{-1} \leq 0 ,$$

luego $p \leq 0$ y, por tanto $p=0$.

(4) => (5)

Sea $\lambda^* = \rho\,(A_B)$. Como es posible aplicar el teorema de Mangasarian, existirá un vector $v \geq 0$ tal que $vA = \lambda^* vB.$

La condición (4) indica que $vM \nleq 0$, por tanto existirá una componente tal que $(vM)_i > 0$

$$vM = vB - vA = (1-\lambda^*)vB$$

para la i-ésima componente

$$(vM)_i = (1-\lambda^*)(Bv)_i > 0$$

de donde $\lambda^* < 1$.

C.Q.D.

Si M es una N*-matriz, se puede escribir en la forma

$$M = (I - AB^{-1})B \ ; \quad A, B, B^{-1} \text{ semipositivas,}$$

esto es, como producto de una N-matriz $(I - AB^{-1})$ y una matriz semipositiva B. La condición (6) del teorema 5 relaciona la semipositividad de la inversa de M con la inversa de la matriz $(I - AB^{-1})$, siendo

$$M^{-1} \geq 0 \iff (I - AB^{-1})^{-1} \geq 0 \ .$$

A priori, la condición $(I - AB^{-1})^{-1} \geq 0$ es unicamente suficiente, ya que

$$M^{-1} = B^{-1}(I - AB^{-1})^{-1} \quad , \ B^{-1} \geq 0$$

y podría pensarse que esta condición no es necesaria, esto es, $(I - AB^{-1})^{-1}$ puede tener alguna componente negativa, siendo M^{-1} semipositiva. Este hecho lleva a realizar un análisis detenido sobre como debe ser una matriz $B \geq 0$, para que $B^{-1} \geq 0$.

Johnson (1982) analiza como deben estar situados los signos en una determinada matriz, para que pueda tener inversa no negativa. Esto no caracteriza a las matrices con tal propiedad, pero si a las clases de matrices que no la poseerán. Como consecuencia de este trabajo se encuentra el siguiente resultado.

Proposición 1.-

Dada una matriz cuadrada B, tal que $B \geq 0$, $B^{-1} \geq 0$, existen matrices de permutación P, Q, tales que

$$D = PBQ$$

es una matriz diagonal positiva.

La prueba de esta proposición, así como algunos resultados del trabajo de Johnson, puede verse en el apendice II.

Aplicando este resultado al caso de las

N*-matrices, resulta

$$M = (I - AB^{-1})B = (I - AB^{-1})P^{-1}DQ^{-1}$$

siendo P^{-1}, Q^{-1} también matrices de permutación y, por tanto, semipositivas. Así las N*-matrices resultan ser N-matrices en las que se han efectuado ciertas permutaciones.

En el ejemplo 2.3,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

si se efectua una permutación entre las dos primeras columnas se obtiene una N-matriz.

Como consecuencia de estos resultados cabe destacar los siguientes puntos :

1. Las N*-matrices son equivalentes por permutación a las N-matrices.

2. La diferencia básica entre las N-matrices y las N*-matrices radica en la ordenación. Mientras en las primeras los elementos no negativos deben situarse necesariamente en la diagonal principal, en las segundas no ocurre así. Es por esto que, en el estudio de existencia y semipo-

sitividad de la inversa de una N*-matriz pierden su significación las condiciones referidas al orden: P-matriz, Hawkins-Simon, diagonal dominante.

3. Dado que la matriz B será diagonal positiva salvo permutación, se puede establecer una nueva condición equivalente para la semipositividad de M^{-1}, la "dominancia no de diagonal", establecida de la siguiente forma

$$\text{Existen } d_{i_k} > 0 \ , \ k=1,2,\ldots,n$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \text{distintos}$$

tales que

$$d_{i_k} \, m_{hi_k} > \sum_{j \neq i_k} d_j m_{hj} \quad , \ h=1,2,\ldots,n$$

4. Es posible observar facilmente cuando una matriz es, o no, N*-matriz, ya que las descomposiciones de M son de la forma

$$M = (M^+ + C) - (M^- + C) \qquad \text{con } C \geq 0 \ ,$$

entonces:

(a) Si una fila, o columna, de M^+, posee mas de un elemento positivo, la matriz M no será N*-matriz.

(b) Si cada fila y columna de M^+, posee a lo sumo un elemento positivo, puede construirse una matriz B, diagonal positiva salvo permutación, tal que

$$M = B - A \qquad A \geq 0, \; B \geq 0$$

y, por tanto, M será una N*-matriz.

2.5 B-MATRICES

DEFINICION 2.-

Una matriz cuadrada M se dice que cumple la propiedad de **descomposición no dominante (DND)** si posee una descomposición semipositiva

$$M = B - A \qquad A \geq 0,\ B \geq 0,\ B \text{ regular},$$

tal que

$$Bx \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Ax \geq 0.$$

NOTA

Mangasarian (1971) introduce la condición ($Bx \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$) en su generalización del teorema de Perron-Frobenius, probando que es equivalente a la existencia de una matriz $T \geq 0$, tal que

$$A = TB.$$

Si además la matriz B es regular, se cumple que

$$T = AB^{-1} \geq 0.$$

De esta manera, si una matriz M satisface la condición (DND), se puede expresar en la forma

$$M = (I - T)B \qquad T = AB^{-1} \geq 0,\ B \geq 0,$$

esto es, como producto de una N-matriz por una matriz semipositiva.

Fujimoto & Krause (1985) utilizan la condición ($Bx \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$) con el nombre de "propiedad de no dominancia", de donde se toma el nombre que aquí se utiliza.

Claramente, las N y N*-matrices satisfacen la propiedad (DND), pero el conjunto de matrices que cumplen esta propiedad es más amplio, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.4

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando la descomposición $M = M^+ - M^-$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

al tener M^+ en la segunda fila más de un elemento positivo, M no es una N*-matriz. Sin embargo,

$$AB^{-1} \geq 0$$

y, por tanto, M cumple la propiedad (DND).

Las condiciones (1) y (2) del teorema 1 son equivalentes para cualquier matriz cuadrada, es decir, siempre se cumple la equivalencia entre :

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) Para todo $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$.

El resto de condiciones, manejadas en el caso de N*-matrices, resultan ser únicamente necesarias para matrices que satisfacen la propiedad (DND).

Teorema 6.-

Sea M una matriz que cumple la propiedad (DND), esto es

$$M = (I - AB^{-1})B \quad A,B \geq 0 \quad ; \quad AB^{-1} \geq 0$$

Si $M^{-1} \geq 0$, se cumple:

(3) Existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$.

(4) $\left.\begin{array}{l} p \geq 0 \\ pM \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p=0$

(5) $\rho(A_B) < 1$.

(6) AB^{-1} es convergente.

Demostración.

(3) Obviamente se cumple esta condición, basta tomar $d > 0$ y se tiene

$$x = M^{-1}d \geq 0 \quad y \quad Mx = d > 0 .$$

(4) Sea $p \geq 0$ tal que $pM \leq 0$, post-multiplicando por $M^{-1} \geq 0$ se tiene que $p \leq 0$, y, por tanto, $p=0$.

Las condiciones (5) y (6) son equivalentes, por tanto bastará probar que se cumple una de ellas.

(5) El teorema de Mangasarian, aplicable a este tipo de matrices, garantiza la existencia de un vector $v \geq 0$ tal que

$$vA = \lambda^* vB \quad ; \quad \lambda^* = \rho(A_B)$$

luego

$$vM = v(B - A) = (1-\lambda^*)vB \ .$$

Multiplicando por M^{-1} se tiene que

$$0 \leq v = (1-\lambda^*)vBM^{-1}$$

de donde $\lambda^* < 1$.

C.Q.D.

El siguiente ejemplo proporciona una matriz que cumple la propiedad (DND) y satisface las condiciones (3)-(6). Sin embargo M^{-1} no es semipositiva.

EJEMPLO 2.5

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0'5 & -0'25 \\ 0'5 & 0'5 \end{pmatrix}$$

Esta, se puede descomponer en la forma

$$M = B - A = \begin{pmatrix} 0'5 & 0 \\ 0'5 & 0'5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0'25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0'25 & 0'5 \\ 0 & 0'5 \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

por tanto se cumple la condición (DND). Además :

a) Tomando $x=(1,1)'$, $Mx > 0$ y se cumple (3).

b) $\rho(A_B) = \lambda^*(AB^{-1}) = \frac{1}{2}$, cumpliéndose (5) y (6).

c) La condición (4) también la verifica, como se puede comprobar fácilmente.

Sin embargo M^{-1} no es semipositiva.

Para buscar que el conjunto de condiciones (3)-(6) sean necesarias y suficientes para la semipositividad de M^{-1}, hace falta introducir un tipo de matrices mas restrictivo.

DEFINICION 3.-

Una matriz cuadrada M, se dice que es una **B-matriz** si :

1. M cumple la propiedad (DND)

$$M = B - A \qquad A, B \geq 0 \;, \; AB^{-1} \geq 0$$

2. $$\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x \geq 0$$

La condición 2 de la anterior definición indica que la matriz $J = \begin{pmatrix} M \\ B \end{pmatrix}$ es monótona, para lo cual no es necesario que lo sean las submatrices M y B, aunque si lo fuera una de ellas también lo sería la matriz J. Esto muestra que las N-matrices y N*-matrices están incluidas en la clase de las B-matrices, pues en ambos casos la matriz B es monótona.

El ejemplo 2.4 proporciona una B-matriz que no es N*-matriz. Así pues, la inclusión es estricta.

En el caso de B-matrices las condiciones manejadas anteriormente resultan ser necesarias y suficientes, como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 7.-

Sea M una B-matriz. Las siguientes condiciones son equivalentes

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) Para todo $d \geq 0$ existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$.

(3) Existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$.

(4) $\left.\begin{array}{l} p \geq 0 \\ pM \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p=0$

(5) $\rho(A_B) < 1$.

(6) AB^{-1} es convergente.

Demostración.

Ya se ha comentado que, para este tipo de matrices, las condiciones (5) y (6) son equivalentes. El resto de la prueba se realizará mediante el siguiente esquema

(6) $\Rightarrow$ (1)

(4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6)

Ya que las B-matrices cumplen la propiedad (DND), con esto se completaría la demostración.

(6) $\Rightarrow$ (1)

Sea x tal que $Mx \geq 0$. Se tiene que

$$Mx = (I - AB^{-1})Bx \geq 0 \ .$$

Al ser AB^{-1} convergente, la matriz $(I - AB^{-1})$ es monótona, y, por tanto,

$$Bx \geq 0.$$

Aplicando la condición 2 de B-matriz se obtiene que $x \geq 0$, luego la matriz M es monótona y, equivalentemente, $M^{-1} \geq 0$.

(4) => (3)

Sea $K = \{ p \mid pM \leq 0 \}$. La propiedad (4) indica que

$$K \cap R^n_+ = \{ 0 \}$$

por tanto existe $y > 0$ tal que

$$y \in K^* = \{ z \mid z = Mx \ , \ x \geq 0 \}$$

luego existe $x \geq 0$ tal que $Mx = y > 0$.

(3) => (6)

Existe $x \geq 0$ tal que $Mx > 0$. La matriz M se puede escribir

$$M = (I - AB^{-1})B$$

y llamando $y = Bx \geq 0$, se tiene que existe $y \geq 0$ tal que $(I - AB^{-1})y > 0$. Aplicando el correspondiente teorema de N-matrices AB^{-1} es convergente.

C.Q.D.

Hasta ahora se han ido generalizando los resultados para distintos tipos de matrices (N, N* y B-matrices) encontrando condiciones para que una matriz en una de estas clases posea inversa semipositiva. El siguiente teorema analiza la clase de las matrices cuya inversa es semipositiva, probándose que es un subconjunto de las B-matrices y, por tanto, finalizan aquí las sucesivas generalizaciones.

Teorema 8 .-

Dada una matriz cuadrada M, son equivalentes :

(1) Existe M^{-1} y es semipositiva.

(2) M es una B-matriz con $\rho(A_B) < 1$.

Demostración.

El teorema 7 prueba que (2) implica (1), por lo que es sólo es necesario probar la otra implicación.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Se construyen $T \geq 0$, $B \geq 0$, matrices del mismo orden que M, tales que

$$\lambda^*(T) < 1, \text{ B es regular y } M = (I - T)B \text{ .}$$

Llamando $A = TB$ se tendrá que M es una B-matriz con $\rho(A_B) = \lambda^*(AB^{-1}) = \lambda^*(T) < 1$.

Para ello sea $x = (1,1,\ldots,1)M^{-1}$. Como $M^{-1} \geq 0$ se tiene que el vector x es estrictamente positivo. A partir de este vector se construye

$$v = \frac{1}{\sum x_i + \theta}\, x \qquad \theta > 0$$

$$\sum v_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i + \theta} < 1 \ .$$

Sea T la matriz

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \geq 0$$

La raiz de Frobenius de un matriz semipositiva está comprendida entre el mínimo y el máximo de las sumas de los elementos de cada fila. Como en este caso la suma de todas las filas es idéntica, resulta

$$\lambda^*(T) = \sum v_i < 1 \ .$$

Por tanto, existe la inversa de la matriz $I-T$, y se tiene

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots$$

Efectuando el producto de esta matriz por M se tiene

$$(I - T)^{-1} M =$$

$$= (I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots)M =$$

$$= M + TM + T^2M + \ldots + T^nM + \ldots =$$

$$= M + \frac{1}{\sum x_i + \theta} E + \ldots + \frac{(\sum x_i)^{n-1}}{(\sum x_i + \theta)^n} E + \ldots =$$

$$= M + \frac{1}{\theta} E$$

donde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $\theta > 0$ tal que

$$\frac{1}{\theta} \geq \max_{i,j} \{ |m_{ij}| \}$$

se tiene que

$$(I - T)^{-1}M \geq 0 ,$$

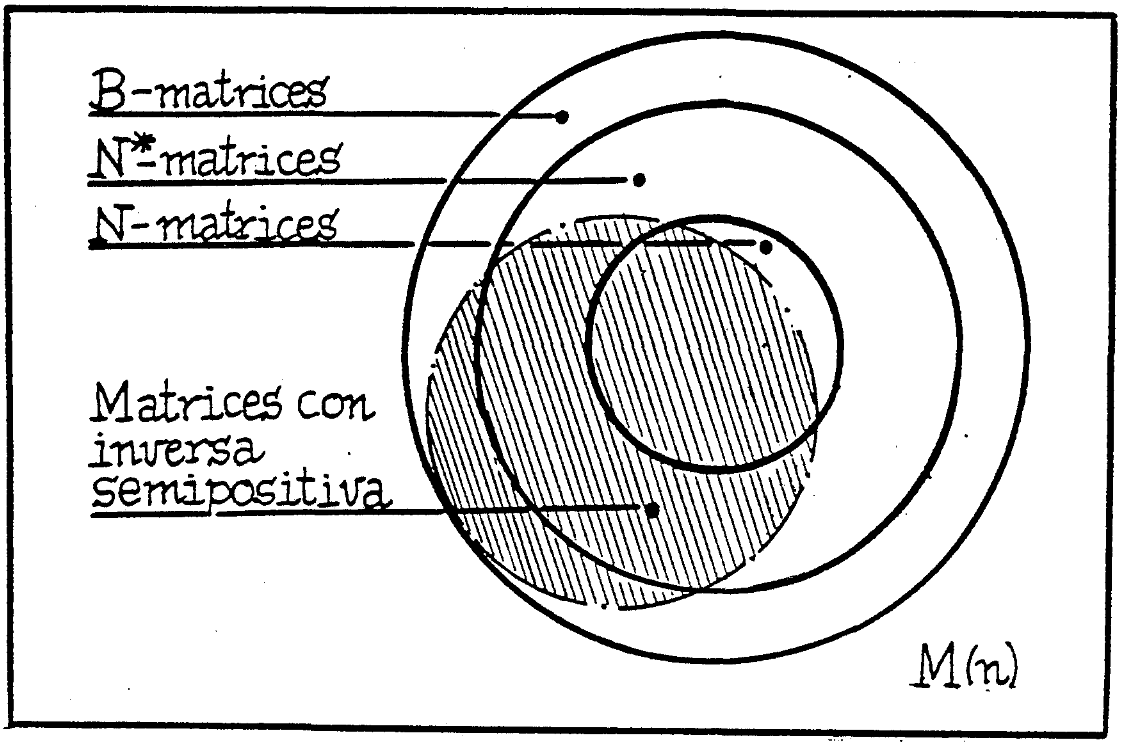
y llamando B a esta matriz

$$M = (I - T)B \qquad B \geq 0, \; T \geq 0.$$

La condición 2 de B-matriz se cumple al ser la matriz M monótona. Por tanto, M es una B-matriz.

C.Q.D.

De esta manera, en el conjunto de las matrices cuadradas de orden n, se tendrá el siguiente esquema



siendo, en todos los casos, el subconjunto de matrices con inversa semipositiva aquel que cumple $\rho(A_B) < 1$ (en el caso de N-matrices $B = I$).

El teorema 8, además de añadir una nueva condición equivalente a los teoremas 1 y 2, proporciona información sobre como es la estructura de una matriz con inversa semipositiva. Así, una matriz M, con $M^{-1} \geq 0$, será de la forma

$$M = (I - T)B \ , \quad B \geq 0, T \geq 0, \quad \lambda^*(T) < 1$$

cumpliéndose además la condición

$$\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq 0 \ .$$

Esta condición se puede expresar en la forma

$$\left.\begin{array}{r} (I - T)y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B^{-1}y \geq 0 \quad ,$$

y, como $(I - T)^{-1} \geq 0$, queda

$$(I - T)y \geq 0 \quad \Rightarrow B^{-1}y \geq 0$$

de donde

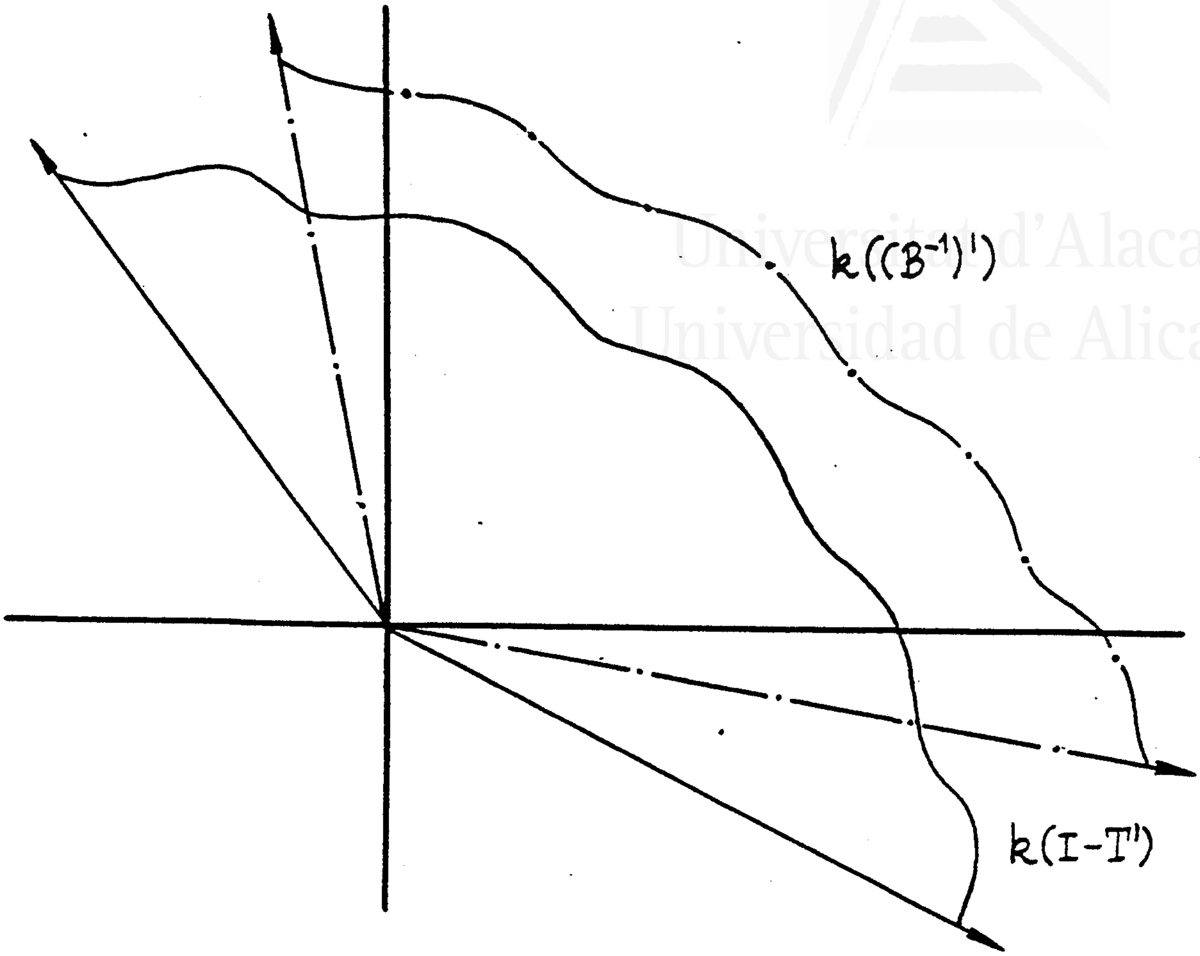
$$R^n_+ \subset K((B^{-1})') \subset K(I - T')$$

Así pues, en la construcción de matrices con inversa semipositiva se utilizarán

(a) Una matriz $(I - T)$ con $T \geq 0$, $\lambda^*(T) < 1$

(b) Una matriz B , tal que $R^n_+ \subset K((B^{-1})') \subset K(I-T')$

$$M = (I - T)B$$



Una elección posible, para la construcción de matrices con inversa semipositiva, es tomar una N-matriz en el lugar de $(B')^{-1}$, esto es,

$$B = (I - S)^{-1}$$

Entonces, la condición

$$R^n_+ \subset K(I - S') \subset K(I - T')$$

se convierte en

$$0 \leq S \leq T \, .$$

El siguiente ejemplo da una muestra de este tipo de construcción.

EJEMPLO 2.6

En la construcción de una matriz 2x2, con inversa semipositiva, se parte de una matriz $T \geq 0$, con $\lambda^*(T) < 1$. Sea, por ejemplo,

$$T = \begin{pmatrix} 0'2 & 0'3 \\ 0'2 & 0'4 \end{pmatrix}$$

y se considera una matriz $S \geq 0$, $S \leq T$, por ejemplo

$$S = \begin{pmatrix} 0'1 & 0'2 \\ 0'2 & 0'3 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz

$$M = (I - T)(I - S)^{-1}$$

posee inversa semipositiva.

Finalmente, en el teorema que figura a continuación, se prueba que una conocida propiedad de las N-matrices, que permite, mediante comparación, determinar si una matriz posee inversa semipositiva, se cumple también para las B-matrices.

Teorema 9.-

Sean M_1 y M_2 B-matrices, del mismo orden, tales que $M_1 \leq M_2$. Si $(M_1)^{-1} \geq 0$, entonces

$$(M_1)^{-1} \geq (M_2)^{-1} \geq 0 \ .$$

Volver al índice/Tornar a l'índex

Demostración.

En primer lugar, se probará que $(M_2)^{-1}$ es semipositiva. Para ello, utilizando el teorema 7, sea $p \geq 0$, tal que $pM_2 \leq 0$. Dado que $M_1 \leq M_2$ y $p \geq 0$, se tiene que

$$p \geq 0 \quad , \quad pM_1 \leq 0 \ .$$

Como $(M_1)^{-1} \geq 0$, debe ser $p=0$. Luego

$$(M_2)^{-1} \geq 0.$$

Para probar la otra desigualdad, sólo se necesita multiplicar la relación

$$M_1 \leq M_2$$

a la derecha por $(M_2)^{-1} \geq 0$, y a la izquierda por $(M_1)^{-1} \geq 0$. Se obtiene así

$$(M_2)^{-1} \leq (M_1)^{-1} \ .$$

C.Q.D.

CAPITULO 3

SISTEMAS SINGULARES

3.1 INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es, como en el anterior, determinar la existencia de solución semipositiva para un sistema del tipo

$$Mx = d \quad ; \; d \geq 0 \quad .$$

En el capítulo 2 ha sido analizado el caso en que la matriz M es regular, y el sistema siempre posee solución, encontrando condiciones para que M^{-1} sea semipositiva. Ahora se plantea el caso en que no existe la inversa de la matriz M, bien por no ser cuadrada, o por ser singular. En realidad ambos casos son equivalentes, ya que si la matriz no es cuadrada se puede completar con filas o columnas de ceros hasta conseguir una matriz cuadrada singular que da origen a un sistema equivalente; en el caso de una matriz singular pueden eliminarse las filas dependientes consiguiendo un sistema no cuadrado. Sea como fuere, el hecho es que ahora no todos los vectores $d \geq 0$ tienen por qué estar en la imagen de la matriz M (es decir, puede que no sea posible satisfacer cualquier vector de demanda final). Debe, por tanto, replantearse el concepto de resolubilidad, considerando en este capítulo que un sistema es

fuertemente resoluble si:

para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx=d$

Para este tipo de sistemas, aparecen además dos cuestiones adicionales, obvias en el caso del capítulo anterior, que son :

- Relación entre la resolubilidad del sistema de matriz M, y la del sistema cuya matriz es la traspuesta, M'.

- Existencia de un vector estrictamente positivo en Im(M) o en Im(M') (**productividad** o **rentabilidad**).

La primera de estas cuestiones se resuelve positivamente, logrando probar que el sistema inicial es fuertemente resoluble si, y sólo si, lo es el de matriz M'. Sin embargo, la segunda cuestión obliga a introducir una nueva clase de matrices, las **B-matrices generalizadas**, que poseen un vector positivo en su imagen, hecho que no verifican las conocidas clases de N, N* y B-matrices, cuando no son invertibles.

Se comienza, en la sección 3.2, proporcionando una serie de resultados generales, independientes de la clase a que pertenece la matriz M. En las siguientes secciones, se analizan las matrices según el tipo de descomposición semipositiva que admite M (N, N* y B-matrices), siempre en el supuesto de que esta matriz es cuadrada. Para cada clase, se encuentra un grupo de condiciones a la resolubilidad fuerte, observando que es necesario añadir una condición de regularidad para obtener estos resultados. Finalmente, en la sección 3.6, se generaliza el concepto de B-matriz, diciendo que M es una B-matriz generalizada si posee una descomposición semipositiva

$$M = B - A \quad ; \; B \geq 0, \; A \geq 0$$

tal que

1. $Bx \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$
2. $\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Existe $y \geq 0 \mid Mx = My$

probándose que una matriz que da lugar a sistemas resolubles está en esta nueva clase definida, por lo que terminan aquí las generalizaciones.

A lo largo del capítulo se hace uso de las inversas generalizadas de una matriz (véase apéndice 3), que proporcionan, para cada sistema compatible ($d \in Im(M)$), una solución que viene dada por

$$x = M^{g}d \ .$$

Se busca entonces una inversa M^{g}, **monótona** sobre $Im(M)$, esto es,

$$\text{si} \quad d \in Im(M),\ d \geq 0,\ \text{entonces} \quad M^{g}d \geq 0$$

Una tal inversa, si existe, proporcionará una solución semipositiva del sistema, asegurando la resolubilidad fuerte del mismo.

3.2 RESULTADOS GENERALES

Se presentan en este epígrafe un conjunto de condiciones equivalentes, o sólo suficientes, para la resolubilidad de un sistema. Algunos resultados se extraen directamente de teoremas conocidos, a los que se vinculan otras condiciones. Finalmente, se prueba la equivalencia entre la resolubilidad del sistema de matriz M y el de matriz M'.

Teorema 1.-

Sea M una matriz de orden $n \times m$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes :

(1) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$

(2) Si $Mx \geq 0$, existe $y \geq 0$ tal que $Mx = My$

(3) Si $Mx \geq 0$, entonces $x \in R^m_+ + Ker(M)$

Demostración.-

El esquema será

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$$

(1) => (2)

Sea $x \in R^m$ tal que $Mx \geq 0$. Llamando

$$d = Mx \quad ,$$

se tiene que

$$d \geq 0 \ , \ d \in Im(M) \ ,$$

por tanto

existe $y \geq 0$ tal que $My = d = Mx$

(2) => (3)

Si $Mx \geq 0$, aplicando (2)

existe $y \geq 0$ tal que $Mx = My$

de donde

$$x - y \in Ker(M)$$

y

$$x = y + (x - y) \in R^m_+ + Ker(M)$$

(3) => (1)

Sea $d \in Im(M)$, $d \geq 0$,

entonces existe $x \in R^n$ tal que $Mx = d$

Aplicando la condición (3)

$$x = u + v \qquad u \in R^m_+ \quad , \; v \in Ker(M)$$

Pero

$$d = Mx = M(u + v) = Mu$$

de donde

$$d = Mu \quad \text{con} \quad u \geq 0.$$

C.Q.D.

Teorema 2.-

Sea M una matriz de orden $n\times m$. Las siguientes condiciones (equivalentes entre si[1]) implican las condiciones del teorema 1

(1) $Mx \geq 0$, $x \in Im\ (M')$ $\Rightarrow$ $x \geq 0$

(2) Existe una {1} - inversa de M, $M^g \geq 0$ tal que $Im\ (M^gM) = Im\ (M')$

(3) Existe una {1} - inversa de M, M^g, tal que

a) $Im\ (M^gM) = Im\ (M')$

b) M^g no negativa sobre Im (M), esto es,

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \in Im\ (M) \end{array}\right\} \Rightarrow M^gx \geq 0$$

(4) Cada {1}- inversa de M, con $Im(M^gM) = Im(M')$ es no negativa en Im (M)

(5) Existe una {1,2} - inversa de M, M^g tal que $Im\ (M^g) = Im\ (M')$ y M^g es no negativa en Im (M)

(6) Cada {1, 2}- inversa de M, con $Im(M^g) = Im(M')$ es no negativa en Im (M)

---

(1) Berman-Plemmons (1979)

Demostración.

Evidente, al existir una {1}-inversa M^g, semipositiva. Entonces el vector

$$x = M^g d$$

es solución del sistema $Mx = d$, para todo d perteneciente a Im(M). Si d es semipositivo, también lo es $M^g d$.

C.Q.D.

Teorema 3.-

Las siguientes condiciones implican la resolubilidad fuerte del sistema

(1) Existe una {1}-inversa generalizada de M, no negativa en Im(M).

(2) M es monótona en un complementario de Ker(M), esto es, si $S \oplus \mathrm{Ker}(M) = R^m$

$$\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ x \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x \geq 0$$

Demostración.

Obviamente (1) garantiza que el sistema es fuertemente resoluble.

Para ver que (2) también es suficiente, sea $d \geq 0$, $d \in \mathrm{Im}(M)$; entonces existe u en R^m

tal que

$$Mu = d \ .$$

Como $R^m = S \oplus Ker(M)$, el vector u se puede descomponer en la forma

$$u = x + y \ ; \ x \in S \ , \ y \in Ker(M)$$

con lo que

$$Mu = Mx = d \geq 0 \ , \ x \in S \ ,$$

luego $x \geq 0$, y el sistema es fuertemente resoluble.

C.Q.D.

Teorema 4.-

Si la matriz M es cuadrada, las siguientes condiciones son equivalentes, y son suficientes para que el sistema sea fuertemente resoluble

(1) $\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ x \in Im(M) \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq 0$

(2) Existe $M^{\#}$ y es no negativa en $Im(M)$.

Demostración.

Claramente estas condiciones son suficientes. Resta probar la equivalencia entre ellas.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Si no existe $M^{\#}$, entonces $ind(M) > 1$ y,

$$Ker(M) \neq Ker(M^2)$$

luego existirá un vector y de R^n tal que

$$My \neq 0 \ ; \ M^2y = 0 \qquad [1]$$

Dado que $My \in Im(M)$ y $M(My) = 0$ aplicando la hipótesis

$$My \geq 0 \ .$$

Razonando de forma análoga para $-y$, se tiene que

$$My = 0$$

en contradicción con [1]. Luego existe $M^{\#}$.

Sea $x \in Im(M)$, $x \geq 0$. Existe z tal que $Mz = x$. Si se considera

$$u = M^{\#}x \ ,$$

se tiene

$$u = M(M^{\#}z) \implies u \in Im(M) \ ,$$

$$Mu = Mz = x \geq 0 \ .$$

Por hipótesis tendremos que $u \geq 0$, luego

$$M^{\#}x \geq 0 \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $x \in Im(M)$ tal que $Mx \geq 0$. Existirá un vector z tal que $x = Mz$. Se tiene que

$$Mx \geq 0$$

$$Mx \in Im(M)$$

Por (2), se cumple

$$M^{\#}Mx \geq 0$$

pero

$$M^{\#}Mx = M^{\#}MMz = Mz = x .$$

Finalmente, $x \geq 0$.

C.Q.D.

Para sistemas no cuadrados, o singulares, no queda claro la vinculación entre la resolubilidad fuerte de

$$Mx = d \quad , \quad d \geq 0$$

y la del sistema

$$M'p = a \quad , \quad a \geq 0.$$

El siguiente teorema prueba la equivalencia entre ambos.

<u>Teorema 5</u>.-

Sea M una matriz de orden $m \times n$. Son equivalentes :

(1) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

(2) Para todo $a \geq 0$, $a \in Im(M')$, existe $p \geq 0$ tal que

$$M'p = a$$

Demostración.

Dada la simetría de las condiciones, bastará probar una de las implicaciones.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $a \geq 0$, $a \in \mathrm{Im}(M')$. Si el sistema

$$M'p = a \quad , p \geq 0$$

no posee solución, aplicando el lema de Farkas, existirá x tal que

$$Mx \leq 0 \ , \ a'x > 0.$$

Sea $d = M(-x)$, entonces $d \geq 0$, $d \in \mathrm{Im}(M)$. Por hipótesis existirá $u \geq 0$, tal que

$$Mu = d$$

de donde

$$M(x + u) = 0 \Rightarrow x + u \in \mathrm{Ker}(M).$$

Como Im(M') y Ker(M) son subespacios suplementarios ortogonales,

$$a'(x + u) = 0$$

con lo que

$$a'x = -a'u \leq 0$$

en contradicción con $a'x > 0$. Por tanto, existirá $p \geq 0$ tal que

$$M'p = a$$

C.Q.D.

3.3 N-MATRICES

En este epígrafe, se estudia la resolubilidad fuerte de sistemas con igual número de ecuaciones que de incognitas (sistemas cuadrados), cuya matriz M es una N-matriz singular. Para ello, basta analizar el caso en que M admite una descomposición en la forma

$$M = I - A \quad , \quad A \geq 0.$$

La extensión de las propiedades analizadas en la sección 2.3, dedicado a las N-matrices regulares, pasa lógicamente por la consideración de algunas nuevas condiciones que, en el caso singular, jugarán un papel análogo a las analizadas previamente. Se comienza con una extensión natural del concepto de P-matriz al caso singular, es decir, las P_0-matrices.

DEFINICION 1.-

Una matriz cuadrada M, se dice que es una **P_0-matriz** si todos sus menores principales son no negativos.

DEFINICION 2.-

Una matriz cuadrada es **M_0-matriz**, si es N-matriz y P_0-matriz.

Las siguientes proposiciones analizan algunas propidades de las M_0-matrices.

Proposición 1.-

Dada una M_0-matriz, todos sus cofactores son no negativos.

La prueba puede verse en Herrero-Silva-Villar (1984).

Proposición 2.-

Sea M una M_0-matriz. Si un menor principal es nulo, entonces $\det(M) = 0$.

Demostración.

Se probará que si un menor principal es nulo, el obtenido de un orden superior orlando este, es también nulo. Repitiendo el proceso se llega a $\det(M) = 0$.

Sin pérdida de generalidad, ya que permutaciones simultáneas de filas y columnas no afectan al valor del determinante, se supone que un menor principal superior izquierda, de orden p-1, es nulo. Considerando la submatriz

$$M_p = \begin{pmatrix} m_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1p} \\ -a_{21} & m_{22} & \cdots & -a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{p1} & -a_{p2} & \cdots & m_{pp} \end{pmatrix}$$

esta es una M_o-matriz y, por tanto, todos sus co-factores son no negativos. Si se desarrolla por la última fila , para hallar el determinante de esta submatriz, se tiene

$$\det(M_p) = -a_{p1}A_{p1} - a_{p2}A_{p2} - \dots + m_{pp}A_{pp}$$

de donde resulta que

$$\det(M_p) \leq 0.$$

Finalmente, al ser un menor principal de una M_o-matriz,

$$\det(M_p) = 0.$$

C.Q.D.

Este resultado asegura que, dada una M_o-matriz, o bien todos sus menores principales son positivos (con lo cual M es regular y su inversa es semipositiva) o, si algun menor principal es nulo, la matriz es singular.

Para N-matrices la condición " M es una P-matriz" asegura la existencia de solución $x \geq 0$, para todo $d \geq 0$, del sistema

$$Mx = d \ .$$

Sin embargo, en el caso de que la matriz sea singular, la condición "M es una P_0-matriz" no es suficiente para la resolubilidad fuerte del sistema. El siguiente ejemplo da una muestra de este hecho.

EJEMPLO 3.1

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una M_0-matriz. Sin embargo, el vector

$$d = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}) \geq 0$$

está en Im(M) y no existe $x \geq 0$, tal que $Mx = d$.

Este ejemplo indica que, además de pedir que M sea una P_0-matriz, es necesario exigir que verifique propiedades adicionales. Se introduce así una nueva condición a la que se denomina semirregularidad.

DEFINICION 2.-

Una matriz cuadrada M, con rg(M) = r, se dice que es **semirregular** si existe un menor principal de M, de orden r, distinto de cero.

Para este tipo de matrices se verifica la siguiente propiedad.

Proposición 3.-

Sea M una N-matriz semirregular, con rg(M) = r. Si M es una P_0-matriz, existe una submatriz principal de orden r, que es P-matriz.

Demostración.

Al ser M semirregular, existe una submatriz principal de orden r, con determinante no nulo. Sea M_r esta submatriz.

M_r es una N-matriz, P_0-matriz y regular. Aplicando la proposición 2, M_r es una P-matriz.

C.Q.D.

Como se ha comentado, en el estudio de matrices singulares, es útil trabajar con inversas generalizadas. En el caso de las N-matrices es posible emplear la "inversa grupo" que posee como ventaja adicional el conmutar con la matriz, aunque sólo existe bajo condiciones bastante restrictivas. En primer lugar, se define esta inversa, probando a continuación que las matrices que se están empleando poseen una inversa grupo.

<u>DEFINICION 3</u>.-

Dada una matriz cuadrada M, se llama **índice de M** al menor entero k, tal que

$$\mathrm{Im}(M^k) = \mathrm{Im}(M^{k+1}).$$

<u>DEFINICION 4</u>.-

Dada una matriz cuadrada M, se denomina **inversa grupo** de M, a una matriz $M^{\#}$, tal que

(1) $M\, M^{\#}\, M = M$

(2) $M^{\#}\, M\, M^{\#} = M^{\#}$

(3) $M\, M^{\#} = M^{\#}\, M$

<u>Proposición 4</u>.-

Sea M una matriz cuadrada. Entonces :

a) $M^{\#}$ existe <=> $\mathrm{ind}(M) \leq 1$

b) $M^{\#}$ si existe, es única

c) Si M es regular ($\mathrm{ind}(M)=0$) , $M^{\#} = M^{-1}$

La prueba puede verse en Boullion & Odell (1971).

Proposición 5.-

Sea M una matriz cuadrada, semirregular y P_0-matriz. Entonces $\mathrm{ind}(M) \leq 1$ y, por tanto, existe $M^{\#}$.

Demostración.

Si la matriz es de orden n, y su rango es r, se tiene que

$$\dim \mathrm{Ker}(M) = n-r.$$

Sea $p(\lambda)$ el polinomio caraterístico de M,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M) =$$

$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

donde

a_s = suma de los menores principales de orden s

En este caso, al ser M una P_0-matriz semirregular

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_r\lambda^{n-r}$$

siendo este último coeficiente distinto de cero. Luego la multiplicidad del valor propio $\lambda = 0$ es n-r, con lo que la forma de Jordan asociada a la matriz M será

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde J_1 es una matriz regular de orden r. Así, la forma de Jordan asociada a M^2 será

$$\begin{pmatrix} J_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$rg(M) = rg(M^2) \; .$$

Luego $ind(M) \leq 1$, por lo que existe $M^{\#}$.

C.Q.D.

El siguiente teorema recoge una serie de condiciones equivalentes a la resolubilidad fuerte de un sistema cuya matriz es una N-matriz semirregular.

<u>Teorema</u> 6.-

Sea M una N-matriz semirregular,

$$M = I - A \quad , \; A \geq 0 \; .$$

Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes :

(1) Para todo $d \in Im(M)$, $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

(2) Existe $M^{\#}$ y para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M) \Rightarrow M^{\#}x \geq 0$

(3) $$\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ x \in Im(M) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x \geq 0$$

(4) $\left.\begin{array}{l} Mx \leq 0 \\ x \geq 0 \;,\; x \in Im(M) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 0$

(5) M es una P_0-matriz.

(6) M es semimonótona, esto es, para todo $x \neq 0$, existe k tal que

$$x_k \;(Mx)_k \geq 0$$

(7) La parte real de cada valor propio de M es no negativa.

(8) Para todo $r > 0$, la matriz $M + rI$ es no singular.

(9) $\lambda^*(A) \leq 1$.

(10) Para todo $a \in Im(M')$, $a \geq 0$, existe $p \geq 0$ tal que

$$M'p = a$$

Demostración.

La equivalencia entre (2) y (3) se probó en el teorema 4, así como la implicación de (2) a (1). En el teorema 5 viene la equivalencia entre (1) y (10). En Fiedler & Ptak (1966) aparece la equivalencia entre (5) y (6). Finalmente, en Berman & Plemmons (1979) se encuentran las siguientes implicaciones

(7) <=> (8) <=> (5) => (3) ; (2) => (5)

con lo que se tiene las equivalencias entre (2), (3), (5), (6), (7), (8) y (10). El resto de las equivalencias se probará siguiendo el esquema que figura a continuación

$$(1) \Rightarrow (9) \Rightarrow (5)$$

$$(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (9)$$

$(1) \Rightarrow (9)$

Si se supone $\lambda^*(A) > 1$, por el teorema de Perron-Frobenius se tiene que existe $v \geq 0$ tal que

$$Av = \lambda^* v$$

entonces

$$M(-v) = (\lambda^* - 1)v \geq 0 \ .$$

Sea $d = M(-v) \geq 0$, $d \in Im(M)$, luego existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d \ ,$$

esto es,

$$M(x + v) = 0$$

por tanto,

$$A(x + v) = x + v$$

$$Ax = x + (1 - \lambda^*)v$$

Dado que $A \geq 0$ y $x \geq 0$, el producto $Ax \geq 0$, y se tiene

$$x \geq (\lambda^* - 1)v$$

Premultiplicando por la matriz $A \geq 0$, se conserva la desigualdad

$$Ax \geq (\lambda^* - 1)Av$$

$$x + (1-\lambda^*)v \geq (\lambda^*-1)\lambda^* v$$

$$x \geq (\lambda^*-1)(\lambda^*+1)v \ .$$

Repitiendo sucesivamente este proceso, se tiene

$$x \geq (\lambda^*-1)(\lambda^{*k} + \lambda^{*k-1} + \ldots + 1)v =$$

$$= (\lambda^{*k+1} - 1)v$$

lo cual no puede satisfacer x si $\lambda^* > 1$. Con lo que se logra la contradicción; luego

$$\lambda^*(A) \leq 1 \ .$$

(9) —> (5)

La función $f: R \rightarrow R$ definida por

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

es continua y no se anula a la derecha de $\lambda^*(A)$, y para λ suficientemente grande se hace positiva. Por tanto, para todo $\lambda \geq \lambda^*(A)$

$$f(\lambda) \geq 0 \ .$$

En particular para $\lambda=1$, se tiene

$$\det(I - A) = \det(M) \geq 0 \ .$$

Los valores propios de módulo máximo de cada submatriz principal de A son menores o iguales a los de A, luego es posible aplicar un razonamiento análogo, y su determinante será no negativo. Por tanto, M es una P_o-matriz.

(3) => (4)

Sea $x \geq 0$, vector de Im(M), tal que

$$Mx \leq 0 \ ,$$

se tiene que

$$M(-x) \geq 0$$

$$-x \in \mathrm{Im}(M) \ ,$$

por tanto, $-x \geq 0$. Luego $x=0$.

(4) => (9)

Sea $\lambda^* = \lambda^*(A)$, entonces existe $v \geq 0$ tal que

$$Av = \lambda^* v$$

entonces

$$Mv = (1-\lambda^*)v \ .$$

Si se supone $\lambda^* > 1$ se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} v \geq 0 \\ Mv \leq 0 \\ v \in \mathrm{Im}(M) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v=0$$

lo cual es una contradicción, ya que v es un vector propio. De donde, $\lambda^* \leq 1$.

C.Q.D.

Para las N-matrices la dominancia de diagonal es una condición equivalente a la existencia y semipositividad de la inversa . Aquí se relaja la condición introduciendose un nuevo concepto de dominancia, mas débil , que resulta ser condición suficiente para la resolubilidad fuerte.

DEFINICION 4.-

Una matriz cuadrada M posee **diagonal dominante débil (ddd)**, si existen números reales positivos d_i, i=1, ... ,n , tales que

$$d_j |m_{jj}| \geq \sum_{i \neq j} d_i |m_{ij}| \qquad j=1,\ldots,n$$

Si $m_{jj} \geq 0$, se dice que posee **ddd positiva.**

NOTA

Vease Woods (1978) para comparar la condición (ddd) con las condiciones diagonal dominante (dd) y quasi-diagonal dominante (qdd). Ambas condiciones implican la (ddd) y el siguiente ejemplo muestra un caso en que ésta es más débil.

EJEMPLO 3.2

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $d_1=d_2=1$, se verifica la condición (ddd). Sin embargo, no se satisfacen las condiciones (dd) y (qdd).

El siguiente teorema prueba que esta condición es suficiente para la resolubilidad fuerte del sistema. A continuación un ejemplo muestra que no es necesaria.

Teorema 7.-

Sea M una N-matriz semirregular satisfaciendo la condición (ddd). Entonces M verifica las condiciones equivalentes (1)-(10) del teorema 6.

Demostración

Se probará que (ddd) implica (7). Para ello sea λ un valor propio de M. Si se supone que $Re(\lambda) \geq 0$, entonces

$$|m_{jj} - \lambda| > |m_{jj}| \qquad j=1, \ldots ,n$$

de donde

$$d_j|m_{jj} - \lambda| > d_j|m_{jj}| \geq \sum_{i \neq j} d_i |m_{ij}| \qquad j=1,\ldots,n$$

Pero esto indica que la N-matriz

$$Q = M - \lambda I$$

posee dd, con lo cual es regular, en contradicción con el hecho de que λ es un valor propio de M. Por tanto, $Re(\lambda) \geq 0$.

C.Q.D.

EJEMPLO 3.3

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es una N-matriz, semirregular y P_o-matriz. Sin embargo, no cumple la condición ddd.

3.4 N*-MATRICES

Se analiza, en este epígrafe, el conjunto de las N*-matrices singulares, esto es, aquellas matrices no regulares que se pueden expresar en la forma

$$M = B - A \quad ; \; A \geq 0, \; B \geq 0, \; B^{-1} \geq 0.$$

Para este tipo de matrices se tiene un teorema de caracterización de la resolubilidad fuerte, similar al teorema 5 para N-matrices.

Teorema 8.-

Sea M una N*-matriz, tal que $N = I - AB^{-1}$ es semirregular. Entonces son equivalentes :

(1) Para todo $d \in Im(M)$, $d \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d .$$

(2) Existe $N^{\#}$ y la matriz $M^{g} = B^{-1}N^{\#}$ cumple que para cada $x \in Im(M)$, $x \geq 0$, entonces

$$M^{g}x \geq 0.$$

(3) Para todo x tal que

$$Mx \geq 0 \; , \; Bx \in Im(M), \text{ entonces}$$

$$x \geq 0.$$

(4) Para cada x tal que

$$Mx \leq 0 \ , \ x \geq 0 \ , \ Bx \in Im(M), \text{ entonces}$$

$$x=0$$

(5) $\lambda^*(B^{-1}A) = \lambda^*(AB^{-1}) \leq 1$

(6) Para todo a de $Im(M')$, $a \geq 0$, existe $p \geq 0$ tal que

$$M'p = a$$

<u>Demostración</u>

Se realiza según el siguiente esquema

(1) <—> (5) —> (3) —> (2) —> (1)

(3) —> (4) —> (5)

La prueba de (1) <—> (6) aparece en el teorema 5.

(1) —> (5)

Asociado a λ^* existe $v \geq 0$ tal que

$$B^{-1}Av = \lambda^* v$$

Entonces

$$Av = \lambda^* Bv$$

$$Mv = (1-\lambda^*)Bv$$

Si $\lambda^* > 1$, se tiene que $Mv \leq 0$, luego

$$d = M(-v) \geq 0 \quad , \quad d \in Im(M)$$

Por hipótesis, existirá $x \geq 0$ tal que

$$Mx = M(-v)$$

$$M(x + v) = 0$$

$$A(x + v) = B(x + v)$$

De aquí,

$$0 \leq Ax = B(x + v) - Av = B(x + v - \lambda^* v)$$

entonces

$$x \geq (\lambda^* - 1)v$$

Multiplicando por $A \geq 0$, se obtiene que

$$x \geq (\lambda^{*2} - 1)v$$

y repitiendo el proceso

$$x \geq (\lambda^{*k} - 1)v$$

que es una contradicción, ya que $v \geq 0$, $v \neq 0$. Así

$$\lambda^* \leq 1 .$$

(5) —> (1)

Ya que

$$M = NB \ , \ N = I - AB^{-1} \ ,$$

siendo ésta una N-matriz, aplicando el teorema 6, y dado que $Im(M) = Im(N)$, existe $y \geq 0$ tal que

$$Ny = d$$

Llamando $x = B^{-1}y \geq 0$, se tiene

$$Mx = d .$$

(5) —> (3)

Sea $x \in R^n$, tal que

$$Mx \geq 0 \ , \ Bx \in Im(M) \ ,$$

entonces

$$N(Bx) \geq 0 \ , \ Bx \in Im(M)$$

y, aplicando el teorema 6,

$$Bx \geq 0 \ .$$

Al ser $B^{-1} \geq 0$, se tiene $x \geq 0$.

(3) => (2)

En primer lugar se probará la existencia de $N^{\#}$, utilizando el teorema 4. Para ello, sea y tal que

$$Ny \geq 0 \ , \ y \in Im(N)$$

y sea x tal que y = Bx. Se tendrá

$$Mx \geq 0 \ , \ Bx \in Im(M)$$

Por hipótesis $x \geq 0$ entonces

$$y \geq 0$$

luego existe $N^{\#}$ y es no negativa en Im(N).

Sea ahora $x \geq 0$, $x \in Im(M)$,

$$M^g x = B^{-1} N^{\#} x \geq 0 \ ,$$

por ser $N^{\#} x \geq 0$ y $B^{-1} \geq 0$.

(2) => (1)

Dado que M^g es una {1} -inversa de M

(véase apéndice 3), para todo d de Im(M),

$$x = M^g d$$

es solución del sistema. Si $d \geq 0$ aplicando (2)

$$x \geq 0 \ .$$

(3) ⟶ (4)

Evidente.

(4) ⟶ (5)

Sea $\lambda^* = \lambda^*(AB^{-1})$. Entonces existe $v \geq 0$, $v \neq 0$, tal que

$$AB^{-1}v = \lambda^* v \ .$$

Llamando $w = B^{-1}v \geq 0$,

$$Aw = \lambda^* Bw$$

$$Mw = (1-\lambda^*)Bw \ .$$

Si $\lambda^* > 1$, se tiene que

$$Bw \in Im(M)$$

$$w \geq 0$$

$$Mw \leq 0$$

entonces $w=0$ y esto implica

$$v=0 \ ,$$

que es una contradicción. Luego

$$\lambda^* \leq 1 \ .$$

C.Q.D.

3.5 B-MATRICES

Se repite el análisis efectuado anteriormente, en el caso de que M sea una B-matriz, esto es, posea una descomposición en la forma

$$M = B - A \qquad B \geq 0,\ A \geq 0\ ,\ B \text{ regular}$$

tal que

1. $AB^{-1} \geq 0$
2. $\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq 0$

Se verifica el siguiente teorema.

Teorema 9.-

Sea M una B-matriz, tal que la matriz $N = I - AB^{-1}$ es semirregular. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes.

(1) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

(2) Existe $N^{\#}$, y la matriz $M^g = B^{-1}N^{\#}$ es no negativa en Im(M).

(3) $\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \in Im(M) \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq 0$

(4) $\left.\begin{array}{l} Mx \leq 0 \\ x \geq 0 \\ Bx \in Im(M) \end{array}\right\} \Rightarrow x=0$

(5) $\lambda^* (AB^{-1}) \leq 1$

(6) Para todo a de Im(M'), $a \geq 0$, existe $p \geq 0$ tal que

$$M'p = a$$

Demostración

Se realizará según el esquema que aparece a continuación

$$(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$$

$$(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$$

(1) ⇒ (5)

Aplicando el teorema de Mangasarian (valor propio generalizado), existirá un vector v tal que

$$Av = \lambda^* Bv \quad , \quad v \neq 0$$

$$Bv \geq 0 \ .$$

Entonces

$$Mv = (1-\lambda^*)Bv$$

Si $\lambda^* > 1$

$$Mv \leq 0$$

$$M(-v) \geq 0 \ .$$

Por tanto, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = M(-v)$$

$$M(x + v) = 0$$

de donde

$$0 \leq Ax = Bx + (1-\lambda^*)Bv$$

y

$$Bx \geq (\lambda^*-1)Bv$$

premultiplicando por $AB^{-1} \geq 0$,

$$Ax \geq (\lambda^*-1)\lambda^* Bv$$

y, de aquí

$$Bx \geq (\lambda^{*2}-1)Bv \;.$$

Repitiendo el proceso, se tiene

$$Bx \geq (\lambda^{*k}-1)Bv$$

lo cual es una contradicción, ya que $Bv \nleq 0$. Por tanto,

$$\lambda^* \leq 1.$$

(5) $\Rightarrow$ (3)

Sea x tal que

$$Mx \geq 0$$

$$Bx \in \mathrm{Im}(M)$$

Entonces se cumple que

$$N(Bx) \geq 0$$

$$Bx \in \mathrm{Im}(N)$$

y, por aplicación del teorema 4,

$$Bx \geq 0,$$

esta condición, junto a $Mx \geq 0$ y la definición de B-matriz, implica que

$$x \geq 0 .$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

La prueba de la existencia de $N^{\#}$, y que esta matriz es no negativa sobre Im(M), es análoga a la realizada en el teorema 8. Para probar la segunda parte, sea $x \geq 0$, $x \in \mathrm{Im}(M)$, entonces

$$B(M^g x) = N^{\#} x \geq 0$$

$$M(M^g x) = x \geq 0 .$$

De la definición de B-matriz, se tiene

$$M^g x \geq 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Inmediata, al ser M^g una {1}-inversa de M, no negativa en Im(M).

(3) $\Rightarrow$ (4)

Evidente.

(4) $\Rightarrow$ (5)

Asociado a λ^* , existe un vector $v \neq 0$,

tal que

$$Av = \lambda^* Bv \quad , \quad Bv \geq 0$$

De aquí,

$$Mv = (1-\lambda^*)Bv \quad .$$

Si $\lambda^* > 1$, se tiene

$$Mv \leq 0 \quad , \quad Bv \in Im(M)$$

y, llamando $w = Bv$,

$$Nw \leq 0$$

$$w \geq 0$$

$$w \in Im(N)$$

que, por el teorema 4, implica que

$$w = 0$$

luego se llega a la contradicción

$$v = 0 \quad .$$

Queda de esta forma probada la equivalencia entre todas las condiciones.

C.Q.D.

NOTA

En el caso de las B-matrices (así como en las N y N*-matrices), si existe un vector $d > 0$, en $Im(M)$, o un vector $a > 0$ en $Im(M')$, la matriz es regular y su inversa semipositiva (véanse teoremas correspondientes en el capítulo 2). Por tanto si estas matrices son singulares, poseen la importante restricción de que no existen vectores estrictamente positivos en Im(M), ni tampoco en Im(M').

Hasta el momento se han utilizado matrices cuadradas (lo cual, como se comentó no es una limitación importante) que poseen una estructura tal que se pueden escribir en la forma

$$M = (I - T)B$$

pero, en todos los casos analizados, se ha exigido que la matriz B sea regular y esto si supone una restricción más fuerte. En la siguiente sección se elimina este supuesto, así como la condición de que las matrices sean cuadradas.

3.6 B-MATRICES GENERALIZADAS

En este epígrafe se generaliza el concepto de B-matrices a matrices no necesariamente cuadradas al mismo tiempo que se debilita la segunda condición que definía a esta clase de matrices.

DEFINICION 5.-

Una matriz M, de orden $m \times n$, se dice que es una **B-matriz generalizada** si posee una descomposición semipositiva

$$M = B - A \quad ; \quad B \geq 0, \; A \geq 0,$$

tal que :

1. $Bx \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$

2. $\left.\begin{array}{l} Mx \geq 0 \\ Bx \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Existe } \; y \geq 0 \; \mid \; My = Mx$

Claramente, esta definición es una extensión del concepto de B-matriz. Si la matriz M es regular ambas definiciones coinciden. Por otro lado, la condición 1 equivale a la existencia de una matriz cuadrada T, de orden $m \times m$, tal que

$$A = TB \;, \quad T \geq 0$$

con lo que la matriz M se podrá expresar en la forma

$$M = (I - T)B \quad ,$$

donde $N = I - T$ es una N-matriz.

Los siguientes teoremas analizan la resolubilidad fuerte de sistemas cuya matriz pertenece a esta clase, al mismo tiempo que explicitan el conjunto de matrices que dan lugar a sistemas fuertemente resolubles.

Teorema 10.-

Sea M una matriz de orden $m \times n$, tal que existe $p \geq 0$, con $pM > 0$. Entonces son equivalentes

(1) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

(2) M es una B-matriz generalizada, con

$$\lambda^*(T) < 1$$

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $p \geq 0$, tal que $pM > 0$. Se considera

$$v = \frac{1}{\sum p_i + \theta} p \quad ; \quad \text{con } \theta > 0$$

Entonces, la matriz

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ \cdots & & \cdots & \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{pmatrix}_{m\times m}$$

es semipositiva y

$$\lambda^*(T) = \sum v_i < 1$$

Por tanto, existe $(I - T)^{-1}$ y es semipositiva

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \ldots$$

Post-multiplicando por la matriz M, se tiene

$$(I - T)^{-1}M = (I + T + T^2 + \ldots)M =$$

$$= M + \frac{1}{\sum p_i + \theta} H + \ldots +$$

$$+ \frac{(\sum p_i)^{k-1}}{(\sum p_i + \theta)^k} H + \ldots =$$

$$= M + \frac{1}{\theta} H$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

siendo

$$a = pM > 0$$

Tomando θ suficientemente pequeño, se puede lograr que

$$(I - T)^{-1}M \geq 0$$

y definiendo B como esta matriz, resulta

$$M = (I - T)B$$

por lo que M cumple la primera condición de B-matriz generalizada. Por otro lado, si

$$Mx \geq 0$$

$$Bx \geq 0$$

llamando $d = Mx$, $d \in Im(M)$, por hipótesis existirá un vector $y \geq 0$ tal que

$$My = d$$

y se verifica también la segunda condición de B-matriz generalizada.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $d \geq 0$, vector de Im(M). Existe, por tanto, z de R^m tal que

$$Mz = d \geq 0$$

de donde

$$(I - T)Bz = d \ .$$

La matriz $I - T$ es una N-matriz con $\lambda^*(T) < 1$, luego

$$(I - T)^{-1} \geq 0$$

entonces

$$Bz = (I - T)^{-1}d \geq 0 \ .$$

La segunda condición de B-matriz generalizada indica que, en este caso existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = Mz$$

luego existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

y el sistema es fuertemente resoluble.

C.Q.D.

Este teorema puede afinarse un poco mas, obteniendo el siguiente resultado

Teorema 11.-

Dada una matriz M, de orden $m \times n$, son equivalentes:

(1) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que

$$Mx = d$$

y además, existe $p \geq 0$ tal que $pM > 0$.

(2) M es una B-matriz generalizada,

$$M = (I - T)B$$

donde $\lambda^*(T) < 1$ y B no posee ninguna columna nula.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2)

En la construcción del teorema 10 puede observarse que la matriz B es posible tomarla positiva, con lo cual se tiene esta prueba.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Basta ver que existe $p \geq 0$, tal que $pM > 0$ ya que el resto de la prueba se deduce del teorema 10. Para ello, dado que $(I - T)^{-1} \geq 0$, existirá un vector $p \geq 0$, tal que

$$p(I - T) > 0$$

Post-multiplicando por la matriz B, teniendo en cuenta que ésta no posee ninguna columna nula y que es semipositiva,

$$p(I - T)B > 0$$

luego

$$pM > 0 \quad .$$

C.Q.D.

El siguiente ejemplo muestra una matriz que satisface las condiciones del teorema 11 y no es regular.

EJEMPLO 3.4

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $p = (1,0,1)$, se tiene que $pM > 0$. Por otro lado, resulta

$$Im(M) = \{ (x,y,z) \in R^3 \mid x=y \}$$

El sistema cuya matriz es M es fuertemente resoluble y el vector $(1,1,1) \in Im(M')$, como se puede comprobar sin dificultad.

En el teorema 4, se probó que si el sistema de matriz M es fuertemente resoluble, también lo es el de matriz M', traspuesta de M. Sin embargo, no ocurre que la existencia de un vector estrictamente positivo en Im(M) implique que lo mismo ocurre en Im(M'), como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.5

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomando el vector $a=(1,1)'$ es positivo y pertenece a Im(M'). Sin embargo, no existe un vector de estas características en Im(M).

Finalmente, el siguiente teorema caracteriza las matrices que, tanto ellas como sus traspuestas, dan lugar a sistemas fuertemente resolubles.

Teorema 12.-

Sea M una matriz de orden $m \times n$, tal que existen $p \geq 0$, con $pM > 0$ y $x \geq 0$, con $Mx > 0$. Entonces son equivalentes:

(1) El sistema $Mx = d$ es fuertemente resoluble.

(2) El sistema $pM = a$ es fuertemente resoluble.

(3) M es una B-matriz generalizada

$$M = (I - T)B \quad \text{con } \lambda^*(T) < 1 \ .$$

(4) M' es una B-matriz generalizada

$$M' = (I - S)C \quad \text{con } \lambda^*(S) < 1 \ .$$

Demostración

Inmediata, a partir de los teoremas anteriores.

El siguiente ejemplo proporciona una B-matriz generalizada, no cuadrada, que da lugar a un sistema fuertemente resoluble.

EJEMPLO 3.6

Sea la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/8 & 5/8 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

expresando M como diferencia de las matrices

Volver al índice/Tornar a l'índex

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 \\ 1/2 & 1/8 \end{pmatrix}$$

posee estructura de B-matriz generalizada, con $\lambda^*(T) < 1$ y, por tanto, el sistema es fuertemente resoluble.

CAPITULO 4

MODELOS DE PRODUCCION CONJUNTA RESOLUBLES (1)

4.1 INTRODUCCION

En el artículo "Multiple Product Techniques With Properties of Single Product Systems" (Schefold, 1978) se señalan una serie de propiedades deseables para los modelos de producción conjunta. Dicho trabajo plantea distintas hipótesis (productividad, regularidad de la matriz $M \equiv B - A$) y obtiene que si se verifica la condición

$$M^{-1} > 0 \qquad \text{(all-engaging systems)}$$

el modelo de producción conjunta conserva la mayor parte de las propiedades de los modelos de producción simple. Esta condición significa que para la obtención, por separado, de una unidad de uno de los bienes, es necesario activar todos los sectores productivos. Además de ser una condición a priori excesivamente fuerte, no se especifica como debe ser el modelo (las matrices A, B o M) para que un sistema sea all-engaging.

Este capítulo plantea el estudio de sistemas cuya matriz está en las clases definidas en el capítulo 2, esto es, N* o B-matrices, obteniendo que, con la única condición de productividad es posible conseguir estas propiedades y aún es posible añadir otras. El esquema que se sigue es el de realizar distintas hipótesis sobre la matriz del sistema M, o bien sobre las matrices de inputs A y outputs B, estudiándose los resultados que pueden obtenerse del modelo definido y analizando el significado económico de los supuestos realizados.

Se plantean así tres modelos distintos, analizados en otras tantas secciones. El primero, en la sección 4.2, realiza la hipótesis de que M es una N*-matriz. En la sección 4.3 se supone que M es una B-matriz. Finalmente, en el punto 4.4 se supondrá que son precisamente las matrices de inputs y outputs (A, B) las que proporcionan a M la estructura de B-matriz, es decir, estas matrices cumplirán las siguientes condiciones

1. La matriz B es regular
2. $Bx \geq 0 \implies Ax \geq 0$
3. $Bx \geq 0$ y $Bx \geq Ax \implies x \geq 0$

Tal como se vio en el capítulo 2, una N*-matriz es también B-matriz y el caso planteado en 4.4 es una B-matriz un tanto especial, por lo que ambos son particularizaciones de la sección 4.3. No obstante, tiene interés realizar el estudio por separado :

- El caso de las N*-matrices aparece como una primera generalización de la producción simple. Es un modelo de gran sencillez matemática y proporciona la pauta de estudio a seguir en el modelo más general.

- El caso planteado en la sección 4.4 posee la ventaja de conocer cual es la descomposición de la matriz M, que permite definirla como B-matriz. Esto da una mejor interpretación de los supuestos y facilita la discusión del modelo. Además, en este caso se obtienen las propiedades de existencia de mercancía patrón de Sraffa, la curva salario-beneficio,...

Así pues, es conveniente, aún cayendo a veces en la reiteración de resultados, dividir el estudio en los tres casos mencionados.

A lo largo del capítulo se analizan, en un modelo de producción conjunta con idéntico número de bienes que de procesos, el sistema de cantidades

$$Bx = Ax + d \qquad (1)$$

y el de precios

$$pB = (1+r)pA + wa \qquad (2)$$

estudiando la existencia de solución semipositiva para ambos sistemas.

4.2 N*-MATRICES

En esta sección se considera que la matriz del modelo económico de producción conjunta

$$M \equiv B - A$$

es una N*-matriz, esto es, puede expresarse en la forma

$$M = D - C \; ; \; C \geq 0, \; D \geq 0, \; D^{-1} \geq 0 \qquad [1]$$

Como se probó en el capítulo 2, la matriz D es diagonal salvo permutación. Si las matrices de inputs A y outputs B verifican la condición [1], entonces B será diagonal salvo permutación y cada sector produce una única mercancia, con lo cual el modelo resulta ser de producción simple. Así pues, hay que eliminar este caso para modelos de producción conjunta. En el caso general, es posible elegir las matrices D y C de modo que

$$B = D + H$$

$$A = C + H$$

siendo H una matriz semipositiva. Los sistemas de cantidades y precios se pueden reescribir con las nuevas matrices adoptando la forma

$$Dx = Cx + d \qquad (1')$$

$$pD = (1+r)pC + rpH + wa \qquad (2')$$

donde las matrices

$$M = D - C$$

$$M(r) = D - [(1+r)C + rH]$$

son N^*-matrices para todo $r \geq 0$.

Bajo el supuesto de que M es una N^*-matriz se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.-

Dado un modelo económico, cuya matriz

$$M \equiv B - A$$

es una N^*-matriz, son equivalentes :

(a) El sistema es totalmente productivo

(b) El sistema es productivo

(c) El sistema es rentable

(d) Existe $R > 0$, tal que para cualquier $r \in [0,R[$, el sistema

$$pB = (1+r)pA + wa$$

posee solución $p \geq 0$

(e) Si existe un vector de precios $p \geq 0$, tal que $pM \leq 0$, entonces $p=0$

Demostración

La equivalencia entre las condiciones (a), (b), (c) y (e) se deduce de los resultados de la sección 2.3. Tomando r=0, la condición (d) implica el resto de condiciones. Resta ver que

$$(a) \implies (d).$$

Para ello, se considera la matriz

$$M(r) = B - (1+r)A \quad , \quad r \geq 0 \ .$$

Teniendo en cuenta que M es una N*-matriz, se puede expresar en la forma

$$M = D - C \ ; \ C \geq 0, \ D \geq 0, \ D^{-1} \geq 0$$

y las matrices B y A, serán

$$B = D + H$$

$$A = C + H$$

con $H \geq 0$.

Entonces, M(r) se puede escribir como

$$M(r) = D - [(1+r)C + rH]$$

que es una N*-matriz, para todo $r \geq 0$.

Por otro lado, considerando la composición de funciones

$$r \to T(r) = [(1+r)C + rH]D^{-1} \to \lambda^*(T(r))$$

da lugar a una función continua, creciente, y para r=0 se tiene

$$\lambda^*(T(0)) < 1 \ .$$

Por tanto, existirá un número real positivo R, tal que

$$\lambda^*(T(R)) = 1 \quad ,$$

y para cada $r \in [0,R[$, $\lambda^*(T(r)) < 1$. Luego M(r) posee inversa semipositiva y se cumple (d).

C.Q.D.

Así pues, en este tipo de modelos de producción conjunta, la condición de productividad

$$[\text{existe} \quad x \geq 0 \quad \text{tal que} \quad Bx > Ax\,]$$

asegura la existencia de niveles de actividad no negativos capaces de satisfacer cualquier vector de demanda final, así como la existencia de precios de equilibrio semipositivos siempre que la tasa de beneficio no supere un cierto valor R. Además, aparece una nueva condición equivalente fácilmente interpretable en términos económicos. Esta condición

$$[p \geq 0 \quad , \; pM \leq 0 \;\Longrightarrow\; p = 0\,]$$

indica que precios no negativos proporcionan, en al menos un sector, un valor del output neto estrictamente positivo.

En el teorema que figura a continuación se obtiene también un conocido resultado.

Teorema 2.-

En los términos del teorema anterior, si el modelo es productivo, los precios, medidos en relación a la tasa de salario

$$\hat{p} = p/w \quad ,$$

crecen cuando lo hace r y tienden a infinito cuando r se acerca a la tasa máxima de beneficio R.

Demostración.-

Para obtener este resultado, basta observar que para cara $r \in [0,R[$ los precios en términos de salario vienen dados, siguiendo la notación del teorema 1, por

$$\hat{p}(r) = aD^{-1}(I + T(r) + (T(r))^2 + \ldots)$$

serie que crece cuando lo hace r, y que es divergente cuando r=R.

C.Q.D.

Estos dos teoremas muestran que estos modelos de producción conjunta se comportan de manera similar a los de producción simple. Si se analiza con detenimiento la hipótesis realizada

M es una N*-matriz

se observa que en M sólo aparece un término positivo en cada fila y columna, es decir, cada sector produce, mirando únicamente el output neto, sólo una mercancía, siendo bajo este punto de vista un modelo de producción simple, aunque por sus características técnicas no lo sea. El siguiente ejemplo muestra un modelo de este tipo.

EJEMPLO 4.1

Sean las matrices de outputs e inputs

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El modelo que definen no es de producción simple, ya que los sectores producen más de una mercancía, pero la matriz del sistema

$$M = B - A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es una N*-matriz y cada sector, como se observa, produce un solo bien en términos de output neto.

4.3 B-MATRICES

En este epígrafe se generalizan los resultados de la sección anterior al caso más general en que M es una B-matriz, esto es, existen unas matrices semipositivas D y C, tales que

1. $M = D - C$, D regular
2. Si para un x, $Dx \geq 0$, entonces $Cx \geq 0$
3. Si para un x, $Dx \geq 0$ y $Mx \geq 0$, entonces $x \geq 0$

El caso particular en que las matrices de outputs y de inputs verifican estas condiciones se estudiará en la siguiente sección. Se analiza ahora el caso más general.

La primera de las condiciones implica la existencia de una matriz H, cuyos elementos pueden tener signo arbitrario, de manera que

$$B = D + H$$

$$A = C + H$$

Se verifican, en el caso de que M sea una B-matriz, propiedades análogas a las obtenidas en la sección anterior para N*-matrices.

Teorema 3.-

Dado un modelo de producción conjunta, cuya matriz

$$M \equiv B - A$$

es una B-matriz, las siguientes condiciones son equivalentes :

(a) El sistema es totalmente productivo

(b) El sistema es productivo

(c) El sistema es rentable

(d) Existe $R > 0$, de manera que para cualquier $r \in [0,R[$ el sistema

$$pB = (1+r)pA + wa$$

posee solución $p \geq 0$

(e) Para todo $p \geq 0$, tal que $pM \leq 0$, se tiene que $p=0$

Demostración.-

Como en el teorema 1, utilizando ahora los resultados de la sección 2.4, basta probar que (a) ⟹ (d). Para ello, sea

$$M(r) = B - (1+r)A = (I - rAM^{-1})M$$

Esta matriz posee inversa semipositiva siempre que

$$\lambda^*(rAM^{-1}) < 1 \quad ,$$

esto es, cuando

$$r < \frac{1}{\lambda^*(AM^{-1})} - 1$$

Definiendo la tasa máxima de beneficio como

$$R = \frac{1}{\lambda*(AM^{-1})} - 1$$

se tiene que para todo $r \in [0,R[$

$$M(r)^{-1} = M^{-1}(I - rAM^{-1})^{-1}$$

que es semipositiva por ser producto de matrices semipositivas, con lo cual se tiene probada la condición (d).

C.Q.D.

NOTA

Como se observa en la prueba de este teorema, la tasa máxima de beneficio R, únicamente depende de la matriz del sistema M y de la matriz de inputs A, siendo independiente de las matrices que proporcionan a M estructura de B-matriz (lo mismo ocurre en el caso de las N*-matrices). Por tanto, en caso de existir varias descomposiciones distintas de M como B-matriz, resulta irrelevante cual se elija, siendo de interes únicamente que M posee dicha estructura.

Se verifica asímismo, el teorema que figura a continuación.

Teorema 4.-

En un modelo de producción conjunta, productivo, cuya matriz es una B-matriz, los precios medidos en términos del salario crecen cuando lo hace r, tendiendo a infinito cuando r se acerca a la tasa máxima de beneficio R.

Demostración.-

Basta observar que si $r, r' \in [0, R[$ las matrices $M(r)$ y $M(r')$ poseen inversa semipositiva y son, por tanto, B-matrices. Además si $r < r'$

$$M(r') \leq M(r)$$

de donde

$$M(r)^{-1} \leq M(r')^{-1}$$

con lo cual

$$\hat{p}(r) \leq \hat{p}(r')$$

Por otra parte, cuando r tiende a R, la serie que define la matriz $M(r)^{-1}$ se hace divergente a infinito y lo mismo ocurre con los precios

$$\hat{p}(r) = a\, M(r)^{-1}$$

C.Q.D.

Resulta difícil explicar el significado de las condiciones que definen a una B-matriz, ya que no se posee información sobre la descomposición de M que le proporciona tal estructura, ni sobre la matriz H que la relaciona con las matrices de inputs y outputs. Sin embargo una cosa es clara :

> si un sistema es totalmente productivo, entonces M es una B-matriz.

Luego si se desea tener un modelo con tal propiedad deben construirse de modo que su matriz esté en esta clase. Así pues, podría decirse que suponer que M es B-matriz es el elemento de partida para construir sistemas totalmente productivos.

4.4 UN MODELO PARTICULAR

En esta sección se considera el modelo de producción conjunta, sobre el que se realizan las siguientes hipótesis adicionales :

(1) La matriz B de outputs es regular

(2) Para cada x de R^n si

$$Bx \geq 0 \text{ , entonces } Ax \geq 0$$

(3) Para cada x de R^n si

$$Bx \geq 0 \text{ y } Mx \geq 0 \text{ , entonces } x \geq 0$$

La matriz del sistema M es, por tanto, una B-matriz y se cumplirán los resultados de la sección 4.3. No obstante, en este caso, las propias matrices de inputs y outputs proporcionan la descomposición adecuada. Ello tiene como consecuencia que el modelo funciona, en el sistema de precios, de modo más simple. Bajo estas condiciones, la tasa máxima de beneficio admisible resulta ser

$$R = \frac{1}{\lambda^*} - 1$$

siendo λ^* el autovalor generalizado de Frobenius de la matriz A con respecto a B (como se observa, tiene la misma expresión que en producción simple).

Por el teorema 3, cualquiera de las condiciones (a)-(e) es equivalente a la resolubilidad fuerte del sistema. Se introduce así una nueva hipótesis en el modelo

(4) Productividad

[Existe $x \geq 0$ tal que $Bx > Ax$]

La interpretación de este supuesto es sencilla, además de ser habitual en la literatura sobre el tema. Se pide que el sistema sea capaz de satisfacer una cierta demanda externa positiva de todos los bienes, asegurando de este modo la posibilidad de que para cualquier $d \geq 0$, exista un nivel de actividad $x \geq 0$, de manera que

$$Mx > d$$

En orden a interpretar las condiciones (2) y (3) impuestas en este modelo, es coveniente reescribirlas de otra forma. Para ello, se consideran dos niveles de actividad

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ arbitrarios.

Entonces, las condiciones vienen dadas por

(2) $Bx_1 \geq Bx_2 \implies Ax_1 \geq Ax_2$,

esto es, si el output bruto obtenido cuando los sectores se activan al nivel x_1 es superior, en todas las mercancías, al obtenido cuando el nivel es x_2, lo mismo ocurre con los inputs utilizados.

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} Mx_1 \geq Mx_2 \\ Bx_1 \geq Bx_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \geq x_2 \ ,$$

es decir, si con el nivel x_1 se obtiene, para todas las mercancías, un output bruto y neto mayor o igual que el obtenido con el nivel x_2, el primer nivel será, en cada sector, mayor o igual al segundo.

La primera de las condiciones

(1) B es regular ,

es un mero requerimiento técnico y su significado es que los procesos, en cuanto a su output respectivo, son independientes. Esta es una condición bastante usual cuando se consideran modelos con idéntico número de bienes que de procesos productivos.

Un modelo de producción conjunta con estas características funciona de modo análogo a los modelos de producción simple. A continuación se proporciona un ejemplo de un modelo de este tipo.

EJEMPLO 4.2

Se considera un sistema con tres bienes y tres sectores productivos, cuyas matrices de inputs y outputs son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector de requerimientos de trabajo

$$a = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \ .$$

La matriz del sistema es

$$M = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que da lugar a un sistema totalmente productivo, teniendo, mediante las matrices B y A, estructura de B-matriz. En este caso no cabe ninguna interpretación como producción simple.

Para este modelo se cumplen además otras interesantes propiedades de los modelos de producción simple, como la existencia de mercancía patrón de Sraffa(1), la relación entre las variables distributivas r y w, así como la no repetición, en general, de precios a distintas tasas de beneficio. Estas propiedades se prueban en los teoremas que aparecen a continuación.

Teorema 5.-

Para un modelo de producción conjunta, cumpliendo los supuestos (1)-(4), puede encontrarse una mercancía patrón de Sraffa, y es posible establecer una relación entre las variables distributivas con independencia de los precios.

Demostración.-

Sea $x \in R^n$ el autovector generalizado asociado a $\lambda^* = \rho(A_B)$, esto es

$$Ax = \lambda^* Bx \quad ; \quad Bx \geq 0 \ ,$$

normalizado con

$$ax = 1 \ .$$

---

(1) Sraffa define la mercancía patrón como un vector de bienes $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de manera que su valor es independiente de la distribución elegida.

Se define como mercancía patrón al vector

$$y^* = Bx \geq 0 \ .$$

Tomando como numerario del sistema de precios la expresión

$$p(B - A)x = 1 \quad ,$$

se obtienen las siguientes propiedades :

1. El valor de la mercancía definida como patrón no depende de la distribución
2. Es posible obtener una relación entre las variables distributivas independiente del sistema de precios

Para obtener la primera cuestión, ya que

$$R = \frac{1}{\lambda^*} - 1$$

se tiene que

$$(B - A)x = RAx$$

y, multiplicando por p

$$1 = RpAx$$

de donde, sustituyendo Ax,

$$pBx = \frac{1+R}{R}$$

esto es,

$$py^* = \frac{1+R}{R}$$

con lo que el valor de la mercancía patrón no depende de la distribución.

Para analizar la segunda cuestión, sea el sistema de precios

$$pB = (1+r)pA + wa \quad ,$$

de donde

$$p(B - A) = rpA + wa$$

Multiplicando por el vector x, queda

$$1 = rpAx + w$$

Finalmente, se tiene

$$r = R(1 - w) \quad ,$$

expresión que relaciona las tasas de beneficio y salario con independencia de los precios.

C.Q.D.

NOTA

Si se considera el pago de salarios adelantado, el sistema de precios del modelo tiene la expresión

$$pB = (1+r)(pA + wa)$$

y la relación que se obtiene entre las variables distributivas es

$$r = \frac{(1-w)R}{1 + wR}$$

de modo idéntico a la producción simple.

<u>Teorema 6</u>.-

En un modelo de producción conjunta, con las condiciones (1)-(4), y siendo la matriz AB^{-1} indescomponible, si un vector de precios se repite para dos valores distintos de r, entonces se repite para todo r en el intervalo $[0,R[$.

<u>Demostración</u>.-

Sean dos pares distributivos (r,w) y (r',w'), con $r \neq r'$, tales que un mismo vector de precios p, es solución de los sistemas

$$pB = (1+r)pA + wa$$

$$pB = (1+r')pA + w'a$$

Si se supone que $r > r'$, y se restan las expresiones anteriores, se tiene

$$0 = (r - r')pA + (w - w')a ,$$

de donde el vector a puede expresarse en la forma

$$a = \alpha pA$$

siendo α un número real positivo. Sustituyendo el valor de a, queda

$$pB = (1+r)pA + w\alpha pA =$$

$$= [(1+r) + w\alpha]pA$$

luego p es un autovector generalizado semipositivo y, dado que la matriz AB^{-1} es indescomponible, se

Volver al índice/Tornar a l'índex

debe cumplir que

$$(1+r) + w\alpha = \frac{1}{\lambda^*}$$

Sea ahora $\tilde{r}$ un valor cualquiera del conjunto $[0,R[$. El vector p será solución del sistema de precios, fijada la tasa $\tilde{r}$, si existe $\tilde{w} \geq 0$, tal que

$$pB = (1+\tilde{r})pA + \tilde{w}a$$

Realizando las sustituciones adecuadas, según las condiciones obtenidas,

$$pB = [(1+\tilde{r})\lambda^* + \tilde{w}\alpha\lambda^*]pA$$

ecuación que se cumplirá si

$$(1+\tilde{r})\lambda^* + \tilde{w}\alpha = 1$$

De aquí, se deduce que

$$\tilde{w} = \frac{1 - (1+\tilde{r})}{\alpha\lambda^*}$$

Sólo resta probar que $\tilde{w} > 0$, hecho que resulta inmediato por ser

$$\tilde{r} < \frac{1}{\lambda^*} - 1 = R$$

Luego p es solución del sistema de precios a la tasa de beneficio $\tilde{r}$.

CAPITULO 5

MODELOS DE PRODUCCION CONJUNTA RESOLUBLES (2)

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo, continuación del anterior, se estudian sistemas de producción conjunta resolubles abandonando ahora los supuestos de que la matriz es regular, en primer término, y finalmente que es cuadrada, esto es, que existan tantos procesos como bienes. En el análisis que se efectua se utilizan los resultados matemáticos obtenidos en el capítulo 3.

La hipótesis de regularidad del sistema se abandona al analizar el modelo cerrado, en el que se mantiene el supuesto de que existen tantos procesos como bienes. Aparece, en este caso, un sistema de ecuaciones lineales homogeneo, en el que se debe exigir que la matriz no sea regular para que existan soluciones distintas de cero. Este modelo, analizado en la sección 5.2, resulta resoluble bajo las hipótesis de que la matriz esté en la clase de las B-matrices (por tanto, válido si se trata de una N o N*-matriz). Cuando el modelo es de producción simple existen teoremas que afinan estos resultados. Estos teoremas se generalizan introduciendo una cierta indescomponibilidad del modelo. Finalmente se recoge un resultado, referido al sistema de precios de este modelo, al cual se hacen unos breves comentarios.

En la sección 5.3 se analiza el caso más general de producción conjunta, donde no hay ninguna relación "a priori" entre el número de bienes y el de sectores, pudiendo estos ser distintos. Esto da lugar a sistemas con distinto número de ecuaciones que de incógnitas (de los dos sistemas estudiados, cantidades y precios, uno tendrá más ecuaciones que incógnitas y el otro a la inversa). En el capítulo 3 se probó que para obtener la resolubilidad en este tipo de sistemas, es condición necesaria que la matriz del modelo esté en la clase de las B-matrices generalizadas. Se plantea así un modelo económico en que se exige que las matrices de outputs e inputs proporcionen a la matriz del sistema este tipo de estructura, estudiando que propiedades adicionales pueden obtenerse y viendo que este tipo de modelos funcionan de manera similar a los de producción simple.

5.2 EL MODELO CERRADO

Se define, en primer lugar, el modelo cerrado de Leontieff para un modelo de producción simple, observando que un razonamiento análogo puede seguirse con modelos de producción conjunta. Estos modelos dan lugar a sistemas de ecuaciones homogeneos, tanto en el sistema de cantidades como en el de precios, para los cuales se define un nuevo concepto de **resolubilidad**, que es analizado para las clases de matrices introducidas hasta ahora (N-matrices, N*-matrices y B-matrices). En el caso de producción simple, se recoge un resultado adicional (Berman & Plemmons, 1979) referido al sistema de cantidades, según el cual los niveles de actividad pueden obtenerse estrictamente positivos. Este resultado se extiende a modelos más generales. Finalmente, en el análisis del sistema de precios, se recoge un resultado (Fujimoto & Krause, 1985) que asegura la existencia de una tasa de beneficio uniforme positiva y precios no negativos, que satisfacen dicho sistema. Para ello, se utiliza la propiedad de descomposición no dominante, primera de las condiciones que aparecen en la definición de B-matriz y B-matriz generalizada. A lo largo de esta sección se supone un modelo con tantos bienes como procesos productivos.

En orden a introducir el modelo cerrado, se supone que la demanda final depende de la cantidad total de trabajo utilizada en la producción, por medio de unos coeficientes fijos. Denominando ξ a la cantidad total de trabajo, la demanda final del bien i-ésimo, según la hipótesis establecida, vendrá dada por

$$d_i \equiv c_i \xi \qquad ; \; i = 1,2,\ldots,n$$

Si se tiene un modelo de producción simple, el sistema de cantidades viene representado por la identidad

$$x \equiv Ax + d \qquad (1)$$

siendo la cantidad total de trabajo empleado

$$\xi \equiv L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

donde

$$L_i \equiv a_i x_i \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,n$$

es la cantidad de trabajo que se utiliza en el sector i-ésimo. Entonces, la expresión (1) puede escribirse en la forma

$$x \equiv Ax + \xi c$$

o bien,

$$x \equiv Ax + (ca)x$$

Finalmente, denominando C a la matriz cuadrada, de orden n×n,

$$C \equiv A + ca \geq 0$$

resulta

$$x \equiv Cx$$

esto es,

$$Mx \equiv 0 \qquad (1')$$

siendo M la N-matriz

$$M \equiv I - C$$

La existencia de solución distinta de cero para un sistema del tipo (1'), está vinculada a la singularidad de la matriz M, único caso que resulta de interés analizar.

Por otro lado, el sistema de precios para un modelo de producción simple, con salarios adelantados, viene dado por la ecuación

$$p = (1+r)(pA + wa) \qquad (2)$$

Bajo la hipótesis introducida, debe verificarse que

$$w\xi \equiv pd$$

de donde la tasa de salario debe venir dada por la identidad

$$w \equiv pc$$

Sustituyendo esta expresión, el sistema (2) queda en la forma

$$p = (1+r)pC \qquad (2')$$

ecuación que representa el sistema de precios de este modelo.

En resumen, el modelo cerrado de producción simple viene caracterizado dos ecuaciones, cantidades y precios, que son

$$x = Cx \qquad (1')$$

$$p = (1+r)pC \qquad (2')$$

donde C es una matriz cuadrada semipositiva, definida por

$$C \equiv A + ca$$

Con un razonamiento totalmente análogo, y siendo C la matriz definida anteriormente, se introduce el modelo cerrado para producción conjunta, que viene caracterizado por las ecuaciones

$$Bx = Cx \qquad (1')$$

$$pB = (1+r)pC \qquad (2')$$

donde la tasa de salario resulta ser

$$w \equiv pc$$

Se toma como matriz de este modelo a

$$M \equiv B - C$$

Se introducen, para este nuevo modelo, los conceptos de **factibilidad** y de **resolubilidad.**

DEFINICION 1.-

Un modelo cerrado, cuya matriz es M, se dice que es **factible** si existe $x \geq 0$, tal que

$$Mx \geq 0 \quad , \; Mx \neq 0$$

DEFINICION 2.-

Un modelo cerrado, de matriz M, se dice que es **resoluble** si existe $x \geq 0$, $x \neq 0$, tal que

$$Mx = 0$$

En el siguiente teorema se estudia la resolubilidad, en el sentido definido, del modelo cerrado, tanto el de producción simple como el de producción conjunta.

Teorema 1.-

Sea un modelo cerrado, cuya matriz M está en una de las siguientes condiciones :

a) M es una N-matriz, M = I - C, tal que

M es semirregular y $\lambda^*(C)=1$

b) M es una N*-matriz, M = B - C, tal que

$I - CB^{-1}$ es semirregular y $\lambda^*(CB^{-1})=1$

c) M es una B-matriz, M = B - C, tal que

$I - CB^{-1}$ es semirregular y $\lambda^*(CB^{-1})=1$

Entonces el modelo es resoluble.

Demostración.-

Por aplicación del Lema de Farkas, se tiene que exactamente uno de los dos sistemas siguientes posee solución :

(1) $Mx = 0 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad x \neq 0$

(2) $pM > 0$

El cumplimiento del sistema (2), unido a las características de la matriz M, daría lugar a que M fuera inversible y su inversa semipositiva, con lo cual $\lambda^* < 1$,en contra de las hipótesis del teorema (ver capítulos 2 y 3). Por tanto, debe tener solución el sistema (1) y el modelo es resoluble.

C.Q.D.

El resultado obtenido en el teorema 1 puede afinarse más, exigiendo indescomponibilidad en la matriz del sistema. El siguiente teorema, válido para N-matrices, es un primer paso en este sentido.

Teorema 2.-

Dado un modelo cerrado, cuya matriz M es una N-matriz singular,

$M = I - C$, con C indescomponible

son equivalentes :

(a) Existe $x > 0$ tal que $Mx \geq 0$

(b) Existe $x > 0$ tal que $Mx = 0$

(c) M es semirregular, con $\lambda^*(C) = 1$

Demostración.-

La prueba se obtiene a partir de Berman & Plemmons (1979), cap. 9, sin más que permutar la condición de semirregularidad por la convergencia de la sucesión $\{C^n\}$, ya que se tiene que, para N-matrices, son equivalentes

(1) M es semirregular y $\lambda^*(C) = 1$

(2) M es una P_0-matriz singular y la sucesión $\{C^n\}$ converge.

C.Q.D.

Un resultado similar puede obtenerse cuando se tiene una B-matriz (siendo, por tanto, válido para las N*-matrices).

Teorema 3.-

Dado un modelo cerrado, tal que M es una B-matriz singular,

$$M = B - C \quad , \quad \text{con} \quad CB^{-1} \text{ indescomponible}$$

son equivalentes :

(a) Existe $x \geq 0$ tal que $Bx > 0$, $Mx \geq 0$

(b) Existe $x \geq 0$ tal que $Bx > 0$, $Mx = 0$

(c) La matriz $I - CB^{-1}$ es semirregular con $\lambda^*(CB^{-1}) = 1$

Demostración.-

Se realizará según el siguiente esquema

(b) => (a) => (c) => (b)

(b) => (a)

Es inmediata, ya que si $Mx = 0$, entonces también se cumple que $Mx \geq 0$

(a) => (c)

Si existe $x \geq 0$, con $Bx > 0$, $Mx \geq 0$, considerando la matriz

$$N = I - CB^{-1} \quad ,$$

esta es singular y satisface que

$$Ny \geq 0 \quad , \quad y = Bx > 0$$

Aplicando el teorema 2, N es semirregular y además

$$\lambda^*(CB^{-1}) = 1$$

(c) => (b)

Por aplicación del teorema 2, existe un vector $y > 0$, tal que

$$(I - CB^{-1})y = 0$$

Tomando

$$x = B^{-1}y$$

se tiene que

$$Mx = 0$$

$$Bx > 0$$

de donde, por la definición de B-matriz,

$$x \geq 0$$

y se obtiene el resultado buscado.

C.Q.D.

Analizando ahora el sistema de precios del modelo,

$$pB = (1+r)pC$$

la existencia de solución indica que $(1/1+r)$ es un autovalor generalizado de la matriz C con respecto a B. Dado el tipo de matrices que se está utilizando (en todos los casos M es una B-matriz), se sabe que existirá, al menos, solución p semipositiva cuando $(1/1+r)$ sea igual al radio espectral

$$\rho(C_B) = \text{máx}\ \{t \in R \mid \det(tB - C) = 0\}$$

Si la matriz M es singular, entonces el radio espectral es 1, con lo cual el sistema de precios posee solución semipositiva para la tasa de beneficio $r = 0$. El siguiente teorema recoge este resultado.

Teorema 4.-

Dado un modelo cerrado, cuya matriz

$$M = B - C$$

es singular y satisface que

Para cada x tal que $Bx \geq 0 \rightarrow Cx \geq 0$,

entonces existe $p \geq 0$, $p \neq 0$, tal que

$$pB = pC$$

Demostración.-

Es una simple aplicación del teorema de Mangasarian (1971) para valores propios generalizados.

C.Q.D.

NOTA 1

Dado que las hipótesis de este teorema se verifican cuando la condición impuesta, sobre las matrices de inputs y outputs, le dan a M estructura de N-matriz, N*-matriz o B-matriz, el resultado es válido para este tipo de modelos.

NOTA 2

El teorema 4 prueba que existen precios de equilibrio no negativos para la tasa de beneficio r=0. Es posible que también existan para alguna tasa superior y, para ello, es condición necesaria y suficiente el que exista un valor propio

$$0 < \lambda < 1$$

con un vector propio semipositivo $v \geq 0$,

$$Cv = \lambda Bv$$

Entonces, para

$$r = \frac{1}{\lambda} - 1 > 0$$

el sistema de precios posee solución semipositiva.

Para finalizar, en el siguiente teorema, debido a Fujimoto & Krause (1985), se recoge un resultado aplicable a este tipo de modelos.

Teorema 5.-

Dado un modelo cerrado, cuya matriz

$$M = B - C$$

verifica la condición

para todo x tal que $Bx \geq 0 \Rightarrow Cx \geq 0$

se cumple :

a) Si B no posee ninguna fila nula, existe $p \geq 0$, tal que

$$pB = (1+r)pC \quad ; \quad 1+r > 0$$

b) Si además existe $x \geq 0$, tal que $Bx > Cx$, existe $p \geq 0$, tal que

$$pB = (1+r)pC \quad ; \quad r > 0$$

NOTA 3

1. Este resultado sigue siendo válido si se considera un modelo cerrado de producción conjunta con distinto número de bienes que de procesos. La prueba, del mismo modo que en el teorema 4, se deduce directamente del teorema de Mangasarian.

2. En la parte a) no se garantiza la no negatividad de la tasa de beneficio r, pudiendose dar el caso de que la única solución fuera para valores de r negativos.

3. Si el modelo posee tantos procesos como bienes, la condición impuesta en d) es incompatible con el hecho de que M sea una B-matriz singular y, por tanto, bajo este supuesto el sistema de cantidades no sería resoluble.

4. En el citado trabajo de Fujimoto-Krause se prueba que, en un modelo cerrado que cumple la condición de que C no posee ninguna fila nula, son equivalentes :

a) Existe $p \geq 0 \mid pB = (1+r)pC,\ 1+r > 0$

b) Existe una matriz $T \geq 0$ con, al menos, una columna estrictamente positiva, tal que

$$TBx \geq 0 \implies TCx \geq 0$$

5.3 EL MODELO ABIERTO GENERAL

En el estudio que se realiza en esta sección, se tiene un modelo abierto de producción conjunta, con m bienes y n procesos, satisfaciendo los siguientes supuestos :

(S_1) . La matriz de outputs B no posee filas ni columnas nulas.

(S_2) La matriz del modelo $M \equiv B - A$ posee estructura de B-matriz generalizada, esto es,

1. Si para un x , $Bx \geq 0$, entonces $Ax \geq 0$
2. Si para un x , $Bx \geq 0$ y $Mx \geq 0$,entonces existe $y \geq 0$, tal que $Mx = My$

(S_3) El modelo es productivo, es decir, existe $x \geq 0$, tal que $Mx > 0$

Todas estas condiciones, excepto la segunda de B-matriz generalizada, han sido anteriormente comentadas e interpretadas. En orden a realizar lo mismo con esta nueva condición, sean

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

niveles de actividad, tales que

$$Bx_1 \geq Bx_2$$

$$Mx_1 \geq Mx_2$$

entonces, el supuesto introducido indica que es posible encontrar niveles de actividad

$$y_1 \geq y_2 \geq 0 \quad ,$$

tales que

$$(Mx_1 - Mx_2) = (My_1 - My_2)$$

esto es, para disminuir el output producido, neto y bruto, es posible elegir un nivel de actividad inferior.

Bajo los supuestos introducidos, se obtiene un conjunto de resultados que muestran cómo estos modelos funcionan de modo parecido a los de producción simple.

<u>Teorema 6</u>.-

Dado un modelo que verifica los supuestos (S_1)-(S_3), se cumple que :

a) Para todo $d \geq 0$, $d \in Im(M)$, existe $x \geq 0$ tal que $Mx = d$

b) El modelo es rentable

c) Sea $R = \frac{1}{\lambda^*(T)} - 1$. Entonces, $R > 0$ y para todo

$r \in [0,R[$ y para cada $a \geq 0$, $a \in Im(M(r)')$, el sistema

$$pB = (1+r)pA + wa$$

posee solución $p \geq 0$, siendo

$M(r) = B - (1+r)A$

$T \geq 0$, tal que $A = TB$

Demostración.-

Para probar las dos primeras partes del teorema, basta ver que $\lambda^*(T) < 1$ y aplicar los resultados del capítulo 3 referentes a B-matrices generalizadas. Para ello, se utilizará la condición de productividad :

existe $x \geq 0$, tal que $Mx > 0$

Entonces, llamando $y=Bx > 0$, se tiene que

$Mx = (I - T)y > 0$, $y > 0$

de donde

$\lambda^*(T) < 1$

Con esto se tiene además que R, tal como ha sido definido, es estrictamente positivo. Para probar el resto del apartado c) se verá que, para cada r en el intervalo indicado, M(r) es una B-matriz generalizada.

Sea $x \geq 0$, tal que $Bx \geq 0$. Entonces $Ax \geq 0$ y, por tanto,

$$(1+r)Ax \geq 0$$

por lo que se cumple la primera condición.

Sea ahora $x \geq 0$, tal que

$$M(r)x \geq 0$$

$$Bx \geq 0$$

Entonces, se cumple que

$$Ax \geq 0$$

con lo cual

$$(B - A)x \geq rAx \geq 0$$

y, por ser M una B-matriz generalizada, existe un vector $y \geq 0$, tal que $Mx = My$, de donde

$$(I - T)(Bx - By) = 0$$

lo cual implica que $Bx = By$. Finalmente,

$$M(r)x = (I - (1+r)T)Bx =$$

$$= (I - (1+r)T)By = M(r)y$$

Luego $M(r)$ es una B-matriz generalizada, con

$$\rho((1+r)T) < 1$$

y la matriz B no posee filas ni columnas nulas. Por tanto, el sistema, cuya matriz es $M(r)$, es fuertemente resoluble y se verifica c).

C.Q.D.

Teorema 7.-

Se considera un modelo de producción conjunta, que verifica los supuestos (S_1)-(S_3), con rango(B)=m. Si $a \in Im(M(r)')$, para todo $r \in [0,R[$, los precios medidos en términos de salario crecen cuando lo hace r y no están acotados en la tasa máxima de beneficio R.

Demostración.-

En primer lugar, se probará que si $r_1 < r_2$, es posible elegir soluciones tales que

$$p(r_1) \geq p(r_2)$$

Para ello, dada una solución $p(r_1) \geq 0$, el sistema

$$vM(r_2) = (r_2 - r_1)p(r_1)A \geq 0$$

posee solución $v \geq 0$, por ser $M(r_2)$ una B-matriz generalizada, con $\lambda^*((1+r_2)T) < 1$. Entonces,

$$p(r_2) = p(r_1) + v \geq p(r_1)$$

es solución del sistema de precios para la tasa de beneficio r_2.

La segunda parte del teorema se verá en dos pasos : en primer lugar observando que para la tasa R el sistema de precios no posee solución, tomando a continuación una sucesión tendiendo a R y viendo que los precios no pueden estar acotados.

Así pues, se desea ver, en principio, que el sistema

$$pB = (1+R)pA + a$$

no posee solución $p \geq 0$. Aplicando el Lema de Farkas bastará probar que el sistema

$$(B - (1+R)A)x \leq 0 \quad , \quad ax > 0$$

posee solución. Al ser

$$\frac{1}{1+R} = \lambda^*(T) = \lambda^*$$

existe un vector v, tal que

$$Av = \lambda^* Bv$$

$$Bv \geq 0$$

de donde

$$(B - (1+R)A)v = 0$$

$$Bv \geq 0$$

y, al ser M una B-matriz generalizada, existe $x \geq 0$, $x \neq 0$, tal que

$$(B - A)x = (B - A)v = RAv \geq 0$$

Operando en esta expresión, se tiene que

$$Ax = Av \quad ; \quad Bx = Bv$$

y, por tanto,

$$M(R)x \leq 0 \quad , \quad ax > 0$$

Sea ahora una sucesión de números reales

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$$

que converge a R. Para cada i es posible elegir un precio p_i, de manera que

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$$

Si esta sucesión estuviera acotada, al ser creciente también sería convergente y, por tanto, existirían precios no negativos para la tasa de beneficio R. Así pues, esta sucesión no está acotada.

C.Q.D.

De modo análogo a como se construyó en el capítulo anterior, también en este modelo es posible definir una mercancía patrón, cuyo valor es independiente de la distribución. Para ello, es necesario, como en el teorema 7, exigir la condición

$$\text{rango}(B) = m$$

junto a los supuestos (S_1)-(S_3) . Bajo estas condiciones, asociado a $\lambda^* = \lambda^*(T)$, existe x tal que

$$Ax = \lambda^* Bx \quad , \; Bx \geq 0 \; , \; ax = 1$$

Se define la mercancía patrón como el vector

$$y^* = Bx$$

Entonces, se verifica que

(1) $py^* = \frac{1+R}{R}$

esto es, el valor de la mercancía definida como patrón es independiente de la distribución.

(2) $r = R(1-w)$

igualdad que proporciona la relación entre las variables distributivas.

La prueba de las condiciones (1) y (2) es análoga a la efectuada, en el capítulo 4, para probar la existencia de mecancía patrón cuando el sistema estaba definido por una B-matriz.

Finalmente, en el siguiente teorema, se muestra como debe ser la matriz de un sistema para que este de lugar a un modelo de producción conjunta resoluble (la demostración se obtuvo en el capítulo 3).

<u>Teorema 8</u>.-

Dado un modelo de producción conjunta, cuya matriz es $M = B - A$, y tal que existe $p \geq 0$, con $pM > 0$. Entonces son equivalentes :

a) M es una B-matriz generalizada con $\lambda^*(T) < 1$

b) El modelo es fuertemente resoluble

Se proporciona a continuación un ejemplo de un modelo con estas características.

EJEMPLO

Se supone una economía con dos bienes y tres procesos productivos, definidos por las matrices de outputs e inputs

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 5/8 & 1/2 \\ 1/2 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

APENDICES

1. TEOREMAS DE PERRON-FROBENIUS

Este apéndice constituye una recopilación de resultados referentes al autovalor máximo de una matriz, que en el caso de una matriz cuadrada semipositiva es la raíz de Frobenius (1908) y en el caso general se refiere a la extensión debida a Mangasarian (1971). Los resultados de este último artículo se pueden aplicar a las N* y B-matrices, obteniendo corolarios que se utilizan en los capítulos 2 y 3. Las pruebas de los teoremas correspondientes a la raíz de Frobenius pueden localizarse en Herrero-Silva-Villar (1984).

Teorema 1.- (PERRON 1907-FROBENIUS 1908)

Sea A una matriz cuadrada semipositiva. Entonces :

(a) La matriz A posee un valor propio, $\lambda^*(A) \geq 0$, llamado raíz de Frobenius de A, que acota en módulo al resto de autovalores de la matriz

(b) Asociado a $\lambda^*(A)$ existe un vector propio $v \geq 0$

(c) Si $A \geq B \geq 0$, entonces $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(B)$

Además, si la matriz A es indescomponible, el vector propio asociado a la raíz de Frobenius puede tomarse estrictamente positivo, no existiendo para el resto de valores propios autovectores no negativos asociados.

<u>Teorema 2</u>.- (BRAUER 1946-SOLOW 1952)

Sea A una matriz cuadrada semipositiva, y sea r_i la suma de los elementos de la i-ésima fila de A. Si

$$r \geq r_i \quad \text{para todo } i=1,2,\ldots,n$$

entonces

$$r \geq \lambda^*(A)$$

Una propiedad análoga se cumple con las sumas de columna de la matriz A.

<u>Teorema 3</u>.-

Sea A una matriz cuadrada semipositiva y $\lambda^*(A)$ su raíz de Frobenius, entonces :

(1) Si para un vector no nulo $v \geq 0$, $Av \geq \mu v$, entonces $\lambda^*(A) \geq \mu$

(2) Si para un vector $v > 0$, $Av \leq \mu v$, entonces $\lambda^*(A) \leq \mu$

(3) Si para un vector no nulo $v \geq 0$,

$Av < \mu v$, entonces $\lambda^*(A) < \mu$

(4) Si para un vector no nulo $v \geq 0$,

$Av > \mu v$, entonces $\lambda^*(A) > \mu$

Lema.- (MANGASARIAN 1971)

Sea A y B matrices de orden $m \times n$; entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(1) Para todo x tal que $xB \geq 0$, entonces

$$xA \geq 0$$

(2) Existe una matriz cuadrada $T \geq 0$, tal que

$$A = BT$$

Teorema 4.- (MANGASARIAN 1971)

Sean A y B matrices de orden $m \times n$, tales que

$$xB \geq 0 \implies xA \geq 0$$

Entonces :

(a) El sistema

$$Av = \lambda Bv$$

$$v \geq 0 \ ; \ v \neq 0$$

posee solución para algún $\lambda \geq 0$

Si además rg(A) ó rg(B)=n, entonces $\lambda = \rho(A_B)$

(b) Si rg(A) ó rg(B)=n, el sistema

$$yA = \lambda yB$$

$$yB \geq 0 \quad , \quad y \neq 0$$

posee solución para algún $\lambda \geq 0$

Si además m=n, entonces

$$\lambda = \rho(A_B) = \rho(A'_{B'})$$

<u>Corolario 1</u>.-

Si A y B son matrices cuadradas, con B regular y A, B^{-1} semipositivas, entonces

(1) $\rho(A_B) = \rho(A'_{B'}) = \lambda^*(AB^{-1}) = \lambda^*(B^{-1}A)$

(2) El problema

$$Av = \lambda Bv \quad ; \quad v \neq 0$$

es equivalente al problema

$$(B^{-1}A)v = \lambda v \quad ; \quad v \neq 0$$

<u>Corolario 2</u>.-

Sean A , B matrices cuadradas tales que B es regular y $AB^{-1} \geq 0$, entonces

(1) El sistema

$$Av = \lambda Bv$$

$$Bv \geq 0 \quad , \quad v \neq 0$$

posee solución $\lambda \geq 0$

(2) El sistema

$$yA = \mu yB$$

$$y \geq 0 \ , \ y \neq 0$$

posee solución $\mu \geq 0$

Además, las soluciones de los sistemas (1) y (2) coinciden

$$\lambda = \mu = \rho(A_B) = \rho(A'_{B'}) = \lambda^*(AB^{-1})$$

Las pruebas de ambos corolarios son inmediatas a partir del teorema 4 y el correspondiente para las matrices traspuestas.

2. MATRICES DE SIGNOS

Este apéndice es un estracto de un trabajo de Johnson (1983), en que se analizan las matrices según su patrón de signos, esto es, atendiendo únicamente al signo de cada elemento de la matriz y no al valor numérico de dicho elemento. En el citado trabajo se caracterizan los patrones de signos que admiten la posibilidad de que una matriz con tal patrón posea inversa semipositiva. Este hecho resulta útil para determinar si una matriz no posee inversa semipositiva -siempre que no esté en uno de los patrones adecuados-, pero no clasifica las clases de matrices cuya inversa sí lo es.
A partir de aquí se obtienen dos sencillos corolarios , de los cuales el segundo se aplica en el estudio de las N*-matrices (cap. 2, sec. 4).

Definiciones previas.-

1. Una matriz cuadrada M se dice descomponible si es semejante, vía permutación, a una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \qquad [1]$$

donde las matrices M_{ii} son cuadradas. En caso contrario se dice que la matriz es indescomponible.

2. Una matriz cuadrada M se dice que es parcialmente descomponible si es equivalente, mediante matrices de permutación, a una matriz del tipo [1]. En caso contrario se dice que es completamente indescomponible.

Una matriz parcialmente descomponible es equivalente, mediante permutaciones, a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ 0 & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & M_{kk} \end{pmatrix} \qquad [2]$$

donde cada submatriz M_{ii} es cuadrada, completamente indescomponible o la matriz nula de orden 1.

3. Dada una matriz cuadrada M, se construye su patrón de signos S de la siguiente forma :

si $m_{ij} > 0 \Rightarrow s_{ij} = +$

si $m_{ij} < 0 \Rightarrow s_{ij} = -$

si $m_{ij} = 0 \Rightarrow s_{ij} = 0$

La matriz de signos S define una clase de matrices. Se intenta discutir si, en la clase definida por S, existe una matriz regular, cuya inversa es semi-positiva.

4. Un patrón de signos S se dice complementario si es equivalente por permutación a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

tal que $S_{12} \geq 0$, $S_{21} \geq 0$, pudiendo no aparecer alguna de estas submatrices.

Si una matriz de signos S posee una fila o columna que no contenga ningun signo + (ó ningún signo -), entonces es complementaria.

Si la matriz es de orden n=1, el único patrón con inversa no negativa es $S = (+)$. Este es un caso atípico que no sigue la norma general, y en lo que sigue se supondrá $n \geq 2$.

Teorema 1.-

Sea S una matriz de signos completamente indescomponible. En la clase definida por S hay una matriz con inversa semipositiva si, y sólo si, S es no complementaria.

Corolario 1.-

Si M es una matriz completamente indescomponible y posee una fila o columna sin términos positivos o negativos, entonces si M es regular su inversa M^{-1} no es semipositiva.

La prueba es inmediata a partir del teorema 1 y la definición 4.

Teorema 2.-

Sea S un patrón de signos parcialmente descomponible tomado en la forma [2]. Entonces, en la clase definida por S hay una matriz con inversa semipositiva si, y sólo si,

(a) Cada submatriz completamente indescomponible S_{ii} es no complementaria

(b) Ninguna submatriz de la forma

$$\left(S_{i,i+1}, \ \ldots \ , S_{ij} \right)$$

o en la forma

$$\begin{pmatrix} S_{ij} \\ \vdots \\ S_{j-1,j} \end{pmatrix}$$

es no negativa y no nula

$$1 \leq i < j \leq k$$

Corolario 2.-

Si A es una matriz cuadrada semipositiva, con $A^{-1} \geq 0$, entonces A es equivalente por permutación a una matriz diagonal positiva.

Demostración.-

Si A es completamente indescomponible, el corolario 1 indica que A^{-1} no es semipositiva. Por tanto, A debe ser parcialmente descomponible y es equivalente por permutación a una matriz en la forma [2]. Las submatrices diagonales deben ser cuadradas, completamente indescomponibles y no complementarias. Al ser $A \geq 0$, deben ser

$$A_{ii} = (a_{ii})_{1\times 1} \quad ; \quad a_{ii} \geq 0$$

y las submatrices por encima de la diagonal deben ser todas nulas.

Así pues, la matriz A es equivalente por permutación a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

C.Q.D.

Nótese que el recíproco de este resultado es también cierto, esto es, si A es equivalente por permutación a una matriz diagonal positiva, entonces $A^{-1} \geq 0$

3. INVERSAS GENERALIZADAS DE MATRICES

En este apéndice se ofrece una introducción a la teoría de inversas generalizadas de matrices. La idea es encontrar, para una matriz dada M, una matriz M^g que haga las funciones de inversa de M, coincidiendo con M^{-1} si M es regular. Existen múltiples definiciones de inversa generalizada, dependiendo del marco en que se utiliza y las propiedades deseadas. Hay, no obstante, una condición exigida en la mayoría de ellas

$$M\,M^g\,M = M$$

y se podría definir la inversa generalizada de una matriz con esta condición (hecho que es habitual en la literatura sobre el tema).

En el capítulo 3 se utilizan básicamente dos inversas generalizadas, las denominadas {1,2}-inversas y las grupo-inversas.

Para un estudio más completo, y consultar las pruebas de los teoremas que se enuncian, puede verse Graybill (1969), Boullion & Odell (1971) y Rao & Mitra (1971), entre otros.

En este apéndice se construye, a partir de la grupo-inversa, una {1,2}-inversa utilizada en el estudio de las N* y B-matrices singulares.

DEFINICION 1.-

Sea M una matriz de orden $m \times n$. Se dice que una matriz M^g de orden $n \times m$, es una {1}-inversa de M si

$$\{1\} \qquad M\, M^g\, M = M$$

Esta inversa, que siempre existe, es también denominada inversa generalizada de M, o inversa condicional de M.

Teorema 1.-

Cualquier matriz M posee una {1}-inversa, que puede no ser única.

Teorema 2.-

Si M es una matriz cuadrada y regular, sólo posee una {1}-inversa que coincide con M^{-1}.

Teorema 3.-

Dada una matriz arbitraria M, el sistema

$$Mx = d$$

posee solución si, y sólo si,

$$M\ M^g\ d = d\ ,$$

siendo M^g cualquier {1}-inversa de M. En caso de existir solución, el conjunto de soluciones del sistema viene dado por

$$x = M^g\ d + (I - M^g\ M)h$$

siendo h un vector arbitrario de R^n.

DEFINICION 2.-

Se llama índice de una matriz cuadrada M, al menor entero no negativo k, tal que

$$\mathrm{Im}(M^k) = \mathrm{Im}(M^{k+1})$$

Nótese que si M es regular su índice es 0.

DEFINICION 3.-

Dada una matriz cuadrada M, se llama grupo-inversa de M a una matriz $M^{\#}$, tal que

{1} $\quad M\ M^{\#}\ M = M$

{2} $\quad M^{\#}\ M\ M^{\#} = M^{\#}$

{3} $\quad M\ M^{\#} = M^{\#}\ M$

Teorema 4.-

Sea M una matriz cuadrada. Entonces

(a) $M^{\#}$ existe si, y sólo si, $\mathrm{ind}(M) \leq 1$

(b) Si $M^{\#}$ existe es única

(c) Si M es regular, $M^{\#} = M^{-1}$

NOTA

Si el índice de una matriz singular M es igual a 1, la forma de Jordan asociada a esta matriz es del tipo

$$J = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo C una submatriz cuadrada regular. Por tanto,

$$M = P\, J\, P^{-1}$$

Entonces, la grupo-inversa de M es

$$M^{\#} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

DEFINICION 4.-

Dada una matriz M, de orden arbitrario, se dice que M^g es una {1,2}-inversa de M si

{1} $\qquad M\, M^g\, M = M$

{2} $\qquad M^g\, M\, M^g = M^g$

Teorema 5.-

Cualquier matriz M posee una {1,2}-inversa que puede no ser única. Si M es regular, la única {1,2}-inversa es M^{-1}

Volver al índice/Tornar a l'índex

Proposición 1.-

Dada una matriz cuadrada M, de manera que se puede descomponer en la forma

$$M = N\, B \quad ; \; B \text{ regular} \; , \; \operatorname{ind}(N) \leq 1$$

entonces la matriz

$$M^{g} = B^{-1}\, N^{\#}$$

es una {1,2}-inversa de M

Demostración.-

$$\{1\} \qquad M\, M^{g}\, M = M$$

$$M\, M^{g}\, M = N\, B\, B^{-1}\, N^{\#}\, N\, B =$$

$$= N\, N^{\#}\, N\, B = N\, B = M$$

$$\{2\} \qquad M^{g}\, M\, M^{g} = M^{g}$$

$$M^{g}\, M\, M^{g} = B^{-1}\, N^{\#}\, N\, B\, B^{-1}\, N^{\#} =$$

$$= B^{-1}\, N^{\#}\, N\, N^{\#} = B^{-1}\, N^{\#} = M^{g}$$

C.Q.D.

BIBLIOGRAFIA

ABRAHAM-FROIS, G. & BERREBI, E. Theory of Value, Prices and Accumulation. Cambridge University Press, 1979.

BAZARAA, M.S. & SHETTY, C.M. Nonlinear Programming. John Wiley & Sons, 1979.

BERMAN, A. & PLEMMONS, R.J. "Eight Tipes of Matrix Monotonicity". Linear Algebra and its Applications, 13, pp. 115-123, 1976.

BERMAN, A. & PLEMMONS, R.J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciencies. Academic Press, New York, 1979.

BIDARD, C. "The Maximum Rate of Profits in Joint Production". Metroeconomica, 38, pp. 53-66, 1986.

BOULLION, T.L. & ODELL, P.L. Generalized Inverse Matrices. John Wiley & Sons, 1971.

BRAUER, A. "Limits for the Characteristic Roots of a Matrix". Duke Mathematical Journal, 13, 1946.

CAMPBELL, J.L. & MEYER Jr, C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitman, 1979.

DEBREU, G. & HERSTEIN , I.N. "Nonnegative Square Matrices". Econometrica 21, 1953.

ERDELYI, I. "On the Matrix Equation Ax = λ Bx". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 17, pp. 119-132, 1967.

FIEDLER, M. & PTAK, V. "Some Generalizations of Positive Definiteness and Monotonicity". Numerische Mathematik, 9, pp. 163-172, 1966.

FROBENIUS, G. "Uber Matrizen aus Positiven Elementen I". Sitz. Preus. Akad. Wiss., pp. 471-476, 1908.

FROBENIUS, G. "Uber Matrizen aus Positiven Elementen II". Sitz. Preus. Akad. Wiss., pp. 541-518, 1909.

FROBENIUS, G. "Uber Matrizen aus Nich Negativen Elementen". Akad. Wiss. Math. Nat. Kl, pp. 456-477, 1912.

FUJIMOTO, T. & KRAUSE, U. "More Theorems on Joint Production". Mimeo. 1985.

GANTMACHER, F.R. The Theory of Matrices. Chelsea Pu. Co. New York, 1959.

GRAYBILL, F.A. Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth, Inc., 1969.

HAWKINS, D. & SIMON, H.A. "Note: Some Conditions on Macroeconomic Stability". Econometrica, 17, pp. 245-248, 1949.

HERRERO, C. "Análisis de la existencia de soluciones con significado económico para sistemas lineales". Cuadernos de Economía, vol. 12, nº 33, pp. 29-52, 1984.

HERRERO, C.; SILVA, J.A. & VILLAR, A. Matrices Semipositivas y Modelos Lineales, Servicio de Publicaciones U. Alicante, 1984.

HOFFMAN, R.B. & KENT, J.N. "Design for Commodity-by-Industry Interregional Input-Output Models". Advances in Input-Output Analysis (ed. por Polenske & Skolda). 1976.

JOHNSON, CH.R.; LEIGHTON, F.T. & ROBINSON, H.A. "Sign Patterns of Inverse-Positive Matrices". Linear Algebra and its Applications, 24, pp. 75-83, 1979.

JOHNSON, CH.R. "Sign Patters of Inverse Nonnegative Matrices". Linear Algebra and its Applications, 55, pp. 69-80, 1983.

KURZ, H.D. "Classical and Early Neoclassical Economists on Joint Production". Metroeconomica, 38, pp. 1-37, 1986.

LEONTIEF, W. The Structure of the American Economy 1919-1939. Oxford U. Press, 1941.

MANGASARIAN, O.L. "Perron-Frobenius Properties of $Ax = \lambda Bx$". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 36, pp. 86-102, 1971.

MCKEZIE, L. "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory". Mathematical Methods in the Social Sciencies, 1959.

NIKAIDO, H. Convex Structures and Economic Theory. Academic Press, 1968.

O.N.U. Un Sistema de Cuentas Nacionales. Publicaciones de las Naciones Unidas. 1970.

O.N.U. Problemas y Análisis de las Tablas Insumo-Producto. Publicaciones de las Naciones Unidas. 1974

PASINETTI, L.L. Essays on the Theory of Joint Production. The Macmillan Press Ltd. , 1980.

PERRON, O. "Zur Theorie der Matrizen". Mathem. Annalen, 64, pp. 248-263, 1907.

PERRON, O. "Uber Stabilitat und Asymptotic verhalten der Losungen eines Systems Eudlicher Differenzengleichungen". J. Reine Angew Math., 161, pp. 41-69, 1929.

PUNZO, L.F. & VELUPILLAI, K. "Multisectorial Models and Joint Production". Mathematical Methods in Economics. John Wiley & Sons, 1984.

RAO, C.R. & MITRA, S.K. Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley & Sons, 1971.

SCHEFOLD, B. "Relative Prices as a Function of the Rate of Profit: A Mathematical Note". Zeits. für Nationalökonomie, 36, pp. 21-48, 1976.

SCHEFOLD, B. "Multiple Product Techniques with Properties of Single Product Systems". Zeits. für Nationalökonomie, 38 1-2, pp. 29-53, 1978.

SCHEFOLD, B. "On Counting Equations". Zeits. für Nationalökonomie, 38 3-4, pp. 253-285, 1978.

SCHEFOLD, B. "Von Neumann and Sraffa: Mathematical Equivalence and Conceptual Diference". The Economic Journal, 90, pp. 140-156, 1980.

SCHEFOLD, B. "Sraffa and Applied Economics : Joint Production". Political Economy, 1, pp. 17-40. 1985.

SILVA, J.A. Existencia de Soluciones Semipositivas para Sistemas Lineales y No Lineales vinculados a Modelos de Leontief. Tesis Doctoral, Alacant, 1985.

SOLOW, R.M. "On the Structure of Linear Models". Econometrica, 20, 1952.

SRAFFA, P. Production of Commodities by means of Commodities. Cambridge U. Press, 1960.

STEEDMAN, I. "Joint Production and the Wage-Rent Frontier". Economic Journal, 92, pp. 377-385. 1982.

STEEDMAN, I. "L'importance empirique de la production jointe". La production jointe (ed. por Bidard), Paris Económica, 1984.

STEEDMAN, I. "Joint Production and Technical Progress". Political Economy, 1, pp. 41-52. 1985.

TAKAYAMA, A. Mathematical Economics. The Dryden Press, 1974.

VICTOR, P.A. Economía de la Polución. Ed. McMillan-Vicens Vives. 1974.

VILLAR, A. "A Note on Linear and Nonlinear Joint Production Leontief Models". Mimeo. 1986.

VON NEUMANN, J. "A Model of General Economic Equilibrium". Review of Economic Studies 13, pp. 1-9, 1945.

WOODS, J.E. Mathematical Economics. Topics in Multisectoral Economics. Longman, 1978.

WOODS, J.E. "Technical Change, the Rate of Profit and Joint Production" Economic Letters, 15, pp. 153-156. 1984.