



# Universitat d'Alacant Universidad de Alicante

**Esta tesis doctoral contiene un índice que enlaza a cada uno de los capítulos de la misma.**

**Existen asimismo botones de retorno al índice al principio y final de cada uno de los capítulos.**

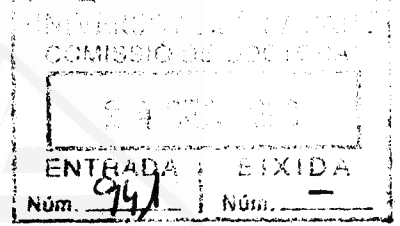
**[Ir directamente al índice](#)**

**Para una correcta visualización del texto es necesaria la versión de [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriores**

**Aquesta tesi doctoral conté un índex que enllaça a cadascun dels capítols. Existeixen així mateix botons de retorn a l'índex al principi i final de cadascun dels capítols .**

**[Anar directament a l'índex](#)**

**Per a una correcta visualització del text és necessària la versió d' [Adobe Acrobat Reader 7.0](#) o posteriors.**



UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**SISTEMAS VIVOS Y SUS  
MODELOS MATEMATICOS.  
MODELIZACION DE UN  
ECOSISTEMA**

MIGUEL LLORET CLIMENT

Memoria presentada para  
aspirar al grado de Doctor  
en Ciencias Matemáticas.

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO  
Y MATEMATICA APLICADA





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

YOLANDA VILLACAMPA ESTEVE, CATEDRATICA EN LA  
ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DEL DEPARTAMENTO DE  
ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA

CERTIFICA : Que el licenciado en Ciencias Matemáticas D.  
Miguel Lloret Climent, ha realizado bajo mi dirección la Memoria que  
lleva por título “ Sistemas vivos y sus modelos matemáticos.  
Modelización de un ecosistema “ con el fin de que sea presentado como  
Tesis para aspirar al grado de Doctor.

Lo que certifico para que conste según la ley vigente.

Alicante, 2 de septiembre de 1996

Fdo : Yolanda Villacampa Esteve



## AGRADECIMIENTOS

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

El presente trabajo ha sido realizado bajo la dirección de *D<sup>a</sup> Yolanda Villacampa Esteve*, a quien debo agradecer la propuesta del tema, su confianza, ánimos constantes y consejos durante todo el proceso de elaboración.

También quiero citar a *D. Jaime Lloret Picó* por sus comentarios en consideraciones biológicas.

Finalmente, quiero manifestar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, con su constante aliento han hecho posible esta memoria.



# CONTENIDO

<b>Introducción</b> .....	iii
---------------------------	-----

## 1 Teoría general de sistemas

1.0 Introducción histórica.....	3
1.1 Una teoría general de sistemas.....	9
1.2 Suprasistema.....	10
1.3 Comparación de los sistemas enlace con algunas definiciones de sistemas.....	14
1.4 Relaciones.....	16
1.5 Variables.....	17
1.6 Influencia entre variables.....	20
1.7 Estructura del sistema.....	20
1.8 Comportamiento.....	28
1.9 Jerarquías.....	37
1.10 Influencia entre sistemas.....	42
1.11 Semejanza estructural de sistemas.....	46

## 2 Teoría de sistemas vivos

2.1 Introducción.....	55
2.2 Sistemas vivos. Propiedades.....	56
2.3 Axiomatización de sistemas vivos.....	60
2.4 Procesos biológicos. División y fusión celular.....	65
2.5 Métrica.....	69
2.6 Sistemas vivos celulares reproductivos.....	71
2.7 Sistemas vivos celulares no reproductivos.....	75
2.8 Propiedades de sistemas vivos reproductivos.....	77
2.9 Propiedades de la división celular asociadas a funciones estructurales.....	81
2.10 Propiedades de la fusión celular asociadas a funciones estructurales.....	83
2.11 Organización en sistemas vivos .....	84



### **3 Teoría de ecosistemas**

3.1 Introducción.....	93
3.2 Definición de ecosistema.....	96
3.3 Axiomas en ecosistemas.....	97
3.4 Enlace entre variables.....	98
3.5 Axiomatización de las relaciones de un ecosistema.....	100
3.6 Sensibilidad y estabilidad entre variables de un ecosistema.....	109
3.7 Ecosistemas con objetivos.....	110
3.8 Modelo ecológico.....	112
3.9 Complejidad.....	118
3.10 Índices asociados a las relaciones en un ecosistema.....	121
3.11 Estabilidad y diversidad.....	133

### **4 Teoría de la modelización de ecosistemas**

4.1 La ecología matemática.....	138
4.2 Los modelos matemáticos en ecología.....	139
4.3 Modelo teórico para la simulación de ecosistemas.....	140
4.4 Modelo teórico. Caso general.....	145
4.5 Modelo teórico particular.....	154

### **5 Un modelo poblacional de desarrollo reproductivo de bosques mediterráneos : caso de Cistus Albidus L**

5.1 Antecedentes.....	159
5.2 Modelos de ecosistemas mediterráneos terrestres.....	172
5.3 MARIOLA : Modelo de ecosistema mediterráneo terrestre.....	176
5.4 Modelo poblacional de desarrollo reproductivo de bosques mediterráneos : Caso de Cistus Albidus L.....	180

<b>Conclusiones.....</b>	<b>196</b>
--------------------------	------------

<b>Bibliografía.....</b>	<b>198</b>
--------------------------	------------

## INTRODUCCION

La Teoría General de Sistemas pretende ser el marco teórico en el que encaje cualquier teoría, método, algoritmo o ente individualizado.

El primer objetivo que se ha de abordar es el de dar una formalización del concepto de sistema. Son diversas las definiciones que se han ido realizando a través de los tiempos pudiendo encontrar unas con cierta aparatosidad y otras con generalidad insuficiente ( Bertalanffy (10), Tarski (150), Hall y Fagen (56), Uymov (14), Mesarovic y Takahara (110), Bunge (18), Ma y Lin (100), Yang (175), Caselles (30) ). Ambos problemas quedarán resueltos con la Teoría que planteamos en la que el concepto de “sistema enlace “ resolverá la cuestión citada.

Hemos tratado de diseñar una Teoría General de Sistemas con énfasis en la modelización y simulación de sistemas biológicos, para ello exponemos el concepto de sistema enlace, el cual es considerado como punto de partida de la metodología considerada adecuada para esta investigación. La estructura interna del sistema y las normas que rigen los posibles cambios de esta estructura es analizada a partir de la función estructural, la cual es obtenida desde las influencias entre las variables. La función estructural y sus conexiones con otras cuestiones como jerarquías, bucles, semejanza estructural, división y fusión celular, organización de sistemas vivos, algunos índices de ecosistemas, modelo estructural, etc. estará presente en toda esta memoria por lo que es considerada como fundamental.

Una vez sentada la base de nuestra Teoría General de Sistemas, nos centramos en la axiomatización de los sistemas vivos , de los cuales reconocemos su dificultad sobre todo debido a su complejidad . La

naturaleza de los seres vivos es un concepto intuitivamente claro, sin embargo no definible. Para situar y definir el problema, se tratará primeramente de dar una descripción verbal de las características esenciales de los seres vivos por lo que trataremos conceptos tales como jerarquías, lenguajes, codificación genética, etc. Estas condiciones nos sirven como base para obtener una métrica celular y modelizar los procesos biológicos locales de división y fusión celular, de los que para nosotros solo es conocido el antecedente de Carnap (24), el cual crea un sistema de axiomas biológicos a partir de un sistema de axiomas de “cosas” y “sus partes”.

Establecemos una axiomatización de todos los conceptos básicos de la Teoría General de Ecosistemas, partiendo de todos los conceptos considerados de forma general para la Teoría de Sistemas.

Pensamos que los ecologistas que estudian sistemas vivos están en parte perjudicados en sus trabajos por la inadecuación de estructuras conceptuales con las que ellos deben relacionar sus resultados cuantitativos y generar hipótesis nuevas y examinables. El análisis de la Teoría de ecosistemas desde el punto de vista de la teoría de sistemas es un buen candidato en la búsqueda de aproximaciones teóricas, a pesar del trabajo y grandes gastos para producir soluciones que sean consistentes con un conjunto de datos particulares.

Formalizaremos todos los aspectos básicos de la construcción de modelos así como las conexiones que tienen con el sistema considerado inicialmente, definiendo medidas que nos permitan elegir las variables mas convenientes y relacionar el modelo y el sistema, así como diversos modelos entre si.



Las ciencias biológicas durante las dos últimas décadas, han aplicado modelización matemática a una gran variedad de problemas (modelos de neuronas, interacciones de población, procesos ecológicos, etc.). La modelización matemática es una metodología sistemática que ha probado con éxito descubrir y comprender los procesos subyacentes y causas en la Naturaleza a partir de sus relaciones y partes observables.

Proponemos un modelo teórico para resolver el problema de la modelización. El método seguido en nuestro estudio es elegir un conjunto de funciones tal que podamos ser capaces de ajustar su combinación lineal usando regresión lineal. Elegir estas funciones, sin embargo, implica la consideración a priori de un conjunto finito de funciones analíticas del “tipo elemental” y entonces analizar sus composiciones hasta un orden  $n$ , que llamaremos “ $n$ -transformadas”.

Un modelo es quizás la meta de cualquier investigador en ciencias básicas, obtener un modelo con el que podamos comprender mejor y algunas veces predecir un fenómeno natural en cuestión. Prerrequisitos para modelizar incluyen la especificación del sistema objeto y enfocar la cuestión o problema, por lo que debemos especificar cual es el estado del sistema, esto es, identificar un conjunto óptimo de variables de estado y las cantidades macroscópicas que permitan una descripción efectiva de un aspecto específico del sistema bajo estudio.

En el modelo floral proponemos una metodología inductiva-deductiva donde las ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales creadas hipotéticamente (metodología deductiva) mientras las variables de flujo son obtenidas desde observaciones de campo usando ecuaciones de regresión múltiple (metodología inductiva).



**1**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **TEORIA GENERAL DE SISTEMAS**



Universitat d'Alacant

Universidad de Alicante

## CAPITULO 1 :

A lo largo de este capítulo se desarrollan los conceptos fundamentales de una Teoría General de Sistemas, introduciendo inicialmente el concepto de sistema enlace, con sus variables externas, de entrada, internas y de salida asociadas.

El concepto de sistema enlace así como el estudio de las relaciones entre sus elementos constituyen el pilar principal de la Teoría General de Sistemas construida. En este sentido se estudia su estructura y la influencia que ejercen unos elementos en otros. Para ello son planteados el concepto de función estructural y el de función estructural asociada a una relación obteniendo una equivalencia entre ambas, así como el comportamiento de variables.

Diversos resultados nos relacionan las jerarquías y bucles con las funciones estructurales, y las funciones estructurales con la semejanza estructural del sistema.

El estudio de la influencia entre sistemas es considerado basándonos en la formalización realizada al abordar el problema de la influencia entre las variables.



**1**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **TEORIA GENERAL DE SISTEMAS**



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## CAPITULO 1 :

A lo largo de este capítulo se desarrollan los conceptos fundamentales de una Teoría General de Sistemas, introduciendo inicialmente el concepto de sistema enlace, con sus variables externas, de entrada, internas y de salida asociadas.

El concepto de sistema enlace así como el estudio de las relaciones entre sus elementos constituyen el pilar principal de la Teoría General de Sistemas construida. En este sentido se estudia su estructura y la influencia que ejercen unos elementos en otros. Para ello son planteados el concepto de función estructural y el de función estructural asociada a una relación obteniendo una equivalencia entre ambas, así como el comportamiento de variables.

Diversos resultados nos relacionan las jerarquías y bucles con las funciones estructurales, y las funciones estructurales con la semejanza estructural del sistema.

El estudio de la influencia entre sistemas es considerado basándonos en la formalización realizada al abordar el problema de la influencia entre las variables.

# CAPITULO 1 : TEORIA GENERAL DE SISTEMAS

## 1.0 INTRODUCCION HISTORICA

Una de las cuestiones que se han planteado por numerosos pensadores a través de los tiempos ha sido el concepto de “ **sistema** “, realizándose diversas teorías que tienen como punto de partida en común, la definición de sistema.

A continuación citaremos brevemente algunos de los hechos históricos mas relevantes desde los comienzos del desarrollo de la teoría de Sistemas Generales.

Los inicios se remontan a una primera idea de sistema que apareció al menos en tiempo de Aristóteles. Por ejemplo, la afirmación de Aristóteles de que “ El todo es más grande que la suma de sus partes “ es una definición de un problema de sistema básico.

Después, muchos grandes pensadores en la historia usaron lenguajes de sus tiempos para estudiar algunos problemas de sistemas. Nicolás de Cusa, profundo pensador del siglo XV, encadenando misticismo medieval con los primeros comienzos de la ciencia moderna , introduce la noción de coincidencia opuesta, oposición , o en efecto lucha

entre las partes dentro de un todo que sin embargo forma una unidad de orden superior.

La jerarquía de Leibnitz de mónadas parece bastante igual que los sistemas modernos; su universal Mathesis presagia una ampliación matemática que no esta limitada a expresiones cuantitativas o numéricas y es capaz de formalizar todo el pensamiento conceptual.

Hegel y Marx enfatizaron en la estructura dialéctica del pensamiento y del Universo que lo produce: La revelación profunda de que ninguna proposición puede realizarse de forma exhaustiva sino solo aproximar su coincidencia frente al proceso dialéctico de tesis, antítesis y síntesis.

Gustavo Fechner, conocido como el autor de la ley psicofísica, elaboró en la manera de los filósofos naturales del siglo XIX, organizaciones supraindividuales de orden más alto que los objetos usuales de observación, por ejemplo, comunidades de vida y la Tierra entera, anticipándose al concepto de ecosistema en lenguaje moderno, según (12).

En 1920, L. Von Bertalanffy (10) introduce el concepto de sistema formalmente. En 1954, A. Tarski (150) define un concepto de "sistemas con relaciones" como un conjunto no vacío, llamado el dominio de los sistemas con relaciones y una sucesión finita de familias de relaciones definido sobre dicho conjunto.

En 1956, A. Hall y R. Fagen en (56) discuten la definición de sistema, ellos piensan que un sistema consiste en un conjunto de objetos y algunas relaciones entre los objetos y atributos de los objetos.

A. Uymov (14), mostró que los atributos de los objetos de un sistema pueden ser vistos como nuevos objetos del sistema. De tal manera, la definición de sistema dada por Hall y Fagen puede ser escrita como sigue :

*“ Un sistema es un conjunto entre los objetos en el sistema y algunas relaciones entre los objetos “*

En 1964, M. D. Mesarovic empezó a estudiar la definición de sistema en el lenguaje de la teoría de conjuntos. M. D. Mesarovic y Y. Takahara (110) establecen una teoría de sistemas generales que esta basada en la siguiente definición :

*“ Un sistema (general)  $S$  es una relación de conjuntos no vacíos (abstractos)  $S \subset \Pi \{ V_i : i \in I \}$  donde  $\Pi$  denota el producto cartesiano de los  $V_i$  e  $I$  es un conjunto de índices dado. Cualquier elemento en la componente conjunto  $V_i$  es un objeto del sistema “*

De aquí, se puede ver que la teoría general de sistemas desarrollada en esta definición es una teoría de relaciones, ya que los elementos de cada  $V_i$  no son importantes.

En 1979, M. Bunge (18) consideró las interrelaciones entre los sistemas bajo consideración y algunos entornos de todos los sistemas, dando la siguiente definición de sistema :



*“ Sea  $T$  un conjunto no vacío, entonces la terna ordenada  $\sigma=(C,E,S)$  es un sistema sobre  $T$  si y solo si  $C$  y  $E$  son subconjuntos mutuamente disjuntos de  $T$  y  $S$  es un conjunto de relaciones no vacío sobre la unión de  $C$  y  $E$ ; los conjuntos  $C$  y  $E$  se llaman Composición y Entorno del sistema, respectivamente ”*

Combinando las ideas mencionadas anteriormente, Y. H. Ma y Y. Lin (100) en 1987 introducen la siguiente definición de sistema :

*“  $S$  es un sistema (general) si y solo si  $S$  es un par ordenado  $(M,R)$  donde  $M$  es un conjunto abstracto y  $R$  es un conjunto de algunas relaciones definidas sobre  $M$ . Cualquier elemento de  $M$  se llama objeto del sistema  $S$ , y los conjuntos  $M$  y  $R$  se llaman conjunto objeto y conjunto relación del sistema  $S$  respectivamente “*

En la definición previa, cualquier relación  $r \in R$  está definida de la siguiente manera : existe un número ordinario  $n=n(r)$  tal que  $r \subset M^n$  donde  $M^n$  es el producto cartesiano de  $n$  copias de  $M$ , asumimos que  $n(\emptyset)=0$ .

El concepto de sistema dado por M.D. Mesarovic y Y. Takahara es de cierta generalidad ; por ejemplo si un sistema está descrito por un conjunto de ecuaciones, entonces, es evidente que el sistema puede ser reescrito en la forma de la definición de M. D. Mesarovic y Y. Takahara. Pero en el estudio de sistemas sociales o sistemas económicos encontramos situaciones mucho más difíciles que no pueden ser descritas por esta definición, pero si mediante la definición anterior dada por Y. M. Ma y Y. Lin. De aquí, cualquier sistema bajo la definición de M. D.

Mesarovic y Y. Takahara, es un sistema bajo la definición de Y.H. Ma y Y. Lin :

De hecho, sea  $M = \cup \{V_i / i \in I\} \wedge R = \{S\} \Rightarrow S \subset \prod \{V_i / i \in I\} \subset M^{\text{card}(I)}$  donde  $\text{card}(I)$  denota el cardinal del conjunto  $I$ , que es un número ordinal.

Con la definición de Y. M. Ma y Y. Lin podemos estudiar los sistemas que interesan a los geógrafos, por ejemplo, el sistema de todas las criaturas del Mundo, el sistema atmósfera, etc. Al mismo tiempo, podemos considerar algún problema interesante, como si existe o no un sistema cuyos objetos consisten de todos los sistemas, ( no es la respuesta).

La definición de Y. M. Ma y Y. Lin, ha sido reescrita por Z. B. Yang (175) de la siguiente manera :

*“S es un sistema general si y solo si S es un par ordenado  $(M, R)$  donde  $M$  es un conjunto y  $R \subset \bigcup_{n \in \text{Ord}} P(M^n)$  y  $\text{Ord}$  es la clase de todos los números ordinales, y para algún número ordinal  $n \in \text{Ord}$ ,  $M^n = \{f / f \text{ es una función de } n \text{ en } M\}$  es el producto cartesiano de  $M$  y  $P(M^n)$  es la colección de todos los subconjuntos de  $M^n$ . Cada elemento  $r \in R$  se llama relación,  $R$  se llama conjunto de relaciones sobre  $M$ ”.*

En esta definición, hay algunos problemas olvidados : para cualquier relación  $r \in R$ , existe un número ordinal  $n = n(r) \in \text{Ord}$  tal que para cualquier  $\alpha \in r$ ,  $\alpha$  es una función de  $n$  en  $M$ ,  $\alpha : n \rightarrow M$ . Este  $n$  puede ser denotado por  $D(\alpha)$ , refiriéndose a la dimensión o dominio de  $\alpha$ , lo que es deseable en el contexto. Entonces para todas las funciones  $\alpha$  en la misma relación  $r$ ,  $D(\alpha)$  tiene que ser el mismo. Esto parece ser

innecesario, puesto que si un grupo de objetos tiene una relación  $r$ , entonces debería depender de su naturaleza, no del tamaño de este grupo, a no ser que el tamaño sea una parte de su naturaleza.

**Ejemplo 1 :** Sea  $M = \{ \text{Todas las estrellas en el cielo visibles desde la Tierra} \}$ . Sea  $C$  la colección de constelaciones ; ( esto es,  $\alpha \in C$  si  $\alpha$  es una constelación ). En la definición anterior, hay que describir  $C$  por una serie de relaciones puesto que las constelaciones pueden tener tamaños diferentes, incluso aunque ellas tengan básicamente la misma relación .

Así Yang (175) dio una nueva definición de sistema como sigue :

*“Un sistema general es un par ordenado  $(M, R)$  de conjuntos  $M$  y  $R$ , donde  $\emptyset \in R \subseteq P(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n)$  tal que para cualquier relación  $r \in R$  y cualquier elemento  $\alpha \in R$ , existe un número ordinal  $n = n(r, \alpha) \in \text{Ord}$  tal que  $\alpha$  es una función de  $n$  en  $M$ , el número  $n$  es denotado por  $D(\alpha)$  y se llama dominio de  $\alpha$ . El rango de  $\alpha$ , que es un subconjunto de  $M$ , se denota por  $R(\alpha)$  “*

Bajo este modelo, podemos simplificar el ejemplo anterior como sigue :

**Ejemplo 2:**  $M = \{ \text{Todas las estrellas en el cielo visibles desde la Tierra} \}$   
 $C = \{ \alpha \subseteq M / \alpha \text{ es una constelación} \}$ ,  $R = \{ C \}$  ; entonces  $(M, R)$  es un sistema relación simple, que razonablemente estudia lo que queremos describir. Si en este sistema necesitamos considerar cualquier otra relación, por ejemplo la relación de una galaxia, entonces simplemente

definimos  $G = \{\beta \subseteq M / \beta \text{ es una galaxia en el Cielo}\}$  y entonces  $R = \{C, G\}$ , por lo que  $(M, R)$  es un sistema 2-relación.

Cuando realmente necesitamos discutir algo acerca del tamaño de un elemento en una relación, simplemente dividimos la relación en diferentes niveles de acuerdo al tamaño. Por lo tanto no perderemos ninguna generalidad y obtendremos más simplicidad.

La siguiente definición de A. Caselles (30) engloba a la última definición de Z. B. Yang :

*“Un sistema general es un par ordenado  $(M, R)$  donde  $M$  es un conjunto y  $\emptyset \in R \subseteq T_m$  donde  $T_m = P \left[ \bigcup_{n \in \text{Ord}} (T_m)^n \right]$  donde  $m$  es un número natural y  $T_0 = M$ , Ord es la clase de todos los números ordinales,  $(T_m)^n$  es el producto cartesiano de  $T_m$  y  $P \left[ \bigcup_{n \in \text{Ord}} (T_m)^n \right]$  es la colección de todos los subconjuntos de  $\bigcup_{n \in \text{Ord}} (T_m)^n$ . A  $M$  se le llama conjunto objeto del sistema, a un elemento de  $R$  se le llama relación y a  $m+1$  orden del sistema”*

La definición de Z. B. Yang corresponde a la definición de sistema de orden 1.

## 1.1 UNA TEORIA GENERAL DE SISTEMAS

La teoría general de sistemas pretende ser el marco teórico en el que encaje cualquier teoría, método, algoritmo o ente individualizado.

El primer objetivo que se ha de abordar es el de dar una formalización del concepto de sistema. Son diversas las definiciones que se han ido realizando a través de los tiempos pudiendo encontrar unas con cierta aparatosidad y otras con generalidad insuficiente. Esto ha motivado la búsqueda de un concepto formal sencillo y general que evite ambos aspectos. Ambos problemas quedarán resueltos con la teoría que planteamos en la que el concepto de “ sistema enlace “ resolverá la cuestión citada. Por otra parte la teoría planteada nos va a permitir :

- 1) Admitir una estructura de relaciones dentro un conjunto de posibilidades dadas.
- 2) Un poder de readaptación de sus relaciones internas de modo que se ajuste mejor a la eventual información que se le suministre.
- 3) Considerar el tiempo como la dimensión en la que se estudien las variaciones.

En el sistema enlace la unidad principal es la variable que representa un ente o un atributo del mismo y cuya relación con otras variables hay que determinar. Para ello se construyen las funciones estructurales y las de comportamiento.

Por otra parte será posible, con la definición general de sistema, que problemas descritos con grafos sean estudiados desde la perspectiva de un sistema.

## **1.2 SUPRASISTEMA**

La observación y el pensamiento en el Mundo que nos rodea nos lleva a considerarlo formado por entes ( o cosas ) que poseen unas cualidades llamadas atributos. Pensar en el Mundo supone

necesariamente individualizar su visión para realizar una descripción y clasificación del mismo. Es por consiguiente necesaria la existencia de un observador que decida que se considera como ente o cosa y que cualidades son interesantes para compararlas. No obstante, siempre, el Mundo se ha considerado ordenado y organizado como “ Un Mundo de cosas y atributos, de sujetos y predicados” ; y la experiencia se ordena en esta estructura.

Para la filosofía clásica, el ente es entendido como “ Lo que es, el ser concreto, y por extensión el ser o aquello que puede existir”. Son también los propios filósofos los que afirman que los entes o cosas, no son más que la suma de atributos, ya que si se prescinde de todas las cualidades de una cosa, no queda a esta nada en absoluto.

Según Aristóteles, el ente se compone de la materia y la forma, ambas inseparables, aún siendo interpretadas por el observador como diferentes.

Es Carnap en 1958 (24) quien además sitúa al ente en el espacio Tiempo : “ Un ente ocupa una región definida de espacio en un instante definido de tiempo, y una serie temporal de regiones espaciales durante la historia total de su existencia. Un ente ocupa una región en la cuarta dimensión espacio-tiempo continua.

Por consiguiente, es necesario considerar inicialmente el sistema Ontológico o Real, formado por los entes o cosas. Posteriormente será necesariamente el observador el que estudie y analice atributos de los



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

entes definiendo distintos sistemas semióticos, entre los que construye modelos matemáticos.

Se ha considerado de esta forma un Suprasistema, el cual existe a partir de un observador que lo define. La formalización de estos conceptos son el punto de partida ( inicio ) de una teoría Sistémica y su modelización, así como lo son de la construcción axiomática de la Teoría de Sistemas Vivos.

Para dar una definición de sistema enlace hemos tenido en cuenta que lo prioritario es “ medir “ o conocer las conexiones binarias entre elementos. Otro tipo de conexiones mas concretas en donde se observe si la relación es directa entre dos elementos o por el contrario es indirecta quedarán perfectamente analizadas al estudiar la “ Estructura del sistema“.

### 1.2.1 SISTEMA ENLACE SIMPLE

**Definición 1 :** Un sistema enlace  $S \equiv ( M , R )$  es el par formado por un conjunto objeto  $M$  y un conjunto de relaciones binarias de manera que  $R \subset P ( M \times M ) = P ( M ^ 2 )$  . Es decir :  $\forall r \in R \quad r \subset M \times M$  se cumple que :  $r = \{ (x_1 , y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i , y_i), \dots / (x_i , y_i) \in M \times M \}$

(1.2.1)

El sistema enlace simple “ vacío ” está definido por  $\emptyset \equiv ( \emptyset , \emptyset )$ .

### 1.2.2 SISTEMA ENLACE

**Definición 2 :** Un sistema enlace definido en un conjunto objeto  $M$ , es un sistema simple  $S = (M, R)$  o una unión finita de sistemas enlaces simples

$$S = \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad S_i \text{ son sistemas simples}$$

$S$  es un sistema enlace sii  $S$  es simple o  $S = \cup S_i / S_i = \text{sistema simple}$

(1.2.2)

Lo denotamos por  $S \equiv (M, R)$  con  $R \subset P(\bigcup_{\text{finitas}} M^2)$

### 1.2.3 SISTEMA ONTOLOGICO

**Definición 3 :** Un sistema Ontológico es todo sistema enlace cuyo conjunto objeto  $M$ , está formado por entes.

(1.2.3)

### 1.2.4 SISTEMA SEMIOTICO

**Definición 4 :** Un sistema Semiótico es todo sistema enlace cuyo conjunto objeto está formado por atributos asociados al conjunto objeto de un sistema Ontológico.

(1.2.4)

*La realidad existe independientemente del observador, pero esta es imprescindible para considerar el Sistema Ontológico y sus Sistemas Semióticos asociados. Por consiguiente, el estudio de la realidad es sesgado y subjetivo.*



### 1.2.5 SUPRASISTEMA

**Definición 5 :** Un Suprasistema es la terna formada por : el observador, el sistema Ontológico y el sistema semiótico.

$$S = \{ O, S_{on}, S_{se} \} \quad (1.2.5)$$

### 1.2.6 SISTEMA

**Definición 6 :** Un sistema es un suprasistema o la unión de suprasistemas

$$S \text{ es un sistema sii } \{ S = \text{supr } S \} \vee \{ S = \bigcup_{i \in I} S_i \} \quad (1.2.6)$$

### 1.2.7 ENTORNO DE UN SISTEMA

**Definición 7 :** Siendo T el Universo y  $S=(M,R)$  un sistema, llamamos entorno del sistema al complementario de M en T :  $C_T(M)=T-M$

(1.2.7)

*De acuerdo con nuestra definición de sistema, la axiomatización de la teoría general de sistemas queda subordinada exclusivamente a la de los sistemas enlaces.*

## 1.3 COMPARACION DE LOS SISTEMAS ENLACE CON ALGUNAS DEFINICIONES DE SISTEMAS

Compararemos a continuación los sistemas enlace con las definiciones de sistemas anteriores : En particular con la segunda definición de Yang (175).



Se considera la segunda definición de Yang, donde se cumple que :

$$S = (M, R) \text{ y } \emptyset \in R \subseteq P\left(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n\right)$$

**Proposición 1** :  $S$  es un sistema enlace  $\Leftrightarrow S$  es un sistema según la 2ª definición de Yang

**Demostración** :  $\Rightarrow$ ) Sea  $S$  un sistema enlace simple  $S = (M, R)$ , entonces se cumple que  $R \subset P(M^2)$ .  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  y  $\forall r_i \in R$  es  $r_i \in P(M^2)$ , es decir :

$$r_i = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_q^i\} \text{ siendo } \alpha_j^i = (x_j^i, y_j^i)$$

de donde :

$$1) \alpha_j^i \in M^2 \Rightarrow \alpha_j^i \in \bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n \Rightarrow R \in P\left(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n\right)$$

$$2) \alpha_j^i \in M^2 \Rightarrow r_i \in \bigcup_2 M^2 \subset \bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n \Rightarrow R \subset P\left(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n\right).$$

Por consiguiente, todo sistema enlace simple es un sistema según la segunda definición de Yang.

Consideramos ahora un sistema de Yang :

$$\Leftrightarrow S = (M, R), \text{ siendo } \emptyset \in R \subseteq P\left(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n\right).$$

$$\text{Sea } r \in R = \{A_1, A_2, \dots, A_q\} \text{ siendo } A_i \in P\left(\bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n\right) \Rightarrow r \subset \bigcup_{n \in \text{Ord}} M^n,$$

$$\text{si } r = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_h\} \cup \dots =$$

$$= \{x_1, x_2\} \cup \{x_2, x_3\} \cup \dots \cup \{x_p, x_{p+1}\} \cup \dots \Rightarrow r \in \bigcup_{\text{finitas}} M^2, \text{ luego}$$

$$\forall r \in R \quad r \in \bigcup_{\text{finitas}} M^2 \Rightarrow R \subset \bigcup_{\text{finitas}} M^2 \Rightarrow R \in P\left(\bigcup_{\text{finitas}} M^2\right)$$

## 1.4 RELACIONES

Debido a que en nuestro concepto de sistema enlace, las relaciones binarias son tan importantes, tendremos en cuenta las consideraciones siguientes :

Supongamos que se nos da una relación ( en sentido intuitivo) entre ciertos pares de objetos. La idea básica es que la relación puede ser representada como el conjunto de todos los pares de objetos mutuamente relacionados.

Una relación en un conjunto  $M$  es un conjunto de pares ordenados ; es decir, cada elemento de la relación es un par ordenado.

Si  $r$  es una relación escribimos  $x r y$  y  $(x, y) \in r$  como sinónimos, y decimos que  $x$  está  $r$ -relacionado con  $y$  si y solo si  $x r y$ .

El dominio de una relación  $r$  es el conjunto de todas las primeras componentes de  $r$  y su rango es el conjunto de todas las segundas componentes.

Formalmente :  $\text{dominio } r = \{ x \in M / \exists y, (x, y) \in r \}$

$\text{rango } r = \{ y \in M / \exists x, (x, y) \in r \}$

La inversa de una relación  $r$ , indicada " $r^{-1}$ ", se obtiene invirtiendo cada uno de los pares que pertenecen a  $r$ , así :

$$r^{-1} = \{ (x, y) / (y, x) \in r \} \wedge \{ x r y \Leftrightarrow y r^{-1} x \}$$

El dominio de la inversa de una relación es siempre el rango de  $r$  y el rango de  $r^{-1}$  es el dominio de  $r$ .

Si  $r$  y  $s$  son relaciones, su composición  $r.s$  se define como :

$$r.s = \{ (x, z) \in M \times M / \exists y \in M / (x, y) \in s \wedge (y, z) \in r \}$$

La composición no es conmutativa en general ; por ejemplo, si  $r = \{(1,2)\}$  y  $s = \{(0,1)\}$  entonces  $r.s = \{(0,2)\}$  y  $s.r$  es vacía.



## 1.5 VARIABLES

En un sistema enlace  $S = ( M , R )$  definimos las siguientes variables ( objetos en  $M$  )

### 1.5.1 VARIABLE EXTERNA

**Definición 8 :** Dado el sistema enlace  $S = ( M , R )$  y un entorno del sistema  $S$  (1.2.7) : “ $C_T( S )$ ” que influye en el, una variable  $x$  es externa al sistema si se encuentra en su entorno.

$$x \text{ es una variable externa sii } x \in C_T( S ) \quad (1.5.1)$$

**Nota 1 :** Es posible que una variable del sistema, sea considerada como variable externa en el estudio de algún subsistema, todo depende del observador que delimita el entorno y las variables.

### 1.5.2 VARIABLE DE ENTRADA

**Definición 9 :** En un sistema enlace  $S = ( M , R )$  una variable  $x \in M$  es una variable de entrada sii :

$$\{ \exists y \in M \exists r \in R / ( x , y ) \in r \} \wedge \{ \forall z \in M \forall r \in R / ( z , x ) \notin r \} \quad (1.5.2)$$

### 1.5.3 VARIABLE INTERNA

**Definición 10 :** En un sistema enlace  $S = ( M , R )$  una variable  $x \in M$  es una variable interna sii :

$$\{ \exists y \in M \exists r \in R / (x, y) \in r \} \wedge \{ \exists z \in M \exists r \in R / (z, x) \in r \}$$

(1.5.3)

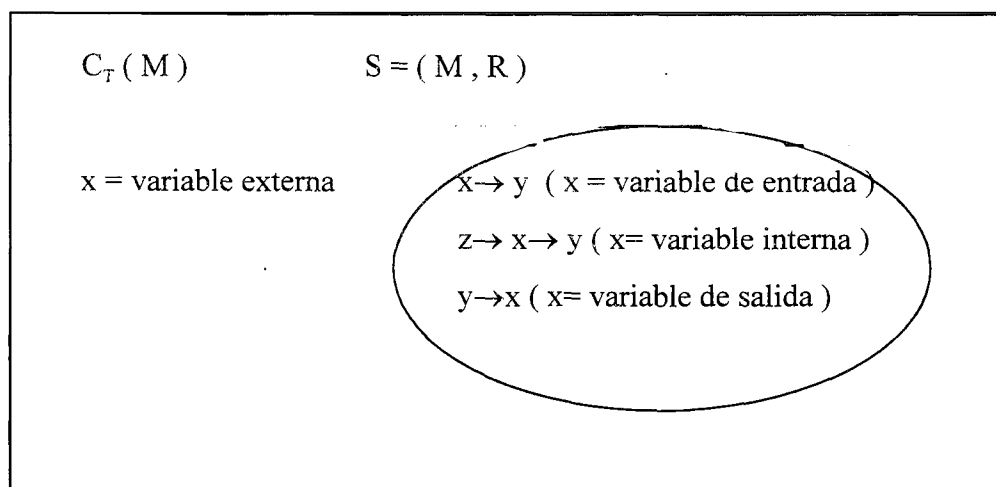
### 1.5.4 VARIABLE DE SALIDA

Ya que en la práctica se puede considerar como variables de salida algunas de las variables internas, porque nos interesa obtener sus datos pues la distinción entre variables internas y variables de salida resulta irrelevante en la práctica, damos la siguiente definición de variable de salida :

**Definición 11 :** En un sistema enlace  $S = (M, R)$  una variable  $x \in M$  es una variable de salida sii :

$$\{ \exists y \in M \exists r \in R / (y, x) \in r \} \wedge \{ \forall z \in M \forall r \in R / (x, z) \notin r \}$$

(1.5.4)



**Observación 1 :** En el ejemplo del capítulo 5, nos interesará que las “causas primeras” en el ecosistema sean variables que estén consideradas

fuera del sistema. Las causas de estas variables no pueden ser expresadas en el modelo matemático del ecosistema. Estas son las variables exógenas del sistema. En un sistema ecológico representan variables como flujos de entrada: inmigración, lluvia radiactiva; o controles ambientales: como temperatura, humedad ambiental, velocidad del viento, intensidad de precipitación, etc.. Es decir, las variables exógenas verifican que su evolución es independiente de todas las otras y representan acciones del entorno sobre su propio sistema. En nuestra definición aparecen como las variables externas.

Las variables de flujo, son variables no dinámicas; es decir, que para cualquier punto en el tiempo, el valor de la variable de flujo no depende de su valor previo. La variable de flujo puede ser definida por una ecuación algebraica. Estas variables se corresponden con nuestras variables de entrada y algunas de las variables internas.

Las variables de estado (o nivel), representan al sistema; esto es, para cualquier punto en el tiempo, el conjunto de valores de las variables de estado forman el "estado del sistema". Son variables dinámicas; es decir, para cualquier punto en el tiempo el valor de la variable de estado depende de su valor previo y la variable debe ser definida por medio de una ecuación diferencial. Las variables de salida constituyen las variables de estado del sistema, pero también pueden ser variables de estado las variables internas, no consideradas variables de flujo. Las variables de estado tienen asociadas variables de flujo de entrada y variables de flujo de salida. En los ecosistemas, la variable de estado de más interés, será frecuentemente la biomasa (total o de alguna componente).

## 1.6 INFLUENCIA ENTRE VARIABLES

En un sistema enlace  $S = (M, R)$ , si  $(x, y) \in r$  siendo  $r \in R$ , diremos que  $x$  influencia a  $y$  directamente.

(1.6.1)

Así pues, asumimos que  $R$  es un conjunto de conexiones indeterminadas, influencias o dependencias. Esta relación nos permite conocer los elementos que influyen a uno dado.

Diremos que  $x$  influencia a  $y$  indirectamente cuando existen elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$  y relaciones  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1} \in R$  donde  $n$  es un número entero positivo cumpliéndose:

$$(x, x_1) \in r_1, (x_1, x_2) \in r_2, \dots, (x_{n-1}, x_n) \in r_n, (x_n, y) \in r_{n+1}.$$

(1.6.2)

Evidentemente, las variables que no tienen influenciadores son las variables de entrada.

Muchas veces se toma el criterio de considerar variables de salida a las variables que no son de entrada.

## 1.7 ESTRUCTURA DEL SISTEMA

La estructura del sistema establece como se articulan sus partes en la entidad que es el propio sistema y viene representado por la trama de influencias entre estas partes. Por otra parte, las influencias entre las partes determinan su comportamiento. De este modo estructura y comportamiento se presentan como dos conceptos asociados a dos momentos distintos de un mismo proceso; por lo que se puede pensar que la relación que liga la estructura con el comportamiento es biunívoca, es decir, que dada tal estructura, el sistema tiene que tener tal

comportamiento ; pero esto no es así, los sistemas pueden presentar distintos modos de comportamiento.

### 1.7.1 FUNCION ESTRUCTURAL ENTRADA-SALIDA

En un sistema enlace  $S = ( M , R )$  la función estructural entrada-salida es la función  $f_M : M \longrightarrow P ( M )$  definida de la siguiente forma :  
 $\forall x \in M \quad f_M ( x ) = M_x \in P ( M )$  siendo  $M_x$  un conjunto definido mediante :

$$M_x = \{ y \in M / \exists r \in R : ( x , y ) \in r \} \quad (1.7.1)$$

El dominio de esta función es :

$$\text{Dom } f_M = \{ x \in M / \exists y \in M \exists r \in R : ( x , y ) \in r \}.$$

Es decir, en el dominio están las variables de entrada y las variables internas y en el rango aparecen conjuntos de  $P ( M )$  formados por variables internas y variables de salida.

### RESTRICCION DE LA FUNCION ESTRUCTURAL ENTRADA-SALIDA

Hay dos posibles restricciones naturales de esta función, es decir la restricción de la función al conjunto formado por las variables de entrada  $M_E$  y la restricción de la función al conjunto formado por las variables internas  $M_I$ .

Es decir :  $f_M | M_E : M_E \longrightarrow P ( M )$  definida de la siguiente forma :



$$\forall x \in M_E \text{ se cumple que } f_M|_{M_E}(x) = f_M(x). \quad (1.7.2)$$

Análogamente :  $f_M|_{M_I} : M_I \longrightarrow P(M)$  está definida de la siguiente manera :  $\forall x \in M_I \quad f_M|_{M_I}(x) = f_M(x).$  (1.7.3)

### 1.7.2 FUNCION ESTRUCTURAL SALIDA-ENTRADA

En un sistema enlace  $S = (M, R)$  la función estructural salida-entrada es la función  $g_M : M \longrightarrow P(M)$  definida de la siguiente forma :

$$\forall x \in M \quad g_M(x) = M'_x \in P(M)$$

siendo  $M'_x$  un conjunto definido mediante :

$$M'_x = \{ y \in M / \exists r \in R : (y, x) \in r \}. \quad (1.7.4)$$

El dominio de esta función es :

$$\text{dom } g_M = \{ x \in M / \exists y \in M \exists r \in R : (y, x) \in r \}$$

por lo que en el dominio están las variables de salida e internas y en el rango aparecen conjuntos de  $P(M)$  formados por variables internas y variables de entrada.

### RESTRICCION DE LA FUNCION ESTRUCTURAL SALIDA-ENTRADA

Hay dos posibles restricciones naturales de esta función, es decir la restricción de la función al conjunto formado por las variables internas  $M_I$  y la restricción de la función al conjunto formado por las variables de salida  $M_S$  :

Esto es :  $g_M | M_I : M_I \longrightarrow P(M)$  definida de la siguiente forma :

$$\forall x \in M_I \quad g_M | M_I(x) = g_M(x) \quad (1.7.5)$$

Análogamente :  $g_M | M_S : M_S \longrightarrow P(M)$  definida de la siguiente forma :

$$\forall x \in M_S \quad g_M | M_S(x) = g_M(x) \quad (1.7.6)$$

**Nota 2 :** Debemos resaltar que la restricción de la función estructural entrada-salida al conjunto formado por las variables internas  $f_M | M_I$  no coincide necesariamente con la restricción de la función estructural salida-entrada al conjunto formado por las variables internas  $g_M | M_I$ . Lo que se desprende del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3 :** Sea  $S = (M, R)$  siendo :

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ y } R = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_2, x_4)\}$$

Luego tendremos la situación :  $x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4$ ,  $x_2 \longrightarrow x_4$

cumpliéndose  $f_M(x_1) = \{x_2\}$ ,  $f_M(x_2) = \{x_3, x_4\}$ ,  $f_M(x_3) = \{x_4\}$

y  $g_M(x_2) = \{x_1\}$ ,  $g_M(x_3) = \{x_2\}$ ,  $g_M(x_4) = \{x_2, x_3\}$ .

Y las restricciones correspondientes son :

$$f_M | M_I(x_2) = \{x_3, x_4\}, \quad f_M | M_I(x_3) = \{x_4\},$$

$$g_M | M_I(x_2) = \{x_1\}, \quad g_M | M_I(x_3) = \{x_2\},$$

pero se cumple :  $f_M | M_E(x_1) = \{x_2\}$  y  $g_M | M_S(x_4) = \{x_2, x_3\}$ .

Por consiguiente, no coinciden las restricciones.

**Nota 3 :** Es conveniente tener en cuenta que las inversas de estas funciones  $f_M^{-1}$  y  $g_M^{-1}$  no siempre serán funciones.

**Definición 12 :** Se define la unión de las funciones estructurales entrada-salida y salida-entrada restringida al conjunto de variables internas por :

$$(f_M \cup g_M) | M_I(x) = \{ z \in M / \exists r_1, r_2 \in R / (x, z) \in r_1 \vee (z, x) \in r_2 \}.$$

Es decir :  $(f_M \cup g_M) | M_I(x) = f_M | M_I(x) \cup g_M | M_I(x)$

(1.7.7)

Desde un punto de vista práctico, para calcular la función estructural asociada a una variable  $x$  habría que distinguir si la variable  $x$  es de entrada, salida o interna :

1. Si la variable  $x$  es de entrada, se considera la restricción al conjunto formado por las variables de entrada de la función estructural entrada-salida. Es decir :  $f_M | M_E : M_E \longrightarrow P(M)$ .

Por lo tanto se considera en el conjunto imagen  $P(M)$  el conjunto de todas las variables influenciadas por la variable  $x$ .

2. Si la variable  $x$  es de salida, se plantea la restricción al conjunto formado por las variables de salida de la función estructural salida-entrada. Es decir :  $g_M | M_S : M_S \longrightarrow P(M)$ .

Por lo tanto equivale a considerar en el conjunto imagen  $P(M)$  el conjunto de todas las variables que influyen a la variable  $x$ .

3. Si la variable  $x$  es interna se toma la unión de las siguientes funciones : La restricción al conjunto formado por las variables internas de la función estructural entrada - salida , es decir :  $f_M | M_I : M_I \longrightarrow P(M)$  y la restricción al conjunto formado por las

variables internas de la función estructural salida - entrada , es decir :

$g_M | M_I : M_I \longrightarrow P ( M )$ . Por lo tanto tendremos :

$f_M | M_I \cup g_M | M_I : M_I \longrightarrow P ( M )$  definida de la siguiente

forma :

$$(f_M | M_I \cup g_M | M_I)(x) = f_M | M_I(x) \cup g_M | M_I(x).$$

Por lo tanto, consideramos en el conjunto imagen  $P ( M )$  el conjunto de todas las variables que influyen a  $x$  y que son influenciadas por  $x$ .

### 1.7.3 FUNCION ESTRUCTURAL

Es la función  $F : M \longrightarrow P ( M )$  definida de la siguiente forma :

$$F(x) = \begin{cases} f_M | M_E(x) \\ f_M | M_I(x) \cup g_M | M_I(x) \\ g_M | M_S(x) \end{cases}$$

(1.7.8)

según sea  $x$  una variable de entrada, una variable interna o una variable de salida, respectivamente.

La estructura del sistema también puede ser analizada desde las relaciones del sistema enlace  $S = ( M , R )$ .

### 1.7.4 FUNCION ESTRUCTURAL ENTRADA-SALIDA ASOCIADA A UNA RELACION.

Dada una relación  $r \in R$ , la función estructural entrada-salida asociada a la relación  $r \in R$  es la función  $f_r : M \longrightarrow P ( M )$  definida de la siguiente forma :

$$f_r(x) = A \in P(M); A = \{y \in M / \exists r \in R, (x, y) \in r\}. \quad (1.7.9)$$

El dominio de esta función es :

$$\text{Dom } f_r = \{x \in M / \exists y \in M : (x, y) \in r\}.$$

Es decir, en el dominio están las variables de entrada y las variables internas que influyen a alguna otra variable mediante la relación  $r$  y en el rango aparecen conjuntos de  $P(M)$  formados por variables internas y variables de salida que son influenciadas por la relación  $r \in R$ .

**Proposición 2 :** Sea  $S=(M,R)$  un sistema enlace,  $f_M$  su función estructural entrada-salida y  $f_r$  sus funciones estructurales entrada-salida asociadas a relaciones , entonces se cumple que  $f_M(x) = \bigcup_{r \in R} f_r(x)$

**Demostración :**

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \text{ Si } y \in f_M(x) = M_x &\Rightarrow \exists r \in R \text{ tal que } (x, y) \in r \Rightarrow y \in f_r(x) \\ &\subset \bigcup_{r \in R} f_r(x) \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \text{ Si } y \in \bigcup_{r \in R} f_r(x) \Rightarrow \exists r_0 \in R / y \in f_{r_0}(x) \Rightarrow (x, y) \in r_0 \in R \Rightarrow y \in f_M(x)$$

**Consecuencia 1 :** La estructura entrada-salida del sistema, interacciones entre las variables de entrada e internas con variables internas y de salida queda perfectamente determinada por el estudio de las distintas relaciones de su conjunto estructural.

### 1.7.5 FUNCION ESTRUCTURAL SALIDA-ENTRADA ASOCIADA A UNA RELACION

Dada una relación  $r \in R$ , la función estructural salida-entrada asociada a la relación  $r \in R$  es la función  $g_r : M \longrightarrow P(M)$  definida de la siguiente forma :

$$g_r(x) = M'_x \in P(M); M'_x = \{y \in M / (y, x) \in r\}. \quad (1.7.10)$$

El dominio de esta función es :

$$\text{Dom } g_r = \{x \in M / \exists y \in M : (y, x) \in r\}.$$

Es decir, en el dominio están las variables de salida y las variables internas que son influenciadas por la relación  $r \in R$  y en el rango aparecen conjuntos de  $P(M)$  formados por variables de entrada y variables internas que influyen mediante  $r$  a otras variables.

**Proposición 3:** Sea  $S=(M,R)$  un sistema enlace,  $g_M$  su función estructural salida-entrada y  $g_r$  sus funciones estructurales salida-entrada asociadas a relaciones , entonces se cumple que  $g_M(x) = \bigcup_{r \in R} g_r(x)$

**Demostración :** Con demostración análoga a la proposición anterior.

### 1.7.6 FUNCION ESTRUCTURAL ASOCIADA A UNA RELACION

Dada una relación  $r \in R$  . Al igual que se hacía previamente, para calcular la función estructural asociada a esta relación , denotada por  $F_r$  , habría que distinguir si la variable es de entrada, si la variable es interna o si la variable es de salida, así tendremos :

$$F_r(x) = \begin{cases} f_r(x) \\ f_r(x) \cup g_r(x) \\ g_r(x) \end{cases} \quad (1.7.11)$$

según la variable es de entrada, interna o de salida, respectivamente

**Proposición 4 :** La función estructural y la función estructural asociada a una relación cumplen que  $F(x) = \bigcup_{r \in R} F_r(x)$ .

**Demostración :** Por las dos proposiciones anteriores.

## 1.8 COMPORTAMIENTO

Una cualidad de gran interés de un sistema es su comportamiento, es decir, como actuará ante determinadas situaciones. Esta actuación se entiende a lo largo del tiempo, por lo que interesará considerar la dependencia del tiempo de las distintas magnitudes  $x_i$  asociadas al sistema. Esta dependencia se expresa mediante funciones  $x_i(t)$ ; que representan lo que se llama trayectoria de cada variable  $x_i$ . El conjunto de trayectorias describe la evolución del sistema durante un cierto periodo de tiempo, por lo que no estamos abusando si decimos que constituye la historia del sistema durante ese periodo. Entender el comportamiento del sistema significa desenmarañar las relaciones causales que nos permitan explicarlo, de esta manera se suministrará un mecanismo con el que construir un modelo matemático del sistema real.

### 1.8.1 RANGO DE VARIABLES

#### RANGO TOTAL DE EXISTENCIA

En cualquier sistema, los valores que toma cualquier variable en el tiempo transcurrido entre el principio y el fin de su existencia es lo que constituye el rango total de existencia de dicha variable.

#### RANGO TOTAL OBSERVADO

Por otra parte, existe un tiempo subjetivo, que evidentemente depende del observador, es decir, la construcción de su propia escala temporal, realizando observaciones y medidas de las variables del sistema.

Más precisamente, Si consideramos una discretización del tiempo :

$$T = \{ t_1, t_2, \dots, t_p \}, \text{ siendo } t_1 < t_2 < \dots < t_p$$

el rango total observado asociado a una variable  $x$  es la función :

$$R g ( x ) : [ t_1, t_p ] \longrightarrow [ m_x, M_x ]$$

siendo  $m_x = \min \{ x ( t_i ) / i = 1, 2, \dots, p \}$  ;  $M_x = \max \{ x ( t_i ) / i = 1, 2, \dots, p \}$

donde  $x ( t_i )$  denota a la variable  $x$  en el tiempo  $t_i$ .





## 1.8.2 COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE

### COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE DE ENTRADA

En un sistema enlace  $S = (M, R)$ . Se considera la función estructural entrada-salida y una variable de entrada "x".

Definimos la función comportamiento como la definida entre el rango de la variable y el producto cartesiano de los rangos de las variables que ella influencia. Es decir es la función :

$$B_x : R_g(x) \longrightarrow R_g(x_1) \times R_g(x_2) \times \dots \times R_g(x_n) \quad (1.8.1)$$

donde los rangos que aparecen son observados y  $n = \text{cardinal} \{M_x\}$ .

La función comportamiento de la variable de entrada x en el instante t es :  $B_x(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ .

$$(1.8.2)$$

A  $B_x$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento de la variable de entrada x de la forma :

$$[B_x] = [x_i(t_j)] \text{ donde } i = 1, 2, \dots, n \text{ y } j = 1, 2, \dots, p.$$

Esta matriz sería de la forma :

$$B_x = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \dots & x_1(t_p) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \dots & x_2(t_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \dots & x_n(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.3)$$

siendo esta matriz de dimensión  $n \times p$ .

### COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE DE SALIDA

Se considera un sistema enlace  $S = (M, R)$ , con función estructural salida-entrada  $g_M : M \longrightarrow P(M)$ . Dada una variable de salida  $x$ , la función comportamiento " $B_x$ " está definida entre el rango de la variable y el producto cartesiano de los rangos de las variables que la influyen. Es decir :

$$B_x : R_g(x) \longrightarrow R_g(x_1) \times R_g(x_2) \times \dots \times R_g(x_m) \quad (1.8.4)$$

donde los rangos que aparecen son observados y  $m = \text{cardinal} \{M'_x\}$ .

La función comportamiento de la variable de salida  $x$  en el instante  $t$  viene expresada por :

$$B_x(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)). \quad (1.8.5)$$

A  $B_x$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento de la variable de salida  $x$  de la forma :

$$[B_x] = [x_i(t_j)] \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, m \quad \text{y } j = 1, 2, \dots, p.$$

$$B_x = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) \dots & x_1(t_p) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) \dots & x_2(t_p) \\ x_m(t_1) & x_m(t_2) \dots & x_m(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.6)$$

siendo la dimensión de la matriz  $m \times p$ .

### COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE INTERNA

Sea  $S = (M, R)$  un sistema enlace, sean  $f_M$  y  $g_M$  las funciones estructurales entrada-salida y salida-entrada respectivamente. Sean  $f|_{M_I}$  y  $g|_{M_I}$  las restricciones de estas funciones al conjunto

formado por las variables internas  $M_I$ . Se define el producto cartesiano de las restricciones  $f_M | M_I \times g_M | M_I : M_I \longrightarrow P(M)$  por :

$$\begin{aligned} \forall x \in M_I \quad (f_M | M_I \times g_M | M_I)(x) &= f_M | M_I(x) \times g_M | M_I(x) = \\ &= f_M(x) \times g_M(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

siendo  $M_x = \{x_i \in M / \exists r \in R : (x, x_i) \in r\}$  donde el número de elementos de  $M_x$  es  $\text{card } \{M_x\} = n$ ; y  $M'_x = \{y_j \in M / \exists r \in R : (y_j, x) \in r\}$ , donde el número de elementos de  $M'_x$  es  $\text{card } \{M'_x\} = m$ .

Dada una variable interna  $x$ , definiremos la función comportamiento como la función definida entre el rango de la variable  $x$  y entre el producto cartesiano de los rangos de las variables que la influyen y las que son influenciadas por la variable  $x$  :

$$B_x : \text{Rg}(x) \longrightarrow \text{Rg}(x_1) \times \dots \times \text{Rg}(x_n) \times \text{Rg}(y_1) \times \dots \times \text{Rg}(y_m) \quad (1.8.8)$$

La función comportamiento de la variable interna  $x$  en el instante  $t$  está definida mediante la expresión :

$$B_x(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \quad (1.8.9)$$

A  $B_x$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento de la variable interna  $x$  de la forma :

$$B_x = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) \dots & x_1(t_p) \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) \dots & x_n(t_p) \\ y_1(t_1) & y_1(t_2) \dots & y_1(t_p) \\ y_m(t_1) & y_m(t_2) \dots & y_m(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.10)$$

siendo una matriz de dimensión  $(n + m) \times p$

### 1.8.3 COMPORTAMIENTO GLOBAL DE UN SISTEMA

En un sistema enlace  $S = (M, R)$  el comportamiento global del sistema para la temporalización  $T$ , " $B_S$ " es la función definida entre  $M$  y la unión de los comportamientos de cada una de sus variables :

$$B_S : M \longrightarrow \bigcup_{x \in M} B_x \quad / \quad \forall x \in M \quad B_S(x) = B_x \quad (1.8.11)$$

### 1.8.4 COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE DE ENTRADA ASOCIADA A UNA RELACION

Para un sistema enlace  $S = (M, R)$ , si  $f_r$  es la función estructural entrada-salida asociada a la relación  $r \in R$ , definida en (1.7.9), fijada la variable de entrada  $x \in M$ , definimos la función comportamiento asociada a  $r \in R$ , denotada por  $B_{rx}$  a :

$$B_{rx} : R_g(x) \longrightarrow R_g(x_1) \times R_g(x_2) \times \dots \times R_g(x_n) \quad (1.8.12)$$

donde los rangos que aparecen son observados y donde el número de elementos de  $M_x$  es  $\text{card} \{M_x\} = n$ .

La función comportamiento asociada a  $r \in R$  de la variable de entrada  $x$  en el instante  $t$  está definida mediante la expresión :

$$B_{rx}(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \quad (1.8.13)$$

A  $B_{rx}$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento asociada a  $r \in R$  de la variable de entrada  $x$  de la forma :

$[B_{rx}] = [x_i(t_j)]$  donde  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Esta matriz sería de la forma :

$$B_x = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \dots & x_1(t_p) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \dots & x_2(t_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \dots & x_n(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.14)$$

siendo la dimensión de la matriz  $n \times p$ .

### 1.8.5 COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE DE SALIDA ASOCIADA A UNA RELACION

Para un sistema enlace  $S = (M, R)$ , si  $g_r$  es la función estructural salida-entrada asociada a la relación  $r \in R$ , definida en (1.7.10), fijada la variable de salida  $x \in M$ , definimos la función comportamiento asociada a  $r \in R$ , denotada por  $B'_{rx}$  a :

$$B'_{rx} : R g(x) \longrightarrow R g(x_1) \times R g(x_2) \times \dots \times R g(x_m) \quad (1.8.15)$$

donde los rangos que aparecen son observados y donde el número de elementos de  $M'_x$  es  $\text{card} \{M'_x\} = m$ .

La función comportamiento asociada a  $r \in R$  de la variable de salida  $x$  en el instante  $t$  está definida por :

$$B'_{rx}(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)). \quad (1.8.16)$$

A  $B'_{rx}$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento asociada a la relación  $r$  de la variable de salida  $x$  de la forma :

$$[B'_{rx}] = [x_i(t_j)] \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \text{ y } j = 1, 2, \dots, p$$

Esta matriz sería de la forma :

$$B'_{rx} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) \dots & x_1(t_p) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) \dots & x_2(t_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m(t_1) & x_m(t_2) \dots & x_m(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.17)$$

siendo la dimensión de la matriz  $m \times p$

### 1.8.6 COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE INTERNA ASOCIADA A UNA RELACION

En un sistema enlace  $S=(M,R)$ , sean las funciones estructurales entrada-salida y salida-entrada asociadas a  $r$ ,  $f_r$  y  $g_r$ , respectivamente.

Consideramos las restricciones de estas funciones al conjunto formado por las variables internas  $M_I$  :

$$f_r | M_I : M_I \longrightarrow P(M) / \forall x \in M_I \text{ se cumple que } f_r | M_I(x) = f_r(x)$$

$$g_r | M_I : M_I \longrightarrow P(M) / \forall x \in M_I \text{ se cumple que } g_r | M_I(x) = g_r(x)$$

Podemos definir el producto cartesiano de las funciones :

$$f_r | M_I \times g_r | M_I : M_I \longrightarrow P(M)$$

tal que  $\forall x \in M_I (f_r | M_I \times g_r | M_I)(x) = f_r | M_I(x) \times g_r | M_I(x) = f_r(x) \times g_r(x) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  siendo  $M_x = \{x_i \in M / (x, x_i) \in r\} \wedge M'_x = \{y_j \in M / (y_j, x) \in r\}$ , es decir  $M_x$  son las variables influenciadas por  $x$  y  $M'_x$  son las variables que influncian a  $x$ .

Dada una variable interna  $x$ , definimos la función comportamiento asociada a  $r \in R$  de esta variable interna :

$$B^*_{rx} : Rg(x) \longrightarrow Rg(x_1) \times \dots \times Rg(x_n) \times Rg(y_1) \times \dots \times Rg(y_m) \quad (1.8.18)$$

donde la función comportamiento de la variable interna  $x$  en el instante  $t$  es :

$$B^*_{rx}(x(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t)). \quad (1.8.19)$$

A  $B^*_{rx}$  le asociamos una matriz llamada matriz comportamiento de la variable interna  $x$  definida por :

$$B^*_{rx} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) \dots & x_1(t_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) \dots & x_n(t_p) \\ y_1(t_1) & y_1(t_2) \dots & y_1(t_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_m(t_1) & y_m(t_2) \dots & y_m(t_p) \end{pmatrix} \quad (1.8.20)$$

siendo la dimensión de la matriz :  $(n + m) \times p$

### 1.8.7 CONSECUENCIAS

- En la función estructural entrada-salida, la imagen de una variable de entrada o interna  $x$  está formada por todas las variables que son influenciadas por ella y son variables internas y de salida.
- En la función estructural salida-entrada, la imagen de una variable interna o de salida  $x$  está formada por todas las variables de entrada e internas que influyen a la variable  $x$ .
- El rango de la función comportamiento de una variable de entrada  $x$  es el producto cartesiano de los rangos de las variables que son influenciadas por ella.

- El rango de la función comportamiento de una variable de salida  $x$  es el producto cartesiano de los rangos de las variables que influyen a ella.
- El rango de la función de comportamiento de una variable interna  $x$  es el producto cartesiano de los rangos de las variables que son influenciadas por ella y que influyen a ella.
- Una variable es de entrada si no es influenciada por ninguna variable del sistema, pero ella influye al menos a una variable del sistema.
- Una variable es interna si está influenciada al menos por una variable del sistema y ella influye al menos a una variable del sistema.
- Una variable es de salida si está influenciada al menos por una variable del sistema, pero ella no influye a ninguna variable del sistema.

## 1.9 JERARQUIAS

### 1.9.1 JERARQUIAS EN VARIABLES

#### BUCLE

**Definición 13** : En un sistema enlace  $S = (M, R)$  un conjunto  $A \subseteq M$ ,

$A = \{x_i\}_{i=1}^n$  es un bucle si sus elementos cumplen las relaciones :

$$(x_1, x_2) \in r_1, (x_2, x_3) \in r_2, \dots, (x_{n-1}, x_n) \in r_{n-1}, (x_n, x_1) \in r_n$$

siendo  $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ .

(1.9.1)

En el caso trivial,  $A = \{x_1\}$  es un bucle si se cumple que  $\exists r / (x_1, x_1) \in r$  siendo  $r \in R$ . Lo que equivale a afirmar que un conjunto unitario es un bucle si se influye a el mismo directamente.





## ESTRUCTURA JERARQUICA

**Definición 14:** Un sistema enlace  $S = (M, R)$  se dice que tiene estructura jerárquica si y solo si no existen subconjuntos de  $M$  que sean bucles.

(1.9.2)

## NIVEL DE VARIABLES

Lo introducimos con arreglo a medir los distintos tipos de interconexiones entre las variables

**Definición 15:** En un sistema enlace con estructura jerárquica  $S = (M, R)$ . Las variables de nivel 1 se definen como las variables de entrada. Las variables de nivel 2 van a ser las variables influenciadas por variables de nivel 1 ( es decir por variables de entrada ) luego son variables internas o de salida. Las variables de nivel 3 son las variables influenciadas por variables de nivel 2. De forma general, por recurrencia, se definen las variables de nivel  $n$  como las variables influenciadas por variables de nivel  $n-1$ .

(1.9.3)

**Proposición 5:** Sea  $S = (M, R)$  un sistema enlace con función estructural entrada-salida  $f_M$  y función estructural salida-entrada  $g_M$ . Si  $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in M, A_1, A_2, \dots, A_n \in P(M), n \in \mathbb{N} / f_M(x_i) = A_i \forall i = 1, 2, \dots, n \wedge x_{j+1} \in A_j \forall j = 1, 2, \dots, n-1 \wedge x_1 \in A_n \Rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un bucle.

( La propiedad también se cumple sustituyendo  $f_M$  por  $g_M$  )

**Demostración** : De las condiciones obtenemos :  $x_2 \in A_1 = f_M(x_1)$ ,  
 $x_3 \in A_2 = f_M(x_2)$  ..... ,  $x_n \in A_{n-1} = f_M(x_{n-1})$ ,  $x_1 \in A_n = f_M(x_n) \Rightarrow \exists r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R} /$   
 $(x_1, x_2) \in r_1, (x_2, x_3) \in r_2, \dots, (x_{n-1}, x_n) \in r_{n-1}, (x_n, x_1) \in r_n \Rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un  
 bucle.

( Las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la proposición son variables internas.  
 Además, si  $n=1$ ,  $\{x_1\}$  es un bucle ya que se influye el mismo  
 directamente )

**Proposición 6** : Sea  $S = ( M , R )$  un sistema enlace con función  
 estructural entrada-salida  $f_M$  ( y función estructural salida-entrada  $g_M$  .  
 Si  $\forall x \in M \forall n \in \mathbb{N} / A_1, A_2, \dots, A_n \in P(M)$  ,  $x \notin (f_M|_{A_n} \circ f_M|_{A_{n-1}} \dots$   
 $\circ f_M|_{A_1} \circ f_M)(x) \Rightarrow$  El sistema enlace  $S=(M,R)$  tiene estructura jerárquica

**Demostración** : Por la proposición anterior :  $\forall x \in M$  no hay bucles  
 pasando por  $x$ , luego la estructura es jerárquica.

## 1.9.2 SISTEMAS ORGANIZADOS

### JERARQUICAMENTE

Situaciones de sistemas complejos aparecen en campos muy  
 diferentes, en biología tienen niveles diferentes de organización. Varios  
 autores han trabajado en la organización jerárquica de sistemas  
 complejos en campos diferentes, tales como física, biología y económicas  
 (Allen y Star 1982 ; Auger, 1985, 1986 ; Mesarovic et al, 1980 ; Patten,  
 1974 ).

Presentamos el concepto jerárquico de sistemas como un sistema  
 grande conteniendo elementos que pueden ocupar estados diferentes.  
 Estos estados están reunidos en grupos, y la estructura jerárquica del

sistema es debido al hecho de que los elementos frecuentemente cambian estados en el mismo grupo, pero raramente cambian estados en grupos diferentes.

Por otra parte, las variables de un sistema pueden tener un comportamiento sin justificación, y en otras variables, de su estructura no podemos obtener su comportamiento.

Necesitamos un puente entre la estructura y el comportamiento de variables, de manera que a partir de la estructura de las variables generemos el comportamiento.

Las componentes de un sistema son las distintas variables del sistema y las transiciones entre estados del sistema están definidos por relaciones dinámicas entre las variables. De esta manera, se puede relacionar el comportamiento, el cambio de estado y la estructura del sistema.

Suminramos una descripción mas completa de sistemas mediante sus componentes, su interrelación y la manera en que esta interrelación produce el comportamiento global que observamos.

Necesitamos separar suficientemente el entorno del sistema. El entorno del sistema queda poco nítido e inestructurado, la única entidad fundamental y estructurada sigue siendo el propio sistema. El sistema está libre para actuar arbitrariamente en un entorno careciendo de sentido. Por otra parte, este entorno aparece generalmente como una restricción al sistema, así que su acción está contra alrededores hostiles

La estructura jerárquica suministra una estructura adecuada para enfocar el sistema como parte atractiva en un entorno organizado jerárquicamente. El concepto de estructura jerárquica no tiene una definición formal aceptada universalmente y no vamos a entrar en tal

discusión, pero utilizaremos los conceptos que sirven para nuestro propósito.

Un estudio de nuestros alrededores debería revelar inmediatamente que los sistemas, no solo no son aislados, sino que además, tienen interacciones fuertes con otros sistemas y, ellos y sus interacciones pueden estar considerados inmersos en un sistema que los abarca. De esta manera llegamos a una visión del Mundo como una jerarquía orgánica de sistemas. Cuando nuestra meta es el estudio de una meta particular, nuestros esfuerzos en estructurar y modelizar, se refieren al sistema dentro de las acotaciones que nuestro estudio presupone.

### **COOPERACIÓN EN UN SISTEMA ORGANIZADO JERARQUICAMENTE**

Un diseñador que está tratando de diseñar un mecanismo en una forma jerárquica con módulos en niveles diferentes se enfrenta con un problema de coordinación. Los módulos y submódulos diferentes deben estar dispuestos, interrelacionados y regulados de forma que su acción combinada es armoniosa y el sistema en conjunto cumple tal tarea. El conocimiento que el diseñador tiene o busca del sistema es global.

Como un ejemplo simple de sistemas organizados jerárquicamente, consideramos un sistema compuesto de dos subsistemas. Si los dos subsistemas ignoran la existencia del sistema superior que les abarca y actúa para optimizar sus propios procesos, ellos están en competición, porque su coexistencia e interrelación constituye para ambos una constricción sobre su optimización particular. Si los dos subsistemas reconocen la existencia del sistema superior y tratan de optimizar el estado del sistema global, ellos están en cooperación y su

coexistencia e interrelación los ayuda. La competición, como se presenta aquí, tiende a producir optimizaciones locales que no aseguran la optimización global. La cooperación tiende a un óptimo global a través de óptimos relativos que necesariamente no coinciden con el óptimo absoluto de los subsistemas.

**Definición 16 :** Dados dos sistemas enlace  $S_i = (M_i, R_i)$ ,  $i = 1, 2$ . El sistema  $S_1$  es un subsistema del sistema  $S_2$  si  $M_1 \subseteq M_2$  y para cada relación  $r_1 \in R_1$  existe una relación  $r_2 \in R_2$  tal que  $r_1 \subseteq R_2 \upharpoonright M_1$

## 1.10 INFLUENCIA ENTRE SISTEMAS

Los sistemas interactúan, pero ¿Cuál es el significado de esta interacción?. Esta interacción es un cambio de información. Dado el sistema enlace  $S = (M, R)$ . Definiremos a partir de él un nuevo sistema  $\Sigma = (M, \mathcal{R})$ , cuyo conjunto objeto  $M$  es el formado por todos los subsistemas de  $S$ , es decir:  $M = \{ S_1 = (M_1, R_1), S_2 = (M_2, R_2), \dots, S_n = (M_n, R_n) / S_i \text{ es un subsistema de } S \}$  y cuyo conjunto relación  $\mathcal{R}$  está determinado por dos relaciones,  $r_1$  y  $r_2$ , denotadas relación de influencia directa y relación de influencia indirecta entre subsistemas, es decir:  $\mathcal{R} = (r_1, r_2)$ , definidas de la siguiente manera:

Dados dos subsistemas  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$  del sistema enlace  $S = (M, R)$ :

1. Si  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ , es decir si tienen variables comunes, diremos que el subsistema  $S_1$  influye en el subsistema  $S_2$ , cuando existe al menos alguna variable de salida de  $S_1$  que es variable de entrada en  $S_2$ , en cuyo caso

diremos que el subsistema  $S_1$  influye directamente al subsistema  $S_2$  y escribimos  $(S_1, S_2) \in r_1$ .

(1.10.1)

2. Si  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , es decir si no tienen variables comunes, diremos que el subsistema  $S_1$  influye indirectamente al subsistema  $S_2$  si  $\exists x \in M_1 / x$  es variable de salida en  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $\exists y \in M_2 / y$  es variable de entrada en  $S_2 = (M_2, R_2)$  de forma que  $\exists r \in R / (x, y) \in r$ .

Lo que escribiremos por  $(S_1, S_2) \in r_2$

(1.10.2)

Más generalmente podríamos definir la influencia indirecta de la manera siguiente :  $S_1$  influye indirectamente a  $S_2$  si  $\exists x \in M_1 / x$  es variable de salida en  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $\exists y \in M_2 / y$  es variable de entrada en  $S_2 = (M_2, R_2)$  y además existen las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$  y las relaciones  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1} \in R / (x, x_1) \in r_1, (x_1, x_2) \in r_2, \dots, (x_n, x_n) \in r_n, (x_n, y) \in r_{n+1}$ . Lo que escribiremos por  $(S_1, S_2) \in r_2$

(1.10.3)

**Nota 4 :** Un sistema puede no influirse el mismo directamente, porque una variable puede no ser una variable de entrada y de salida a la vez.

**Nota 5 :** Si  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , podemos pensar en la influencia indirecta entre subsistemas, al igual que hacíamos entre variables, tal como hace A. Caselles (11) : Un subsistema  $S_1$  influye indirectamente en el subsistema  $S_2$  si existen subsistemas  $C_1, C_2, \dots, C_n \in S$  cumpliendo que las intersecciones  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ , para  $i=1, 2, \dots, n-1$ ,  $S_1 \cap C_1 \neq \emptyset$ ,  $C_n \cap S_2 \neq \emptyset$ , y existe una relación  $r \in \mathcal{R}$  cumpliendo que  $(S_1, C_1) \in r, (C_1, C_2) \in r, \dots,$

$(C_{n-1}, C_n) \in r, (C_n, S_2) \in r$ . Pero esta definición de influencia indirecta, como veremos mediante el siguiente ejemplo, no siempre es cierta.

**Ejemplo 4 :** Consideremos el sistema enlace  $S = (M, R)$ , siendo  $M$  el conjunto de variables determinado por  $M = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$  y  $R$  el conjunto de relaciones determinado por  $R = \{ (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_6) \}$ . Consideramos los subsistemas siguientes :

$$S_1 = (M_1, R_1) \text{ donde } M_1 = \{x_1, x_2\} \text{ y } R_1 = \{ (x_1, x_2) \}$$

$$S_2 = (M_2, R_2) \text{ donde } M_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } R_2 = \{ (x_2, x_3), (x_4, x_5) \}$$

$$S_3 = (M_3, R_3) \text{ donde } M_3 = \{x_5, x_6\} \text{ y } R_3 = \{ (x_5, x_6) \}.$$

Se considera el sistema de subsistemas  $\mathcal{S} = (M, \mathfrak{R})$  siendo  $M = \{S_1, S_2, S_3\}$  y  $\mathfrak{R} = \{r_1, r_2\}$ . Los subsistemas  $S_1$  y  $S_3$  cumplen que  $M_1 \cap M_3 = \emptyset$ . Veamos que  $S_1$  influye indirectamente a  $S_3$ : Ya que la variable  $x_2$  cumple que es una variable de salida de  $S_1$  y  $x_2$  es una variable de entrada de  $S_2$ , entonces el sistema  $S_1$  influye directamente en  $S_2$ , por lo tanto  $(S_1, S_2) \in r_2, r_2 \in \mathfrak{R}$ .

Análogamente  $x_5$  es variable de salida de  $S_2$  y  $x_5$  es variable de entrada de  $S_3$ , luego  $S_2$  influye directamente en  $S_3$ , por lo tanto  $(S_2, S_3) \in r_2$ , siendo  $r_2 \in \mathfrak{R}$ . Luego por la definición anterior se cumple que  $(S_1, S_3) \in r_2$ , siendo  $r_2 \in \mathfrak{R}$ . Pero esto no es cierto, ya que no existe intercambio de información entre  $S_1$  y  $S_3$ .

**Proposición 7 :** Sea  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$  dos subsistemas del sistema enlace  $S = (M, R) / M_1 \cap M_2 = \emptyset$ . Si existe al menos un bucle conteniendo al menos una variable de salida  $x \in M_1$  y una variable de entrada  $y \in M_2$ , entonces el sistema  $S_1 = (M_1, R_1)$  influye indirectamente en el sistema  $S_2 = (M_2, R_2)$ .

**Demostración :** Si existe un bucle conteniendo las variables  $x \in M_1$ ,  $y \in M_2$ , podemos encontrar que  $\exists z_1, z_2, \dots, z_n \in M$  y  $\exists r_1, r_2, \dots, r_{n+1} \in R$  tal que :  $(z_1, z_2) \in r_1$ ,  $(z_2, z_3) \in r_2, \dots$ ,  $(z_i, x) \in r_i$ ,  $(x, z_{i+1}) \in r_{i+1}, \dots$ ,  $(z_j, y) \in r_{j+1}$ ,  $(y, z_{j+1}) \in r_{j+1}, \dots$ ,  $(z_n, z_1) \in r_{n+1}$ , y de aquí, como  $(x, z_{i+1}) \in r_{i+1}, \dots$ ,  $(z_{j-1}, z_j) \in r_j$ ,  $(z_j, y) \in r_{j+1}$ , ya tenemos la definición de que el sistema  $S_1 = (M_1, R_1)$  influye indirectamente al sistema  $S_2 = (M_2, R_2)$ .

**Definición 17 :** Sea un sistema de subsistemas  $\Sigma = (M, \mathcal{R})$ , un subconjunto  $A \subseteq M$ , diremos que el conjunto  $A = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  es un bucle  $\Leftrightarrow (C_1, C_2) \in r_i, (C_2, C_3) \in r_i, \dots, (C_{n-1}, C_n) \in r_i, (C_n, C_1) \in r_i$  siendo  $i=1,2$ . Luego hay un bucle en  $A$  cuando cada subsistema de  $A$  se influencia el mismo.

(1.10.4)

**Definición 18 :** Decimos que un sistema de subsistemas es jerárquico si no tiene bucles.

(1.10.5)

**Ejemplo 5 :** Haciendo una pequeña variación en un ejemplo anterior tenemos :

Sea  $S = (M, R)$  un sistema enlace siendo :

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \quad \text{y} \quad R = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_1)\}.$$

Consideramos los subsistemas :

$$S_1 = (M_1, R_1) \text{ donde } M_1 = \{x_1, x_2\} \text{ y } R_1 = \{(x_1, x_2)\}$$

$$S_2 = (M_2, R_2) \text{ donde } M_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } R_2 = \{(x_2, x_3), (x_4, x_5)\}$$



$$S_3 = (M_3, R_3) \text{ donde } M_3 = \{x_1, x_5\} \text{ y } R_3 = \{x_5, x_1\}.$$

Considero el sistema de subsistemas :

$$\Sigma = (M, \mathfrak{R}) \text{ donde } M = \{S_1, S_2, S_3\} \text{ y } \mathfrak{R} = \{(S_1, S_2), (S_2, S_3), (S_3, S_2)\}.$$

El sistema  $S = (M, R)$  es un sistema jerárquico, pero el sistema  $\Sigma = (M, \mathfrak{R})$  tiene un bucle y no es jerárquico.

## 1.11 SEMEJANZA ESTRUCTURAL DE SISTEMAS

El concepto de semejanza ha ganado una extensión considerable, en particular, ofrece la posibilidad de una nueva herramienta conceptual para comprender el estado vivo y los sistemas biológicos. Considerado como un isomorfismo de sistemas, puede representar una contribución epistemológica significativa.

Considerado como un isomorfismo, este concepto ha sido ampliado como una analogía en las ciencias de la vida y diversas manifestaciones de la investigación científica.

Un isomorfismo puede ser definido de la manera siguiente :

1. Una correspondencia inyectiva entre elementos en sistemas diferentes tal que la relación entre elementos se mantiene.
2. Una analogía perfecta. Todo lo que está en un sistema y ocurre en ese sistema tiene su imagen homomorfa en el segundo sistema y recíprocamente.
3. Siempre que los símbolos de un modelo matemático permanecen en correspondencia inyectiva con los de la otra, incluyendo los símbolos de la relación y siempre que la relación se mantenga cuando un par de

símbolos en un modelo es sustituido por sus homólogos en la otra, los dos modelos son isomórficos.

Hay tres prerequisites para la existencia de isomorfismos en diferentes campos y ciencias :

- El número de expresiones matemáticas simples que serán aplicados preferiblemente para describir fenómenos naturales es limitado, por esta razón, leyes idénticas en estructura aparecerán en campos diferentes intrínsecamente.
- La estructura de la realidad es tal que permite la aplicación de construcciones conceptuales y no demasiado complejas para ser representadas por los esquemas relativamente simples que puedan ser elaborados.
- El paralelismo de concepciones generales o algunas leyes especiales en campos diferentes es una consecuencia del hecho de que son concernientes a sistemas y que ciertos principios generales se aplican a sistemas con independencia de su naturaleza.

### 1.11.1 SIMILITUD ASOCIADA A RELACIONES

Se consideran dos sistemas  $S_1 = ( M_1, R_1 )$  y  $S_2 = ( M_2, R_2 )$ ; siendo  $R_1 \subset M_1 \times M_1$ ,  $R_2 \subset M_2 \times M_2$ . Además suponemos la existencia de una aplicación inyectiva :  $f : M_1 \longrightarrow M_2$

**Definición 19** : Dadas dos relaciones binarias  $r_1 \in R_1$  y  $r_2 \in R_2$ , sean  $f_{r_1}$  y  $f_{r_2}$  las funciones estructurales entrada - salida asociadas a  $r_1$  y a  $r_2$  respectivamente. Diremos que ambas funciones tienen similitud

estructural en  $x_1 \in M_1$  y  $x_2 \in M_2$  si se cumplen las propiedades siguientes :

1.  $f(x_1) = x_2$
  2.  $\text{Card } f_{r_1}(x_1) \leq \text{card } f_{r_2}(x_2)$
  3.  $\forall y_1 \in M_1 / (x_1, y_1) \in r_1 \Rightarrow \exists ! y_2 \in M_2 / f(y_1) = y_2 \wedge (x_2, y_2) \in r_2$ .
- (1.11.1)

Lo expresamos por  $f_{r_1}(x_1) \cong f_{r_2}(x_2)$

### 1.11.2 SIMILITUD ESTRUCTURAL DE SISTEMAS

Dados dos sistemas  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$ .

Diremos que tienen una similitud estructural entrada - salida sii :

1. Existe una aplicación inyectiva  $f: M_1 \longrightarrow M_2$
2. Si  $x_1 \in M_1$  y  $x_2 \in M_2 / f(x_1) = x_2$ . Se cumple que :

$$\forall r_1 \in R_1 \exists r_2 \in R_2 / f_{r_1}(x_1) \cong f_{r_2}(x_2).$$

(1.11.2)

Análogamente, bajo las mismas condiciones, pero considerando funciones estructurales salida - entrada tendremos :

**Definición 20** : Dadas dos relaciones binarias  $r_1 \in R_1$  y  $r_2 \in R_2$ . Sean  $g_{r_1}$  y  $g_{r_2}$  las funciones estructurales salida - entrada asociadas a  $r_1$  y a  $r_2$  respectivamente. Diremos que ambas funciones tienen similitud estructural en  $x_1 \in M_1$  y  $x_2 \in M_2$  si se cumplen las condiciones siguientes :

1.  $f(x_1) = x_2$
2.  $\text{card } g_{r_1}(x_1) \leq \text{card } g_{r_2}(x_2)$

$$3. \forall y_1 \in M_1 / (y_1, x_1) \in r_1 \Rightarrow \exists ! y_2 \in M_2 / f(y_1) = y_2 \wedge (y_2, x_2) \in r_2. \quad (1.11.3)$$

Lo expresamos por  $g_{r_1}(x_1) \cong g_{r_2}(x_2)$

**Definición 21** : Dados dos sistemas  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$ .

Diremos que tienen una similitud estructural salida - entrada sii :

1. Existe una aplicación inyectiva  $f : M_1 \longrightarrow M_2$
2. Si  $x_1 \in M_1$  y  $x_2 \in M_2 / f(x_1) = x_2$ . Se cumple que :

$$\forall r_1 \in R_1 \exists r_2 \in R_2 / g_{r_1}(x_1) \cong g_{r_2}(x_2) \quad (1.11.4)$$

### 1.11.3 SEMEJANZA ESTRUCTURAL DE SISTEMAS

La semejanza estructural entre sistemas equivale a la similitud estructural entrada - salida y a la similitud estructural salida - entrada cumpliendo además que los cardinales de las funciones estructurales coinciden :

$$\text{card } f_{r_1}(x_1) = \text{card } f_{r_2}(x_2) \quad \text{y} \quad \text{card } g_{r_1}(x_1) = \text{card } g_{r_2}(x_2). \quad (1.11.5)$$

Lo representaremos por  $S_1 \cong S_2$

**Proposición 8** : Dados dos sistemas  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$ .

Si  $S_1$  y  $S_2$  son semejantes estructuralmente  $\Rightarrow \forall r_1 \in R_1, \exists r_2 \in R_2$  y  $\exists F : P(M_1) \longrightarrow P(M_2)$  de manera que el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
 f_{r_1} \downarrow & & \downarrow f_{r_2} \\
 P(M_1) & \xrightarrow{F} & P(M_2)
 \end{array}$$

(análógicamente sustituyendo  $f_{r_1}$  por  $g_{r_1}$  y  $f_{r_2}$  por  $g_{r_2}$ )

**Demostración:** Al ser  $S_1 \cong S_2$ ,  $\exists f: M_1 \longrightarrow M_2$  inyectiva  $\wedge \forall r_1 \in R_1 \exists r_2 \in R_2 / f_{r_1} \cong f_{r_2}$ .

Definimos  $F: P(M_1) \longrightarrow P(M_2) / A \in P(M_1)$  le asociamos  $B \in P(M_2)$ . El dominio de  $F$  está formado por los subconjuntos de  $M_1$  en los que se encuentran elementos que están relacionados mediante  $r_1$ .

Sea  $A = \{x_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ ,  $A \in P(M_1)$ , se distinguirán dos casos:

Tipo 1:

Que todas las variables sean de entrada:

$\forall x_i \exists \{y_j^i\}_{j=1,2,\dots,i_m} / x_i r_1 y_j^i$  (o  $(x_i, y_j^i) \in r_1$ ). Es decir se consideran el conjunto de variables que se relacionan con  $x_i$  mediante  $r_1$ .

En este caso, se define:

$$F(A) = B = \{f(y_j^i)\} \text{ para } i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,i_m$$

Tipo 2:

Que existan un número finito de ellas que son de entrada:

En este caso:

sea  $A_E = \{z_i, i=1,2,\dots,p / z_i = \text{variable de entrada}\}$  y  $F(A) = F(A_E)$ .

Veamos la conmutatividad del diagrama:

$$\text{Sea } x_1 \in M_1 \quad F \circ f_{r_1}(x_1) = F(A x_1).$$

$A x_1 = f_{r_1}(x_1)$  supuesto que es del tipo 1

$$A x_1 = \{ y_1^j / (x_1, y_1^j) \in r_1 \}$$

Calculando las imágenes  $f(y_1^j) = y_2^j$ ,  $F \circ f_{r_1}(x_1) = \{ y_2^j \}_j$  (1)

$$(f_{r_2} \circ f)(x_1) = f_{r_2}(f(x_1)) = f_{r_2}(x_2) = \{ y_2 \in M_2 / (x_2, y_2) \in r_2 \}$$

que coincide con (1) al ser  $\text{card } f_{r_1}(x_1) = \text{card } f_{r_2}(x_2)$

**Ejemplo 6 :** Sea  $S_1 = (M_1, R_1)$  siendo :  $M_1 = \{ \text{conjunto de animales} \}$ ,  $R_1 = \{ \text{relaciones entre animales} \} = \{ \text{depredador, presa, etc.} \}$ .

Sea  $S_2 = (M_2, R_2)$  siendo :  $M_2 = \{ \text{atributos asociados al conjunto de animales} \}$ ,  $R_2 = \{ \text{relaciones entre atributos} \}$ .

Es decir  $S_1$  es un sistema Ontológico y  $S_2$  sería un sistema semiótico asociado.

Sea  $r_1 \in R_1$  la relación : “ x es presa de y “ es decir  $(x, y) \in r_1$ .

Sea  $r_2 \in R_2$  la relación : “ Hay un flujo de biomasa de x hacia y “ es decir  $(x, y) \in r_2$ .

Sea  $x_1 = \text{león}$ ,  $y_1 = \text{cebra}$ ; el par  $(y_1, x_1) \in r_1$ .

Sea  $x_2 = \text{flujo de biomasa hacia el león}$ , sea  $y_2 = \text{flujo de biomasa desde la cebra}$ . El par  $(y_2, x_2) \in r_2$ . Entonces las funciones estructurales entrada-salida  $f_{r_1}(x_1)$  y  $f_{r_2}(x_2)$  tienen semejanza estructural.

**Ejemplo 7 :** Sea  $S = (M, R)$  un sistema donde  $M = \mathfrak{R} = \text{conjunto de los números reales}$  y  $R = \{ r_1, r_2 \}$ ,  $r_1 = \text{operación de adición } +$ ,  $r_2 = \text{operación de multiplicación } \cdot$ .

Las operaciones  $+$  y  $\cdot$  se pueden efectuar sobre todos los elementos de  $\mathfrak{R}^2$ .

Para cada  $a \in \mathfrak{R}$ , definimos el sistema  $S_a = (\mathfrak{R} \times \{a\}, R_a)$  como sigue :

$$\mathfrak{R} \times \{a\} = \{ (r, a) \text{ pares ordenados de } r \in \mathbb{R} \text{ y } a \in \mathbb{R} \}$$

$$R_a = \{ \text{operaciones de adición y multiplicación } +_a \text{ y } \cdot_a \},$$

donde si  $(r_1, a) \in \mathfrak{R} \times \{a\}$  y  $(r_2, a) \in \mathfrak{R} \times \{a\}$ . Definimos :

$$(r_1, a) +_a (r_2, a) = (r_1 + r_2, a)$$

$$(r_1, a) \cdot_a (r_2, a) = (r_1 \cdot r_2, a).$$

Los sistemas  $S = (M, R)$  y  $S_a = (\mathfrak{R} \times \{a\}, R_a)$  tienen semejanza estructural.



**2**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **TEORIA DE SISTEMAS VIVOS**



## CAPITULO 2 :

En este capítulo se considera la axiomatización de la Teoría de Sistemas Vivos, para lo que son considerados aquellos conceptos y relaciones fundamentales en sistemas vivos. De esta forma se axiomatizan las componentes biológicas: célula, tejido, órgano, organismo, individuo, especie, comunidad y ecosistema.

Entre los resultados mas importantes está la obtención de una métrica celular que nos mide la cercanía entre células distintas y la comprobación de que realmente lo es.

Avanzamos con la axiomatización de procesos biológicos tan importantes como los procesos de división y fusión celular. Para ello son definidos inicialmente las funciones división y fusión celular, creando un conjunto de axiomas que nos permiten obtener las propiedades posteriores. Es de destacar la obtención, a partir de esta axiomatización, de la unicidad de las funciones división y fusión celular ; así como la relación de las mismas con las funciones estructurales definidas previamente en el primer capítulo

# CAPITULO 2 : TEORIA DE SISTEMAS VIVOS

## 2.1 INTRODUCCION

La biología es una ciencia descriptiva : su meta es describir la naturaleza de lo que tiene vida. Es curioso notar que el objeto del estudio de cada una de las ciencias es intuitivo, y que todo intento por definirlo ha llevado a inevitables contradicciones : El objeto en estudio, se conoce a un nivel consciente no susceptible a ser expresado en un lenguaje preciso. La naturaleza de lo viviente en biología es un concepto intuitivamente claro, sin embargo no definible.

*En toda descripción entra necesariamente un lenguaje, específico para la descripción que se pretende dar ; este podría ser el de la palabra, pintura, matemática o cualquier otro. El vehículo universal con el cual se expresa una descripción es el lenguaje.*

Históricamente la palabra precede a la matemática, sin embargo esto no hace a la matemática jerárquicamente superior en complejidad o en poder de descripción. Se da el caso, naturalmente, en que un lenguaje en particular es mas apropiado que otro para un cierto tipo de descripción : Aristóteles y su escuela usaron el lenguaje de la palabra para describir los fenómenos y las leyes de la física ; Galileo, Newton y sus contemporáneos decidieron que el lenguaje matemático es bastante más apropiado para esta descripción.

Los procesos biológicos pueden ser considerados locales (o internos) o globales (o externos). Los procesos biológicos locales se refieren al funcionamiento en sí, sus reacciones internas y con el medio que las rodea, tales como división celular, fusión celular, etc. Los procesos biológicos globales se refieren a componentes biológicas mayores tales como colonias de células, incluso un órgano, como el corazón, colonias de abejas y seres humanos, y en el caso más general de un ecosistema.

En este párrafo, *por una parte axiomatizaremos las componentes de procesos biológicos locales y globales, tales como célula, tejido, órgano, organismo, individuo, especie, población, comunidad y ecosistema*, tratando cuestiones relativas al funcionamiento sobre todo de ecosistemas, tales como índices de complejidad, diversidad, adaptación, evolución, etc. Y por otra parte interpretaremos, *desde el punto de vista de nuestra teoría de sistemas, procesos biológicos locales, tales como los procesos de división y fusión celular y procesos biológicos globales tales como la utilización de la teoría de sistemas para la axiomatización y modelización de ecosistemas*.

## **2.2 SISTEMAS VIVOS. PROPIEDADES.**

La ciencia dedicada a los sistemas vivos es considerada a veces como una teoría Esotérica. Los sistemas se forman por interacciones de objetos, así como los objetos reales se interaccionan para formar sistemas reales. Nos referimos a cuestiones de economía, industria, política, sistemas ecológicos, así como a investigaciones biológicas de los sistemas vivos. Son muchos los conceptos y definiciones de sistema vivo que se han venido dando a través de los tiempos. En principio se dieron

definiciones que identifican la vida con metabolismo son inadecuadas. Así Liapunov caracteriza los sistemas vivos como sistemas materiales altamente estables que usan información codificada por estados moleculares para la producción de reacciones de conservación. Ebert en 1970 definió la vida como sistemas de desarrollo interaccionando a la misma. Miller (111) indica 19 niveles jerárquicos de sistemas vivos, definiendo un sistema vivo como un sistema que tiene una capacidad para el propio movimiento ( solo los sistemas vivos comparten la capacidad de alguna clase de movimientos propios ). Mayr en 1988, los define como sistemas caracterizados por una organización marcadamente compleja, que los dota de capacidad para responder a estímulos externos, tomando o soltando energía ( metabolismo ), para crecer, diferenciarse y reproducirse. Pero estas sentencias describen modelos conceptuales y sin embargo :

*No hay definición matemática ni para los procesos ni para la definición, no existe una axiomática alrededor de la vida, solo unos modelos de palabras.*

Admitimos la dificultad de la axiomática de los sistemas vivos, sobre todo debido a su complejidad. Pensamos que es necesario definir primero conceptos como jerarquía y lenguaje, para comprender el lenguaje genético y la reproducción, nociones necesarias para una definición aproximada de sistemas vivos a través de la nueva biología.

### **2.2.1 JERARQUIA Y LENGUAJE**

Un hecho característico de los sistemas vivos es además su tendencia al auto-equilibrio, que puede tener una parte del sistema, puede existir dentro de estructuras superiores restringiendo su libertad. Es

posible decir que los sistemas vivos no tienen una organización, pero si muchos niveles de organización en superposición, cada uno con un orden peculiar. En esta jerarquía de niveles de organización, cada nivel está restringido y controlado por otro superior. La organización biológica toma la forma de niveles jerárquicos de control y cada uno impone sus reglas (restricciones selectivas). En los sistemas vivos, las jerarquías participan en la producción de sus propias reglas y diferencian las otras que son extraídas o instruidas por una autoridad externa.

Un conjunto coordinado de restricciones crea una estructura con un lenguaje básico. En los sistemas vivos, una molécula, aún teniendo su propio valor como propiedades físicas y químicas, peso, estructura geométrica, carga eléctrica, etc., nos interesa su actuación como símbolo para ser interpretado por estructuras biológicas con un lenguaje necesario. En los sistemas vivos, la actividad de cada nivel de organización debe tener significado para este nivel y ser interpretado por el nivel inmediatamente superior. El conjunto de restricciones del código genético construye un lenguaje básico gracias al cual es posible transmitir el mensaje genético. Pero esto, no está realizado completamente. No es posible cumplir todas las instrucciones porque un nivel de organización superior está imponiendo un nuevo conjunto de restricciones. Este nuevo nivel controla el desarrollo.

### **2.2.2 DESCRIPCION Y RESTRICCION**

Hay dos formas de describir los sistemas vivos ( Patten ( 1978 ) , ( 1979 ) ), la microscópica, especificando el comportamiento de cada elemento en cada tiempo y la macroscópica, basada en las restricciones, consistiendo en explicar el comportamiento del sistema

desconociendo el comportamiento de las componentes. Cada especificación restringe y desecha un gran número de posibilidades. Las especificaciones son restricciones adicionales que deberían ser sus propios axiomas o leyes básicas de los fenómenos biológicos. En este capítulo desarrollaremos los sistemas vivos desde una descripción microscópica.

### **2.2.3 REGISTROS**

La descripción de los sistemas puede hacerla un observador, pero hay sistemas que pueden ser descritos ellos mismos ( autodescripción ), por ejemplo el ser humano. En esta descripción, un sistema fabricará una grabación de su propia dinámica. Para que un sistema cause un registro se requiere una “ autoobservación “ ( observación por el mismo ).

### **2.2.4 CODIFICACION GENETICA**

Está comprobado que la cantidad de información necesaria para especificar la estructura de un sistema biológico está contenida en los cromosomas del sistema original. De forma mas precisa, el ácido desoxirribonucleico ( DNA) es quien transmite la información genética. En 1953, Crick y Watson demostraron que el DNA presenta el aspecto de una doble hélice. Estas hélices pueden imaginarse relacionadas por secuencias de 4 nucleótidos que contienen el mensaje genético. Los nucleótidos A, C, G, T ( Adenina, citosina, guanina y timina ) . Experimentalmente, por otra parte, se ha puesto en evidencia que la Naturaleza opera con un alfabeto de 4 símbolos. Estos símbolos se combinan de manera diferente para representar alrededor de 20 aminoácidos que deben ser fabricados por el nuevo sistema biológico. La

forma en que los nucleótidos ( A, C, G, T ) se codifican para representar los diferentes aminoácidos, constituye el problema fundamental de la codificación genética.

El concepto de sistema vivo resulta esencial para definir adecuadamente el ecosistema, por lo que trataremos su formalización.

## **2.3 AXIOMATIZACION DE SISTEMAS VIVOS**

### **2.3.1 AXIOMATIZACION ONTOLOGICA DE SISTEMAS VIVOS**

En una primera axiomatización de los sistemas vivos es conveniente la caracterización desde el punto de vista Ontológico independientemente del tipo de relación existente entre los elementos del mismo. En este sentido se consideran los conceptos siguientes ( 163 ) :

#### **SISTEMA VIVO O SISTEMA BIOTICO**

**Definición 1** : Los sistemas vivos son aquellos sistemas en donde existe al menos un ente con la propiedad de la vida según las leyes físico-químicas que la definen.

#### **SISTEMA ABIOTICO**

**Definición 2** : Es todo sistema no biótico o no vivo.

## CELULA

**Definición 3 :** En biología es el sistema vivo elemental. En esta axiomatización se considera como el sistema simple unitario : “ cel x “.

## TEJIDO

**Definición 4 :** Es un conjunto de células que tienen la misma función y presentan la misma morfología, composición y formas comunes :

$$T_j = \bigcup_{i \in I} \text{cel } x_i / \forall i \text{ cel } x_i \text{ tienen igual morfología y } \forall i, j \text{ morfol. cel } x_i = \text{morfol. cel } x_j.$$

## ORGANO

**Definición 5 :** Es la unión de tejidos formando unidad estructural encargada de cumplir una función determinada.

$$O_r = \bigcup_{j \in I} T_j / T_j \text{ es un tejido.}$$

## ORGANISMO

**Definición 6 :** Es la unión de órganos que funcionan coordinadamente formando un todo individual con vida propia.

$$O_r g = \bigcup_{i \in I} O_r i \text{ tal que } O_r i \text{ es un órgano.}$$

## INDIVIDUOS

**Definición 7 :** Es la unión de organismos con una función común.

$$I = \bigcup_{i \in J} O_r g_i \text{ tal que } O_r g_i \text{ es un organismo.}$$





## ESPECIE

**Definición 8 :** Es un conjunto de individuos nacidos unos de otros.

$$E = \bigcup_{n \in J} I_n \text{ tal que } I_n \text{ son individuos}$$

## POBLACION

**Definición 9 :** Es un conjunto de individuos de una misma especie que habitan un área determinada.

## COMUNIDAD

**Definición 10 :** Es un conjunto de poblaciones de diversas especies que viven en una misma área.

## ECOSISTEMA

**Definición 11 :** Es un sistema formado por elementos físicos (abióticos) y biológicos (bióticos). Es por consiguiente un sistema vivo.

### 2.3.2 AXIOMATIZACION SEMIOTICA DE SISTEMAS VIVOS

Teniendo en cuenta los conceptos biológicos que aparecen en el sistema ontológico, se obtienen los siguientes conceptos a través de los sistemas enlace.

#### SISTEMA VIVO CELULAR ( O SISTEMA BIÓTICO)

**Definición 12 :** Es un sistema enlace  $S_1 = (M_1, R_1)$  donde  $M_1 = \{\text{células}\}$  y  $R_1 = \{r_1, r_2\}$  siendo la relación  $r_1 = \text{división celular}$  y la relación

$r_2$ = fusión celular. Las relaciones  $r_1$  y  $r_2$  serán definidas posteriormente en (2.6.1) y (2.6.2)

(2.3.1)

En el sistema vivo celular se pueden considerar de forma natural dos subsistemas atendiendo al tipo de reproducción :

a) Sistema vivo celular reproductivo  $S_{11} = ( M_{11}, R_{11} )$  donde  $M_{11} = \{ \text{células reproductivas} \}$ ,  $R_{11} = \{ r_1, r_2 \}$  siendo  $r_1$ = división celular,  $r_2$ = fusión celular

(2.3.2)

b) El sistema vivo celular no reproductivo  $S_{12} = ( M_{12}, R_{12} )$  donde  $M_{12} = \{ \text{células vivas no reproductivas} \}$ ,  $R_{12} = \{ r_1 \}$  siendo  $r_1$ = división celular

(2.3.3)

### SISTEMA ABIOTICO

**Definición 13** : Es un sistema enlace  $S_2 = ( M_2, R_2 )$ , donde  $M_2 = \{ \text{entes} \}$  y  $R_2$  cumple que las relaciones de división y fusión celular no están definidas en  $R_2$ , es decir  $r_1 \notin R$  y  $r_2 \notin R$

### SISTEMA TEJIDO

**Definición 14** : Es un sistema enlace  $S_3 = ( M_3, R_3 )$  tal que :

$$M_3 = \left\{ \bigcup_{i \in I} \text{cel } x_i / \text{cel } x_i = \text{célula viva no reproductiva} \right\} \text{ y } R_3 = \{ r_1, r_2, r_3, r_4 \}$$

donde  $r_1$  = división celular,  $r_2$ = presentar igual morfología,  $r_3$ = presentar la misma estructura y  $r_4$  = presentar formas comunes.

En este sistema, todos los elementos están relacionados entre si por todas las relaciones.



### SISTEMA ORGANO

**Definición 15** : Es un sistema enlace  $S_4 = (M_4, R_4)$  cumpliendo :

$M_4 = \{ \bigcup_{i \in I} T_i / T_i = \text{Tejido} \}$  y  $R_4 = \{ r \}$  tal que la relación  $r$  cumple :

$T_i r T_j \Leftrightarrow T_i$  y  $T_j$  forman una unidad estructural encargada de cumplir una función determinada.

### SISTEMA ORGANISMO

**Definición 16** : Es un sistema enlace  $S_5 = (M_5, R_5)$  donde :

$M_5 = \{ \bigcup_{i \in I} Or_i / Or_i = \text{órgano} \}$  y  $R_5 = \{ r \}$  tal que la relación  $r$  cumple :

$Or_i r Or_j \Leftrightarrow Or_i$  y  $Or_j$  funcionan coordinadamente formando parte de un todo individual con vida propia.

### SISTEMA INDIVIDUO

**Definición 17** : Es un sistema enlace  $S_6 = (M_6, R_6)$  donde :

$M_6 = \{ \bigcup_{i \in I} Org_i / Org_i = \text{organismo} \}$  y  $R_6 = \{ r \}$  tal que la relación  $r$

cumple :  $Org_i r Org_j \Leftrightarrow Org_i$  y  $Org_j$  tienen una función común.

### SISTEMA ESPECIE

**Definición 18** : Es un sistema enlace  $S_7 = (M_7, R_7)$  donde :

$M_7 = \{ \bigcup_{i \in I} Ind_i / Ind_i = \text{individuo} \}$ , siendo  $R_7 = \{ r \}$  donde  $r$  está definida

por  $Ind_i r Ind_j \Leftrightarrow$  uno de ellos ha nacido del otro.

### SISTEMA POBLACION

**Definición 19** : Sea  $S_7 = (M_7, R_7)$  un sistema especie, una población es un sistema enlace  $S_8 = (M_8, R_8)$  donde  $M_8 = \{ \bigcup_{i \in I} \text{Ind}_i / \text{Ind}_i \in M_7, \forall i \in I \}$  y  $R_8 = \{r\}$  tal que la relación  $r$  cumple  $\text{Ind}_i r \text{Ind}_j \Leftrightarrow$  habitan un área determinada.

### SISTEMA COMUNIDAD

**Definición 20** : Es un sistema enlace  $S_9 = (M_9, R_9)$  donde :

$M_9 = \{ \bigcup_{i \in I} \text{Pob}_i / \text{Pob}_i \text{ es una población} \}$  y  $R_9 = \{r\}$  está definida por

$\text{Pob}_i r \text{Pob}_j \Leftrightarrow$  viven en una misma área.

( como caso elemental estaría la comunidad formada por una sola población )

### SISTEMA ECOSISTEMA

**Definición 21** : Es un sistema enlace  $S_2 = (M_2, R_2)$  formado por la unión de sistemas abióticos y sistemas biológicos bióticos ( sistema comunidad, población, etc ), siendo por consiguiente un sistema vivo.

(2.3.4)

## 2.4 PROCESOS BIOLÓGICOS. DIVISION Y FUSION CELULAR

### 2.4.1 INTRODUCCION

La célula biológica incorpora materia y energía desde su entorno, creando dos células donde había una antes. En esta conjunción de

materia, un sistema vivo es creado, y una composición es realizada. La formación de organismos multicelulares por la agregación de células es también una composición, así como lo es la agregación de organismos multicelulares para crear formas más altas de amistades-vida, tales como familias, empresas de negocios, naciones, etc. Recíprocamente, la descomposición, el inverso de estos procesos transforma algo vivo en algo no vivo.

J Engelberg ( 45 ) hablando de la estructura de la célula biológica cita :

*“ Cada organismo es o era una célula simple. Duplicando sus partes, entonces la dividimos en dos. Se presentan dos células donde antes había solo una. En el acto de duplicación reside la esencia de la vida, las raíces de la conciencia. “*

Los sistemas vivos pueden ser comprendidos solo por referencia a sus transformaciones sobre el tiempo mediante la división y la fusión celular.

## 2.4.2 SISTEMAS VIVOS CELULARES

Son sistemas de la forma  $S = ( M, R )$  donde  $M$  es el conjunto objeto formado por células y  $R$  es el conjunto de relaciones formado por la relación de división celular  $r_1$  y la relación de fusión celular  $r_2$  definidas en (2.6.1) y (2.6.2), es decir  $R = \{ r_1, r_2 \}$ , donde  $R \subset M \times M$ .

Dado que los procesos de división celular y fusión celular son distintos en sistemas vivos celulares reproductivos y no reproductivos, para obtener su caracterización habría que estudiarlos por separado. Para ambos casos haremos las consideraciones siguientes :



## POSICION CELULAR

Por  $x(t)$  denotamos la posición de la célula  $x$  en el instante  $t$  y por  $x_E(t)$  el estado en que se encuentra la célula  $x$  en el instante  $t$ . El tiempo de existencia de la célula  $x$  es el intervalo cerrado  $[t_0, t_f]$  siendo  $t_0$  el instante de su producción ( por ejemplo por división o fusión celular) y  $t_f$  el instante de su fin ( por ejemplo, por división o fusión celular o muerte ). Denotamos el tiempo de existencia de una célula  $x$  por  $t_E(x)$ , Así  $t_E(x)=[t_0, t_f]$

(2.4.1)

## TRAYECTORIA

Fijado un sistema de ejes en el espacio, en cada instante de tiempo  $t \in [t_0, t_f]$ , cada célula ocupará una posición en el espacio representada por  $(x(t), y(t), z(t))$ .

Llamaremos trayectoria ( órbita ) descrita por la célula  $x$  en su tiempo de existencia  $[t_0, t_f]$  a la función

$$T_x : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^3 / T_x(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Siendo las proyecciones sobre los ejes :

$$P_x T_x : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } P_x T_x(t) = x(t)$$

$$P_y T_x : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } P_y T_x(t) = y(t)$$

$$P_z T_x : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } P_z T_x(t) = z(t).$$

(2.4.2)

## CONCATENACION

Si el tiempo de existencia de la célula  $x$  es  $[t_0, t_f]$  y el tiempo de existencia de la célula  $y$  es  $[t_f, t_k]$ . Podemos definir la función trayectoria concatenación :

$$x \circ_{t_f} y = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \leq t_f \\ y(t) & \text{si } t > t_f \end{cases}$$

para cada una de las proyecciones.

(2.4.3)

### 2.4.3 LENGUAJE CELULAR

Para cada célula  $x$  se va a construir un lenguaje que permitirá posteriormente definir una métrica celular.

Para cada célula  $x$  utilizaremos el lenguaje siguiente. Consideramos los genes expresados en cada cromosoma de una célula  $x$  como conjuntos de cadenas binarias. Para ello se considera : el alfabeto  $V = \{0,1\}$  y el conjunto de sentencias  $V^* = \{1, 01, 001, \dots, 00\dots^i\dots 01, \dots, 00\dots^n\dots 01\}$  siendo  $n \in \mathbb{N}$ , que también podemos expresar como  $V^* = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  donde cada sentencia corresponde a un gen de cualquier cadena genética ADN pudiendo aparecer en cualquier cromosoma de una célula.

Cualquier cadena genética para  $x_E(t)$  será de la siguiente forma :  
 $\dots 00\dots^i\dots 0100\dots^j\dots 0100\dots^k\dots 01\dots$  donde los genes  $\dots x_i x_j x_k \dots$  aparecen alineados aleatoriamente.

Hemos caracterizado las cadenas genéticas mediante un código unívocamente decodificable instantáneo, ya que es posible decodificar las

palabras de una secuencia sin precisar el conocimiento de los símbolos que las suceden.

Para nosotros, el estado de la célula  $x$  en el instante  $t$  estará determinado por el conjunto de todos los genes que la célula tiene en este instante, por lo que podemos identificar  $x_E(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  donde  $t \in t_E(x)$

Tiene sentido hablar de Partes del conjunto  $x_E(t)$  denotado por  $P(x_E(t))$  desde un punto de vista matemático, donde en este conjunto aparecerán todos los subconjuntos posibles formados por estos genes.

Representaremos cada célula como un conjunto (de elementos) formado por sus genes, de manera que si  $x$  e  $y$  son dos células,  $x \cap y$  representa a los genes comunes a ambas células.

## 2.5 METRICA

**Definición 22 :** Suponiendo que en el conjunto  $M$  todas las células tienen un mismo número de genes, que será  $n$ , definimos la métrica sobre el conjunto  $M \times M$ , definida de la siguiente forma :

$d : M \times M \longrightarrow R^+$  tal que : si  $x=(x_i), y=(y_i)$

$$d(x,y) = \sum_{i \in N} (1 - \delta_{x,y}(i)) \quad \text{donde} \quad \delta_{x,y}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = y_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Es decir  $d(x,y)$  representa el número de genes de  $x$  no comunes a los genes de  $y$ ; evidentemente, cuando mas pequeño es el valor de  $d$ , mas grande es la coincidencia entre las cadenas genéticas de las células  $x$  e  $y$  que están siendo consideradas.





## 2.5.1 COMPROBACION DE QUE $d$ ES UNA METRICA

$\forall x, y, z \in M$ , células de  $n$  genes deben cumplirse :

1)  $d(x,y)=d(y,x)$

Por la forma en que hemos definido “ $d$ ”,  $d(x,y)$  coincide con el número de genes de  $x$  no comunes con  $y$ . Por lo que si  $d(x,y)=k$  siendo  $0 \leq k \leq n$   $k \in \mathbb{N}$ , entonces las células  $x$  e  $y$  tienen  $n-k$  genes comunes, luego evidentemente  $d(y,x)=k$

2) Si  $x=y \Rightarrow d(x,y)=0$

Si  $x=y$ , coinciden todos los genes, luego por la forma en que hemos definido  $d$ , se cumplirá que  $d(x,y)=0$

3) Si  $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

Si  $d(x,y)=0$ , todos los  $n$  genes de  $x$  coinciden con todos los  $n$  genes de  $y$ , luego por tener todos los genes comunes coincidirán, es decir  $x=y$

4)  $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

a) Si  $x \cap y = \emptyset \vee y \cap z = \emptyset \vee x \cap z = \emptyset$ , entonces se cumple.

b) Supongamos que las intersecciones son distintas del  $\emptyset$  y diferentes entre si, y además que la expresión no es cierta, es decir,  $\exists z \in M / d(x,y) > d(x,z) + d(z,y)$ .

Se puede comprobar que :

$$z = (x \cap y \cap z) \cup [(x \cap z) - (x \cap y)] \cup [(y \cap z) - (x \cap y)] \cup [z - (x \cup y)]$$

Supongamos que  $d(x,y)=k$ ; es decir que  $x$  tiene  $k$  genes no comunes con  $y$  ( luego  $x$  tiene  $n-k$  genes comunes con  $y$  ).

Denotamos las intersecciones anteriores por :

$$(x \cap z) - (x \cap y) = \{ x_1, x_2, \dots, x_i \}, (y \cap z) - (x \cap y) = \{ y_1, y_2, \dots, y_j \}$$

$$x \cap y \cap z = \{ x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l} \}, z - (x \cup y) = \{ z_1, z_2, \dots, z_m \}.$$

Debido a la construcción de  $z$  como unión disjunta,

$$\text{card}(z) = n = m + i + j + 1 \quad (1)$$

Por otra parte :

$$d(x,z) = m + j = (k - i) + n - (k + 1), d(z,y) = m + i = (k - j) + n - (k + 1)$$

Por suponer que  $d(x,z) + d(z,y) < k$ , se cumplirá que :

$$(m + j) + (m + i) < k \quad (2)$$

Pero de (1) :

$$n - 1 + m < k, \text{ por lo que } n < 1 - m + k < 1 + k < n \quad \# \text{ (contradicción)}$$

## 2.6 SISTEMAS VIVOS CELULARES

### REPRODUCTIVOS

Sea  $S = (M, R)$  siendo  $M =$  conjunto de células reproductivas de un ente vivo en un intervalo de tiempo,  $r_1$  la división celular entre células reproductivas,  $r_2$  la fusión celular entre células reproductivas de forma que se cumple que  $R = \{ r_1, r_2 / r_i \subset M \times M \}$

#### 2.6.1 DIVISION CELULAR

Sean  $[t_0, t_f]$  y  $[t_p, t_g]$  los tiempos de existencia de las células  $x$  e  $y$  respectivamente, siendo  $x \in M$ ,  $y \in M$ . Diremos que la célula  $x$  se transforma por división en la célula  $y$  en  $t_p$ , y lo denotamos por  $xr_1y$ , si a partir de un proceso biológico ( que para nosotros será una función en el sentido matemático) obtenemos la célula  $y$  a partir de la célula  $x$ .

Luego : Si  $t_E(x) = [t_0, t_f]$  y  $t_E(y) = [t_p, t_g]$ ,

$$x \text{ r}_1 y \Leftrightarrow \{\exists D : M \longrightarrow P(M) \text{ función}\} \wedge \{\exists !z \in M / z \neq y, t_E(z) = [t_r, t_h]\} \wedge D(x) = \{y, z\} \in P(M) \quad (2.6.1)$$

Para la célula  $z$  única de (2.6.1) también diremos que la célula  $x$  se transforma por división en la célula  $z$  en  $t_r$ , y lo denotaremos por  $x \text{ r}_1 z$ .

El proceso de división celular no estará definido sobre todas las células de  $M$ , sino sobre un subconjunto  $A \subseteq M$ .

Consideramos a continuación un conjunto de axiomas necesarios para que nuestra definición de división celular sea equivalente al proceso de división celular en el sentido biológico. Supondremos en los siguientes axiomas que las células  $x$  e  $y$  son las que aparecen en (2.6.1), al igual que sus estados y tiempos de existencia.

**Axioma 1** :  $x_E(t_r - \Delta t) \neq y_E(t_r)$  siendo  $\Delta t \geq 0$

( como caso particular  $x_E(t_r) \neq y_E(t_r)$ ).

(2.6.2)

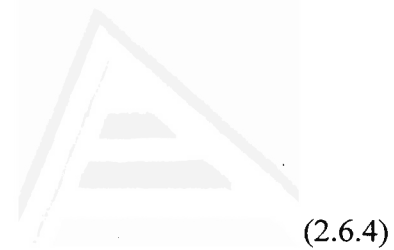
Lo que significa que en  $x$  hay genes que no aparecen en  $y$ .

**Axioma 2** : Si  $P(x_E(t_r - \Delta t)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \{x_1 x_2\}, \dots\}$  siendo  $\Delta t \geq 0$   
 $\Rightarrow y_E(t_r) \in P(x_E(t_r - \Delta t))$ .

(2.6.3)

Lo que indica que el estado de la célula  $y$  en su estado inicial es parte del estado de la célula  $x$  en su instante final.

**Axioma 3** : La función trayectoria concatenación  $x \circ_{t_r} y : [t_0, t_g] \rightarrow R$  definida en (2.4.3) es continua para cada una de las proyecciones.



(2.6.4)

**Axioma 4** : Si las células  $x$  e  $y$  cumplen que  $x r_1 y$  en un instante  $t$ , entonces existirá una célula  $u$  tal que  $u \neq y$  y tal que cumple que  $x r_1 u$  en  $t - \Delta t$ .

(2.6.5)

**Nota 1** : Todas los axiomas anteriores se cumplen sustituyendo la célula  $y$  por la célula  $z$  que aparece en la definición de división celular (2.6.1)

## 2.6.2 FUSION CELULAR

Sean  $[t_0, t_f]$  y  $[t_p, t_g]$  los tiempos de existencia de las células  $x$  e  $y$ , respectivamente siendo  $x \in M$ ,  $y \in M$ . Diremos que la célula  $x$  se transforma por fusión en la célula  $y$  en  $t_f$  y lo denotamos por  $x r_2 y$ , si a partir de un proceso biológico ( que para nosotros será una función en el sentido matemático ) obtenemos la célula  $y$  a partir de la célula  $x$ .

$$\begin{aligned} & \text{Luego si } t_E(x) = [t_0, t_f], t_E(y) = [t_p, t_g] \\ x r_2 y & \Leftrightarrow \{ \exists F : P(M) \longrightarrow M \text{ función} \} \wedge \{ \exists ! z \in M / z \neq x, t_E(z) = [t_f, t_f] \} \\ & \wedge F(\{x, z\}) = y \in M \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Para la célula  $z$  única de (2.6.6) también diremos que la célula  $z$  se transforma por fusión en la célula  $y$  en  $t_f$  y lo denotaremos por  $z r_2 y$ .

El proceso de fusión celular no está definido sobre todos los pares de células de  $P(M)$  sino sobre un subconjunto  $B \subseteq P(M)$ .

Consideramos a continuación un conjunto de axiomas necesarios para que nuestra definición de fusión celular sea equivalente al proceso de fusión celular en el sentido biológico. Suponemos que las células  $x$  e  $y$  son las que aparecen en (2.6.2), al igual que sus estados y tiempos de existencia.

**Axioma 5 :**  $x_E(t_f) \neq y_E(t_f + \Delta t)$  siendo  $\Delta t \geq 0$ , ( Como caso particular  $x(t_f) \neq y(t_f)$  )

(2.6.7)

Lo que indica que en  $x$  hay genes que no aparecen en  $y$

**Axioma 6 :** Si  $P(y_E(t_f + \Delta t)) = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \{y_1, y_2\}, \dots\}$  siendo  $\Delta t \geq 0 \Rightarrow x_E(t_f) \in P(y_E(t_f + \Delta t))$ .

(2.6.8)

Lo que indica que el estado de la célula  $x$  en su instante final es parte del estado de la célula  $y$  en su instante inicial.

**Axioma 7 :** La función trayectoria concatenación  $x \circ_{t_f} y: [t_0, t_g] \rightarrow R$  definida en (2.4.3) es continua para cada una de las proyecciones.

(2.6.9)

**Axioma 8 :** Bajo la métrica definida en (2.5.1) tendremos que si las células tienen  $n$  genes se cumple que  $0 \leq d(x,y) + d(y,z) \leq n$  donde  $z$  es la célula de la definición.

(2.6.10)

**Axioma 9** : Si las células  $x$  e  $y$  cumplen que  $xr_2y$  en un instante  $t$ , entonces existirá una célula  $u$  tal que  $u \neq x$  y se cumple que  $ur_2y$  en  $t + \Delta t$ .

(2.6.11)

**Nota 2** : Todos los axiomas anteriores se cumplen sustituyendo la célula  $z$  por la célula  $x$  que aparece en la definición de fusión celular (2.6.6).

## 2.7 SISTEMAS VIVOS CELULARES NO REPRODUCTIVOS

Estos sistemas serán los que caracterizan la producción de células de un tejido, órgano, etc. (En este caso no tiene sentido hablar de fusión celular)

Sea  $S = ( M, R )$  siendo  $M =$  conjunto de células no reproductivas ( de por ejemplo un tejido, órgano, etc ) y  $r_1$  la relación asociada a la división celular entre células no reproductivas,  $r_1 \in R$  siendo  $R \subset M \times M$

### 2.7.1 DIVISION CELULAR

Sean  $[t_0, t_f]$  y  $[t_f, t_g]$  los tiempos de existencia de las células  $x$  e  $y$  respectivamente, siendo  $x \in M$ ,  $y \in M$ . Diremos que la célula  $x$  se transformó por división en la célula  $y$  en  $t_f$ , y lo denotamos por  $xr_1y$  si a partir de un proceso biológico ( que para nosotros será una función en el sentido matemático) obtenemos la célula  $y$  a partir de la célula  $x$ .

Luego : Si  $t_E(x)=[t_0, t_f]$  y  $t_E(y)=[t_f, t_g]$ ,

$$x \text{ r}_1 y \Leftrightarrow \{ \exists D : M \longrightarrow P(M) \text{ función} \} \wedge \{ \exists ! z \in M / z \neq y, t_E(z) = [t_f, t_h] \} \wedge D(x) = \{ y, z \} \in P(M) \quad (2.7.1)$$

Para la célula  $z$  única de (2.7.1) diremos que la célula  $x$  se transforma por división en la célula  $z$  en  $t_f$ , y lo denotaremos por  $x \text{ r}_1 z$ .

El proceso de división celular no estará definido sobre todas las células de  $M$ , sino sobre un subconjunto  $A \subseteq M$ .

Consideramos a continuación un conjunto de axiomas necesarios para que nuestra definición de división celular sea equivalente al proceso de división celular en el sentido biológico. Supondremos en los siguientes axiomas que las células  $x$  e  $y$  son las que aparecen en (2.7.1), al igual que sus estados y tiempos de existencia.

**Axioma 10** :  $x_E(t_f - \Delta t) \neq y_E(t_f)$  siendo  $\Delta t \geq 0$

( como caso particular  $x_E(t_f) \neq y_E(t_f)$ ).

(2.7.2)

Lo que significa que en  $x$  hay genes que no aparecen en  $y$ .

**Axioma 11** : Si  $P(x_E(t_f - \Delta t)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \{x_1, x_2\}, \dots\}$  siendo  $\Delta t \geq 0$   
 $\Rightarrow y_E(t_f) \in P(x_E(t_f - \Delta t))$ .

(2.7.3)

Lo que indica que el estado de la célula  $y$  en su estado inicial es parte del estado de la célula  $x$  en su instante final.

**Axioma 12** : La función trayectoria concatenación  $x \circ_{t_r} y : [t_0, t_g] \rightarrow R$  definida en (2.4.3) es continua para cada una de las proyecciones. (2.7.4)

**Axioma 13** : Si las células  $x$  e  $y$  cumplen que  $x r_1 y$  en un instante  $t$ , entonces existirá una célula  $u$  tal que  $u \neq y$  y tal que cumple que  $x r_1 u$  en  $t - \Delta t$ .

(2.7.5)

**Nota 3** : Todas los axiomas anteriores se cumplen sustituyendo la célula  $y$  por la célula  $z$  que aparece en la definición de división celular (2.7.1).

## 2.8 PROPIEDADES DE SISTEMAS VIVOS REPRODUCTIVOS

Como ya hemos citado anteriormente, por una parte tenemos la función división celular  $D$  y por otra parte tenemos una relación binaria, denominada  $r_1$ , asociada al proceso de división celular.

En nuestra teoría partiremos de que los procesos biológicos son irreversibles, por lo que consideramos los axiomas siguientes :

**Axioma 14** : No puede ocurrir que  $\exists x \in M / (F \cdot D)(x) = x$

(2.8.1)

**Axioma 15** : No puede ocurrir que  $\exists \{x, y\} \in P(M) / (D \cdot F)\{x, y\} = \{x, y\}$





(2.8.2)

## 2.8.1 RECÍPROCAS DE LAS FUNCIONES DIVISION Y FUSION CELULAR

Por otra parte consideramos las funciones recíprocas de la división y fusión celular siguientes :

1) La función  $D^{-1} : P(M) \longrightarrow M$  es la función inversa de la función división celular  $D$ .

Luego se cumple que la composición de las funciones :  $(D^{-1} \cdot D)(x) = x$   
 $\forall x$  en el cual podamos realizar la división celular.

(2.8.3)

Análogamente :  $\forall \{y,z\} \in P(M)$  obtenido en la división celular :

$$(D \cdot D^{-1})(\{y,z\}) = \{y,z\}$$

(2.8.4)

2) La función  $F^{-1} : M \longrightarrow P(M)$  es la función inversa de la función fusión celular  $F$ . Luego se cumple que la composición de las funciones :

$$(F \cdot F^{-1})(x) = x \quad \forall x \text{ en el cual podamos realizar la fusión celular.}$$

(2.8.5)

Análogamente  $\forall \{y,z\} \in P(M)$  en que se pueda realizar la fusión celular :  $(F^{-1} \cdot F)(\{y,z\}) = \{y,z\}$

(2.8.6)

En base a la teoría axiomática construida se va a demostrar que los procesos de división y fusión celular son únicos.

**Proposición 1 :** Sea  $S = (M, R)$  un sistema vivo  $\Rightarrow \forall x \in M$  se cumple que  $D(x) \neq F^{-1}(x)$  y análogamente  $\forall \{x, y\} \in P(M)$  se cumple  $F(\{x, y\}) \neq D^{-1}(\{x, y\})$

**Demostración :** Por reducción al absurdo :

Si  $\exists x \in M / D(x) = F^{-1}(x) \Rightarrow$  ( componiendo por la izquierda con la función fusión celular ) tendremos :  $(F \cdot D)(x) = (F \cdot F^{-1})(x) = x$  por (2.8.5).

Pero esto es una contradicción (#) ya que por un axioma anterior (2.8.1),  $(F \cdot D)(x) \neq x \quad \forall x \in M$

Análogamente :

Si  $\exists \{x, y\} \in P(M) / F(\{x, y\}) = D^{-1}(\{x, y\}) \Rightarrow$  ( componiendo por la izquierda con la función división celular ) tendremos :

$$(D \cdot F)(\{x, y\}) = (D \cdot D^{-1})(\{x, y\}) = \{x, y\} \text{ por (2.8.4)}$$

Pero esto es una contradicción (#), ya que por un axioma anterior (2.8.2)

$$: (D \cdot F)(\{x, y\}) \neq \{x, y\} \quad \forall \{x, y\} \in P(M)$$

*Con la proposición siguiente demostramos que la división celular es única, en el sentido de que dos elementos no pueden tener la misma imagen.*

**Proposición 2 :** Sean  $x, y, z, u$  células /  $D(x) = \{y, u\} \wedge D(z) = \{y, u\} \Rightarrow x = z$

**Demostración :** Componiendo con la función  $D^{-1}$  por la izquierda, obtendremos :

$$(D^{-1} \cdot D)(x) = D^{-1}(D(x)) = D^{-1}(\{y, u\}), \quad (D^{-1} \cdot D)(z) = D^{-1}(D(z)) = D^{-1}(\{y, u\}).$$

Luego  $(D^{-1} \cdot D)(x) = (D^{-1} \cdot D)(z)$

pero de (2.8.3) :  $(D^{-1} \cdot D)(x) = x$  y  $(D^{-1} \cdot D)(z) = z \Rightarrow x = z$ ,

( Esto quiere decir que en un sistema vivo celular reproductivo  $S = (M, R)$  si la célula  $x$  se transforma por división celular en  $\{y, u\}$ , entonces la célula  $x$  es el único elemento que produce mediante una división celular  $\{y, u\}$  )

*Con la siguiente proposición, demostramos que la fusión celular es única, en el sentido de que dos elementos no pueden tener la misma imagen.*

**Proposición 3** : Sean  $x, y, z, u, v$  células /  $F(\{x, u\}) = z$  y  $F(\{y, v\}) = z$   
 $\Rightarrow \{x, u\} = \{y, v\}$

**Demostración** : Componiendo por la izquierda con la función  $F^{-1}$ , obtenemos :

$$(F^{-1} \cdot F)(\{x, u\}) = F^{-1}(F(\{x, u\})) = F^{-1}(z),$$

$$(F^{-1} \cdot F)(\{y, v\}) = F^{-1}(F(\{y, v\})) = F^{-1}(z)$$

$$\Rightarrow (F^{-1} \cdot F)(\{x, u\}) = (F^{-1} \cdot F)(\{y, v\})$$

pero de (2.8.6) :  $(F^{-1} \cdot F)(\{x, u\}) = \{x, u\}$  y  $(F^{-1} \cdot F)(\{y, v\}) = \{y, v\}$

$\Rightarrow \{x, u\} = \{y, v\}$

( Esto quiere decir que en un sistema vivo celular reproductivo  $S = (M, R)$  si la pareja de células  $\{x, u\}$  se transforman por fusión celular en  $z$ , entonces  $\{x, u\}$  es el único par de elementos que produce  $z$  mediante fusión celular )

## 2.9 PROPIEDADES DE LA DIVISION CELULAR ASOCIADAS A FUNCIONES ESTRUCTURALES

Se han definido la función división celular, representada por  $D$ , así como a esta función hay asociada una relación,  $r_1$ , que es posible caracterizar en términos de las funciones estructurales.

En un sistema vivo reproductivo  $S = (M,R)$ , la relación de división celular  $r_1$  cumple las siguientes propiedades :

**Propiedad 1 :** La función estructural entrada-salida asociada a la relación  $r_1 : f_{r_1} : M \longrightarrow P(M)$  cumple :

i)  $\forall x \in M$  tal que  $f_{r_1}(x) = M_x$  existe  $\Rightarrow$  el cardinal del conjunto  $M_x$  es 2.

Es decir  $\text{Card}(M_x) = 2$ .

(2.9.1)

ii) Si  $f_{r_1}(x_1) = M_1 \wedge f_{r_1}(x_2) = M_2 \Rightarrow$  necesariamente se cumple que  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  siendo  $x_1, x_2$  células del conjunto  $M$  para las cuales es posible efectuar la división celular.

(2.9.2)

**Propiedad 2 :** De forma análoga, en la función estructural salida-entrada asociada a la relación  $r_1 : g_{r_1} : M \longrightarrow P(M)$  se cumple :

i)  $\forall x \in M$  tal que  $g_{r_1}(x) = M'_x$ , entonces la cardinalidad del conjunto  $M'_x$  es 1.



(2.9.3)

La condición ii) expresa que si la célula x se transforma por división en la célula y entonces la célula x es el único elemento que produce la relación  $r_1$  en la célula y . Es decir :  $xr_1y \Rightarrow \{ \forall z / z r_1 y \Rightarrow z=x \}$

**Proposición 4 :** Si la célula x se transforma por división en las células y y z en un instante  $t_f$ , siendo el intervalo  $t_E(x)=[t_0, t_f]$  la duración de la célula x  $\Rightarrow$  existe una familia finita de células  $\{z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n\}$  siendo  $n \in \mathbb{N} / t_f - n\Delta t \in [t_0, t_f]$  siendo  $\Delta t \geq 0$  tal que :

$$\begin{aligned} & x r_1 z_1 \quad x r_1 z'_1 \text{ en } t_f - \Delta t \\ & x r_1 z_2 \quad x r_1 z'_2 \text{ en } t_f - 2\Delta t \\ & \dots\dots\dots \\ & x r_1 z_n \quad x r_1 z'_n \text{ en } t_f - n\Delta t \end{aligned}$$

**Demostración :** Aplicando repetidamente (2.6.5) :

Como  $xr_1z$  en  $t_f$ , entonces por (2.6.5) :  $\exists z_1 / xr_1z_1$  en  $t_f - \Delta t \Rightarrow$  del mismo axioma (2.6.5)  $\exists z_2 / xr_1z_2$  en  $t_f - 2\Delta t$ . Reiterando el proceso llegamos al resultado.

( Análogamente para el caso de  $z'_i$  )

**Observación 1 :** En un “sentido especial” se cumplirán :

$$\text{“} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_n(t_f - n\Delta t) = y(t_f) \text{” y “} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z'_n(t_f - n\Delta t) = z(t_f) \text{”}$$

## 2.10 PROPIEDADES DE LA FUSION CELULAR ASOCIADAS A FUNCIONES ESTRUCTURALES

Se va a relacionar la función fusión celular definida en (2.6.2) con la relación  $r_2$  asociada a la función fusión celular.

En un sistema vivo reproductivo  $S=(M,R)$ , la relación fusión celular  $r_2$  cumple las siguientes propiedades :

**Propiedad 3 :** La función estructural entrada-salida asociada a la relación  $r_2$ , definida mediante la expresión :  $f_{r_2} : M \longrightarrow P(M)$  cumple que su dominio está determinado únicamente por dos células  $x, z$  de forma que  $f_{r_2}(x) = y, f_{r_2}(z) = y$  . Luego el rango de esta función será simplemente el subconjunto celular unitario determinado por  $\{y\} \subset P(M)$ .

Esta condición expresa que si la célula  $x$  se transforma por fusión en la célula  $y$ , entonces  $y$  es el único elemento a quien  $x$  le produce la relación  $r_2$ , es decir :

$$\text{Si } x r_2 y \Rightarrow \{ \forall z / x r_2 z \Rightarrow z = y \} \tag{2.10.1}$$

**Proposición 5 :** Si las células “ $x$ ” y “ $z$ ” se transforman por fusión en la célula “ $y$ ” en un instante  $t_0$ , siendo el intervalo  $t_E(y)=[t_0, t_f]$  la duración de la célula  $y$ , entonces existen una familia finita de células definida mediante la expresión  $\{z_1, z_2, \dots, z_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n\}$  siendo  $n \in \mathbb{N} / t_0 + n\Delta t \in [t_0, t_f]$  donde se cumple que  $\Delta t \geq 0$  tal que :

$$\begin{aligned} z_1 r_2 y & \quad z'_1 r_2 y \text{ en } t_0 + \Delta t \\ z_2 r_2 y & \quad z'_2 r_2 y \text{ en } t_0 + 2\Delta t \\ & \dots \end{aligned}$$

$$z_n r_2 y \quad z'_n r_2 y \quad \text{en } t_0 + n\Delta t$$

**Demostración** : Aplicando reiteradamente (2.6.11)

Como  $x r_2 y$  en  $t_0$ , por (2.6.11) :  $\exists z_1 / z_1 r_2 y$  en  $t_0 + \Delta t \Rightarrow$  del axioma

(2.6.11) :  $\exists z_2 / z_2 r_2 y$  en  $t_0 + 2\Delta t$ . Reiterando el proceso.

(Análogamente para  $z'_i$ ).

**Observación 2** : En un sentido especial se cumplirán :

$$\text{“} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_n(t_0 + n\Delta t) = y(t_0) \text{”} \quad \text{y} \quad \text{“} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z'_n(t_0 + n\Delta t) = y(t_0) \text{”}$$

## 2.11 ORGANIZACIÓN EN SISTEMAS VIVOS

Presentamos un sistema de conceptos para identificar entidades ecológicas, analizando sus propiedades básicas y determinando relaciones entre entidades. En esta sección usaremos axiomas y daremos prioridad de las entidades ecológicas ontológicas sobre intereses epistemológicos. La aproximación axiomática ayudará a estudiar las organizaciones subyacentes.

### 2.11.1 SISTEMAS MULTINIVEL

Y. Lin ( 86 ) lo define mediante :

*“ Para un sistema  $S=(M,R)$ , si cada objeto en  $M$  es de nuevo un sistema, y cada objeto de este sistema es de nuevo un sistema y así sucesivamente, diremos que el sistema  $S$  es un sistema multinivel”*

(2.11.1)

**Definición 23** : En esta sección al sistema enlace  $S=(M,R)$  le llamaremos sistema enlace objeto nivel 0 de S.

Un sistema enlace  $S_n = (M_n, R_n)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  será un sistema enlace objeto nivel n del sistema enlace  $S=(M,R)$ , si hay sistemas enlace  $S_1=(M_1, R_1)$ ,  $S_2=(M_2, R_2), \dots, S_{n-1}=(M_{n-1}, R_{n-1})$  /  $S_1$  es un elemento de  $M$  y para  $2 \leq i \leq n$  se cumple que  $S_i$  es un elemento de  $M_{i-1}$ .

(2.11.2)

### 2.11.2 SISTEMAS MULTINIVEL EN SISTEMAS VIVOS

Los sistemas multinivel para sistemas vivos son sistemas multinivel, cumpliendo además que todos los objetos que aparecen en los distintos sistemas se llaman entidades siendo además el término “entidad” el adoptado como un “término primitivo”, por ejemplo, célula, organismo, especie, etc.

#### ORGANIZACIÓN DE UNA ENTIDAD

La organización de una entidad es un complejo interno de otras entidades y sus conexiones estáticas a cada otra. Esto nos excluye de identificar organizaciones fuera del contexto de la entidad. Así tenemos :

**Definición 24** : La organización de una entidad  $S=(M, R)$  está determinada por todas las relaciones binarias entre las entidades que aparecen en cada uno de los sistemas enlace objeto nivel n para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

(2.11.3)



Es decir, la organización de una entidad  $S=(M,R)$  puede ser caracterizada por el conjunto de todas las funciones estructurales  $f_n$  de los sistemas  $S_n=(M_n, R_n)$  y es denotado por  $O_S$ .

Así  $O_S \equiv \{ \bigcup_{n \in N} (f_n) / f_n \text{ es una función estructural de la entidad } S_n=(M_n, R_n) \}$ , donde  $\equiv$  significa equivalente

**Definición 25 :** Dado un sistema enlace  $S=(M,R)$  y todos sus sistemas multinivel  $S_n=(M_n, R_n)$  asociados a el. Descomponemos la organización de la entidad en los subconjuntos siguientes :

i) Organización mínima de la entidad  $S=(M,R)$ , lo que denotamos por  $O_M$  y está determinada por la función estructural asociada al sistema enlace nivel 1  $S_1=(M_1, R_1)$ .

$$(2.11.4)$$

ii) Organización configuracional de la entidad  $S=(M,R)$ , lo que denotamos por  $O_C$  y está determinada por el conjunto de las funciones estructurales asociadas a los sistemas enlace  $S_n=(M_n, R_n)$  siendo  $n \neq 1$ .

$$(2.11.5)$$

Evidentemente  $O_S = O_M \cup O_C \quad \wedge \quad O_M \cap O_C = \emptyset$ . Luego  $\{O_M, O_C\}$  constituyen una partición de  $O_S$ .

Si necesitamos conocer si una entidad ecológica ha cambiado ( por ejemplo si una célula ha cambiado mediante un cáncer ) necesitamos comparar su organización en dos momentos diferentes. Como ninguna entidad tiene la misma organización exactamente en dos momentos, una conclusión de que la entidad ha cambiado podría ser trivial. Para distinguir cambios significativos contra cambios triviales, es

por lo que hemos introducido el concepto de organización mínima y así poder responder a la cuestión original de determinar si una entidad ha cambiado o no. Si no ha cambiado, los cambios deben haber ocurrido en su organización configuracional.

**Definición 26** : La organización de existencia de una entidad  $S=(M,R)$  es el subconjunto de la organización mínima  $O_M$  determinada por las entidades y las relaciones binarias que permiten la persistencia de la entidad.

(2.11.6)

Por ejemplo, la reproducción estaría en la organización de existencia de una entidad, pero la respiración no estaría en la organización de existencia ya que no presenta interacción con cualquier par de elementos hipotéticos de la organización mínima.

**Axioma 16** : Cada entidad ecológica determinada por un sistema enlace  $S=(M,R)$  tiene su organización asociada a otras entidades  $S_n=(M_n,R_n)$  siendo  $n \in \mathbb{N}$ .

(2.11.7)

Por ejemplo, la organización del tejido está formada por interacciones de células, la organización del órgano está formada por interacciones de tejidos, la organización del organismo está formada por interacciones de órganos, la de individuos por interacciones de organismos, la de las especies por interacciones de individuos, la de las poblaciones por interacciones de individuos de una misma especie, las de comunidades por interacciones de especies y la del ecosistema por interacciones de sistemas bióticos y abióticos.



**Axioma 17** : La organización de cada entidad ecológica determinada por un sistema enlace  $S=(M,R)$  cambia.

(2.11.8)

**Proposición 6** : Dado una entidad ecológica  $S=(M,R)$  y  $\forall i,j / S_i=(M_i,R_i)$  y  $S_j=(M_j, R_j)$  son sistemas de niveles  $i$  y  $j$  respectivamente de  $S=(M,R)$   $\Rightarrow$  si  $i>j$  la organización asociada a  $S_i=(M_i,R_i)$  cambia mas que la organización asociada a  $S_j=(M_j,R_j)$ .

**Demostración** : Si  $S_i>S_j$ , existirán entidades  $S_{j+1}, S_{j+2}, \dots, S_{j+k}$  siendo  $k \in \mathbb{N}$  y  $j+k=i-1$  tal que se cumple que  $S_{j+1}$  es una entidad de  $S_j=(M_j, R_j)$ ,  $S_{j+2}$  es una entidad de  $S_{j+1}=(M_{j+1}, R_{j+1})$ , y así sucesivamente hasta que  $S_i$  es una entidad de  $S_{i-1}=S_{j+k}=(M_{j+k}, R_{j+k})$ .

Por lo que la organización de orden mas alto requiere la presencia de entidades de orden mas bajo, por lo tanto, requiere la eliminación, adición o reemplazamiento de entidades de orden mas bajo.

Si una entidad de orden mas alto cambia es solo porque sus componentes de orden mas bajo han sido cambiadas. En un intervalo de tiempo dado, la eliminación de entidades de orden mas bajo debe por lo tanto preceder a la eliminación de entidades de orden mas bajo y debe ser cierto para cualquier nivel.

**Nota 4** : Dado un sistema multinivel vivo  $S=(M,R)$  y todos sus sistemas multinivel  $S_n=(M_n,R_n)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y las funciones estructurales (estructuras)  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Tiene sentido hablar de la función estructural

composición ( estructura composición ) , que denotaremos mediante la expresión :  $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  donde se cumple que :

$$\begin{aligned} f_1 : M_1 &\longrightarrow P(M_1) \quad \text{donde } M_1 \in M \\ f_2 : M_2 &\longrightarrow P(M_2) \quad \text{donde } M_2 \in M_1 \subset P(M_1) \\ f_3 : M_3 &\longrightarrow P(M_3) \quad \text{donde } M_3 \in M_2 \subset P(M_2) \\ &\dots\dots\dots \\ f_n : M_n &\longrightarrow P(M_n) \quad \text{donde } M_n \in M_{n-1} \subset P(M_{n-1}) \end{aligned}$$

(2.11.9)

**Proposición 7 :** Dado un sistema multinivel vivo  $S=(M,R)$ . Si en dos instantes de tiempo  $t_1, t_2$ , la función estructural  $f_1 : M_1 \longrightarrow P(M_1)$  es distinta en  $t_1$  y en  $t_2$ , entonces el sistema  $S=(M,R)$  cambia.

**Demostración :** Por (2.11.4), sabemos que la función estructural  $f_1$  coincide con la estructura mínima de la entidad y por el comentario posterior, si la estructura mínima cambia, el sistema cambia.

**Proposición 8 :** Dado un sistema multinivel vivo  $S=(M,R)$  y todos los sistemas multinivel  $S_1=(M_1,R_1), S_2=(M_2,R_2), \dots, S_n=(M_n,R_n)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Si en dos instantes de tiempo  $t_1, t_2$  se cumple que  $\exists i \in \mathbb{N} / 1 < i \leq n$  y se cumple que la estructura composición definida mediante la expresión :  $f_i \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$  es distinta en  $t_1$  y en  $t_2$  pero  $f_1$  coincide en  $t_1$  y en  $t_2$ , entonces el sistema  $S=(M,R)$  no cambia.

**Demostración :** Como  $f_1$  coincide en los instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , la estructura mínima no cambia, luego por definición 25, el sistema no



cambia. El hecho de que la estructura composición sea distinta indica que el cambio se ha producido en la estructura configuracional.

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante



**3**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **TEORIA DE ECOSISTEMAS**



### CAPITULO 3 :

A lo largo de este capítulo son axiomatizados los conceptos básicos y específicos de la Teoría General de Ecosistemas, partiendo de todos los conceptos desarrollados de forma general en el capítulo 1 y para sistemas vivos en el capítulo 2. Nos interesan estudiar las relaciones en un ecosistema, para lo que se define la función Evaluación haciendo hincapié en las dos relaciones mas importantes de un ecosistema : depredación y competición.

Son además formalizados los aspectos básicos de la construcción de modelos en un ecosistema, considerando las conexiones entre el modelo construido y el propio ecosistema inicialmente considerado.

Para medir dicha conexión son definidos “ índices ” que nos van a permitir relacionar tanto el modelo con el sistema, como diversos modelos entre si.

# CAPITULO 3 : TEORIA DE ECOSISTEMAS

A lo largo de este capítulo establecemos una axiomatización de todos los conceptos básicos de la teoría general de ecosistemas, partiendo de todos los conceptos considerados de forma general para la teoría de sistemas del capítulo 1.

De esta forma se van a formalizar todos los aspectos básicos de la construcción de modelos así como las conexiones que tienen con el sistema inicialmente considerado. La construcción de modelos, aspecto práctico de la teoría, tiene una componente principal en la determinación de relaciones en el lenguaje formal, esto es, en lenguaje matemático.

En el campo de la construcción de modelos ecológicos, experiencias y datos nuevos conducen al modelizador a mejorar el modelo que ya ha sido construido ; por lo que es importante definir medidas que nos permitan elegir las variables mas convenientes y relacionar el modelo y el sistema, así como diversos modelos entre si. En este sentido son considerados los conceptos de estabilidad, sensibilidad, cooperación, así como diferentes índices que nos van a servir para comparar diversos modelos entre si.





### 3.1 INTRODUCCION

La formalización del concepto de ecosistema, así como sus propiedades más importantes, son el punto de partida para la propuesta de teorías específicas.

De las diversas razones que nos conducen a la formalización podemos citar las ya consideradas por Niven en 1992 : Facilitar el desarrollo de la teoría, suministrar una base para la comparación y clasificar la propia teoría.

Será posible posteriormente proponer teorías específicas sobre modelos que tendrán su base en los conceptos y propiedades formalizados.

Son diversas las caracterizaciones de ecosistema de las que citamos a continuación algunas : Tasley (151) en 1935 lo define como un sistema dinámico consistiendo de una entidad biológica, típicamente una comunidad regional o biótica, junto con el entorno. Para Preston (135) en 1962, un ecosistema debe tener las características siguientes : Ellos son conjuntos aislados, así que dentro de sus fronteras las especies no sufren presión desde especies vecinas. Desde el punto de vista de su población, los ecosistemas son comparables para cualquier grupo o grupos considerados. Las especies deben alcanzar sus estados de forma de equilibrio desde el punto de vista de su diversidad y ampliar el área para ellas. Para Lincoln y otros (98) en 1982, un ecosistema es una comunidad de organismos y sus medios físicos, interrelacionados como una unidad ecológica. Para Margalef (105) en 1986, un ecosistema es un sistema formado por sistemas vivos de muchas especies, en medio de un

entorno de características definidas, y envuelto en un proceso dinámico y continuo de interacción, ajuste y regulación, expresable como una sucesión de movimientos y muerte, uno de cuyos resultados es la evolución en el nivel de las especies y propagación en el nivel del sistema interno.

Para comprender un ecosistema, como una entidad física compleja o como un paradigma científico ( Hidashi y Burns (58) en 1991 ), se requiere algunas metodologías formales para representar relaciones internas y aquellas relaciones entre la entidad y su entorno.

El propósito para construir un modelo de un sistema ecológico es comprender y predecir el comportamiento del sistema como una totalidad y describir cuantitativamente la interacción entre las partes del sistema ( Shoemaker (146) en 1977 ).

Para comprender la naturaleza del modelo ecológico debemos comprender la naturaleza de la teoría matemática, esto es, un cuerpo de conocimiento construido por el método axiomático, se dice que es un modelo del fenómeno real, si damos una regla para trasladar proposiciones de la teoría matemática a proposiciones acerca del fenómeno real ( fenómeno ecológico ).

Cada variable usada en el modelo es un concepto abstracto, conectado al Mundo Real ( ecosistema ) directa o indirectamente a través de medidas físicas específicas. La formulación del modelo matemático de unos fenómenos ecológicos de un Mundo Real complejo requiere : Definir operacionalmente las variables del ecosistema importantes y establecer las relaciones hipotéticas entre las variables. El modelo

entonces representa una hipótesis compleja que genera predicción acerca del ecosistema.

Para Jorgensen (70) en 1988 :

- Los modelos son instrumentos útiles al servicio de los sistemas complejos.
- Pueden ser usados para revelar propiedades del sistema.
- Revelan la debilidad en nuestro conocimiento y por lo tanto pueden ser usados para levantar prioridades de investigación.
- La utilidad en el examen de hipótesis científicas, como el modelo puede simular reacciones de ecosistemas, que puede ser comparado con las observaciones.

### 3.2 DEFINICION DE ECOSISTEMA

Daremos a continuación la definición de Ecosistema como sistema Ontológico (1.2.3), teniendo en cuenta que es imprescindible para su comprensión la consideración de los sistemas semióticos asociados a el (1.2.4)

#### SISTEMA BIOTICO

**Definición 1** : Un sistema enlace  $S = ( M , R )$  es biótico si los objetos de  $M$  son todos entes vivos (células, tejidos, órganos, individuos, especies, poblaciones, etc.) y  $R$  es un conjunto de relaciones entre ellos ( fusión celular, división celular, competencia, depredación, etc. ). Es decir, estamos considerando el sistema Ontológico.

(3.2.1)

## SISTEMA ABIOTICO

**Definición 2 :** Un sistema enlace  $S = ( M , R )$  es abiótico si los objetos de  $M$  son todos sistemas o seres inertes y  $R$  es un conjunto de relaciones entre ellos ( estudiadas normalmente por la física, tal como peso, gravedad, etc.). En esta definición también estamos considerando el sistema Ontológico.

(3.2.2)

## ECOSISTEMA

**Definición 3 :** Un sistema enlace  $S = ( M , R )$  es un ecosistema si los objetos de  $M$  están formados por elementos abióticos y bióticos, siendo  $R$  un conjunto de relaciones entre ellos. Por lo tanto, en esta definición también estamos considerando el sistema Ontológico.

(3.2.3)

## 3.3 AXIOMAS

Como acabamos de definir, podemos considerar el ecosistema formado por entes o cosas que se sitúan en el espacio físico tridimensional ; es decir podemos situar el ecosistema en el sistema Ontológico. Los atributos asociados a dichos entes son variables dinámicas y constituyen los elementos del sistema Semiótico considerado para estudiar y modelizar. Los ecosistemas cumplen los siguientes axiomas :

**Axioma 1 :** Dos ecosistemas  $S_1 = ( M_1 , R_1 )$  y  $S_2 = ( M_2 , R_2 )$  están en conexión si existe algún objeto común ; es decir si  $\exists x \in M_1 \cap M_2$ .

**Axioma 2 :** En un ecosistema  $S = ( M , R )$  hay influencia entre variables.

**Axioma 3 :** Un ecosistema  $S = ( M , R )$  es un sistema dinámico.

Un sistema dinámico es aquel en el que algunas de sus variables dependen del tiempo, por lo tanto los ecosistemas son sistemas dinámicos.

**Axioma 4 :** Un ecosistema  $S = ( M , R )$  es un sistema abierto.

Como es bien conocido, un sistema abierto es aquel en el que solo un número finito de variables de entrada y externas son consideradas siendo el resto de las variables inciertas o desconocidas. Por lo tanto los ecosistemas son sistemas abiertos.

### 3.4 ENLACE ENTRE VARIABLES

#### CADENA

**Definición 4 :** En un ecosistema  $S=(M,R)$  diremos que dos variables  $x,y \in M$  forman una cadena sii  $\exists \{z_i\}_{i=1}^n$  y  $\exists \{r_i\}_{i=1}^{n+1}$  tal que se cumple :

$$(x, z_1) \in r_1, (z_1, z_2) \in r_2, \dots, (z_{n-1}, z_n) \in r_n, (z_n, y) \in r_{n+1} \quad (3.4.1)$$

lo que se denotará por  $C_n(x, y) = (x, z_1, z_2, \dots, z_n, y)$ .

La cadena trivial será  $C_0(x, y) = (x, y) / (x, y) \in r$

Naturalmente, entre las variables  $x, y$  pueden existir mas de una cadena ( incluso de la misma longitud ).

Para nosotros las cadenas de interés son las  $r$ -cadenas ( o cadenas asociadas a una relación  $r$  ).

### **r-CADENA**

**Definición 5 :** Diremos que entre  $x$  e  $y$  existe una  $r$ -cadena sii  $\exists \{z_i\}_{i=1}^n / (x, z_1) \in r, (z_1, z_2) \in r, \dots, (z_{n-1}, z_n) \in r, (z_n, y) \in r.$

(3.4.2)

Se denotará por  $C_n^{(r)}(x, y) = (x, z_1, z_2, \dots, z_n, y)$

Análogamente la  $r$ -cadena trivial  $C_0^{(r)} = (x, y)$  donde  $(x, y) \in r$

### **3.4.1 COMPARACION DE DOS VARIABLES**

**Definición 6 :** Dos variables  $x, y$  son comparables si están relacionadas por medio de una cadena :  $C_i^{(r)}(x, y)$  para algún  $i \in \mathbb{N}$

(3.4.3)

En orden a comparar  $x$  e  $y$  tiene que existir alguna cadena que los relacione, lo que nos permite definir un índice de comparación entre dos variables  $x$  e  $y$  que denotaremos por “  $\delta_i^{(r)}$  “ y expresa el nivel de dependencia o conexión de ambas.

### **INDICE DE COMPARACION ENTRE DOS VARIABLES**

**Definición 7 :** Se define el índice de comparación entre dos variables por :

$$\delta_i^{(r)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists C_0^{(r)}(x, y) \\ 1/(i+1) & \text{si } \exists C_i^{(r)}(x, y) \end{cases}$$

(3.4.4)

A partir de los anteriores tiene sentido definir :

$$\delta^{(r)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{i \in N} \delta_i^{(r)}(x,y)} & \text{si } x,y \text{ son comparables} \\ 0 & \text{si } x,y \text{ no son comparables} \end{cases}$$

(3.4.5)

## 3.5 AXIOMATIZACION DE LAS RELACIONES DE UN ECOSISTEMA

### 3.5.1 FUNCION EVALUACION ASOCIADA A UNA RELACION

Para una relación  $r$  es posible medir el beneficio o perjuicio producido entre las variables que se relacionan.

En este sentido, si consideramos el conjunto medida  $A = \{-1, 0, 1\}$ , con  $-1$  medimos el perjuicio, con  $0$  medimos la inalterabilidad y con  $1$  medimos el beneficio. De esta manera, al considerar el producto cartesiano del conjunto medida  $A^2 = A \times A$ . Los pares  $(a_i, a_j)$  nos indican entre dos elementos, el efecto producido por la relación. Así, por ejemplo,  $(1, 1)$  indica que ambos elementos se benefician de su relación.

**Definición 8 :** Llamamos función evaluación asociada a la relación  $r$ , denotada por  $E_r$ , a una función  $E_r : M \times M \longrightarrow A \times A$ , definida por el observador o modelizador, a partir de los datos obtenidos con la experimentación.

(3.5.1)

### 3.5.2 RELACIONES INTERESPECIFICAS

En un ecosistema nos interesa distinguir entre las distintas conexiones que se realizan en individuos de una misma especie y las que se llevan a cabo entre individuos de diferentes especies. Así pues, formalizaremos las relaciones entre individuos interespecíficas e intraespecíficas que se establecen entre los individuos que forman una comunidad.

En el ecosistema  $S = (M, R)$ , consideraremos las relaciones interespecíficas siguientes caracterizadas por funciones evaluación :

#### 1. Mutualismo o simbiosis = $r_1$

Es la relación cuya función evaluación  $E_{r_1}$  va a estar definida por :  $E_{r_1} : M \times M \longrightarrow A \times A$  mediante :

$$E_{r_1}(x, y) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } (x, y) \notin r_1 \\ (1,1) & \text{si } (x, y) \in r_1 \end{cases}$$

(3.5.2)

Las dos especies se benefician consecuentemente de la asociación y además no pueden vivir independientemente una de la otra. Así por ejemplo ocurre al considerar los líquenes formados por la unión de un alga y un hongo, y las leguminosas y las bacterias fijadoras de nitrógeno que se asocian a sus raíces.

#### 2. Comensalismo o inquilinismo = $r_2$



Esta relación queda caracterizada por la función evaluación  $E_{r_2}$  definida por :  $E_{r_2} : M \times M \longrightarrow A \times A$  mediante :

$$E_{r_2}(x, y) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } (x, y) \in r_2 \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \notin r_2 \end{cases}$$

(3.5.3)

En el comensalismo, un individuo vive sobre otro y se alimenta de los residuos desprendidos por el , por lo que uno de los individuos sale beneficiado y ninguno de ellos perjudicado. Por ejemplo : El pez rémora que posee una ventosa con la que se sujeta al tiburón para recoger los residuos de alimento que este deja es un ejemplo de relación comensalismo.

El inquilinismo es parecido al comensalismo, pero el individuo beneficiado busca un lugar para vivir o defenderse y no el alimento. Por ejemplo : El pez aguja, que se refugia en el interior de la holoturia, el cangrejo ermitaño, que vive protegido en la concha de algunos moluscos.

### 3. Depredación, parasitismo social o explotación = $r_3$

Se define la función evaluación para estas relaciones a partir de  $E_{r_3}$ , siendo :  $E_{r_3} : M \times M \longrightarrow A \times A$  cumpliendo

$$E_{r_3}(x, y) = \begin{cases} (1, -1) & \text{si } (x, y) \in r_3 \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \notin r_3 \end{cases}$$

(3.5.4)

La relación de depredación es una relación recíproca entre dos componentes cualesquiera  $x$  e  $y$  del ecosistema, es decir la relación de  $x$  a  $y$ , y la relación de  $y$  a  $x$ . Es muy importante distinguir estas relaciones

porque ellas reflejan influencias diferentes del proceso de depredación sobre ambas componentes, donde, por ejemplo  $x$  es el depredador e  $y$  es la presa. Desde el punto de vista de  $x$ , la relación de  $x$  a  $y$  es una relación dominante, y desde el punto de vista de  $y$ , la relación de  $y$  a  $x$  es una relación subordinada. Los efectos de la depredación sobre el depredador y la presa son diferentes.

La relación, definida anteriormente, representa la influencia del depredador sobre la presa, luego es una relación dominante directa.

En un ecosistema pueden haber relaciones dominantes indirectas, en la que aparecen gradas; así si  $E_{r_3}(x, y) = (1, -1)$  y  $E_{r_3}(y, z) = (1, -1)$  entonces necesariamente se cumplirá que  $E_{r_3}(x, z) = (1, -1)$  por lo que  $(x, z)$  pertenece a la relación dominante indirecta.

Análogamente tendríamos la relación subordinada directa, que representa la influencia de la presa sobre el depredador, cuya función evaluación asociada es  $E_{r_3}^s$ .

definida por :

$$E_{r_3}^s(y, x) = \begin{cases} (-1, 1) & \text{si } E_{r_3}(x, y) = (1, -1) \\ (0, 0) & \text{si } E_{r_3}(x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (3.5.5)$$

También en un ecosistema pueden haber relaciones subordinadas indirectas, en la que aparecen gradas; así si  $E_{r_3}^s(x, y) = (1, -1)$  y  $E_{r_3}^s(y, z) = (1, -1)$  entonces necesariamente se cumple  $E_{r_3}^s(x, z) = (1, -1)$ , luego  $(x, z)$  pertenece a la relación subordinada indirecta.

El parásito es un individuo que vive sobre otro ( ectoparásito ) o dentro de otro ( endoparásito ) y se alimenta a su costa causándole perjuicio. El parásito sale beneficiado y el huésped u hospedante perjudicado. Por ejemplo Chinche y pulga son ectoparásitos del hombre, así como la Tenía y triquina son endoparásitos del hombre.

En el parasitismo social o explotación, los individuos de una población se benefician de los de otra. Por ejemplo el cuco o cuclillo que pone sus huevos en los nidos de otras aves para que estas las incuben y críen.

Por otra parte, en la depredación hay un parasitismo extremo, ya que hay un individuo llamado depredador que generalmente mata y devora a otro llamado presa. Un ejemplo claro es el lince y liebre, águila y conejo

#### 4. Antibiosis = $r_4$

Se define en la relación antibiosis la función evaluación  $E_{r_4}$  siguiente :

$E_{r_4} : M \times M \longrightarrow A \times A$  definida mediante :

$$E_{r_4}(x, y) = \begin{cases} (-1, 0) & \text{si } (x, y) \in r_4 \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \notin r_4 \end{cases}$$

(3.5.6)

O sea una especie resulta perjudicada, sin que la otra obtenga beneficio alguno. Por ejemplo los mohos que producen antibióticos.

#### 5. Competencia = $r_5$

Tiene la función evaluación asociada  $E_{r_5}$ , siendo :

$E_{r_5} : M \times M \longrightarrow A \times A$  definida por :

$$E_{r_5}(x, y) = \begin{cases} (-1, -1) & \text{si } (x, y) \in r_5 \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \notin r_5 \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Es decir, cuando varios organismos, sean o no de la misma especie, utilizan recursos comunes presentes en cantidad limitada, o si no están en cantidad limitada cuando al buscarlos se perjudican entre si.

Si  $x$  e  $y$  son competidores, la relación de “ $x$  a  $y$ ” , y la relación de “ $y$  a  $x$ ” son relaciones paralelas. Las influencias de la competición son diferentes sobre ambos competidores. En las especies, no hay solo competición directa, sino que también hay competición indirecta ( al igual que ocurre también con la depredación ). Vamos a distinguir cuatro niveles de competición, según los organismos sean competidores entre productores principales de un ecosistema ,cuya relación denotaremos por  $r_5^{(1)}$  y función evaluación asociada denotada por  $E_{r_5}^{(1)}$  ; animales que compiten por los productores principales, cuya relación denotamos por  $r_5^{(2)}$  y función evaluación asociada por  $E_{r_5}^{(2)}$  ; competición entre carnívoros primarios, con relación denotada por  $r_5^{(3)}$  y función evaluación  $E_{r_5}^{(3)}$  ; y competición entre carnívoros secundarios, cuya relación denotamos por  $r_5^{(4)}$  y función evaluación  $E_{r_5}^{(4)}$  .

### **Relación paralela nivel 1 = $r_5^{(1)}$**

Se define la siguiente función evaluación asociada  $E_{r_5}^{(1)}$  siendo :

$$E_{r_5}^{(1)} : M \times M \longrightarrow A \times A \text{ definida por :}$$

$$E_{r_5}^{(1)}(x,y) = \begin{cases} (-1,-1) & \text{si } (x,y) \in r_5^{(1)} \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \notin r_5^{(1)} \end{cases} \quad (3.5.8)$$

La relación paralela nivel 1 es la relación competitiva entre varios productores principales en ecosistemas tal como por ejemplo, la relación competitiva entre hierbas y cosechas.

### Relación paralela nivel 2 = $r_5^{(2)}$

Se considera la función evaluación asociada,  $E_{r_5}^{(2)}$  siendo :

$E_{r_5}^{(2)} : M \times M \longrightarrow A \times A$  definida por :

$$E_{r_5}^{(2)}(x,y) = \begin{cases} (-1,-1) & \text{si } (x,y) \in r_5^{(2)} \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \notin r_5^{(2)} \end{cases} \quad (3.5.9)$$

La relación paralela nivel 2 es la relación competitiva entre por ejemplo animales phitophagous, tal como la relación entre diferentes insectos phitophagous.

Así, hemos definido  $E_{r_5}^{(2)}(x,y) = (-1,-1)$  siendo por ejemplo  $x$  e  $y$  insectos phitophagous, cumpliéndose además que  $\exists z =$  productor principal en el ecosistema ( por ejemplo hierba o cosecha ) tal que  $E_{r_3}(x,z) = (1,-1)$  y  $E_{r_3}(y,z) = (1,-1)$  ( es decir  $x$  e  $y$  compiten por los productores principales ).

### Relación paralela nivel 3 = $r_5^{(3)}$

Definimos la función evaluación asociada,  $E_{r_5}^{(3)}$  siendo :

$E_{r_5}^{(3)} : M \times M \longrightarrow A \times A$  definida por :

$$E_{r_5}^{(3)}(x,y) = \begin{cases} (-1,-1) & \text{si } (x,y) \in r_5^{(3)} \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \notin r_5^{(3)} \end{cases} \quad (3.5.10)$$

La relación paralela nivel 3 es la relación competitiva entre animales carnívoros primarios, tal como por ejemplo la relación entre insectos carnívoros primarios.

Así, hemos definido  $E_{r_5}^{(3)}(x,y) = (-1,-1)$  siendo  $x$  e  $y$  carnívoros, cumpliéndose además que  $\exists z = \text{herbívoro}$  en el ecosistema tal que :

$$E_{r_3}(x,z) = (1,-1) \quad \text{y} \quad E_{r_3}(y,z) = (1,-1)$$

( es decir,  $x$  e  $y$  compiten por el herbívoro)

#### **Relación paralela nivel 4 = $r_5^{(4)}$**

Definimos la función evaluación asociada,  $E_{r_5}^{(4)}$  siendo :

$E_{r_5}^{(4)} : M \times M \longrightarrow A \times A$  definida por :

$$E_{r_5}^{(4)}(x,y) = \begin{cases} (-1,-1) & \text{si } (x,y) \in r_5^{(4)} \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \notin r_5^{(4)} \end{cases} \quad (3.5.11)$$

La relación paralela nivel 4 es la relación competitiva entre animales carnívoros secundarios, por ejemplo el guepardo y la hiena compiten por la cebra.

Así hemos definido  $E_{r_5}^{(4)}(x,y) = (-1,-1)$  siendo  $x$  e  $y$  carnívoros, cumpliéndose que  $\exists z = \text{un carnívoro}$  en el ecosistema tal que :

$$E_{r_3}(x, z) = (1, -1) \quad \text{y} \quad E_{r_3}(y, z) = (1, -1)$$

( es decir, x e y compiten por el carnívoro)

### 6. Neutralismo = $r_6$

En esta relación se obtiene como función evaluación asociada  $E_{r_6}$  siendo  $E_{r_6} : M \times M \longrightarrow A \times A$  tal que  $E_{r_6}(x, y) = (0, 0)$  si  $(x, y) \in r_6$

(3.5.12)

En la relación, ninguno sale beneficiado ni perjudicado.

## 3.5.3 RELACIONES INTRAESPECIFICAS

### COOPERACION

Es igual que la relación de mutualismo o simbiosis anterior  $r_1$  pero con la condición de que x e y pertenecen a la misma población. Permiten realizar determinadas funciones vitales que serían imposibles o muy difíciles para los individuos aislados, entre las que podemos citar protección mutua, reproducción, búsqueda de alimento, orientación y división del trabajo (hormigas)

### COMPETENCIA

Definida igual que la relación de competencia anterior  $r_6$ . Interacción entre individuos de la misma especie provocada por la necesidad común de un recurso limitado que conduce a la reducción de la supervivencia, del crecimiento y/o de la reproducción de individuos competidores. Hay que hacer notar que si la competencia puede ser

desfavorable para los individuos de la población, puede favorecer en cambio la población considerada globalmente, ya que serán los individuos más aptos los que sobrevivirán y contribuirán a las generaciones siguientes.

### 3.6 SENSIBILIDAD Y ESTABILIDAD ENTRE VARIABLES DE UN ECOSISTEMA

Sea el ecosistema  $S = (M, R)$  y  $x \in M$  una variable influenciada por las variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$  /  $x(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))$ .

**Definición 9** : La sensibilidad  $\sigma$  de la variable  $x$  con respecto a una de las variables que la influyen, por ejemplo  $x_1$ , cuando  $t = t_i$  está definida por :

$$\sigma = \frac{1}{2} \left[ \frac{|f(x_1(t_{i+1}), x_2(t_i), \dots, x_p(t_i)) - f(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_p(t_i))|}{|x_1(t_{i+1}) - x_1(t_i)|} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{|f(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_p(t_i)) - f(x_1(t_{i-1}), x_2(t_i), \dots, x_p(t_i))|}{|x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})|} \right] \quad (3.6.1)$$

La sensibilidad de una variable con respecto a otra que la influencia es un número dentro del intervalo  $[0, +\infty[$ .

**Definición 10** : La estabilidad de una variable con respecto a otra que la influencia está definida como la inversa de la sensibilidad  $\tau = 1 / \sigma$ .

$$(3.6.2)$$



Un ecosistema no es estable necesariamente porque pueden haber variables teniendo gran sensibilidad con respecto a alguna de las variables que la influncian.

### 3.7 ECOSISTEMAS CON OBJETIVOS

La observación de muestras de campo en algunos ecosistemas nos indica que alguna de sus variables de salida tiende a algunos valores definidos. En el caso ideal (inalcanzable experimentalmente) podríamos obtener un límite matemático.

Dada una variable "y" que es influenciada por las variables  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , consideramos la función comportamiento salida - entrada que relaciona sus rangos f:

$$R y(t) = f(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$$

tomaremos n medidas de cada una de las variables  $y_j$  que influncian a la variable y:  $\{y_j(t_i)\}$  desde  $i = 1, 2, \dots, n$   $j = 1, 2, \dots, m$

#### $\varepsilon$ - APROXIMACION

**Definición 11** : Para un  $\varepsilon > 0$  dado, diremos que un conjunto finito de valores  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , están dentro de una  $\varepsilon$ -aproximación si  $|x_i - x| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Lo escribiremos generalmente como  $\{x_i\} \xrightarrow{\varepsilon} x$ .

(3.7.1)

#### $\varepsilon$ -OBJETIVO DE UNA VARIABLE

Dado  $\varepsilon > 0$  real, una variable de salida y influenciada por las variables  $\{y_j\}_{j=1, 2, \dots, m}$  de forma que  $y(t) = f(y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$

y habiendo sido realizadas  $2n$  medidas experimentales, la variable  $y$  tiene un  $\varepsilon$ -objetivo si verificamos :

Las sensibilidades  $\{ \sigma_{ji} \}_{i=1,2,\dots,n}$  de la variable  $y$  con respecto a cada variable  $y_j$  que la influencia debe  $\varepsilon$ - aproximar a un número real que escribimos para cada  $j$  como  $\sigma_j$ .

Es decir  $\forall y_j$  desde  $j = 1, 2, \dots, m$   $\{ \sigma_{ji} \}_{i=1}^n \xrightarrow{\varepsilon} \sigma_j$

Para cada  $y_j$  del conjunto de sensibilidades  $\{ \sigma_{ji} \}_i$ , elegimos " $\sigma_{jk}$ " que es la que mejor  $\varepsilon$ - aproxima  $\sigma_j$ , esto es :

$$| \sigma_{jk} - \sigma_j | = \min \{ | \sigma_{ji} - \sigma_j | \mid i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Para cada  $\sigma_{jk}$  tomaremos los valores de la variable  $y_j$  que nos han permitido calcular dicha sensibilidad :  $y_j(t_k)$ ,  $y_j(t_{k+1})$ ,  $y_j(t_{k+2})$  y sea  $E_j = [ y_j(t_k) + y_j(t_{k+1}) + y_j(t_{k+2}) ] / 3$  ser la esperanza matemática de estos 3 valores.

**Definición 12 :** El  $\varepsilon$ - objetivo de la variable  $y$  está definido como el número real :

$$O_{\varepsilon y} = f(E_1, E_2, \dots, E_m) \quad (3.7.2)$$

### OBJETIVO DE ORDEN $\varepsilon$ DE UN SISTEMA

**Definición 13 :** Un sistema tendrá un objetivo de orden  $\varepsilon$  si existe al menos una variable con un  $\varepsilon$ -objetivo.

$$(3.7.3)$$

### SISTEMA CON OBJETIVO

**Definición 14 :** Un sistema tiene objetivos si tiene al menos un objetivo de orden  $\varepsilon$  para  $\varepsilon > 0$ .

## 3.8 MODELO ECOLOGICO

### 3.8.1 MODELOS EN ECOLOGIA

La base científica para el uso de modelos en ecología y teoría de ecosistemas está basada en diversas propiedades. Así por ejemplo debemos tener presente que la naturaleza es demasiado compleja para que nos capacite para obtener un modelo detallado de los ecosistemas, pero podemos obtener una visión de conjunto buena del comportamiento de la naturaleza en varios contextos. Por otra parte modelos diferentes deben ser desarrollados para propósitos diferentes y aunque ningún modelo es correcto completamente, un buen modelo instruye nuestro conocimiento de un ecosistema desde un punto de vista y otro modelo desde otro punto de vista.

En todo ecosistema son muchas las componentes de interacción que se han de considerar y que necesitan como una herramienta científica las matemáticas experimentales.

Es esencial en la construcción de modelos que se consideren principalmente tres aspectos :

1. Las características del ecosistema, ya que es absolutamente necesario tener conocimiento profundo del ecosistema modelado.
2. El problema ; esto es ¿ para que debería ser usado el modelo?
3. Los recursos disponibles, esto es, la calidad y la cantidad de los datos sobre los que el modelo desarrollado estará basado.

Como mencionamos antes, hay muchos modelos del mismo ecosistema. Cada modelo sirve para un propósito diferente y nos

determina propiedades diferentes del ecosistema, al igual que un mapa geológico, un callejero, un mapa aéreo, etc. dan diferentes aspectos ( propiedades ) del paisaje. Un modelo está hecho para facilitar nuestra síntesis de hechos y nos capacita para imaginar un sistema.

### 3.8.2 MODELIZACION DE ECOSISTEMAS

Un modelo ecológico es un sistema que interpreta la realidad de un ecosistema, o una parte de esa realidad, de tal manera que sus elementos están relacionados a través de ecuaciones matemáticas y corresponden a los elementos del ecosistema real.

Cualquier intento de modelizar un ecosistema debe tener en cuenta las teorías ecológicas existentes, además de la meta y realidad que se considera.

Claramente, el nivel de agregación en la modelización depende de las metas que considere el modelizador.

#### MODELO

**Definición 15** : Dado un ecosistema  $S=(M,R)$  diremos que  $S_m = (M_m, R_m)$  es un modelo de el si :

1.  $M_m \subset M$
2. Los comportamientos de las variables de salida son relaciones matemáticas, esto es, es posible formalizar dichos comportamientos a través de ecuaciones matemáticas .

(3.8.1)

## MODELO ESTRUCTURAL

**Definición 16 :** Si consideramos la identidad entre la parte del sistema  $M_m$  y  $M$ , definida mediante la expresión :  $I_m : M_m \longrightarrow M$ .

Diremos que el sistema  $S_m = ( M_m , R_m )$  es un modelo estructural de  $S = ( M , R ) \Leftrightarrow \exists F : P(M_m) \longrightarrow P(M) / ( F \circ g ) ( x ) = ( h \circ I_m ) ( x ) \quad \forall x \in M_m$  donde  $g$  y  $h$  son las funciones estructurales asociadas a  $S_m$  y  $S$  respectivamente.

(3.8.2)

$$\begin{array}{ccc} M_m & \xrightarrow{I_m} & M \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ P(M_m) & \xrightarrow{F} & P(M) \end{array}$$

De aquí se deduce que es posible definir una relación entre  $M$  y  $M_m$  desde el grafo de  $I_m$  : “  $G_{im}$  “ de manera que si  $x \in M$  ,  $y \in M_m$ , tenemos que  $x R y$  sii  $( x , y ) \in G_{im}$  ( es decir  $y = Im ( x )$  siendo esta relación simétrica y transitiva ).

### 3.8.3 COMPARACION DE MODELOS

Se han realizado estudios para la selección de la complejidad de un modelo y se han definido índices ( Constanza (34) y conectividad ) para determinar la exactitud y efectividad de diversos modelos.

Iniciamos en este apartado la obtención de medidas que permiten completar modelos ya construidos en base a la obtención de experimentaciones nuevas.

Para un sistema  $S = (M, R)$  y un modelo asociado  $S_m = (M_m, R_m)$ , el estudio de la conexión entre el modelo y el sistema tendrá que obtener, principalmente medidas acerca de las relaciones que existen entre ellos.

### EXPLICACION DE UN MODELO

Por otra parte, para un sistema  $S = (M, R)$ , se consideran dos modelos matemáticos del mismo:  $S_m = (M_m, R_m)$ ,  $S_n = (M_n, R_n)$ . Si  $x \in M_m \cap M_n$ , la función comportamiento sobre ambos modelos está expresada como:

$$x = f_M(y_1, y_2, \dots, y_p) = f_M(y_x)$$

$$x = f_N(y_1, y_2, \dots, y_q) = f_N(y_x).$$

Sea un conjunto tiempo  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  siendo  $t_i < t_j \forall i < j$  y  $x(t_i) = x_i$ , desde  $i = 1, 2, \dots, n$  datos observados de la variable  $x$ . Igualmente,  $y_j(t_i) = y_{ji}$  serán los datos observados de las variables  $\{y_j\}_{j=1,2,\dots}$ .

### EXPLICACION DEL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE

**Definición 17:** El modelo  $S_m = (M_m, R_m)$  explica mejor el comportamiento de la variable  $x$  para  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  que el modelo  $S_n = (M_n, R_n)$  si:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x(t_i) - f_M(y_1(t_i) \cdots y_p(t_i))|}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x(t_i) - f_N(y_1(t_i) \cdots y_q(t_i))|}{n} \quad (3.8.3)$$

lo que es denotado por  $f_M x > f_N x$ .

### EXPLICACION DE UNA PARTE DEL SISTEMA

**Definición 18 :** Para dos modelos  $S_m = (M_m, R_m)$  y  $S_n = (M_n, R_n)$ , con  $M_m \cap M_n \neq \emptyset$ ,  $M_m \cap M_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , están definidos :

$$\Gamma_M = \text{card} \{x_j / f_M x_j > f_N x_j\} \quad \text{y} \quad \Gamma_N = \text{card} \{x_k / f_N x_j > f_M x_k\}$$

El sistema  $S_m = (M_m, R_m)$  explica mejor  $S_m \cap S_n$  que el sistema  $S_n = (M_n, R_n)$  si se cumple que  $\Gamma_M > \Gamma_N$ .

(3.8.4)

Esto nos permite conocer cual de los dos modelos explica mejor el conjunto de variables  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para un conjunto tiempo dado.

**Nota 1 :** Constanza y Sklar (34) en 1985, establecieron una relación de incertidumbre de la ecología :” *El producto entre el número de elementos en el modelo y la exactitud descriptiva del modelo tiene un límite superior, y el reto para el modelizador está entre saber mucho acerca de poco y poco acerca de mucho...*”.

La eficacia de un modelo tiene que ser función de cuanto intenta explicar (articulación) y de como de bien lo explica (exactitud descriptiva).

El comentario anterior nos hace pensar en la extensión del principio de incertidumbre anterior que podríamos enunciar así (159):

“ El modelizador debe elegir entre un buen ajuste que implica la pérdida de significado real de la ecuación y el significado real que implica la pérdida de un buen ajuste”.

### 3.8.4 COMPLEJIDAD ENTRE UN SISTEMA ONTOLOGICO Y UN SISTEMA SEMIOTICO

En este apartado consideraremos el sistema semiótico supremo  $S_s=(M_s,R_s)$  determinado por  $M_s=\{\text{ todos los posibles atributos asociados a los entes}\}$  y  $R_s= \{\text{ todas las posibles relaciones entre estos atributos}\}$ .

También denotaremos el cardinal de un conjunto por  $\text{card}$ .

#### INDICE DE COMPLEJIDAD $\alpha$

**Definición 19 :** Para cualquier sistema semiótico  $S=(M,R)$  y el sistema semiótico supremo  $S_s=(M_s,R_s)$  asociado al sistema ontológico se definen :

$$\alpha = \frac{\text{card}(M)}{\text{card}(M_s)} , \text{ cumpliéndose } 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\beta = \frac{\text{card}(R)}{\text{card}(R_s)} , \text{ cumpliéndose } 0 \leq \beta \leq 1$$

(3.8.5)

### 3.8.5 CORRELACION

#### INDICES ENTRE VARIABLES

**Definición 20 :** Dado el sistema  $S=(M,R)$  y un modelo de el  $S_m=(M_m,R_m)$ , el índice entre variables está definido por :

$$\sigma_{mv} = \frac{\text{card}(M_m)}{\text{card}(M)}$$

(3.8.6)



## INDICES ENTRE RELACIONES

**Definición 21 :** Para un sistema  $S = (M, R)$  y un modelo de el  $S_m = (M_m, R_m)$ , el índice entre relaciones está definido por

$$\sigma_{mR} = \frac{\text{card}(R_m)}{\text{card}(R)} \quad (3.8.7)$$

Para un sistema  $S = (M, R)$  y un modelo de el  $S_m = (M_m, R_m)$  con funciones estructurales asociadas :

$$F : M \longrightarrow P(M), F_m : M_m \longrightarrow P(M_m)$$

consideramos las restricciones de estas funciones estructurales a un subconjunto  $B \subset M$  :

$$F|B : M \longrightarrow P(M), F_m|B : M_m \longrightarrow P(M_m)$$

Se define el índice entre relaciones asociado a B como :

$$\sigma_B = \frac{\text{card}\left\{\bigcup_{b \in B} F_m|B(b)\right\}}{\text{card}\left\{\bigcup_{b \in B} F|B(b)\right\}} \quad \text{siendo } 0 \leq \sigma_B \leq 1 \quad (3.8.8)$$

Si  $B = M_m$ ,  $\sigma_{sm}$  representa el índice de relaciones entre el modelo y el sistema.

## 3.9 COMPLEJIDAD

Un ecosistema tiene muchas componentes diferentes biológicas y no biológicas. Muchos ecosistemas tienen al menos miles de especies y entre las especies, también los organismos individuales muestran gran variabilidad, por lo que todas estas componentes se influyen mutuamente directa o indirectamente y, como mostraron Higashi y Patten (59) en

1980 , los efectos indirectos pueden ser mas grandes que los directos. Simultáneamente, como las perturbaciones sobre el sistema varían , también cambiarán todas las propiedades de las componentes biológicas. ¿ Como podemos describir tal sistema complejo ?. La respuesta es que es imposible, si una descripción debe incluir todos los detalles, incluyendo todas las interacciones entre las componentes. Para responder en parte estas cuestiones, introducimos :

**Definición 22 :** Sea  $S = ( M , R )$  un sistema con un modelo  $S_m = (M_m, R_m)$ . Se denota por  $V_{S_m} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  el conjunto de variables de salida de  $S_m = ( M_m , R_m )$ . Dado otro modelo  $S_n = ( M_n , R_n )$ , se denota por  $V_{S_n} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  el conjunto de variables de salida de  $S_n = ( M_n , R_n )$

Diremos que el modelo  $S_m$  es mas desagregado que el modelo  $S_n$  y lo denotamos por  $S_m >_D S_n$ , cuando el modelo  $S_m$  tiene un número mayor de variables de salida que el modelo  $S_n$ .

(3.9.1)

Análogamente, diremos que el modelo  $S_m$  es mas agregado que el modelo  $S_n$  y lo denotamos por  $S_m >_A S_n$ , si el número de variables de salida del modelo  $S_m$  es menor que el número de variables de salida del modelo  $S_n$ .

(3.9.2)

### 3.9.1 INDICE DE DESAGREGACION DEL MODELO

**Definición 23 :** Definimos el índice de desagregación del modelo  $S_m = ( M_m , R_m )$  denotado por  $\sigma_d$  al cociente :

$$\sigma_d = \frac{\text{card}(V_{S_m})}{\text{card}(M_m)} \quad (3.9.3)$$

**Definición 24** : Un modelo  $S_m = (M_m, R_m)$  es más complejo que otro modelo  $S_n = (M_n, R_n)$  si se cumplen que  $M_n \subset M_m$  y si el índice entre variables de  $S_m$  es mayor que el índice entre variables de  $S_n$ , y si el índice entre relaciones de  $S_m$  es mayor que el índice entre relaciones de  $S_n$ . Lo denotamos por  $\geq$ . Es decir :

$$S_m = (M_m, R_m) \geq S_n = (M_n, R_n) \text{ sii } M_n \subseteq M_m, \sigma_{mV} \geq \sigma_{nV} \text{ y } \sigma_{mR} \geq \sigma_{nR}. \quad (3.9.4)$$

Sea  $M_S$  el conjunto de todos los modelos del sistema  $S = (M, R)$ , podemos definir la relación siguiente :

Dados dos modelos  $S_m = (M_m, R_m)$  y  $S_n = (M_n, R_n)$  del sistema  $S = (M, R)$  entonces  $S_m R S_n$  sii  $S_m \geq S_n$ .

Esta es una relación binaria de orden.

En la modelización de ecosistemas estamos convencidos de que no es posible obtener un modelo que sea el propio sistema ya que esto supondría el conocimiento de toda la realidad del ecosistema.

Aunque se considera usualmente que un modelo es más real cuando más variables se añaden y ( cuando ) hayan más relaciones entre ellas, se ha comprobado que el aumento de parámetros no contribuye necesariamente a obtener simulaciones mejores. La existencia de muchos parámetros implica nuevas incertidumbres. Es por consiguiente necesario obtener medidas que nos ayuden a completar el modelo.

## **3.10 INDICES ASOCIADOS A LAS RELACIONES EN UN ECOSISTEMA $S = (M, R)$**

### **3.10.1 INDICE DE DIVERSIDAD EN ECOSISTEMAS**

La diversidad de un ecosistema es un descriptor importante de los ecosistemas. Las componentes o especies en un ecosistema interactúan y restringen unas a otras a través de flujos de energía, materia e información. Las diferencias entre las características fisiológicas, ecológicas y de distribución cuantitativa de cada componente y la interacción de modelos entre las componentes conduce a la diversidad de los ecosistemas. Por lo tanto, si un índice de diversidad describe las propiedades reales de los ecosistemas, deberá considerar, no solo la fertilidad y abundancia de especies, sino también las relaciones de interacción entre las componentes.

La diversidad de un ecosistema es un área principal de la investigación ecológica por sus relaciones con la estabilidad y productividad de los ecosistemas. Desde que Fischer (46) en 1943 sugirió el índice  $\alpha$ -diversidad, los ecólogos han propuesto numerosos índices de diversidad ( por ejemplo Shannon y Weaver (145) en 1949 ; Simpson (148) en 1949 ; MacArthur (103) en 1955 ; Pielou (133) en 1975 ; Hurlbert (63) en 1971 ; Hill (60) en 1973 ; Kempton y Wedderburn (74) en 1978 ). Uno de los usados mas ampliamente es el índice de diversidad de Shannon-Weaver. Sin embargo, todos los índices previos solo miden la fertilidad y abundancia de las especies. Esto forzó a los ecólogos a medir la diversidad del ecosistema por sus niveles

tróficos ( diversidad de plantas, herbívoros, carnívoros, etc. ) y a descuidar completamente las interacciones entre las especies. Sin embargo, es bien conocido que la dirección e intensidad de las interacciones entre las componentes tiene un impacto decisivo sobre el funcionamiento del ecosistema, particularmente en su productividad, estabilidad y persistencia. Ulanowicz (153) en 1986 , propuso la ascendencia para describir la organización de una red de flujo basado sobre el número de componentes y los rendimientos de los sistemas totales. Sin embargo, la conexión y la ascendencia no consideran la intensidad de interacción y las relaciones de competitividad entre varias componentes.

Presentamos un índice de diversidad de ecosistemas para sus relaciones mas importantes que esta asociado a la función estructural, basado en el número de componentes y en la fuerza de interacción entre las componentes del ecosistema

### **3.10.2 DIVERSIDAD ESTRUCTURAL**

Desde el punto de vista de teoría de sistemas, las tres propiedades generales de cualquier sistema son sus componentes, su estructura y su función, siendo la estructura el conjunto de relaciones de interacción entre las componentes. Así pues, es conveniente el estudio de la diversidad enfocada inicialmente a las relaciones de interacción.

Sea el ecosistema  $S_E = ( M_E , R_E )$  donde  $M_E$  representa el conjunto objeto de las especies y  $R_E$  son las relaciones entre especies, es decir nos situamos en el caso ontológico :

$$M_E = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

$$R_E = \{ r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(8)}, r^{(9)}, r^{(10)}, r^{(11)}, r^{(12)} \}$$

denotando las relaciones siguientes, ya definidas anteriormente incluyendo las dos relaciones mas importantes de un ecosistema, depredación y competición, con sus distintas posibilidades:  $r^{(1)}$  = relación dominante directa,  $r^{(2)}$  = relación subordinada directa,  $r^{(3)}$  = relación dominante indirecta,  $r^{(4)}$  = relación subordinada indirecta,  $r^{(5)}$  = relación paralela nivel 1,  $r^{(6)}$  = relación paralela nivel 2,  $r^{(7)}$  = relación paralela nivel 3 y  $r^{(8)}$  = relación paralela nivel 4, y por otra parte:  $r^{(9)}$  = mutualismo o simbiosis,  $r^{(10)}$  = comensalismo o inquilinismo,  $r^{(11)}$  = parasitismo social o explotación,  $r^{(12)}$  = antibiosis.

Se denotará por  $a_{jl}^{(i)}$   $1 \leq i \leq 12$   $1 \leq j, l \leq n$  la intensidad de interacción de la relación binaria  $i$ -ésima entre  $x_j$  y  $x_l$

Definiremos  $a_{jl}^{(i)}$  por medio de la función estructural asociada a la relación  $r^{(i)}$ , es decir mediante  $F_{r^{(i)}}$  siendo:

$$F_{r^{(i)}}(x_j) = \begin{cases} f_{r^{(i)}}(x_j) = M_{x_j} \\ g_{r^{(i)}}(x_j) = M'_{x_j} \\ f_{r^{(i)}}(x_j) \cup g_{r^{(i)}}(x_j) = M_{x_j} \end{cases} \quad (3.10.1)$$

según la variable  $x_j$  es una variable de entrada, de salida o interna, respectivamente. Definiendo:

Si  $x_j$  es una variable de entrada, entonces

$$a_{jl}^{(i)} = \begin{cases} 1/\text{card}(M_{x_j}) & \text{si } (x_j, x_l) \in r^{(i)} \\ 0 & \text{si } (x_j, x_l) \notin r^{(i)} \end{cases} \quad (3.10.2)$$

Si  $x_j$  es una variable de salida, entonces

$$a_{jl}^{(i)} = \begin{cases} 1/\text{card}(M_{x_j}^r) & \text{si } (x_l, x_j) \in r^{(i)} \\ 0 & \text{si } (x_l, x_j) \notin r^{(i)} \end{cases} \quad (3.10.3)$$

Si  $x_j$  es una variable interna, entonces :

$$a_{jl}^{(i)} = \begin{cases} 1/\{\text{card}(M_{x_j}) + \text{card}(M_{x_j}^r)\} & \text{si } (x_j, x_l) \in r^{(i)}, (x_l, x_j) \in r^{(i)} \\ 0 & \text{si } (x_j, x_l) \notin r^{(i)}, (x_l, x_j) \notin r^{(i)} \end{cases} \quad (3.10.4)$$

Se cumplirá que  $0 \leq a_{jl}^{(i)} \leq 1$ .

Obviamente  $a_{jl}^{(i)} = 0$ , significa que la relación binaria  $i$ -ésima entre  $x_j$  y  $x_l$  no existe, y  $a_{jl}^{(i)} = 1$  significa que la relación binaria  $i$ -ésima entre  $x_j$  y  $x_l$  es máxima.

Independientemente de si la variable es de entrada, interna o salida, definimos la expresión  $b_j^{(i)}$  como la suma de la intensidad de interacción para la relación binaria  $r^{(i)}$  entre la componente  $j$ -ésima y todas las demás componentes :

$$b_j^{(i)} = \sum_{l=1, l \neq j}^n a_{jl}^{(i)} = 1 \quad (3.10.5)$$

( Siempre vale 1 por la forma en que lo hemos construido )

**Definición 25** : La diversidad estructural del ecosistema estará definida como  $\sum b_j^{(i)} \quad \forall j, \forall i$

(3.10.6)

**Definición 26** : Dados dos ecosistemas  $S_1 = (M_1, R_1)$  y  $S_2 = (M_2, R_2)$  diremos que la diversidad estructural del ecosistema  $S_1$  es mas alta que en el ecosistema  $S_2$  si la suma de las intensidades de interacción de todas las relaciones binarias y todas las componentes es mayor en  $S_1$  que en  $S_2$ .

(3.10.7)

### 3.10.3 EJEMPLOS HIPOTETICOS PARA EL CALCULO DE LA DIVERSIDAD ESTRUCTURAL

**Ejemplo 1.** Sea el ecosistema I

$$x_2 \longrightarrow x_1$$

$$x_3 \longrightarrow x_1$$

$$x_4 \longrightarrow x_1$$

$$x_5 \longrightarrow x_1$$

Las flechas representa la dirección de los flujos de energía.  $x_1$  controla directamente a  $x_2, x_3, x_4, x_5$ . Hay relaciones competitivas entre  $x_2, x_3, x_4, x_5$ .

Los pares ordenados de las relaciones están definidos por:

$$r^{(1)} : (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5)$$

$$r^{(2)} : (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_4, x_1), (x_5, x_1)$$

$$r^{(5)} : (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5),$$

$$(x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_4)$$



Las funciones estructurales asociadas a  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$ ,  $r^{(5)}$  son :

$$F_r^{(1)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(1)}(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$F_r^{(2)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(2)}(x_2) = \{x_1\}, \quad F_r^{(2)}(x_3) = \{x_1\}, \quad F_r^{(2)}(x_4) = \{x_1\}, \quad F_r^{(2)}(x_5) = \{x_1\}$$

$$F_r^{(5)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(5)}(x_2) = \{x_3, x_4, x_5\}, F_r^{(5)}(x_3) = \{x_2, x_4, x_5\}, F_r^{(5)}(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\},$$

$$F_r^{(5)}(x_5) = \{x_2, x_3, x_4\}$$

Para  $F_r^{(1)}$  tenemos las siguientes intensidades de interacción :

$$a_{12}^{(1)} = \frac{1}{4} = a_{13}^{(1)} = a_{14}^{(1)} = a_{15}^{(1)}$$

Para  $F_r^{(2)}$  tenemos las siguientes intensidades de interacción :

$$a_{21}^{(2)} = 1 = a_{31}^{(2)} = a_{41}^{(2)} = a_{51}^{(2)}$$

Para  $F_r^{(5)}$  tenemos las siguientes intensidades de interacción :

$$a_{23}^{(5)} = \frac{1}{3} = a_{24}^{(5)} = a_{25}^{(5)}$$

$$a_{32}^{(5)} = \frac{1}{3} = a_{34}^{(5)} = a_{35}^{(5)}$$

$$a_{42}^{(5)} = \frac{1}{3} = a_{43}^{(5)} = a_{45}^{(5)}$$

$$a_{52}^{(5)} = \frac{1}{3} = a_{53}^{(5)} = a_{54}^{(5)}$$

Evidentemente se cumple :

$$b_1^{(1)} = 1 = b_2^{(2)} = b_3^{(2)} = b_4^{(2)} = b_5^{(2)} = b_2^{(5)} = b_3^{(5)} = b_4^{(5)} = b_5^{(5)}$$

En los demás casos es 0 porque no hay relación.

**Ejemplo 2.** Sea el ecosistema II

$$x_5 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_3 \longleftarrow x_2 \longrightarrow x_1$$

En este ecosistema  $x_1$  y  $x_3$  dominan directamente a  $x_2$ ;  $x_3$  controla directamente a  $x_4$ ;  $x_4$  controla directamente a  $x_5$ ; y  $x_3$  controla indirectamente a  $x_5$  mediante  $x_4$ .

Hay relaciones paralelas nivel-2 entre  $x_2$  y  $x_4$  y relaciones paralelas nivel-3 entre  $x_1$  y  $x_3$ .

Los pares ordenados de las relaciones son :

$$r^{(1)} : (x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5)$$

$$r^{(2)} : (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_3), (x_5, x_4)$$

$$r^{(3)} : (x_3, x_5)$$

$$r^{(4)} : (x_5, x_3)$$

$$r^{(6)} : (x_2, x_4), (x_4, x_2)$$

$$r^{(7)} : (x_1, x_3), (x_3, x_1)$$

Calculamos las funciones estructurales asociadas a estas relaciones :

$$F_r^{(1)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(1)}(x_1) = \{x_2\}, \quad F_r^{(1)}(x_3) = \{x_2, x_4\}, \quad F_r^{(1)}(x_4) = \{x_5\}$$



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

$$F_r^{(2)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(2)}(x_2) = \{x_1, x_3\}, \quad F_r^{(2)}(x_4) = \{x_3\}, \quad F_r^{(2)}(x_5) = \{x_4\}$$

$$F_r^{(3)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(3)}(x_3) = \{x_5\}$$

$$F_r^{(4)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(4)}(x_5) = \{x_3\}$$

$$F_r^{(6)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(6)}(x_2) = \{x_4\}, \quad F_r^{(6)}(x_4) = \{x_2\}$$

$$F_r^{(7)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(7)}(x_1) = \{x_3\}, \quad F_r^{(7)}(x_3) = \{x_1\}$$

Para  $F_r^{(1)}$  tenemos las siguientes intensidades de interacción :

$$\begin{aligned} a_{12}^{(1)} &= 1 \\ a_{32}^{(1)} &= \frac{1}{2} = a_{34}^{(1)} \\ a_{45}^{(1)} &= 1 \end{aligned}$$

Para  $F_r^{(2)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{21}^{(2)} = \frac{1}{2} = a_{23}^{(2)}$$

$$a_{43}^{(2)} = 1$$

$$a_{54}^{(2)} = 1$$

Para  $F_r^{(3)}$  tenemos la intensidad de interacción :

$$a_{35}^{(3)} = 1$$

Para  $F_r^{(4)}$  tenemos la intensidad de interacción :

$$a_{53}^{(3)} = 1$$

Para  $F_r^{(6)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{24}^{(6)} = 1$$

$$a_{42}^{(6)} = 1$$

Para  $F_r^{(7)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{13}^{(7)} = 1$$

$$a_{31}^{(7)} = 1$$

Evidentemente se cumple que :

$$b_1^{(1)} = 1 = b_3^{(1)} = b_4^{(1)} = b_2^{(2)} = b_4^{(2)} = b_5^{(2)} = b_3^{(3)} = b_5^{(3)} = b_2^{(6)} = b_4^{(6)} = b_1^{(7)} = b_3^{(7)}$$

En los demás casos es 0 porque no hay relación.

**Ejemplo 3.** Sea el ecosistema III

$$x_3 \longrightarrow x_1$$

$$x_3 \longrightarrow x_2$$

$$x_4 \longrightarrow x_3$$

$$x_5 \longrightarrow x_3$$

En este ecosistema  $x_1$  y  $x_2$  controlan directamente a  $x_3$ ;  $x_3$  controla directamente a  $x_4$  y  $x_5$ ;  $x_1$  y  $x_2$  controlan indirectamente a  $x_4$  y  $x_5$

Hay relaciones paralelas de nivel-1 entre  $x_4$  y  $x_5$ ; y relaciones paralelas de nivel-3 entre  $x_1$  y  $x_2$ .

Los pares ordenados de las relaciones son :

$$r^{(1)} : (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5)$$

$$r^{(2)} : (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3), (x_5, x_3)$$

$$r^{(3)} : (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_2, x_5)$$

$$r^{(4)} : (x_4, x_1), (x_5, x_1), (x_4, x_2), (x_5, x_2)$$

$$r^{(5)} : (x_4, x_5), (x_5, x_4)$$

$$r^{(7)} : (x_1, x_2), (x_2, x_1)$$

Calculamos las funciones estructurales asociadas a estas relaciones :

$$F_r^{(1)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(1)}(x_1) = \{x_3\}, \quad F_r^{(1)}(x_2) = \{x_3\}, \quad F_r^{(1)}(x_3) = \{x_4, x_5\}$$

$$F_r^{(2)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(2)}(x_3) = \{x_1, x_2\}, \quad F_r^{(2)}(x_4) = \{x_3\}, \quad F_r^{(2)}(x_5) = \{x_3\}$$

$$F_r^{(3)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(3)}(x_1) = \{x_4, x_5\}, \quad F_r^{(3)}(x_2) = \{x_4, x_5\}$$

$$F_r^{(4)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(4)}(x_4) = \{x_1, x_2\}, \quad F_r^{(4)}(x_5) = \{x_1, x_2\}$$

$$F_r^{(5)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(5)}(x_4) = \{x_5\}, \quad F_r^{(5)}(x_5) = \{x_4\}$$

$$F_r^{(7)} : M \longrightarrow P(M)$$

$$F_r^{(7)}(x_1) = \{x_2\}, \quad F_r^{(7)}(x_2) = \{x_1\}$$



Para  $F_r^{(1)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{13}^{(1)} = 1$$

$$a_{23}^{(1)} = 1$$

$$a_{34}^{(1)} = \frac{1}{2} = a_{35}^{(1)}$$

Para  $F_r^{(2)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{31}^{(2)} = \frac{1}{2} = a_{32}^{(2)}$$

$$a_{43}^{(2)} = 1$$

$$a_{53}^{(2)} = 1$$

Para  $F_r^{(3)}$  tenemos las intensidades de interacción :

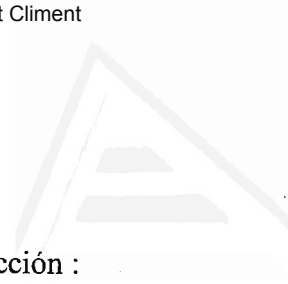
$$a_{14}^{(3)} = \frac{1}{2} = a_{15}^{(3)}$$

$$a_{24}^{(3)} = \frac{1}{2} = a_{25}^{(3)}$$

Para  $F_r^{(4)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{41}^{(4)} = \frac{1}{2} = a_{42}^{(4)}$$

$$a_{51}^{(4)} = \frac{1}{2} = a_{52}^{(4)}$$



Para  $F_r^{(5)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{45}^{(5)} = 1$$

$$a_{54}^{(5)} = 1$$

Y para  $F_r^{(7)}$  tenemos las intensidades de interacción :

$$a_{12}^{(7)} = 1$$

$$a_{21}^{(7)} = 1$$

Evidentemente se cumple que :

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} = 1 = b_2^{(1)} = b_3^{(1)} = b_3^{(2)} = b_4^{(2)} = b_5^{(2)} = b_1^{(3)} = \\ = b_2^{(3)} = b_4^{(4)} = b_5^{(4)} = b_4^{(5)} = b_5^{(5)} = b_1^{(7)} = b_2^{(7)} \end{aligned}$$

Si calculamos  $\sum b_j^{(i)}$  siendo  $1 \leq i \leq 8$   $1 \leq j \leq 5$

En los tres ecosistemas podemos observar :

$$\text{En el ecosistema I : } \sum b_j^{(i)} = 9$$

$$\text{En el ecosistema II : } \sum b_j^{(i)} = 12$$

$$\text{En el ecosistema III : } \sum b_j^{(i)} = 14$$

Por lo tanto la diversidad estructural de ecosistema III es más alta y la del ecosistema I es mas baja.

Desde la intuición, el ecosistema III es mas complejo y el ecosistema I es el mas simple.

### 3.11 ESTABILIDAD Y DIVERSIDAD

Los conceptos de estabilidad generalmente aplicados en ecología suponen que un sistema volverá al mismo estado otra vez, después de una perturbación, pero este no es el caso.

Durante las dos o tres últimas décadas, se ha ensanchado el conocimiento ecológico considerablemente. Sin embargo, problemas ambientales han mostrado, que además de considerar procesos ecológicos, componentes y relaciones, se necesita desplegar propiedades y leyes de los ecosistemas completos, que nos capacite para comprender las reacciones ecológicas, en particular las perturbaciones sobre el nivel del sistema.

¿ Como podemos enfrentarnos con la complejidad enorme de los ecosistemas en nuestros intentos de revelar las propiedades y leyes sobre el nivel del sistema ?

Las reacciones de los ecosistemas a perturbaciones han sido discutidos ampliamente en relación a los conceptos de estabilidad. El concepto de estabilidad, elasticidad , es comprendido como la habilidad del ecosistema para volver a “ la normalidad “ después de las perturbaciones. Este concepto es de interés en una discusión matemática sobre si las ecuaciones pueden ser capaces de volver al estado estable ; pero los defectos de este concepto en un contexto de ecosistema real están claros :

Un ecosistema es un sistema muelle, en el que nunca volveremos al mismo punto otra vez. Será capaz de mantener sus funciones sobre el nivel mas alto posible, pero nunca exactamente con las mismas



componentes biológicas y químicas en la misma concentración otra vez. La composición de especies o la alimentación puede o no puede tener cambios, pero al menos no serán los mismos organismos con las mismas propiedades. En adición, es irreal considerar que las mismas condiciones ocurrirán otra vez. Podemos observar que un ecosistema tiene la propiedad de elasticidad en el sentido de que los ecosistemas tienen una tendencia a recuperarse después del stress, pero una recuperación completa comprendida como que la misma situación deberá aparecer otra vez, nunca se realizará.

La resistencia es otro concepto de estabilidad ampliamente aplicado. Cubre la habilidad del ecosistema para resistir a cambios, cuando las condiciones son cambiadas. Este concepto necesita una definición mas rigurosa y ser considerado multidimensional para ser capaz de enfrentarse con reacciones del ecosistema real. Un ecosistema siempre cambiará cuando las condiciones cambien, las cuestiones son ¿ Que cambia y cuanto ?.

Estas observaciones explican porque ha sido muy difícil encontrar una relación entre estabilidad del ecosistema en su sentido mas amplio y diversidad de especies.

Con los índices de estabilidad establecidos previamente hemos tratado de avanzar en la dirección de la estabilidad de los ecosistemas, aunque cuestiones del tipo : a mas diversidad mas estabilidad en un ecosistema siguen permaneciendo abiertas.

**4**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **TEORIA DE LA MODELIZACION DE ECOSISTEMAS**



#### CAPITULO 4 :

Metodologías particulares de modelización han sido propuestas por autores diferentes, en general pueden ser clasificadas en inductivas y deductivas.

Obtenemos un modelo teórico para la simulación de ecosistemas utilizando una metodología híbrida, la cual propone relaciones causales hipotéticas y tratar de obtener sus formas a partir de los datos de campo.

En esta metodología mixta inductiva-deductiva, las ecuaciones diferenciales ( ecuaciones de estado ) se han elaborado hipotéticamente ( metodología deductiva ) mientras que las ecuaciones de flujo han sido obtenidas a partir de los datos de campo por medio de ecuaciones de regresión múltiple ( metodología inductiva ). Elegir estas funciones implica la consideración a priori de un conjunto finito de funciones analíticas de “tipo elemental” y entonces analizar sus composiciones hasta un orden  $n$ , que llamaremos “  $n$  - transformadas”. Estas transformadas son las únicas que entonces serán ajustadas

# CAPITULO 4 : TEORIA DE LA MODELIZACION DE ECOSISTEMAS

El propósito de construir un modelo de un ecosistema es comprender y predecir el comportamiento del ecosistema como un todo cuantitativamente, describiendo interacciones entre partes del ecosistema. En orden a comprender la naturaleza de los modelos matemáticos de ecosistemas se debe comprender la naturaleza de la teoría matemática, es decir los conocimientos construidos por el método axiomático. La información sobre las propiedades y las relaciones entre los conceptos son los axiomas de la teoría. La teoría se utiliza como un modelo matemático. Las cosas del sistema real son los objetos abstractos de la teoría matemática y son las variables del modelo matemático. Por lo tanto, los axiomas son las afirmaciones de las relaciones entre las variables ( Parzon en 1960 ; Kowal (81) en 1971 )

Estos axiomas propios de la Teoría general de Sistemas son el lenguaje simbólico. En la modelización de ecosistemas, estamos seguros de que no es posible obtener un modelo que sea el propio sistema, ya que

esto supondría conocer toda la realidad de el. Jorgensen (70) en 1988, de acuerdo con Constanza y Sklar (34) en 1985, proponen una relación de incertidumbre :

*“El producto del número de elementos en el modelo y la exactitud descriptiva del modelo tienen un límite superior y la ocupación para el modelizador está en conocer mucho acerca de poco y poco acerca de mucho”*

En el caso límite llegaríamos a la paradoja formulada por Bonini en 1963 en la que de una serie sucesiva de modelos, cada vez mas complejos, obtendría un modelo cuya complejidad sería igual a la del sistema correspondiente y por consiguiente sus interacciones y su comportamiento no serían más claros. Como complemento a la paradoja de Bonini podríamos añadir que en el modelo, el conjunto S representa variables numéricas y estas solamente representan una visión parcial y sesgada de la realidad o cosas del sistema real.

## 4.1 LA ECOLOGIA MATEMATICA

La ecología, como la mayoría de las ramas de la ciencia, tiende y cada vez más, a utilizar métodos rigurosos matemáticos, proporcionados por el calculo estadístico, la teoría de la información, la teoría general de sistemas, etc. Esta orientación actual ha dado lugar a la creación de una disciplina particular de la ciencia denominada Ecología Matemática.

Cuando hablamos de ecología matemática, nos estamos refiriendo a dos subdisciplinas íntimamente relacionadas, las cuales abarcan la total aplicación de la matemática a la ecología : La ecología teórica y la ecología cuantitativa. Esta última abarca a su vez una pluralidad de

áreas dentro de las cuales podemos distinguir la Modelística, que trata de modelos descriptivos de la estructura del sistema, de su comportamiento y de su simulación o gestión, la Estadística Ecológica y la Ecología Numérica. En esta última entraría el análisis numérico de los datos de naturaleza experimental en orden a determinar e interpretar sus procesos de estructura multidimensional.

La Ecología Matemática es, por lo tanto, la integración de numerosas disciplinas en una metodología convergente de análisis de datos complejos procedentes de los ecosistemas y de su posible elaboración y uso para una eventual intervención reguladora sobre los mismos.

## **4.2 LOS MODELOS MATEMATICOS EN ECOLOGIA**

Por modelo matemático ecológico entendemos una fórmula, una ecuación, un sistema de ecuaciones, una matriz o todo un aparato matemático complejo que permite, con una aproximación suficiente, describir un fenómeno, condensar y/o simular y prever en el espacio y/o en el tiempo comportamientos posibles de los ecosistemas.

El desarrollo de modelos que predicen los efectos sobre algunas variables de los cambios que tienen lugar en otras, requiere, con carácter general que se cumplan las siguientes condiciones :

1. Una estructura causal basada en las teorías ecológicas.
2. Unas funciones o tablas que determinen el comportamiento de las variables consideradas.

3. Un procedimiento de validación que contraste los resultados obtenidos con el modelo con los datos obtenidos de la experiencia.

La dificultad de conocer todas las relaciones causales que se dan en la Naturaleza, añadida a la carencia de datos ( bolsas de ignorancia ), restringe el desarrollo y la ejecución de buenos modelos.

## **4.3 MODELO TEORICO PARA LA SIMULACION DE ECOSISTEMAS**

Es presentado en este trabajo un modelo teórico de ecosistemas basado en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuyas variables de flujo son funciones obtenidas a partir de datos experimentales, clasificadas en variables dependientes e independientes. Por otra parte se eligen un conjunto de funciones ( transformadas ) de las variables, de manera que para combinaciones lineales de ellas, se ajusta por regresión lineal hasta obtener la más óptima. El modelo teórico que se presenta ha sido aplicado en el estudio concreto de un ecosistema (155). Dicho modelo ha sido validado después de aplicar el modelo teórico.

### **4.3.1 INTRODUCCION**

Los ecosistemas considerados como un paradigma científico ( Higashi and Burns (58) en 1991 ) se han estructurado como modelos. Este paradigma estructura - ambiente ha evolucionado en el paradigma abierto ( jerárquico ) cuando el resto de la estructura ( network ) sirve como medio al resto de las componentes de dicha estructura. La noción de medio se convierte por lo tanto en relativa.

El objetivo de la modelización ecológica es la adquisición de conocimientos y/o tomas de decisión sobre políticas de intervención en los ecosistemas. Patten (124) en 1975 presenta asunciones básicas para la modelización ecológica, las cuales son :

- Un ecosistema es una entidad por sí mismo ( un sistema general )
- La dinámica de un ecosistema en estados no perturbados es aproximadamente lineal aunque sus procesos internos sean no lineales.
- Las componentes bióticas de un ecosistema tienen recursos limitados.
- Una dinámica no perturbada se produce en un limitado rango de operaciones.
- Las operaciones ocurren en un limitado rango de valores.

Metodologías particulares de modelización han sido propuestas por diferentes autores. Dichas metodologías pueden ser clasificadas ( Caselles & Usó (31) en 1993 ) en inductivas y deductivas. Las metodologías inductivas se inician a partir de los valores de las variables obtenidos por observación en el campo y tratando de detectar, por medio de dichos datos, primeramente las dependencias causales entre variables y después la forma de las ecuaciones o tablas que representan dichas dependencias. Las metodologías deductivas se inician a partir de relaciones causales hipotéticas y formas hipotéticas para dichas relaciones, tratando de obtener a partir de los valores de campo de las variables de entrada otros valores para las variables de salida que sean iguales o similares a los valores correspondientes observados en el campo.

Las metodologías híbridas pueden proponer relaciones causales hipotéticas y tratar de obtener sus formas a través de los datos de campo



o detectar las relaciones causales a partir de los datos de campo y proponer formas hipotéticas basadas en las relaciones detectadas. Los autores en este trabajo proponemos una metodología mixta inductiva - deductiva en donde las ecuaciones diferenciales ( ecuaciones de estado ) se han elaborado hipotéticamente ( metodología deductiva ), mientras que las ecuaciones de flujo han sido obtenidas a partir de los datos de campo por medio de ecuaciones de regresión múltiple ( metodología inductiva ).

Se asume que la dinámica de un sistema puede ser modelizada a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias , según Gihman y Skorohod (50) en 1972 , de la manera siguiente :

$$\begin{aligned} dy/dt &= F(t, x), \quad x = x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $x, y \in X$  para  $X$  un espacio vectorial de dimensión finita o espacio de fase.

Partimos pues de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales :

$$dy_j/dt = \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

siendo  $x_{ij}$  las variables de flujo que inciden en la variable de estado  $y_j$ .

Cada una de las variables de flujo puede ser función tanto de las variables exógenas como de las de estado.

Denotando por  $Y$  el conjunto de las variables de estado y por  $A$  el conjunto de las variables exógenas, definimos por  $Z = Y \cup A$ . Admitimos que  $Z$  es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales  $R$ . A este espacio  $Z$  le llamamos espacio de variables.

Así pues es posible expresar :

$$\forall x_{ij}, x_{ij} = f_{ij}(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)); z_i \in Z$$

$$(f_{ij} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n) \quad (3)$$

### 4.3.2 CUASILINEALIDAD DEL MODELO

Llamaremos  $y_j$  al vector de estado en un punto de referencia o estado inicial en la trayectoria del ecosistema. De esta manera podemos escribir:

$$y_j(t) = y_j(t_0) + \delta y_j(t) \quad (4)$$

donde  $\delta y_j(t)$  es la desviación de  $y_j(t_0)$ .

La ecuación (2) la expresamos como:

$$d y_j / d t = F(t, x)$$

$$d y_j / d t = F(t, x) = \sum_{i=1}^n x_{ij}(t) \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Al aplicar el método de Euler se obtiene:

$$y_j(t) = y_j(t_0) + F(t_0, x(t_0)) = y_j(t_0) + \sum_{i=1}^n x_{ij}(t_0) dt \quad (5)$$

Aplicando la ecuación (3):

$$y_j(t) = y_j(t_0) + \left( \sum_{i=1}^n f_{ij}(z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)) \right) dt = y_j(t_0) + \sum_{i=1}^n f_{ij}(z(t_0)) dt$$

$$z(t_0) = (z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)) \quad (6)$$

Para todo  $f_{ij}$  supondremos que es una función con derivadas parciales hasta orden  $n$ , o bien de clase  $C^\infty$ , en la trayectoria del ecosistema.

Desarrollando por Taylor las funciones  $f_{ij}$  a lo largo de la trayectoria del ecosistema y escogiendo un punto  $\alpha \in Z$ , de la trayectoria del ecosistema (que es dominio de las  $f_{ij}$ ), tendremos:

$$y_j(t) = y_j(t_0) + \left[ \sum_{i=1}^n f_{ij}(\alpha) + \nabla f_{ij}(\alpha) \delta z(t_0) \right] dt + \dots \quad (7)$$

para  $\delta z(t_0) = z(t_0) - \alpha = (z_1(t_0) - \alpha_1, z_2(t_0) - \alpha_2, \dots, z_n(t_0) - \alpha_n)$

Para pequeñas desviaciones podemos aproximar la ecuación (7) dejando únicamente el primer término del desarrollo en serie :

$$y_j(t) \cong y_j(t_0) + \left[ \sum_{i=1}^n f_{ij}(\alpha) + \nabla f_{ij}(\alpha) \delta z(t_0) \right] dt \quad (8)$$

En forma diferencial resulta :

$$\frac{dy_j}{dt} \cong \sum_{i=1}^n f_{ij}(\alpha) \delta z(t_0) \quad (9)$$

Para pequeñas desviaciones alrededor de la trayectoria de referencia y al ser

$\frac{dy_{ij}}{dt} = 0$  y  $\delta z(t_0) = 0$ , podemos hacer la aproximación :

$$\sum_{i=1}^n f_{ij}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cong 0$$

Así, la ecuación (9) quedará :

$$\frac{dy_j}{dt} \cong \sum_{i=1}^n \nabla f_{ij}(\alpha) \delta z(t_0) \quad (10)$$

que es una ecuación diferencial lineal que nos determina de manera aproximada la dinámica de las desviaciones. Expresando (10) en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \nabla f_{i1}(\alpha) \delta z(t_0) \\ \sum_{i=1}^n \nabla f_{i2}(\alpha) \delta z(t_0) \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (11)$$

de otra manera :

$$\forall j, \quad \frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \nabla f_{ij}(\alpha) \delta z(t_0) = \sum_{i=1}^n A_{ij}(z(t_0)) \delta z(t_0) \quad (12)$$

Siendo  $A_{ij}$  igual al gradiente de  $f_{ij}$  en el punto  $\alpha$ .

Con ello habremos demostrado la proposición 1 que enunciaremos de la siguiente manera :

**Proposición 1 :** La desviación dinámica del comportamiento de un ecosistema alrededor de  $y_j(t_0)$  será aproximadamente lineal para pequeñas desviaciones de  $\delta z(t_0)$ .

**Consecuencia 1 :** La dinámica de un ecosistema puede ser abordada con aproximación por medio de modelos lineales

## 4.4 MODELO TEORICO. CASO GENERAL

### 4.4.1 FUNCIONES ELEMENTALES

Sea  $\Omega$  un abierto conexo en el plano complejo. Se denota por  $H_\Omega$  el conjunto de todas las funciones analíticas sobre  $\Omega$  con estructura de anillo con las operaciones suma y producto ( Martínez & Sanz (106) en 1991 ). Para  $F \subset H_\Omega$ ,  $A(F)$  denota el subanillo engendrado por  $F$ .

Para un conjunto  $G$  de funciones analíticas,  $A^*(G)$  es el conjunto de funciones analíticas que sobre algún abierto conexo,  $\Omega$ , dependen algebraicamente de algún subconjunto de  $G$ .

Un conjunto de funciones elementales  $E$  es un conjunto de funciones analíticas que es el mínimo que cumple:

1.  $A^*(G) \subset E$
2. Si  $f \in E$ , entonces  $f', Ef, Pf, Lf \in E$   
siendo  $f'$  la derivada,  $Ef$  la exponencial de  $f$ ,  $Pf$  una primitiva y  $Lf$  el logaritmo de  $f$ .
3. Si  $f, g \in E$  y tienen un dominio común, entonces,  $f + g, f/g (g \neq 0), f^g$  (o sea  $\exp(g \log f)$ ) son elementos de  $E$ .
4. Si  $f, g \in E$  y la imagen de  $f$  de su dominio está contenida en el dominio de  $g$ ,  $f \cdot g \in E$
5. Si  $F$  es un subconjunto finito de  $E$  cuyas funciones tienen un dominio común  $\Omega$  y  $g \in H_\Omega$  depende algebraicamente de  $F$ , entonces  $g \in E$ .

#### 4.4.2 FUNCIONES TRANSFORMADAS

Llamaremos transformada de orden 1 (Usó, (155) en 1994) a un conjunto de funciones analíticas elementales  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$

Llamamos transformada de orden 2 a la composición o recursión entre dos transformadas de orden 1:  $z_i \circ z_j = z_i(z_j); \forall i, j=1, 2, \dots, n$

En general la transformada de orden  $n$  es una composición de orden  $n$ . El conjunto de transformadas hasta un cierto orden  $n$ , nos determinará el ajuste por regresión lineal del conjunto de datos de que se dispone.

#### 4.4.3 MODELO TEORICO

Un método general de investigación de relaciones entre variables sin una predeterminación de su sentido es propuesto por Klir (77) en 1985. Un método diferente es el ajustar por medio de una regresión lineal una combinación lineal de funciones.

Se plantea a continuación un método en el cual se construyen funciones arbitrarias, de forma general, a partir de unas funciones básicas llamadas funciones elementales. Para ello se consideran recursiones o composiciones de dichas funciones elementales. Un concepto analítico de dichas funciones ha sido definido en las secciones anteriores.

Como indicamos en el punto 1, fórmulas (1) y (2), la modelización conduce de forma general a un sistema

$$\begin{aligned} dy_j / dt &= \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &= f_{ij}(z_1(t), \dots, z_n(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

El propósito de los autores es expresar cada función  $x_{ij}$  como combinaciones lineales de transformadas que ajusten por regresión el modelo lineal estudiado. Expresamos las transformadas de orden 1 por  $T_1(z_r)$ . Para las transformadas de orden 2,  $T_2$ , representará  $T_2(z_r, z_s) = z_r \circ z_s$ . De forma general, una transformada de orden  $k$ , composición de  $z_{i1}, \dots, z_{ik}$  la vamos a denotar por:

$$T_k(z_{i1}, \dots, z_{ik}) = z_{i1} \circ z_{i2} \circ \dots \circ z_{ik}$$

De esta manera vamos a obtener:

$$\begin{aligned} x_{ij}(t) &= \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h) + \\ &+ \dots + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs \dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Esta expresión de las funciones  $x_{ij}$ , se calcula aplicando el método de regresión que nos permite obtener de manera aproximada los coeficientes para que la expresión resulte:

$$\begin{aligned}
 x_{ij}(t) = & \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h) + \\
 & + \dots + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) + \dots + b
 \end{aligned} \tag{15}$$

Supondremos  $m$  coeficientes. Sumando respecto al número de puntos de la muestra, obtenemos :

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{\lambda=1}^{np} [x_{ij}(t_\lambda) - \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) - \dots - \\
 & - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) - \dots - b]^2
 \end{aligned} \tag{16}$$

Suma que deberá ser mínima, por lo que las derivadas parciales deben ser 0.

La derivada respecto de  $b$  es :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial b} = & 2 \sum_{\lambda=1}^{np} [x_{ij}(t_\lambda) - \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) - \dots - \\
 & - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) - \dots - b](-1)
 \end{aligned} \tag{17}$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda=1}^{np} x_{ij}(t_\lambda) - \sum_{\lambda=1}^{np} [\sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) - \dots - \\
 - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) - \dots - np \cdot b] = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

siendo  $np$  el número de puntos. Tomando medias :

$$\begin{aligned} \overline{x_{ij}(t)} = & \sum_{r=1}^n c_{1r} \overline{T_1(z_r)} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} \overline{T_2(z_r, z_s)} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} \overline{T_3(z_r, z_s, z_h)} + \\ & + \dots + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} \overline{T_p(z_r, z_s, \dots, z_u)} + \dots + b \end{aligned} \quad (19)$$

Ello nos indica que el modelo pasa por el punto medio.

Al tener  $m$  coeficientes y ser  $b$  un parámetro, habrá  $m+1$  parámetros determinados por  $m+1$  ecuaciones lineales. Se tomará, pues, su valor mínimo.

El coeficiente de correlación múltiple de cada ecuación de variable de flujo es :  $Rx_{ij}(t) = \pm(1 - np.S^2 x_{ij}(t))^{1/2}$  (20)

siendo  $np$  el número de puntos y  $S^2 x(t)$  la varianza de  $x(t)$ .

Si suponemos todas las variables centradas en la media,  $b=0$ . Por otra parte, para una variable "x", representaremos su centrada por "x'".

Así y al igual que para un modelo simple, la ecuación a determinar es :

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r)' + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s)' + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h)' + \\ & + \dots + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u)' + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Es decir :

$$\begin{aligned} c_{11} T_1(z_1)' = & - \sum_{r=1}^n c_{1r} \overline{T_1(z_r)} - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} \overline{T_2(z_r, z_s)} - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} \overline{T_3(z_r, z_s, z_h)} - \\ & - \dots - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} \overline{T_p(z_r, z_s, \dots, z_u)} \end{aligned} \quad (22)$$



Despejando  $c_{11}$  y denotando los coeficientes de la misma forma, la expresión quedará como :

$$T_1(z_1)' = \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r)' + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s)' + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h)' + \dots + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u)' \tag{23}$$

Habrán  $m-1$  parámetros que serán determinados por  $m-1$  ecuaciones derivadas parciales de :

$$S = \sum_t [T_1(z_1)' - \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r)' - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s)' - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h)' - \dots - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u)']^2 \tag{24}$$

Igualando a 0 las derivadas parciales :

$$\frac{\partial S}{\partial c_{12}} = -2 \sum_t [T_1(z_1)' T_1(z_2)' - c_{12} T_1(z_2)' - c_{13} T_1(z_3)' T_1(z_2)' - \dots - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, \dots, z_u)' T_1(z_2)'] = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_{13}} = -2 \sum_t [T_1(z_1)' T_1(z_3)' - c_{12} T_1(z_2)' - c_{13} T_1(z_3)' T_1(z_3)' - \dots - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, \dots, z_u)' T_1(z_3)'] = 0$$



(25)

Denotando las varianzas como :

$$\sum_t T_1(z_1)' T_1(z_2)' = V_{12}^{11}$$

$$\sum_t T_1(z_2)' T_1(z_2)' = V_{22}^{11} \quad (26)$$

.....

Se obtiene que :

$$V_{12}^{11} = c_{12} V_{22}^{11} + c_{13} V_{32}^{11} + \dots + c_{prs \dots u} V_{rs \dots u2}^{p1}$$

$$V_{13}^{11} = c_{12} V_{23}^{11} + c_{13} V_{33}^{11} + \dots + c_{prs \dots u} V_{rs \dots u3}^{p1} \quad (27)$$

.....

Si el determinante del sistema :

$$\begin{vmatrix} V_{22}^{11} & V_{32}^{11} & \dots \\ V_{23}^{11} & V_{33}^{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

tendremos un sistema de Cramer que admite una solución y solo una , pudiéndose calcular mediante un cociente de determinantes.

Matricialmente hemos obtenido

$$A C = B \quad (28)$$

Al ser la matriz de una aplicación lineal  $R^n \longrightarrow R^n$ , entonces es posible considerar la inversa de la matriz  $A^{-1}$ , de donde :

$$A^{-1} A C = A^{-1} B \quad (29)$$

$$C = A^{-1} B \quad (30)$$

Pudiendo resolver el sistema calculando la inversa  $A^{-1}$

Sea  $V$  la matriz completa de varianzas y covarianzas de  $n$  filas y  $n$  columnas :

$$V = \begin{bmatrix} V_{11}^{11} & V_{12}^{11} & \dots & V_{1n}^{11} \\ V_{21}^{11} & V_{22}^{11} & \dots & V_{2n}^{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1}^{11} & V_{n2}^{11} & \dots & V_{nn}^{11} \end{bmatrix} \quad (31)$$

La matriz es simétrica ya que  $V_{ij} = V_{ji}$ . La matriz  $A$  es un menor de la matriz  $V$  y el determinante definido anteriormente es el determinante de este menor obtenido suprimiendo la primera fila y la primera columna.

Definimos el determinante  $D_{1\beta}$  como :

$$D_{1\beta} = (-1)^{\beta-2} \begin{vmatrix} V_{12}^{11} & \dots & V_{n2}^{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{1n}^{11} & \dots & V_{nn}^{11} \end{vmatrix} \quad (32)$$

Obtenido permutando la columna  $\begin{vmatrix} V_{12}^{11} \\ \dots \\ V_{1n}^{11} \end{vmatrix}$ ,  $\beta-2$  veces para que ocupe

la primera columna.

El valor de  $(-1)^{\beta-2}$  indicará el signo del determinante, debido a que este cambia de signo cada vez que se permutan dos columnas.

El determinante de  $D_{1\beta}$  se deduce a partir del determinante de  $V$  suprimiendo la primera fila y la columna de rango  $\beta$ . Por consiguiente será el menor  $V_{1\beta}$  dividido por  $(-1)^{1+\beta}$ , por lo tanto tendremos :

$$D_{1\beta} = \left[ \frac{(-1)^{\beta-2}}{(-1)^{1+\beta}} \right] V_{1\beta} = -V_{1\beta} \quad (33)$$

Los coeficientes serán por lo tanto determinados por medio de las fórmulas :

$$c_{\beta} = -\frac{V_{1\beta}}{V_{11}}$$

$$c_1 = \left(\frac{-1}{V_{11}}\right) \sum V_{1\beta} c_{\beta}$$

( 34 ) y ( 35 )

Los coeficientes  $c_{\beta}$  son coeficientes de regresión parcial y se expresarán simétricamente en función de las varianzas y las covarianzas o de los coeficientes de correlación total entre las transformadas de las variables, tomadas dos a dos.

Por consiguiente, la ecuación de la variable de estado se transformará en :

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{h=1}^n c_{3rsh} T_3(z_r, z_s, z_h) +$$

$$+ \dots + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) + \dots$$

(36)

Integramos por el método de Euler ( ; Caselles & Usó (28) en 1991 ) :

$$y_j(t+1) = y_j(t) + \delta \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n c_{1r} T_1(z_r) + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{2rs} T_2(z_r, z_s) + \right.$$

$$\left. + \dots + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \dots \sum_{u=1}^n c_{prs\dots u} T_p(z_r, z_s, \dots, z_u) + \dots \right]$$

(37)

Y de forma mas condensada :

$$y_j(t+1) = y_j(t) + \delta t \left[ \sum_{i=1}^n \theta_{ij}(t) \right]$$

(38)

Si el método presentara incertidumbre, al integrar por el método de Euler, tendremos :

$$y_j(t+1) = y_j(t) + \delta t \left[ \sum_{i=1}^n F_{ij}(t) \right] \quad (39)$$

siendo  $F_{ij}$  un número aleatorio normalmente distribuido con media  $\theta_{ij}$  y desviación típica  $S_{ij}$  siendo :

$$S_{ij} = S_{y_{12}\dots} [1 / np + w_i \circ v^{-1} \circ w_i^*]^{1/2} \quad (40)$$

siendo  $w_i$  y  $w_i^*$  las matrices fila y columna respectivamente de diferencias respecto del promedio de las transformadas de  $z_i(t)$ , np el número de puntos respectivamente,  $v^{-1}$  la matriz inversa de la matriz de covarianza  $v$  y  $S_{y_{12}\dots}$  definido como :

$$S_{y_{12}\dots} = [\sum d^2 / (np - m)]^{1/2} \quad (41)$$

m es el número de variables y  $\sum d^2 = \sum (y - y')^2$ ,

donde  $y$  es la variable dependiente e  $y'$  el valor de dicha variable obtenida por la regresión.

## 4.5 MODELO TEORICO PARTICULAR

Vamos a considerar un caso particular basado en unas pocas funciones transformadas debido a las restricciones impuestas por el programa REGRESSUS ( Caselles & Usó (27) en 1990 ), que genera funciones bien ajustadas, a un conjunto de puntos de un campo de datos. Dichas funciones transformadas son :  $x_i$ ,  $x_j$ ,  $1/x$ ,  $\exp(0,1 x)$ ,  $\exp(-0,1 x)$ ,  $\log(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\text{atan}(x)$ ,  $\text{sqr}(x)$ .

Vamos a ajustar a los datos reales de  $x_{ij}$  una función real tal como :

$$\phi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n z_k(t) \circ z_l(t) \circ d_{ikl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \tau_k(z_l(t)) \circ c_{ikl}$$

siendo  $\tau_k$  las funciones transformadas incluidas en el programa REGRESSUS

$$\phi_{ij}(t) = \beta_i(t) + \Gamma_i(t) \quad (43)$$

Las funciones  $\beta_i$  y  $\Gamma_i$  expresadas en forma matricial :

$$\beta_i(t) = (z_1, z_2, \dots, z_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z_i(t) \circ D_i \circ z_i^t(t) \quad (44)$$

siendo  $z_i^t(t)$  la matriz traspuesta de  $z_i(t)$  y  $D_i$  una matriz inferior triangular con coeficientes de dimensión  $n \times n$ .

$$\Gamma_i(t) = E_i \circ \Lambda(z_i(t)) \quad (45)$$

siendo  $E_i$  un vector de coeficientes de dimensión  $r \times s$  y  $\Lambda$  un operador vectorial de transformación que incluye las funciones transformadas anteriormente descritas. Por lo tanto la ecuación (43) se transforma en :

$$\phi_{ij}(t) = z_i(t) \circ D_i \circ z_i(t) + E_i \circ \Lambda(z_i(t)) \quad (46)$$

La ecuación (13) se transformará en :

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^m (\phi_{ij}) \quad (47)$$

Como cualquier modelo teórico su validez sería relativa si no fuera confirmado por su aplicación práctica. Dicho modelo teórico ha sido utilizado con resultados positivos en un caso práctico : el modelo MARIOLA ( Usó, 1991 : Usó et al, 1994 ). La limitación de los procesos de calculo no ha permitido ir mas allá que las restricciones impuestas por el propio REGRESSUS con un numero restringido de funciones transformadas de una sola variable. Abierto queda el camino y dependiendo del avance informático, de ampliar los modelos prácticos al aumentar el número de transformadas y estas sobre varias variables. Otro problema, de índole diferente al matemático es buscar un sentido biológico o ecológico a las ecuaciones de flujo, que pueden ser



verdaderamente complejas, sentido que eliminaría la sensación de estar utilizando un sofisticado artificio de cálculo, eficaz, pero lejano de la explicación que requieren los fenómenos estudiados.

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

**5**

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

# **MODELO DE REPRODUCCION FLORAL**





## CAPITULO 5 :

En este capítulo consideramos un ejemplo concreto de ecosistema y aplicamos el Modelo Teórico desarrollado en el capítulo 4.

Planteamos un modelo poblacional de desarrollo reproductivo de bosque mediterráneo para el caso de *Cistus Albidus* L. En este caso son consideradas tres ecuaciones de estado de forma hipotética.

Para el estudio de estas ecuaciones de estado es necesario conocer las ecuaciones denominadas de flujo. Estas ecuaciones son calculadas mediante un programa aplicando las técnicas consideradas en el capítulo 4. Para ello hemos partido del programa Regresus, ya probado con anterioridad, construyendo un programa que permite obtener expresiones de dichas ecuaciones. Los datos iniciales de los que se ha partido para la obtención del modelo es de cinco plantas analizadas durante un periodo de 18 semanas.

# CAPITULO 5 : MODELO DE REPRODUCCION FLORAL

## 5.1 ANTECEDENTES

No pretendemos aquí hacer un exhaustivo estudio de todos los modelos ecológicos que se han realizado desde la década de los años 70 hasta nuestras fechas. Solamente haremos una reseña de algunos modelos que hemos considerado representativos, así como un breve estudio de cada uno de ellos.

De este estudio sacaremos, entre otras, la conclusión de que no existe en la bibliografía, demasiados modelos matemáticos, ni siquiera en estado hipotético, de un ecosistema terrestre mediterráneo, contemplado de una manera global.

Precisamos que el objetivo de la modelización ecológica es, o bien el conocimiento de ciertos principios fundamentales o la elección de la mejor opción de gestión, según el objetivo del modelizador.

Una clasificación global de modelos, la cual adoptamos, es la establecida por Sokal (1974). Von Gadow y Van Hensbergen (1987) presentan una clasificación que es la restricción de la de Sokal a los modelos ecológicos, mas concretamente a los modelos forestales. Los modelos, según estos autores, se clasifican en :

1. Modelos de regresión. Modelos estáticos basados en el análisis de regresión simple o múltiple, lineal o no.

2. Modelos matemáticos de sistemas cerrados. Los autores suponen que el Mundo Real es un sistema “abierto”, pero se asume que ciertos problemas o aspectos relevantes están limitados (sistemas “cerrados”).

Estos modelos a su vez se clasifican en :

- a. Modelos de decisión, utilizados para la optimización de resultados en una situación compleja.
- b. Modelos de predicción, utilizados para prever un suceso o un conjunto de sucesos.

Modelos sencillos no dinámicos, basados en la estadística, se conocen ya desde hace años. Una revisión general de modelos es la realizada por Daget (37) en 1976. En ella puede observarse que generalmente se utilizan procedimientos basados en el análisis de regresión simple y/o múltiple o bien modelos de distribución de abundancias, tales como los de Mac Arthur, Motomura o Preston.

El modelo presentado por Díaz Pineda y González Bernaldez (42) en 1975, puede ser una muestra de este tipo de modelos estáticos basados en procedimientos de regresión múltiple. Se basa en un ecosistema típico de tomillar.

Los modelos dinámicos basados en los métodos de Forrester (41) en 1961, ( “dinámica de sistemas “ ), empiezan a ser utilizados a finales de la década de los 60, principios de los 70. Como ejemplos interesantes tenemos :

El de Innis (64) en 1972, que introduce el concepto de “sistema total “, que se define como “ No totalmente inclusivo, pero totalmente circunvalante “. Es decir, incluye consideraciones abióticas, de producción, consumo, descomposición y nutrición.

El proyecto U. S. IBP Grassland Biome study intenta modelizar por vía dinámica de sistemas, un sistema total de ecosistema de pradera. Dentro de este proyecto se desarrollan varios modelos: PWNEE, LINEAR, y ELM.

Uno de los primeros intentos de desarrollo de un modelo ecológico de pradera, se inicio en 1969, por Bledsoe et al (15) en 1971, en el llamado PWNEE, modelo no lineal, no paramétrico, de ecuaciones diferenciales, utilizando el FORTRAN como lenguaje informático. El modelo fue validado parcialmente, pero era de difícil manejo sobre todo por personal no experto en informática.

El modelo LINEAR desarrollado por Patten (123) en 1972, se plantea el recalcular el PWNEE en términos de matemática lineal. Este modelo tiene 40 ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales con coeficientes variando con el tiempo. Aunque las ecuaciones sean lineales, sin embargo el modelo no lo era. El ajuste de la validación fue superior al modelo anterior, pero con los mismos defectos en su utilización.

El modelo ELM ( Anway et al.(5) en 1972, Innis (64) en 1972 ) es un modelo de sistema total con objetivos especificados. Deriva los dos anteriores y es mas extensivo en sus planteamientos. En este modelo, para evitar problemas de lenguaje informático en su utilización ( los anteriores están escritos en FORTRAN ) se utiliza un lenguaje especialmente concebido, el SIMCOMP, de clara comunicación entre programadores y usuarios ( biólogos, físicos, etc ). El modelo está parametrizado, es no lineal y utiliza ecuaciones de diferencias finitas, a diferencia de los anteriores que son ecuaciones diferenciales. Por su interés, nos adentraremos en algunas de las características de este modelo :

1. Es un sistema total según la definición anteriormente explicada.
2. La unidad principal es la biomasa, estudiándose su dinámica como flujo de carbono en todo el sistema.
3. Es representativo, ya que predice el comportamiento del ecosistema frente a determinadas perturbaciones.
4. Relativamente sencillo en la especificación de las interacciones.

Sus submodelos son los siguientes :

- a. Submodelo abiótico, con los correspondientes ciclos de agua y de flujo térmico.
- b. Submodelo productivo, con crecimiento, expansión de biomasa, floración, fructificación y dispersión de semillas en diferentes especies vegetales.
- c. Submodelo de consumo, con ciclos de metabolismo y dieta.
- d. Submodelo de descomposición, en el cual se tiene en cuenta poblaciones de descomponedores.
- e. Submodelo edafológico, con ciclos de nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K).

El modelo ELM tiene las principales características de la metodología de Forrester (1961) con consultas a expertos ( físicos, químicos, biólogos, etc.) y con el correspondiente análisis de sensibilidad. Los autores ( Innis (67) en 1975 ) señalan que muy pocos parámetros biológicos son conocidos suficientemente, y denotan que la representación matemática de los fenómenos biológicos no es la apropiada o que los parámetros en los sistemas biológicos son extremadamente sensibles. Asimismo, los autores reconocen no haber podido determinar la estructura del modelo a partir de los objetivos del

mismo, condición ya definida por Forrester (1961), Innis (1973) y Dale (1970) que diferentes modelos se estructuran según objetivos diferentes.

En 1978, el ecólogo catalán R Margalef realiza un análisis lúcido de los modelos ecológicos insistiendo en sus fallas y en sus limitaciones. Critica la mera relación cuantitativa entre los diversos elementos recordándonos las restricciones físicas de limitación de un espacio y las relaciones dentro de un mismo espacio. Es decir, el sistema de ecuaciones que definen el ecosistema, ignora el espacio. Margalef propone comenzar con derivadas parciales con respecto al tiempo (t)- como se hace habitualmente- y respecto al espacio, en cualquiera de sus dimensiones. Pero esta idea presenta considerables dificultades de índole matemática, debido a que se tendrían que resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, necesarias en modelos con incertidumbre de datos.

Tanto Margalef como T. H. Odum (1983) proponen sustituir los clásicos modelos poblacionales por modelos de flujo termodinámico, utilizando la entropía como variable fundamental. La crítica que se puede hacer a esta proposición no es a nivel teórico, pues es interesante y teóricamente irreprochable, sino que el cálculo de la entropía puede ser como mínimo farragoso y/o impracticable.

Es interesante el modelo de Caswell (33) en 1982, donde se establece un isomorfismo entre las operaciones derivadas del grafo del ciclo de la vida para varias especies y las correspondientes operaciones matriciales en el modelo. En este modelo se utiliza la técnica de análisis de z-transformadas como aplicación a sistemas discretos lineales. El modelo es excesivamente teórico y no puede resolver el problema de

modelizar mas de 3 especies. Por otra parte no tiene en cuenta factores abióticos.

Un modelo poblacional con parámetros de fecundidad, mortalidad y coeficientes de interacción con dependencia de la edad fue desarrollado por Busenber y Iannelli (22) en 1975. El modelo se utiliza para una sola especie y para varias especies interaccionadas según la clásica concepción de depredador-presa, basado en las conocidas ecuaciones de Lotka-Volterra y en las ecuaciones de Mckendrick-Von Foerster para una población dependiente de la edad. El modelo es extraordinariamente teórico, como la mayoría de los de esta categoría, teniendo el inconveniente de no permitir efectuar predicciones sobre sistemas reales y no tener en cuenta las interacciones con el medio ambiente, ya que las especies se aíslan en un espacio abstracto.

Bertiller. (13) en 1984 desarrolla un modelo dinámico de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, que sigue la evolución de la biomasa de 3 especies herbáceas dominantes en la Patagonia, Argentina, y sus relaciones con factores medio-ambientales. Los muestreos en el campo permiten la validación de las variables de estado en intervalos mensuales. Los coeficientes dependientes del tiempo, se calculan por iteración hasta que se obtiene una buena aproximación con los datos experimentales. Dichos coeficientes determinísticos se reemplazan por ecuaciones empíricas obtenidas a partir de datos experimentales. Dichas ecuaciones se han obtenido por técnicas de regresión múltiple lineal de las variables, sin utilización de funciones transformadas. Los coeficientes de regresión múltiple oscilan entre 0.565 y 0.880. El proceso es equivalente al modelo teórico propuesto en esta memoria, mediante la utilización de funciones

transformadas, ha conseguido aumentar la significación de las ecuaciones empíricas obtenidas, variando los coeficientes de correlación entre 0.85 y 0.99. También dicho modelo no tiene en cuenta las interacciones con la fauna ni los procesos de descomposición, ni los ciclos edafológicos.

Un modelo de proximidad en procesos dinámicos de poblaciones vegetales ha sido propuesto por Pacala y Silander (118) en 1985.

Los modelos ecológicos se dividen en dos clases :

- modelos analíticos que en el modelo propuesto por dichos autores tiene validez cuando la dispersión de las semillas es amplia.
- modelos de simulación que son mas generales.

Los modelos están integrados por submodelos de supervivencia, fecundidad y dispersión de plantas individuales. Los parámetros son experimentales y las ecuaciones se han obtenido a partir de datos experimentales recogidos a lo largo de un año. En el modelo propuesto, se considera el terreno como un plano infinito en el cual las semillas crecen. El patrón espacial de esta inseminación dependerá del número y de la distribución espacial de los padres, del número de semillas producido por cada padre y de la naturaleza de la dispersión de las semillas. Se supone que el patrón de inseminación es un proceso de Poisson. El modelo presenta ideas interesantes pero tiene como inconvenientes, el referirse a una sola especie y el ser descriptivo de la situación dinámica de monocultivos de plantas anuales. En ecosistemas naturales el proceso se complica, tanto por la proximidad de otras especies, como en la anisotropía del espacio, como por las distintas naturalezas de los fenómenos dispersores. A este respecto Uso, Caselles y Nebot (26) en 1990, presentan un modelo teórico de polinización,



floración, fructificación y dispersión en diferentes especies que tienen en cuenta estos factores dispersantes, aunque no considera proximidades.

El análisis de escenarios ha sido aplicado en el caso de la gestión y planificación de espacios naturales ( Saris y Gordijn, 1986) realizándose estudios de optimización en función de objetivos de gestión a largo plazo.

Un modelo dinámico de ecuaciones diferenciales es el desarrollado para simular la evolución del bosque de Prostejov (Checoslovaquia) por Vyslouzil (165) en 1986. El modelo matemático evalúa todos los efectos de las actividades forestales y analiza especialmente :

1. actividades de silvicultura.
2. actividades de explotación.
3. otras actividades forestales.

Vyslouzil utiliza el criterio y método de una evaluación objetiva de la función recreativa de un bosque productivo. Dicho método, consiste en implicar solo el medio ambiente forestal desde el punto de vista de la actividad forestal y desde el punto de vista del visitante, el cual paseará a través de una ruta recreativa. La dinámica de rutas recreativas en un bosque productivo está descrita por medio de ecuaciones diferenciales. El modelo no está validado o no se especifica su validación.

El modelo de Brzeciecki (17) en 1987, aplicado a un bosque del este de Polonia, se basa en sistemas de ecuaciones de regresión, con lo cual se analizan las relaciones existentes entre la vegetación y el medio ambiente, así como las interacciones entre especies.

El problema de las relaciones existentes entre las especies vegetales, las variables ecológicas, e interespecíficas se intenta resolver

adoptando un modelo de ecuaciones simultáneas (SEM), el uso del cual había sido limitado a la econometría (Theil, 1971). La construcción del modelo empieza por determinar dos conjuntos de variables :

$$P(h) = y_1, y_2, \dots, y_h$$

$$Q(k) = x_1, x_2, \dots, x_k$$

siendo  $P(h)$  el conjunto de variables dependientes y  $Q(k)$  el de variables independientes predeterminadas. Las especies estudiadas han sido 20 y 17 las variables externas. El SEM al ser una técnica de regresión, toma en consideración de una manera inequívoca, la ordenación y la valoración cuantitativa de la importancia ecológica de una variable particular. El modelo está validado y explica bien la evolución del ecosistema forestal. La utilización de técnicas econométricas en modelos ecológicos ya fue propuesto por Caselles y Uso (1988) para un modelo de evolución de biomasa en el *Pinus halepensis*, pero planteando la posibilidad de utilizar ecuaciones de regresión múltiple no lineal.

Se han desarrollado asimismo algunos sistemas expertos para la toma de decisiones en la gestión de ecosistemas. Citaremos el BURN (Starfield y Bleloch (149) en 1983 ; Ffoliott et al, 1986 ) que simula el fuego forestal en zona de bosque, bien sea dirigido o aleatorio. El PREDICT ( Schomoldt y Martin (144) en 1986) que simula la extensión de plagas en el pinus resinosa, Ait. El RCS ( Danilewitz et al (39) en 1988), escrito en PROLOG, modelo seminumérico para la conservación de ecosistemas fluviales.

El modelo BURN fue escrito en FORTRAN 77. Su uso es sencillo. Se determina la acción del fuego en un bosque de coníferas, con sus implicaciones de supervivencia de ejemplares y colonización posterior por medio de expansión de semillas. En relación a otros

modelos, relaciona la existencia del bosque con la población de aves y el impacto producido por la acción del fuego sobre dicha población. También estudia la sustitución de especies de aves por otras después de la acción de un incendio. Los submodelos hidrológicos y de evapotranspiración, calculan las variaciones en el suelo y en la humedad ambiental en situación pre y postincendio. El submodelo económico, calcula el gasto producido por la acción del fuego sobre el bosque en términos monetarios. La referencia que tenemos no indica ni el diagrama causal, ni los tipos de ecuaciones que intervienen en el proceso.

Observamos la falta de información respecto a los ciclos de nutrientes que son totalmente alterados por la acción del incendio.

El modelo PREDICT no es un modelo numérico. Su misión es predecir de una manera conceptual el efecto de las plagas sobre la masa forestal. Los lenguajes en que está escrito son el PROLOG y el LISP. El usuario contesta una serie de preguntas definidas y el programa desarrolla las respuestas adecuadas y las posibles soluciones.

De las mismas características que el anterior es el sistema experto RCS. Se puede hacer la crítica común a estos dos modelos, su falta de respuesta numérica. Son interesantes en cuanto submodelos de modelos mas extensos en donde existiese solución cuantitativa y gráfica.

El BARCELONAGRAM ( Giro et al (51) en 1986) es un modelo de simulación basado en el método de Monte Carlo. Para los autores, el ecosistema se caracteriza por la evolución temporal de las siguientes propiedades individuales : masa, edad y situación espacial. Se sustituyen los modelos clásicos de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales por el proceso de simulación de Monte Carlo, procediendo a convertir las constantes que aparecen en un modelo determinístico en términos de

comportamiento aleatorio. El proceso es interesante en estudios de la evolución de la biomasa vegetal, en donde una simulación temporal de la clase que aquí se comenta puede ser, según los autores, un sustituto de observaciones de difícil accesibilidad.

La simulación Monte Carlo, jugaría el papel que las observaciones experimentales, pero tiene, reconocido por los mismos autores del modelo poca credibilidad en todo lo relacionado con el comportamiento natural. También, siendo la experimentación muy compleja y difícil, las hipótesis son muy difíciles de comprobar, por lo que no ha habido validación. El programa lenguaje es el FORTRAN 77.

El modelo FORENZ ( Develice (40) en 1988) es un modelo dinámico de evolución forestal, basado en los estudios hechos en el bosque de Fiorland ( Nueva Zelanda ). Este modelo sigue la trayectoria del nacimiento, crecimiento y muerte de árboles individuales. El modelo no es de ecuaciones diferenciales y se basa en ecuaciones cuyas variables son la edad máxima, la altura y el diámetro de los árboles. Un modelo de las características del presentado por Develice, al no interaccionar con variables exógenas se queda en un estado primitivo en la evolución de los modelos ecológicos.

Mucho mas desarrollado que los anteriores es el modelo forestal presentado por Rennolls y Blackwell (1988). Dicho modelo de ecuaciones diferenciales finitas, entra en la categoría de las definidas como “ modelos totales “. Las ecuaciones de flujo son ecuaciones empíricas no lineales de regresión. Contempla 3 submodelos :

1. Submodelos de crecimiento :

- recursos : nutrientes, agua, luz
- estructura de situación : competición.



Universitat d'Alacant  
 Universidad de Alicante

- anatomía : copa, tallo, raíces.
  - defoliación
2. Submodelo de relación con el crecimiento :
- crecimiento.
  - mortalidad
3. Submodelo de acción para la gestión :
- tala y poda
  - fertilización

En la filosofía del modelo de Rennolls y Blackwell, la evolución global de la biomasa es asimismo la suma de las evoluciones parciales de las biomásas individuales. Este modelo es individual, es decir, estudia ejemplar a ejemplar las especies, sin embargo, omite deliberadamente las acciones de la fauna sobre la vegetación, acciones tales como la defoliación producida por los insectos, o la producida por herbívoros superiores. También omite la biología reproductiva ( floración, fructificación, etc), con lo cual introduce un mayor sesgo en la estimación de los parámetros en el submodelo de crecimiento. Por contra, detalla extraordinariamente lo relacionado con la competencia.

Son interesantes los modelos propuestos por Schäfer y colaboradores (1988a, 1988b, 1989a, 1989b, 1990 ). El proceso seguido es el mismo que en el caso anterior, teniendo en cuenta sin embargo, procesos de fructificación y dispersión de semillas.

En el modelo de simulación de crecimiento de la biomasa, y de dinámica del carbono y del nitrógeno ( Schäfer 1989b) TREEDYN, las variables de estado utilizadas son :

- 1) biomasa defoliada



Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

- 2) biomasa radical
- 3) biomasa leñosa aérea
- 4) biomasa frutal
- 5) biomasa asimilada
- 6) carbono en deshechos forestales
- 7) carbono en materia orgánica del suelo
- 8) nitrógeno en deshechos forestales
- 9) nitrógeno en materia orgánica del suelo
- 10) nitrógeno disponible por el vegetal en el suelo

Los submodelos del modelo TREEDYN son :

1. Climático :
  - radiación
  - distribución de temperatura
2. Fotoproducción de las hojas
3. Fotoproducción de la copa
4. Respiración
5. Respiración de la biomasa leñosa
6. Defoliación y renovación de raíces finas
7. Demanda de nitrógeno
8. Descomposición y mineralización del nitrógeno.

En el modelo se tiene en cuenta la interacción con la fauna, pues introduce dos variables : DIN o consumo de hojas ( biomasa verde ) por insectos y TINS o tiempo durante el cual, el insecto consume. Sin embargo, estas variables son de entrada, es decir, no existe dependencia con factores externos de tipo climático. Tampoco el modelo TREEDYN habla de interacciones con fauna superior ( herbívoros tales como

roedores ), a pesar de su importancia grande en el consumo de la biomasa verde de determinadas especies vegetales.

El modelo SPRUCOM ( Kriegel et al.(82) en 1990 ) estudia el desarrollo de la picea ( picea abies L ). Es un modelo no lineal de ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo, referidas a un individuo de la especie. Las interacciones del individuo con sus vecinos también son considerados en el modelo.

El modelo SPRUCOM considera 3 procesos o subsistemas :

1. fotosíntesis
2. respiración
3. pérdidas o incrementos de biomasa

Las variables medioambientales que considera son :

1. temperatura del aire
2. radiación solar por encima de la copa
3. número de horas de luz diarias

## **5.2 MODELOS DE ECOSISTEMAS**

### **MEDITERRANEOS TERRESTRES**

Dos son los modelos mas importantes de simulación de ecosistemas mediterráneos : el modelo CAPS (Canopy Process Simulator) y el modelo MEDECS ( Mediterranean Ecosystem Simulator ), desarrollados para calcular la utilización de recursos en Echo Valley en el sur de California y en Fundo Santa Laura en Chile central ( Jacobson et al, 1981 ). Los dos modelos han sido escritos en lenguaje FORTRAN y ambos comportan la utilización de ecuaciones diferenciales

con respecto al tiempo. Vamos a comentar brevemente ambos modelos por su interés.

### **5.2.1 EL MODELO CAPS**

Dicho modelo simula los comportamientos de los procesos físicos y fisiológicos en la copa del vegetal bajo condiciones uniformes. Dicho modelo tiene diferentes submodelos que simulan diferentes procesos : transferencia de radiación, aire, superficie del suelo, temperaturas del suelo, humedad, transpiración, respiración y fotosíntesis. La unidad temporal son los 5 minutos en periodos de 24 horas. Dicho modelo se utiliza para predecir las interacciones entre el medio ambiente y la copa de la planta en el nivel individual de las hojas. Asimismo, el CAPS modeliza los balances de energía, agua y dióxido de carbono de la copa del vegetal.

Se definieron como variables de entrada, en periodos de 24 horas, las condiciones climáticas que existen alrededor de la copa del vegetal, tales como la radiación solar incidente y difusa, la radiación infrarroja, la temperatura y la humedad del aire, la velocidad del viento. La copa fue asimismo dividida en estratos de 25 cm cada uno. Las propiedades de cada estrato se determinarán por medio de los índices de área de las hojas, tallos y materia muerta en cada estrato. Los índices de área se calculan según la siguiente fórmula :

Índice de área = ( m<sup>2</sup> del área de la hoja ) / ( m<sup>2</sup> de superficie del terreno )

Las hojas y los tallos de cada estrato se definieron también en función de sus inclinaciones, diámetro y funciones tabulares para las relaciones con el agua y la fotosíntesis.



La hipótesis inicial del modelo nos indica que las radiaciones solar e infrarroja interaccionan con la estructura de la copa y con el microclima existente en ella, para producir fenómenos de flujo térmico. La temperatura y humedad del aire y la velocidad del viento, por encima de la copa, y la temperatura y humedad en la superficie del suelo, interaccionan a su vez con la estructura de la copa y con la radiación para producir flujos térmicos en el aire y en las hojas, y flujos de humedad y de viento, midiéndose como valor importante su velocidad. Los flujos de energía en cada nivel de la copa del vegetal se representan por medio de ecuaciones de balance tanto para las hojas como para los tallos.

Sin embargo, el modelo no pudo ser validado en su totalidad, debido a que la forma de arbusto elegido y la topografía del terreno impedía la medición de los flujos de dióxido de carbono a través de la copa del vegetal.

Sin embargo, la validación del submodelo de fotosíntesis por medio de experimentos de campo fue relativamente sencilla, ya que los flujos de vapor de agua y de dióxido de carbono a través de las hojas pueden ser medidos en cortos espacios de tiempo. El modelo CAPS sirvió como submodelo del modelo MEDECS que comentamos a continuación

## **5.2.2 EL MODELO MEDECS**

Dicho modelo simula los comportamientos de la vegetación respecto a la utilización de recursos como respuesta al medio que los rodea. La unidad temporal es de 24 horas en periodos de un año. Se utilizan la totalidad de submodelos del modelo CAPS, pero añadiendo submodelos de crecimiento y muerte de componentes aéreas y

subterráneas de la planta, descomposición, agua del suelo, ciclo de nitrógeno y su utilización por la planta. Las componentes del vegetal utilizadas en el modelo MEDECS fueron las hojas viejas y nuevas, los tallos viejos y nuevos, y las raíces conductoras y absorbentes. La unidad de superficie utilizada en el cálculo fue el metro cuadrado.

Dicho modelo, integra procesos ecofisiológicos que incluyen la utilización de la energía luminosa, del agua y del nitrógeno, con gran desagregación en detalles fisiológicos y morfológicos. El MEDECS predice comportamientos anuales y la utilización de la energía lumínica, el agua y el nitrógeno, también anual.

Los submodelos de crecimiento de la planta, descomposición de la materia orgánica del suelo, y de liberación de los nutrientes inorgánicos en el suelo, dotan de un significado a las relaciones que existen entre el crecimiento y la temperatura, la cantidad de agua en el vegetal y el almacenamiento de nitrógeno y carbohidratos. Además, también se relaciona indirectamente dicho crecimiento con la disponibilidad de agua en el suelo, la fotosíntesis, la respiración, y el ciclo de nutrientes en el suelo y en la planta.

El modelo simula los efectos causados en la planta por la frecuencia de las precipitaciones por medio de un proceso de retroalimentación entre la planta y los procesos anteriormente mencionados.

El modelo fue probado con 4 especies de arbustivas. El suelo se dividió en niveles de 20 cm cada uno hasta la profundidad de 1 metro. El MEDECS, al igual que el CAPS no tuvo la validación total, sin embargo, en aquellos submodelos en que hubo posibilidad de hacerlo, cumplió las previsiones.

Las ecuaciones en ambos modelos fueron diferenciales respecto al tiempo. Algunas de las ecuaciones de flujo fueron obtenidas por medio de regresiones lineales o polinómicas. En aquellos flujos en que había carencia de datos para confeccionar ecuaciones, se utilizó el recurso clásico de las tablas de valores. En aquellas tablas en las que solamente podían ser conocidos algunos puntos, los desconocidos se obtuvieron por medio de una interpolación o extrapolación de la gráfica obtenida.

Algunas de las tablas fueron extraídas de las ya existentes para especies de utilización agrícola semejantes a las que figuran en el modelo. Otras se hallaron por medio de experimentación en el campo y en el laboratorio.

Los modelos CAPS y MEDECS son modelos altamente desagregados, pues como hemos dicho, penetran en niveles de ecofisiología. Sin embargo, no contemplan la totalidad de las relaciones existentes en el ecosistema

En la próxima sección comentaremos brevemente el modelo MARIOLA, que es un modelo total en relación con las componentes primarias del ecosistema.

## **5.3 MARIOLA. MODELO DE ECOSISTEMA MEDITERRANEO TERRESTRE**

El modelo MARIOLA, (Uso (154) ), llamado así por haber tomado como base el ecosistema mediterráneo terrestre de montaña de la sierra de Mariola ( Alicante ), es una modelización del comportamiento y la evolución de la totalidad de un ecosistema típico de la zona mediterránea.

Dicho modelo tiene las siguientes características :

1. Es un modelo deductivo. Los sistemas relativamente grandes, ( muchas variables interrelacionadas ) solamente pueden ser tratados mediante modelos deductivos.
2. Es un modelo compartamental, pero no necesariamente lineal ni invariante por el tiempo.
3. Los flujos de entrada y salida de cada compartimento o nivel se calculan por métodos de regresión no lineal, a partir de variables externas o de los propios estados.
4. La fauna viene considerada indirectamente a través de procesos de defoliación o de destrucción de biomasa leñosa, distinguiéndose la doble acción de depredadores invertebrados y de mamíferos herbívoros.
5. La acción humana no aparece de forma explícita. ( En una segunda fase, podrían aparecer acciones directas antrópicas tales como podas, talas, fertilización, e incluso incendios ).
6. La unidad temporal para las medidas y la simulación es el mes. En el submodelo reproductivo, la unidad temporal es la semana.
7. La unidad espacial es de  $100 \text{ m}^2$ .
8. La magnitud básica es la biomasa, considerando como tal, el número de gramos de materia viva seca.
9. El modelo simula la evolución planta a planta de cada especie, y los procesos de descomposición y ciclos de nutrientes, en el espacio limitado por la copa de la planta, aproximadamente  $1 \text{ m}^2$ .
10. El modelo no tiene en cuenta, en su estado actual, problemas de competencia entre individuos de la misma especie y con individuos de otras especies.

11. La desagregación del modelo es intermedia, es decir, no está lo suficientemente desagregado para estudiar comportamientos en las escalas morfo y ecofisiológicas. No se tienen en cuenta procesos vitales tales como la fotosíntesis ni el ciclo del carbono.
12. Los procesos de descomposición se consideran de “ caja negra “ o sea no se tienen en cuenta la existencia de poblaciones de descomponedores, asimismo tampoco los procesos bioquímicos de degradación de celulosas y ligninas.
13. Los ciclos de nutrientes, así como los procesos de descomposición del humus se han referido al horizonte O del suelo. El modelo no contempla en su estado actual, la existencia de niveles edafológicos mas profundos, aunque nada impide ampliar el estrato a 25 o a 50 cm ; tal como se realiza en los modelos CAPS y MEDECS.
14. Las variables exógenas consideradas mas importantes son las climáticas, a saber : pluviometría, velocidad del viento, intensidad de precipitación y número de horas de sol para el submodelo reproductivo.

El modelo pretende simular el comportamiento de la evolución de la biomasa vegetal a corto, medio y largo plazo y se establece como objetivo observar dicha evolución en condiciones normales y en condiciones límites, para poder prever y consecuentemente intervenir con políticas adecuadas de protección y gestión.

El modelo MARIOLA se refiere casi exclusivamente al mundo vegetal, y ello por las siguientes razones :

- La vegetación o productores primarios, constituyen la base fundamental de cualquier ecosistema terrestre.

- Un modelo de simulación de fauna, constituye un problema en cuanto a la propia movilidad de las especies. También es cierto que la influencia de la fauna sobre la producción primaria es mínima, salvo en algunos hechos puntuales.

### **5.3.1 SUBMODELOS DEL MODELO MARIOLA**

El modelo MARIOLA consta de los siguientes submodelos :

1. Submodelo de crecimiento :
  - crecimiento
  - defoliación
  - destrucción de la biomasa
2. Submodelo de descomposición de la biomasa caída
3. Submodelo de ciclos de nutrientes limitantes :
  - ciclo de nitrógeno
  - ciclo del potasio
  - ciclo del fósforo
  - ciclo del magnesio
4. Submodelo reproductivo :
  - formación de gemas florísticas
  - floración
  - fructificación

## **5.4 MODELO POBLACIONAL DE DESARROLLO REPRODUCTIVO DE BOSQUE MEDITERRANEO : CASO DE CISTUS ALBIDUS L**

Este modelo intenta aproximarse a los dos fenómenos reproductivos de los vegetales superiores, la floración y la fructificación.

Como floración se define el proceso de desarrollo de las flores, desde el momento de la anthesis de las mas precoces hasta la marchitez de las mas tardías.

Por fructificación entendemos el proceso de formación del fruto a partir de la flor fecundada.

### **5.4.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO**

Las siguientes son las características mas relevantes del modelo propuesto :

- Es un modelo deductivo. Los sistemas relativamente grandes ( muchas variables interrelacionadas) solamente pueden ser tratados mediante modelos deductivos.
- Será un modelo compartamental, pero no necesariamente lineal ni invariante en el tiempo.
- Los flujos de entrada y salida de cada nivel , se calcularán por métodos de regresión no lineal, a partir de variables externas o de los propios estados.
- La acción animal es considerada de una manera global, mediante la destrucción de flores y frutos, polinización y dispersión de semillas.

- La unidad temporal de medida será la semana.
- Las variables exógenas consideradas mas importantes serán las climáticas, a saber : temperatura y humedad ambiental, velocidad del viento, intensidad de precipitación.

### **5.4.2 OBJETIVOS DE ESTUDIO**

Conocer la evolución de las flores, frutos y producción y dispersión de semillas referidas a la planta *Cistus Albidus* L. genérica, después de una alteración de las condiciones ambientales ( por ejemplo, después de un fuego, en orden a poder evaluar el tiempo de recuperación de su productividad y la probabilidad de extinción de la población, tomando en cuenta las frecuencias previsibles de fuego, o después de un programa de fertilización mineral.

### **5.4.3 IDENTIFICACION DE LOS ELEMENTOS**

La lista de elementos considerados en el modelo es :

#### **Elementos climáticos y exógenos**

SIMBOLO DESCRIPCION ( UNIDAD )

H = Humedad ambiental ( % )

T= Temperatura ambiental ( ° C )

PLU = Precipitación ( l )

NHS= Número de horas de sol ( horas/día )

VEVI = Velocidad del viento ( Km/h max. )

#### **Elementos referidos a la planta considerada**



SIMBOLO DESCRIPCION ( UNIDAD )

BT = Biomasa total de la planta ( g )

CRBT = Proporción de producción por crecimiento de la biomasa total (g)

NGEM = Número de germinaciones de la planta

CRGEM = Crecimiento de germinaciones de la planta

DGEM = Destrucción de germinaciones de la planta

TCRGEM = Tasa de crecimiento de germinaciones de la planta

TDGEM = Tasa de destrucción de germinaciones de la planta

NFLOR = Número de flores

CRFLOR = Crecimiento de flores de la planta

DFLOR = Destrucción de flores de la planta

TFLOR = Tasa de crecimiento de flores

TDFLOR = Tasa de destrucción de flores

NFRUT = Número de frutos

CRFRUT = Crecimiento de frutos

DFRUT = Destrucción de frutos

TFRUT = Tasa de crecimiento de frutos

TDFRUT = Tasa de destrucción de frutos

FRUTGER = Número de frutos germinados

TFRUTGER = Tasa de frutos germinados

#### **5.4.4 FORMA DE LAS DEPENDENCIAS**

#### **IDENTIFICADAS**

Las ecuaciones del modelo son :

#### **Ecuaciones de Estado**

$$\frac{dNGEM(t)}{dt} = CRGEM(t) - DGEM(t) - CRFLOR(t)$$

$$\frac{dNFLOR(t)}{dt} = CRFLOR(t) - DFLOR(t) - CRFRUT(t)$$

$$\frac{dNFRUT(t)}{dt} = CRFRUT(t) - DFRUT(t) - FRUTGER(t)$$

### Ecuaciones Auxiliares

$$CRGEM(t) = BT(t) \cdot NHS(t) \cdot TCRGEM(t)$$

$$DGEM(t) = NGEM(t) \cdot TDGEM(t)$$

$$CRFLOR(t) = NGEM(t) \cdot NHS(t) \cdot TFLOR(t)$$

$$DFLOR(t) = NFLOR(t) \cdot TDFLOR(t)$$

$$CRFRUT(t) = NFLOR(t) \cdot NHS(t) \cdot TFRUT(t)$$

$$DFRUT(t) = NFRUT(t) \cdot TDFRUT(t)$$

$$FRUTGER(t) = NFRUT(t) \cdot NHS(t) \cdot TFRUTGER(t)$$

### Ecuaciones de Flujo

$$TCRGEM(t) = f(T, H, PLU/100)$$

$$TDGEM(t) = f(T, H, PLU/100, VEVI)$$

$$TFLOR(t) = f(T, H, PLU/100)$$

$$TDFLOR(t) = f(T, H, PLU/100, VEVI)$$

$$TFRUT(t) = f(T, H, PLU/100)$$

$$TDFRUT(t) = f(T, H, PLU/100, VEVI)$$

$$TFRUTGER(t) = f(T, H, PLU/100, VEVI)$$

Las ecuaciones de flujo han sido obtenidas con el programa regresus (27), obteniendo los siguientes resultados:

$$\text{TCRGEM} = 1.818785 H^2 - 99.786650 \text{EXP}(0.1 H) + 19.618049 \text{COS}(T) + 65.538615$$

donde se ha obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.472620$ , con dos variables independientes, H, T, y tres funciones transformadas.

$$\text{TDGEM} = 0.025000 H (\text{PLU}/100) - 20.205205 \text{EXP}(0.1 \text{PLU}/100) + 20.205205$$

donde se ha obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.437048$ , con tres variables independientes H, PLU/100, VEVI, y tres funciones observadas. Observando de los resultados obtenidos, que la velocidad del viento (VEVI) no influye en la tasa de destrucción de germinaciones de la planta.

$$\text{TFLOR} = 0.625000 H (\text{PLU}/100) - 551.483253 \text{EXP}(0.1 \text{PLU}/100) + 551.358253$$

donde se ha obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.677512$ , con dos variables independientes H, PLU/100, y dos funciones transformadas.

$$\text{TDFLOR} = -0.561127 H (\text{PLU}/100) + 497.672253 \text{EXP}(0.1 \text{PLU}/100) - 0.210933 \text{COS}(T) + 0.195408 \text{COS}(VEVI) - 497.538200$$

donde hemos obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.686101$ , con cuatro variables independientes H, T, PLU/100, VEVI, y cuatro funciones transformadas.

Para la misma variable TDFLOR, pero en lugar de cuatro funciones transformadas, cinco funciones transformadas, obtenemos :

$$\begin{aligned} \text{TDFLOR} = & -0.094804 H - 455569336.182261 (1 / T) - \\ & 1343290632.764183 \text{COS} ( \text{PLU}/100 ) - 455638012.962029 \text{ARCTG} ( T ) \\ & - 617507599.994337 ( \text{PLU}/100 )^{1/2} + 2059004592.670460 \end{aligned}$$

donde hemos obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.905541$

$$\begin{aligned} \text{Para TFRUT} = & -1395.984981. \text{EXP} ( -0.1 T ) - 0.290402 \text{COS} ( T ) - \\ & 0.631100 \text{COS} ( H ) + 0.765191 \end{aligned}$$

donde se ha obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.349921$  con tres funciones transformadas

Para TDFRUT , suponemos que no hay ninguna destrucción de frutos, luego eliminamos esta ecuación.

$$\begin{aligned} \text{Para TFRUTGER} = & 0.000289 H^2 - 0.003281 T H + 0.000113 H \\ & ( \text{PLU}/100 ) + 0.006919 H \text{VEVI} + 1.797017 \end{aligned}$$

donde hemos obtenido un coeficiente de correlación múltiple  $r = 0.505060$  con cuatro funciones transformadas :

Sustituyendo las ecuaciones de flujo obtenidas y las ecuaciones auxiliares en las ecuaciones de estado se obtiene :

$$\frac{d\text{NGEM}(t)}{dt} = \text{CRGEM}(t) - \text{DGEM}(t) - \text{CRFLOR}(t) =$$

$$\begin{aligned}
 & (BT(t)).(NHS(t)). (TCRGEM(t)) - (NGEM(t)). ( TDGEM(t)) - \\
 & ( NGEM(t)). (NHS(t)). ( TFLOR(t)) = BT(t).NHS(t) . [1.818785 H^2 - \\
 & 99.786650 \text{ EXP } ( 0.1 H ) + 19.618049 \cos T + 65.538615 ] - NGEM . \\
 & [0.025000 H (PLU/100)-20.205205 \text{ EXP } ( 0.1 PLU/100) + 20.205205] - \\
 & ( NGEM(t)). (NHS(t)) . [ + 0.625000 H ( PLU/100) - 551.483253 \\
 & \text{EXP } (0.1 PLU/100 ) + 551.358253 ]
 \end{aligned}$$

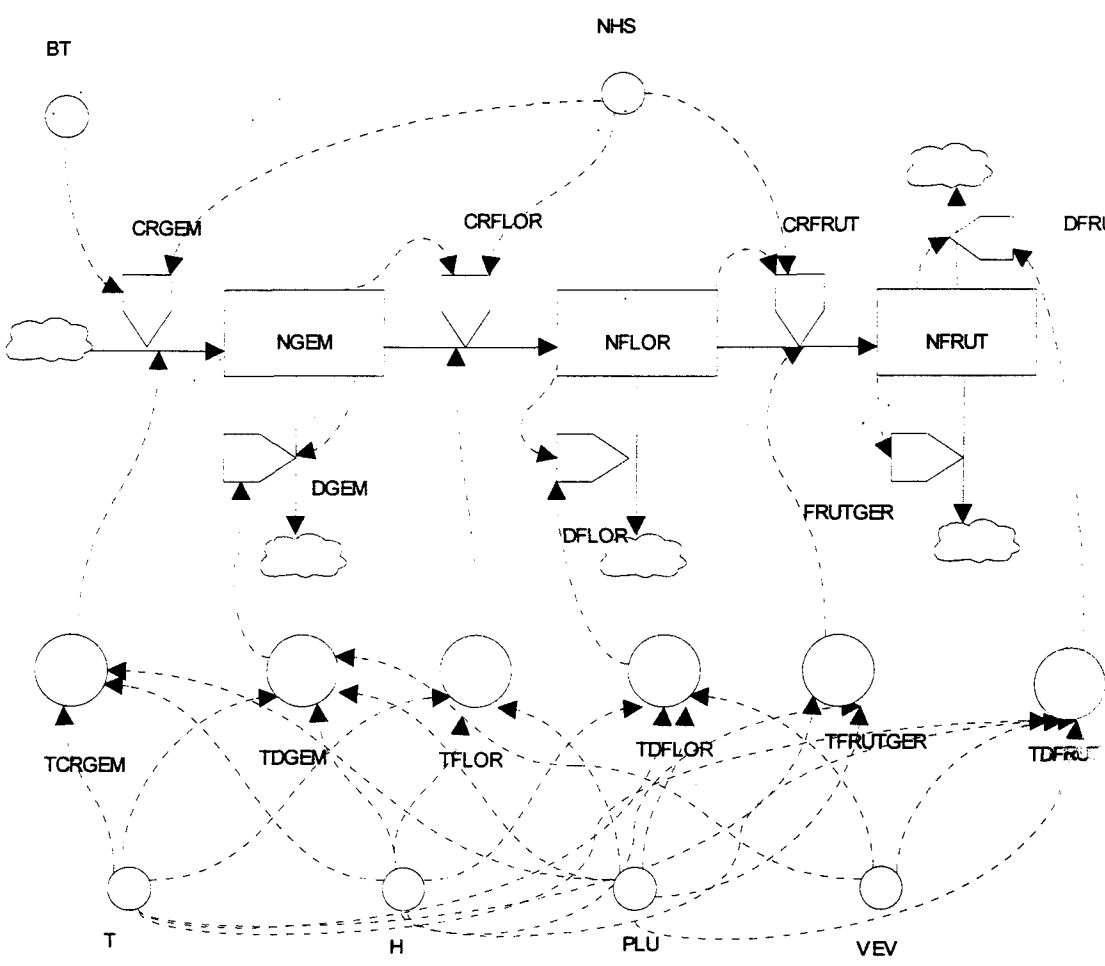
$$\begin{aligned}
 & \frac{dNFLOR(t)}{dt} = CRFLOR(t) - DFLOR(t) - CRFRUT(t) = \\
 & (NGEM(t)).(NHS(t)).(TFLOR(t))-(NFLOR(t)).(TDFLOR(t)) - \\
 & (NFLOR(t)).(NHS(t)). (TFRUT(t)) = (NGEM(t)) .(NHS(t)) . [0.625000 \\
 & H . ( PLU/100) -551.483253 \text{ EXP } ( 0.1 PLU/100 ) + 551.358253 ] - \\
 & NFLOR(t).[-0.561127 H (PLU/100) + 497.672253 \text{ EXP } (0.1.PLU/100) - \\
 & 0.210933 \text{ COS}(T) + 0.195408 \text{ COS } (VEVI) - 497. 538200 ] - \\
 & (NFLOR(t)).(NHS(t)). [-1395.984981.EXP (-0.1 T )- 0.290402 \text{ COS } (T) \\
 & - 0.631100\text{COS } (H) + 0.765191]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{dNFRUT(t)}{dt} = CRFRUT(t) - DFRUT(t) - FRUTGER(t) \\
 & = (NFLOR(t)).(NHS(t)). (TFRUT(t)) - (NFRUT(t)).( TDFRUT(t)) - \\
 & (NFRUT(t)). (NHS(t)).( TFRUTGER(t)) = (NFLOR(t)).(NHS(t)) . \\
 & [-1395.984981.EXP (-0.1 T )- 0.290402 \text{ COS } (T) - 0.631100\text{COS } (H) + \\
 & 0.765191] - (NFRUT(t)). ( TDFRUT(t)) - (NFRUT(t)). (NHS(t)).[ + \\
 & 0.000289 H^2 -0.003281 T H + 0.000113 H (PLU/100) + 0.006919 H \\
 & \text{VEVI} + 1.797017]
 \end{aligned}$$



### 5.4.5 DIAGRAMA CAUSAL

Universitat d'Alacant  
 Universidad de Alicante



### 5.4.6 APROXIMACION NUMERICA

Las ecuaciones de estado anteriores son aproximadas por el método de Euler, obteniendo las siguientes tablas para cada una de las 5 plantas consideradas :

SEMAMA	NGEM	NFLOR	NFRUT
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	2.4265256214E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	7.0205688003E+00	-5.8272464028E-04	0.0000000000E+00
4	8.7739141303E+00	1.1565498619E-01	1.1688542758E-01
5	1.2880862522E+01	1.1854478628E+00	1.1891009201E+00
6	2.2270576807E+01	4.7877500444E+00	4.8021776414E+00
7	2.4959180066E+01	6.5499706519E+00	6.5714303654E+00
8	2.6183267938E+01	9.0398775729E+00	9.0656820519E+00
9	3.2187782491E+01	2.5377168730E+01	2.5438378157E+01
10	3.6969655978E+01	4.5295581173E+01	4.5392846603E+01
11	4.0081380918E+01	6.3518929068E+01	6.3640653077E+01
12	4.8703262309E+01	1.1397350928E+02	1.1416826092E+02
13	5.2144960553E+01	1.3640543033E+02	1.3663680677E+02
14	5.6461512598E+01	1.7011729876E+02	1.7038201803E+02
15	6.2155014177E+01	2.0301820989E+02	2.0331850242E+02
16	6.5963350118E+01	2.1700657824E+02	2.1732531808E+02
17	7.0582350980E+01	2.2304052950E+02	2.2337815919E+02
18	7.4803531619E+01	2.2415481149E+02	2.2449688739E+02

a:ficher1.dat

SEMAMA	NGEM	NFLOR	NFRUT
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	5.7498364310E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	1.6699715490E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
4	2.0871614697E+00	1.7496829357E-01	1.7532814137E-01
5	3.0709996137E+00	8.4423775656E-01	8.4546282422E-01
6	5.3243736744E+00	2.0450051504E+00	2.0498217313E+00
7	5.9694226298E+00	2.6627925313E+00	2.6690601847E+00
8	6.2622900887E+00	3.1606554229E+00	3.1679105220E+00
9	7.7145058480E+00	6.6627225037E+00	6.6763454016E+00
10	8.8831567373E+00	1.0524258830E+01	1.0543490449E+01
11	9.6269437246E+00	1.3080257759E+01	1.3106384617E+01
12	1.1639273430E+01	2.6533527392E+01	2.6580413375E+01
13	1.2442470249E+01	3.2515873105E+01	3.2572025602E+01
14	1.3433675403E+01	4.1118890312E+01	4.1187824220E+01
15	1.4752695264E+01	5.3600555346E+01	5.3680450409E+01
16	1.5628555587E+01	5.8049209940E+01	5.8136569249E+01
17	1.6719847240E+01	6.2121360739E+01	6.2215141925E+01
18	1.7723522662E+01	6.3233846761E+01	6.3329512840E+01

a:ficher2.dat

SEMAMA	NGEM	NFLOR	NFRUT
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	1.1846713744E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	3.4271818764E+00	-3.8848309352E-04	0.0000000000E+00
4	4.2847892900E+00	1.1628103526E-01	1.1688542758E-01
5	6.3057907484E+00	5.1732358099E-01	5.1896623729E-01
6	1.0929255489E+01	2.3182751433E+00	2.3255045979E+00
7	1.2257303868E+01	3.4650524067E+00	3.4755188685E+00
8	1.2861263510E+01	4.5009172652E+00	4.5147904046E+00
9	1.5832358068E+01	1.6760317094E+01	1.6794312483E+01
10	1.8182575475E+01	2.8341120189E+01	2.8395747626E+01
11	1.9683103067E+01	3.8576694703E+01	3.8647324297E+01
12	2.3793779469E+01	7.2486870733E+01	7.2613105124E+01
13	2.5417591834E+01	8.9163509686E+01	8.9320485372E+01
14	2.7450294811E+01	1.1785690510E+02	1.1803981410E+02
15	3.0126887396E+01	1.4338873942E+02	1.4359640390E+02
16	3.1926869304E+01	1.5178182575E+02	1.5200630817E+02
17	3.4118162654E+01	1.5540129843E+02	1.5564240768E+02
18	3.6124953449E+01	1.5651558041E+02	1.5676647134E+02

a:ficher3.dat



SEMAMA	NGEM	NFLOR	NFRUT
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	8.4788397302E-02	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	2.4877569431E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
4	3.1155018212E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
5	4.6145428016E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
6	8.0864776851E-01	-1.1971710500E-03	0.0000000000E+00
7	9.0673679597E-01	1.7505837594E-01	1.7692527240E-01
8	9.5072053839E-01	4.2359484642E-01	4.2635044106E-01
9	1.1743409619E+00	3.5368546766E+00	3.5449592229E+00
10	1.3568141313E+00	6.4704765131E+00	6.4839894592E+00
11	1.4674166045E+00	9.1322436803E+00	9.1493993936E+00
12	1.7128262028E+00	1.6698781102E+01	1.6728540570E+01
13	1.8012456066E+00	2.0380337762E+01	2.0415686556E+01
14	1.9047818322E+00	2.5542036944E+01	2.5585165727E+01
15	2.0457948260E+00	3.3299744882E+01	3.3347699127E+01
16	2.1397839838E+00	3.3935943550E+01	3.3987639267E+01
17	2.2636749598E+00	3.3935943550E+01	3.3991214736E+01
18	2.3778544361E+00	3.3935943550E+01	3.3991481509E+01

a:ficher4.dat

SEMAMA	NGEM	NFLOR	NFRUT
1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	7.6901104530E-02	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
3	2.2672586225E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
4	2.8381940094E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
5	4.2173117114E-01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
6	7.4660258637E-01	-7.9811403335E-04	0.0000000000E+00
7	8.3947088684E-01	1.7545743296E-01	1.7692527240E-01
8	8.8077153879E-01	4.2448762259E-01	4.2635044106E-01
9	1.0966417680E+00	1.5896358179E+00	1.5958287343E+00
10	1.2758970673E+00	4.0606024225E+00	4.0708015648E+00
11	1.3808386036E+00	5.9031541478E+00	5.9160853656E+00
12	1.6105142752E+00	1.0945906068E+01	1.0968846150E+01
13	1.6931076930E+00	1.3936564118E+01	1.3964652263E+01
14	1.7854459525E+00	1.8529804330E+01	1.8559744860E+01
15	1.9057044339E+00	1.9853845465E+01	1.9885400230E+01
16	1.9845543985E+00	2.0108324932E+01	2.0141048908E+01
17	2.1024385393E+00	2.0108324932E+01	2.0143507043E+01
18	2.2152340220E+00	2.0108324932E+01	2.0144574134E+01

a:ficher5.dat



### **5.4.7 GRAFICAS**

Vamos a analizar a continuación los datos obtenidos en las primeras aproximaciones con datos reales conseguidos en la Sierra de Mariola, término municipal de Agres, provincia de Alicante, en el recinto del Santuario de la Mare de Deu del Castell.

Somos conscientes de que un mejor análisis y validación del modelo lleva implícitamente la obtención de un mayor número de datos experimentales del mismo lugar y de otros lugares diferentes. Proceso que terminaremos en un futuro cercano. No obstante podemos observar mediante gráficas, como en la segunda aproximación obtenida la mejora es significativa.

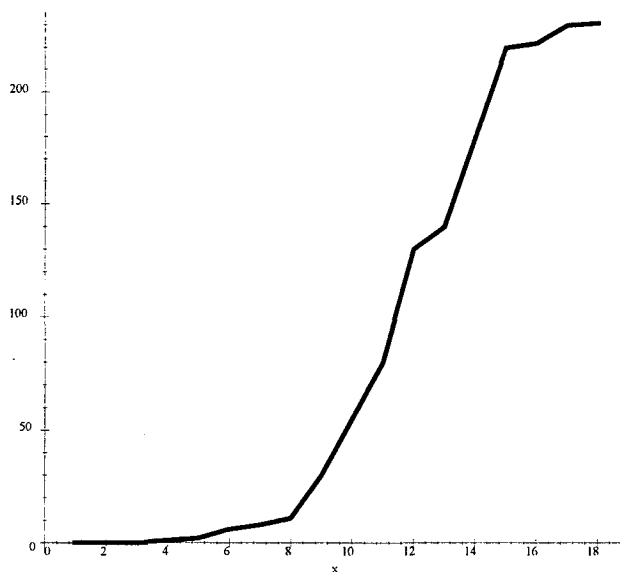
1. Si consideramos los datos reales para la primera planta obtenidos por la variable NFLOR y los datos obtenidos por el método de Euler para las ecuaciones de flujo distintas :

$$\text{TFLOR} = -0.031098 H^2 + 172.730016 \text{EXP}(-0.1 H) + 71.673968 \text{LOG}(H) - 225.648946$$

$$\text{TFRUT} = -0.310978 H^2 + 1727.300161 \text{EXP}(-0.1 H) + 716.739681 \text{LOG}(H) - 2256.484959$$

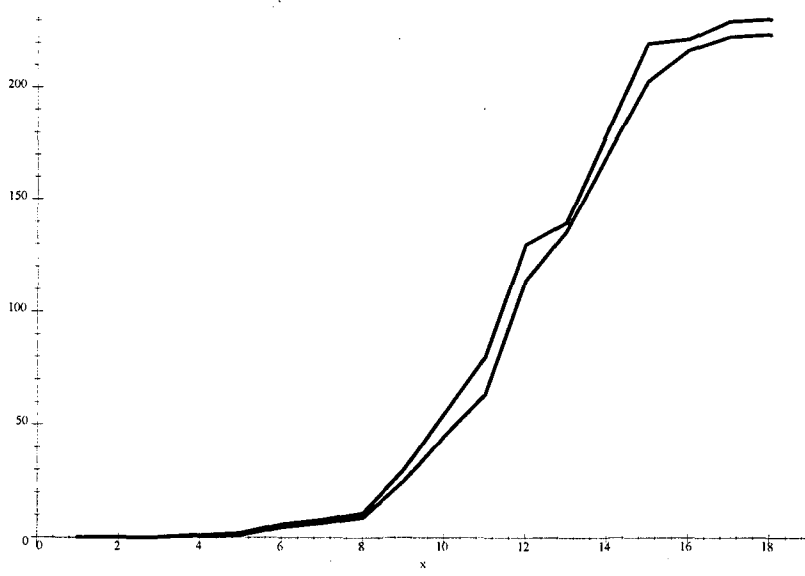
$$\text{TFRUTGER} = 0.124391 T^2 - 690.920064 \text{EXP}(-0.1 T) - 286.695872 \text{LOG}(T) + 902.593983$$

al ser los coeficientes de correlación múltiple bastante mas pequeños, la aproximación por el método de Euler casi coincide con el eje x :





En cambio, si consideramos los datos reales y las ecuaciones de flujo con coeficientes de correlación múltiple máximo obtenidas anteriormente, obtenemos :





Universitat d'Alacant  
 Universidad de Alicante

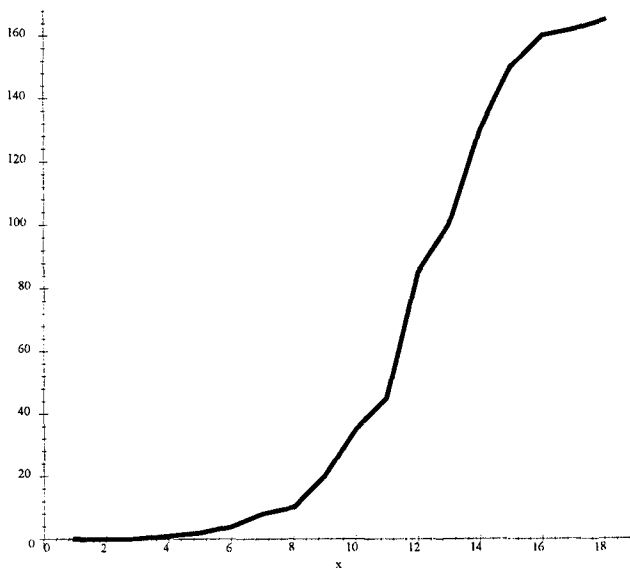
2. Si consideramos los datos reales para la quinta planta obtenidos por la variable NFRUT y los datos obtenidos por el método de Euler para la misma variable y planta con las ecuaciones de flujo distintas :

$$\text{TFLOR} = -0.031098 H^2 + 172.730016 \text{EXP}(-0.1 H) + 71.673968 \text{LOG}(H) - 225.648946$$

$$\text{TFRUT} = -0.310978 H^2 + 1727.300161 \text{EXP}(-0.1 H) + 716.739681 \text{LOG}(H) - 2256.484959$$

$$\text{TFRUTGER} = 0.124391 T^2 - 690.920064 \text{EXP}(-0.1 T) - 286.695872 \text{LOG}(T) + 902.593983$$

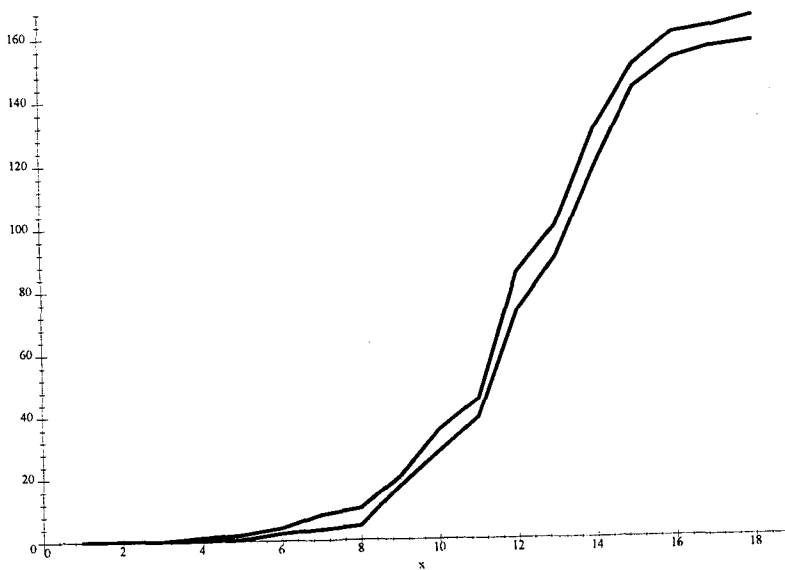
al ser los coeficientes de correlación múltiple menores, la aproximación obtenida casi coincide con el eje x :





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

En cambio, si consideramos los datos reales y las ecuaciones de flujo con coeficientes de correlación múltiple máximo obtenidas anteriormente, obtenemos :





Universitat d'Alacant

Universidad de Alicante

## CONCLUSIONES

Hemos elaborado una formalización de la Teoría General de Sistemas a partir del concepto de sistema enlace con las características siguientes :

- El sistema enlace es un concepto formal sencillo y general que evita la aparatosidad y generalidad insuficiente de otras definiciones.
- Admite una estructura de relaciones dentro de un conjunto de posibilidades dadas.
- Poder de readaptación de sus relaciones internas de modo que se ajuste mejor a la eventual información que se le suministre, es decir tiene capacidad de aprendizaje.
- Considera el tiempo como la dimensión en la que se estudien las variaciones.
- Permite estudiar sistemas con cualquier número de variables y admite datos de las variables.
- Obtiene la estructura del sistema a partir de las influencias entre las variables y el comportamiento del sistema a partir de los datos y de las influencias entre las variables.
- Permite trabajar tanto con entes ( Sistema Ontológico) como con atributos de los entes ( sistema Semiótico)
- Es equivalente a otras definiciones de sistemas ( En particular lo probamos para la segunda definición de Yang )



Al utilizar el concepto de influencia entre variables, toda la información del sistema se concentra en la función estructural, por lo que este concepto será fundamental, apareciendo durante todo el desarrollo de la memoria, en cuestiones tan distintas como jerarquías, bucles, semejanza estructural, división y fusión celular, algunos índices de ecosistemas, etc.

En el segundo capítulo , destacaríamos dos cuestiones importantes : Por una parte la obtención de una métrica celular que nos mide la “ cercanía “ entre células distintas y que pensamos que puede ser de utilidad en bastantes cuestiones biológicas ( Transgenia, enfermedades como el cáncer, etc. ). Y por otra parte modelizar los procesos biológicos de división y fusión celular mediante las funciones correspondientes obteniendo como resultados mas importantes :

- Unicidad de estas funciones
- Propiedades de la división y fusión celular asociadas con funciones estructurales.

De los restantes capítulos destacamos el haber conseguido :

- Establecer una axiomática de los conceptos básicos de la Teoría General de Ecosistemas
- Formalizar aspectos básicos de la construcción de modelos.
- Dar definiciones de índices que permitan relacionar modelo y sistema, modelos entre si, etc.
- Obtención de un modelo teórico para la simulación de ecosistemas y un ejemplo de aplicación.





Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante

## **BIBLIOGRAFIA**

- (1) ABEL D. E., NIVEN B. S. : Application of a formal specification language to animal ecology. I. Environment. Ecological Modelling, 50, 205-212. 1990
- (2) AGREN G. I. , BOSATTA E. : Theory and model or art and technology in ecology. Ecological Modelling, 50, 213-220, 1990
- (3) ALYMKULOV E.D. A. : Aggregation in Models of Ecosystems Dynamics and Stability Problems. Ecological Modelling 58. 383-386. 1991
- (4) ANDREWARTHA H. G., BIRCH L. C. The Ecological Web. University of Chicago Press. Chicago, IL, 506 pp. 1984
- (5) ANWAY J. C., BRITAIN E. G., HUNT H. W., INNIS G. S., PARTON W. J. RODELL C. F., SAUER R. H. : ELM : Versión 1.0. U. S. IBP Grassland Biome Tech. Rep. No. 156. Colorado State Univ. Fort Collins. 1972
- (6) ARACIL J. : Estructura y comportamiento en teoría de sistemas. Theoria. 4. 121-141. 1986
- (7) ARACIL J. : Introducción a la dinámica de sistemas. Alianza editorial Universidad textos. 1986

- (8) ARINO O., KIMMEL M. : Comparison of approaches to modeling of cell population dynamics. SIAM J. APPL. MATH. Vol 53. 5. 1480-1504. 1993
- (9) ASSIMAKOPOULOS N. : A Systems Approach for Hierarchically Organized Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 23 : 531-548, 1992
- (10) BERTALANFFY, L. V. : Modern Theories of Development. Oxford University Press, 1934
- (11) BERTALANFFY L. V. : General Systems Theory. Foundations, Development, Applications, George Braziller, New York. 1968
- (12) BERTALANFFY, L. V. : The History and Status of General Systems Theory. In Klir, G ( de. Trends in General Systems Theory, pp 21-41. 1972
- (13) BERTILLER M. : Specific primary productivity dynamics in arid ecosystems : a case study in Patagonia, Argentina. Acta Oecologica/Oecologia Generalis. Vol 5. No 4, 365-381. 1984
- (14) BLAUBERG I. V. , et al. : Systems Research, Yearbook, vols I-VIII. Moscow, 1969-1976
- (15) BLEDSOE L., FRANCIS R. C. , SWARTZMAN G. L., GUSTAFSON J. D. : PWNEE : A Grassland Ecosystem Model. U. S. IBP Grassland Biome Tech. Rep. No 64. Colorado State Univ. Fort Collins. 1971
- (16) BRAUN M. Differential Equations and their Applications. Springer-Verlag. 3° edition. 1986
- (17) BRZECIECKI B. : Analysis of vegetation-environment relationships using a simultaneous equations model. Vegetatio. 71, 175-184. 1987

- (18) BUNGE M. : Treatise on Basic Philosophy, vol 4 : A world of systems. D. Reidel, Dordrecht-Boston-London, 1979
- (19) BUNGE M. : Analogy between Systems. Int. J. General Systems, 7. 221-223. 1981
- (20) BUNGE M. : Scientific Materialism. Dordrecht . Reidel . 1981
- (21) BUNGE M. : Teoría y Realidad. Editorial Ariel. Barcelona. 1981
- (22) BUSENBER S., IANNELLI M. : Separable models in age-dependent population dynamics. J. Math. Biology. 22, 145-173. 1985
- (23) CALE W. G. JR., ODELL PL. : Concerning aggregation and separability of models in ecology. Ecological Modelling . In Theoretical Systems Ecology. Advances and Case Studies. ( Edit Efraim Halfon) Academic Press. New York. 1979
- (24) CARNAP R. : Introduction of Symbolic Logic and its applications. New York, 1958
- (25) CASELLES , A. : SIGEM : A realistic Models Generator Expert System. Cybernetics and Systems. An International Journal. 101-108. 1980
- (26) CASELLES A., NEBOT J., USO J.L. : Modelling Mathematically Ecological Problems : Flowers Polinization and Fruit Dispersion. Proceedings on the International Association for Cybernetics. Namur (Belgium).1990
- (27) CASELLES A., USO J.L. : REGRESSUS : A finder of Functional Relationships in a System. Advances in Support Systems Research. International Institute for Advanced Studies in System Research and Cybernetics. Windsor. Canadá. 1990

- (28) CASELLES A., USO J.L. : a Method to set up and Integrate Stochastic Systems. Advances in Support Systems Relet berch. International Institute for Advanced Studies in Systems Research and Cybernetics. Windsor. Canadá.1991
- (29) CASELLES A. : Structure and Behavior in General Systems Theory. Cybernet. Syst. Int. J. 23, 549-560. 1992
- (30) CASELLES A. : Systems Decomposition and Coupling. Cybernetics and Systems : An International Journal, 24, 305-323. 1993
- (31) CASELLES A. AND USO J.L. : Modelling Ecosystems. In International Systems Science Handbook. Systemic Publications. Madrid. 455-470. 1993
- (32) CASELLES A. : Goal-Seeking Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 87-94, 1994
- (33) CASWELL H. : Theory and models in ecology : a different perspective. Ecol. Modelling. 43 : 33-44
- (34) CONSTANZA R., SKLAR F.H. : Articulation, Accuracy and Effectiveness of Mathematical Models : A Review of freshwater wetland applications. Ecological Modelling 27. 45-68. 1985
- (35) CHEN Z. : Analogy, Systems, and Intelligence. Cybernetics and Systems. An International Journal, 22, 611-616. 1991
- (36) CHEN Z. : Analogy, Systems, and Intelligence. Cybernetics and Systems : An International Journal, 22. 611-616. 1991
- (37) DAGET J. : Les modeles mathematiques en ecologia. Masson. Paris. 1976
- (38) DALE M. : Ecology 51, 2. 1970

- (39) DANIELEWITZ D. B., O'KEEFFE J. O., BRADSHAW J. A. : An expert interface to an ecological model. Suid- afrikaanse tydskrif vir Wetenskap, 84, 189-194. 1988
- (40) DEVELICE L. R. : Test of a forest dynamics simulator in New Zealand. New Zealand Journal of Botany. 26. 387-392. 1988
- (41) DI PASQUALE C. : Analysis of an Ecological Niche. Mathematical Biosciences 87 : 1-15. 1987
- (42) DIAZ PINEDA F., GONZALEZ BERNALDEZ F. : Experiencia obtenida con modelos de regresión multiple para la descripción del habitat de matorrales. Anal. Inst. Bot. Cavanilles. 32 (2), 1333-1348. 1975
- (43) ENGEL A. B. : Mathematical Models in Biology : An Essay on description and lenguaje. Bol. Soc. Paran. Mat. 8. No 2, 194-207. 1987
- (44) ENGELBERG J. : The Nature of Integrated Systems., Kennedy Bookstore, 405 S. Limestone, Lexington, K Y 40503. 1989
- (45) ENGELBERG J. : On Integrative Study, Systems Research vol 9, No 1, 5-17.1991
- (46) FISHER R.A. : The relation between the number of species and the number of individuals in a random sample of an animal population. J. Animal Ecol., 12 : 42-58. 1943
- (47) FORRESTER J. W. : Industrial Dynamics. MIT Press. Cambridge , Massachussets. 1961
- (48) FORRESTER J. W. : Urban Dynamics, MIT Press, 1969
- (49) GIERSCH C. : Sensitivity Analysis of Ecosystems : An Analytical Treatment. Ecological Modelling, 53, 131-146. 1991

- (50) GIHMAN I., SKOROHOD A.V. : Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag. Berlin.1972
- (51) GIRO A., VALLS J., PADRO J. A., WAGENSBERG J. : Monte Carlo Simulation program for Ecosystems. Computer Appl. In the Biosciencie. 2 (4), 291-296. 1986
- (52) GOLDSTEIN L., WATERMAN M. S. : Mapping DNA by Stochastic Relaxation. Advances in Applied Mathematics 8, 194-207. 1987
- (53) GOLOMB S. : A New Derivation of the Entropy Expressions. IRE, Transf. Inform. Theory. Vol II-7, no3, 166-167. July.1961
- (54) GOLOMB S.W. : Efficient coding for the desoxyribonucleic channel. Proc. Symp. Appl. Math. Vol 14. Mathematical Problems in the Biological Sciences. American Mathematical Society. 87-100. 1961
- (55) GUNGI Y., KONNO N. : Artificial Life Autonomously emerging Boundaries. Appl. Math. Comput. 43 : 271-298. 1991
- (56) HALL A. , FAGEN R. : Definition of Systems. Internat. J. General Systems, 1, pp 18-28. 1956
- (57) HEMPAL C. G. Amer. Math. Monthly 52, 543. 1945 OJO REVISAR
- (58) HIGASHI M., BURNS T. P. : Theoretical studies of ecosystems. “The network perspective”. Cambridge. University Press. New York. Port Chester Melbourne.1991
- (59) HIGASHI M., PATTEN B. C. : Further Aspects of the Analysis of Indirect Effects in Ecosystems. Ecological Modelling 31. 69-77. 1980
- (60) HILL M. O. : Diversity and evenness : a unifying notation and its consequences. Ecology. 54 : 427-432. 1973

- (61) HOFBAUER J. : Saturated Equilibria, Permanence, and Stability for Ecological Systems. *Mathematical Ecology*. (Trieste 1986) 625-642. World Sci. Publishing, Teaneck. NJ. 1988
- (62) HOGEWEG P. : Celular Automata as a paradigm for Ecological Modeling. *Applied Mathematics and Computation* 27 : 81-100. 1988
- (63) HURLBERT S. H. : The nonconcept of species diversity : a critique and alternative parameters. *Ecology*, 52 : 577-586, 1971
- (64) INNIS G. S. : ELM : A Grassland Ecosystem Model. Summer Comput. Simulat. Conf. Simulation Councils Inc. La Jolla California. 1972
- (65) INNIS G. S. : Simulation Models of Grasslands and Grazing Lands. *Ecology of Grasslands and Bamboolands in the World*. M. Numata de. Springer-Verlag. Berlin, Nueva York. 1973
- (66) INNIS G. S., JAMESON D. A. : Ecological Information for Range Management Decision-Prediction Models. Soc. Range Management 26 th Annu. Meeting, Boise, Idaho. 1973
- (67) INNIS G. S. : Role of Total Systems Models in the Grassland Biome Study. En *Systems Analysis and Simulation in Ecology*. Bernald C. Patten. Editor. Academic Press. Tomo III. 13-47. 1975
- (68) IWASA Y., ANDREASEN V., LEVIN S. : Aggregation in model Ecosystems. I perfect aggregation . *Ecological modelling* 37, 287-302. 1987
- (69) JIZHONG Z., SHIJUN M., CHANGMING C. : An index of ecosystem diversity. *Ecological Modelling*, 59, 151-163. 1991
- (70) JORGENSEN S. E. : Fundamental of Ecological Modelling. In *developments on Environmental Modelling*. Elsevier. Amsterdam. 1988

- (71) JORGENSEN S. E. : Ecosystem Theory, Ecological Buffer Capacity, Uncertainty and Complexity. *Ecological Modelling* 52. 125-133. 1990
- (72) KALASHNIKOV V. V. : Aggregative Systems : Modelling, Mathematical Analysis, Simulation. *Syst. Anal. Model. Simul* 8 7. 507-514. 1991
- (73) KATSENELINBOIGEN A. : Change and Evolution. *Systems Research*. Vol 8. No 4. 77-93. 1991
- (74) KEMPTON R.A., WEDDERBURN R.W. : A comparison of three measures of species diversity. *Biometrics*, 34 : 25-37. 1978
- (75) KINDLMAN P., LEPS J. : What's Stability ? A Mathematician's and Ecologist's point of view. *S.A.M.S.*, 3, no 5. 439-444. 1986
- (76) KLIR G. J. : An approach to General Systems Theory. Van Nostrand Reinhold Company, NY, 1969
- (77) KLIR G. J. : Architecture of Systems Problem Solving. New York. Plenum. 1985
- (78) KOLASA J., PICKETT S.T.A. : Ecological Systems and the Concept of Biological Organization. *Proc. Natl. Acad. Sci. Usa*, vol 86, 8837-8841. *Ecology*. 1989
- (79) KONNO N., GUNJI Y. : Mathematical Construction of an Autonomous Artificial Life. *Appl. Math. Comput* ; 46 : 33-58. 1991
- (80) KONNO N. : A Formalism of Multidimensional Living Systems Based on Nonstandard Analysis. *Applied Mathematics and Computation* 49. 231-238. 1992
- (81) KOWAL N. E. : A rationale for Modelling Dynamic Ecological Systems. In *Systems Analysis and Simulation in Ecology*. Edited by Bernard C. Patten. Vol I 123-194. Academic Press. New York. 1971



- (82) KRIEGEL H., SCHÄFER H., BOSSEL H. : Sprucom- A Simulation model of Spruce Stand Dynamics under Varying Immision Exposure. Syst. Anal. Model. Simul. 7 (20), 117-129. 1990
- (83) KURATOWSKI K., MOSTOWSKI A. : Set Theory : with an Introduction to Descriptive Set Theory. Warszawa, 1976
- (84) LIN Y. : A Model of General Systems, Math. Model. Vol 9, No. 2, 95-104. 1987
- (85) LIN Y. : On The Stabilities of Input-Output Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 18 : 285-298, 1987
- (86) LIN Y., MA Y.: Remarks on analogy between systems . Int. J. General Systems, vol 13 pp135-141. 1987
- (87) LIN Y. : An Application of Systems Analysis in Sociology. Cybernetics and Systems : An International Journal , 19 : 267-278 , 1988
- (88) LIN Y. MA Y. : Remarks on the Definition of Systems. Syst. Anal. Model. 6,11/12, 923-931. 1989
- (89) LIN Y. : Order Structures of Families of General Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 20 : 51-66, 1989
- (90) LIN Y. : Remarks on the Concept of Dynamical Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 20, 435-450. 1989
- (91) LIN Y. : Periodic Linked Hierarchies of Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 21 : 59-77, 1990
- (92) LIN Y. : Inverse Hierarchies of General Systems. Cybernetics and Systems : An International Journal, 21 : 79-97, 1990
- (93) LIN Y. : Similarity Between General Systems. Syst. Anal. Model. Simul. 8, 8,607-615. 1991

- (94) LIN Y. : More Results on Decomposition and Decoupling of Single Relation Systems. *Cybernetics and Systems : An International Journal*, 22 : 265-281, 1991
- (95) LIN Y., MA Y. : A New Approach of General Systems Theory. *Syst. Anal. Model. Simul.* 8, 3, 221-226. 1991
- (96) LIN Y. : On Fuzzy Stability of L-Fuzzy Systems. *Cybernetics and Systems : An International Journal*, 22 : 761-772, 1991
- (97) LIN Y. : System - A Unified Concept. *Cybernetics and Systems : An International Journal*, 24 : 375-406, 1993
- (98) LINCOLN R. J., BOXSTRALL G. A., CLARK P. F. : A Dictionary of Ecology, Evolution and Systematics. Cambridge. University Press. 1982
- (99) LUCKYANOV N. K. : Linear aggregation and separability of models in ecology. *Ecological Modelling* 21, 1-12, 1984
- (100) MA Y. H. , LIN Y : Some properties of Linked Time Systems. *Internat. J. General Systems*, 13, 135-141. 1987
- (101) MA Y. H., LIN Y. : Similarity between General Systems and Direct Sum Decomposition. *Int. J. Syst. Sci.* 19, 10, 1941-1953. 1988
- (102) MA Y., LIN Y. : A Representation Theorem for Linear I / O Systems. *Systems Research*. Vol 9, No 2, 43-48, 1992
- (103) MACARTHUR R. H. : Fluctuations of animal populations and a measure of community stability. *Ecology*, 36 : 533-536, 1955
- (104) MACDONALD N. : Trees and Networks in Biological Models. John Wiley & Sons. 1983.
- (105) MARGALEF R. : *Ecologia*. Ediciones Omega. Barcelona .
- (106) MARTINEZ C., SANZ M. : *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. Edit. Reverte. Barcelona.

- (107) MARTINEZ S., REQUENA A. : Dinámica de sistemas. Alianza Editorial. Barcelona. 1986
- (108) MERCER E. H. : The Foundations of Biological Theory. John Wiley & Sons
- (109) MESAROVIC M. D. , MACKO D. , TAKAHARA Y. : Theory of Hierarchical Multilever Systems . Academic New York, 1970
- (110) MESAROVIC M., TAKAHARA Y. : General Systems Theory : Mathematical Foundations. Academic Press. New York. 1978
- (111) MILLER J. G. : Living Systems , New York, Mc Graw-Hill. 1978
- (112) MILLER J. G. , MILLER J. L. : Cent. Mag. 14, 44-55. 1981
- (113) NIVEN B. S. : Logical synthesis of an animal's environment : sponges to non-human primates. I. Primitive terms and definitions. Aust. J. Zool. , 35 : 597-606. 1987
- (114) NIVEN B. S. : Logical synthesis of an animal's environment : sponges to non-human primates IV. The common octopus. *Octopus vulgaris*. Aust. J. Zool., 36 : 15-27. 1988
- (115) NIVEN B. S. : The ecosystem as an algebraic category : a mathematical basis for theory of community and ecosystem in animal ecology. Coenoses, 3 : 83-87. 1988
- (116) NIVEN B. S. : Formalization of the basic concepts of animal ecology. Erkenntnis, 17 : 307-320. 1992
- (117) NORMAN A. : Teoría de la información y codificación. De. Paraninfo, 1986
- (118) PACALA S. W., SILANDER J. A. : Neighborhood Models of Plant Population Dynamics. I. Single-Species models of Annuals. The American Naturalist. 125, 3, 385-411. 1985

- (119) PAHL-WOSTL C. : Organization of the dynamic network structure in the dimension of time. *Ecological Modelling*. 52. 115-123. 1990
- (120) PAHL-WOSTL C. : Temporal organization : a new perspective on the ecological network. *Oikos* 58 : 293-305. Copenhagen 1990
- (121) PAHL-WOSTL C. : Patterns in Space and time - a new method for their characterization. *Ecological Modelling*. 58. 141-157. 1991
- (122) PATTEE H. H. : Hierarchy Theory : The Challenge of Complex Systems . Braziller, New York. 1973
- (123) PATTEN B. C. : *Simulation* 19, 177-186. 1972
- (124) PATTEN B.C. : Total ecosystem model for a cove in Lake Taxoma. *System Analysis and Simulation in Ecology*. Academic Press. New York. Vol 3. 205-421.1975
- (125) PATTEN B. C., AUBLE G.T. : Systems Approach to the Concept of Niche. *Synthese* 43. 155-181. 1980
- (126) PATTEN B. C., AUBLE G. T. : System Theory of the Ecological Niche. *The American Naturalist*. Vol 117. Pp 893-922. 1981.
- (127) PATTEN B. C., RICHARDSON T. H., BARBER M. G. : Path Analysis of a reservoir ecosystem model. *Canadian Water Resources Journal*. Vol 7, No 1, 252-282. 1982.
- (128) PATTEN B. C. : Further developments toward a theory of the quantitative importance of indirect effects in ecosystems. *Contributions in Systems Ecology*, no 65, 271-284. 1985.
- (129) PATTEN B. C. , HIGASHI M., BURNS T. P. : Trophic dynamics in ecosystem networks: Significance of Cycles and Storage. *Ecological Modelling*, 51. 1-28. 1990

- (130) PERLWITZ M. D., BURKS C., WATERMAN M.S. : Pattern Analysis of the Genetic Code. *Advances in Applied Mathematics* 9, 7-21. 1988
- (131) PESSA E. : Cognitive Psychology and Dynamical Systems Theory. *Cybernetics and Systems. An International Journal.* 23. 431-446. 1992
- (132) PIAGET J. : *Biología y Conocimiento, Siglo XXI de España.* Madrid.
- (133) PIELOU E. C. : *Ecological Diversity.* Wiley, New York, 165 pp, 1975
- (134) PLA R. : Introduction to a Learning General Theory. *Cybernetics and Systems : An International Journal*, 19. 411-429. 1988
- (135) PRESTON F. W. : The canonical distribution of commonness and rarity. *Ecology*, 43, 185-215 and 410-432. 1962
- (136) REUSCH B. : On the Notion of State in Mathematical Systems Theory. *Cybernetics and Systems : An International Journal*, 17 : 67-78, 1986
- (137) RUEY-PYNG L., SMITH E. P., GOOD I. J. : Multivariate Measures of Similarity and Niche Overlap. *Theoretical Population Biology* 35. 1-21. 1989
- (138) SAITO T., MESAROVIC M. D. : A meaning of the Decoupling by Feedback of Linear Functional Time Systems. *Int. J. General Systems.* 11(1), 47-61. 1985
- (139) SAITO T. : A General Approach to the Characterization of Changes in System Behavior by Output Feedback. *Int. J. General Systems*, 14, 267-276. 1988

- (140) SCHÄFER H. : Modelling the Responses of Mature Forest Trees to Air Pollution. *Geo Journal* 17, 2, 279-287. 1988
- (141) SCHÄFER H., KRIEGER H., BOSSSEL H. : Modelling Air Pollution Effects on Plants, Particullary on Forest Growth- A review. Conference on Air Pollution in Europe : Environmental Effects, Control Strategies and Policy Optimization. Stockholm, Sweden, September 26-30, 1988.
- (142) SCHÄFER H., KRIEGER H., BOSSSEL H., : Using Systems Analysis to Develop Simulation Models for Managing Forests under Environmental Pollution. *Artificial Intelligence and Growth Models for Forest Management Decisions*. Publication No. FWS-1-89 School of Forestry and Wildlife Blacksburg, Virginia 24061. 1989, 322-332. 1989
- (143) SCHÄFER H., KRIEGER H., PENG SHAO-LIN. : Modelling Growth and yield of a Eucalypt stand in tropicla China. Paper presentated at the XIX IUFRO World Congress, Montreal, agosto 5-11. 1990
- (144) SCHOMOLDT D. L., MARTIN G. L. : Expert Systems in Forestry : Utilizing Information and Expertise for Decision Making. *Computers and Electronics in Agriculture*. 1, 233-250. 1986
- (145) SHANNON, C. E., WEAVER W. : The mathematical Theory of Communication. Univ. Of Illinois Press, Urbana. 1949
- (146) SHOEMAKER CH. A. : Mathematical Constuction of Ecological Models. In *Ecosystem Modelling in Theory and Practice ; An introduction with Case Histories*. Edited by Charles A. S. Hall and John W. Doy. Jr. John Wiley. 1977

- (147) SILVERMAN I. : System Theory and the Unity of Knowledge. Cybernetics and Systems. An International Journal. 23. 123-141. 1992
- (148) SIMPSON E. H. : Measurement of diversity. Nature, 163 : 688. 1949
- (149) STARFIELD A. M., BLELOCH A. L. : Expert Systems : An Approach to Problems in Ecological Management that are difficult to quantify. Journal of Environmental Management. 16, 261-268. 1983
- (150) TARSKI, A. : Contributions to the Theory of Models I, II. Indagationes Mathematicae, 16 , pp 572-588. 1954
- (151) TASLEY A. G. : The use and abuse of vegetational concepts and terms. Ecology, 16, 284-30. 1935
- (152) THOMPSON S., ROSENFELD A. : Isotropic Growth on a grid. Pattern Recognition. Vol 28, No 2, 241-253. 1995
- (153) ULANOWICZ R.E. : Growth and development : Ecosystems Phenomenology. Springer. New York, 203 pp. 1986
- (154) USO J.L. : Modelo Matemático de un ecosistema mediterráneo terrestre. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. 1992
- (155) USO J.L., VILLACAMPA Y., LLORET M., RAMO M.P. : Modelo Teórico para la simulación de ecosistemas. Modelado de Sistemas en Oceanografía ; Climatología y Ciencias Medio-ambientales : Aspectos Matemáticos y numéricos. Malaga. 1994
- (156) USO JL., VILLACAMPA Y., LLORET M., RAMO MP. : Introduction to the axiomatization of ecosystems. 7<sup>th</sup> International Conference on Systems Research Informatics and Cybernetics. Baden-Baden. 1994
- (157) USO J.L., VILLACAMPA Y., STUBING G., KARJALAINEN T., and RAMO M.P. : Mariola : A Model for Calculating the Response of

Mediterranean Bush Ecosystem to Climatic Variations. Ecological Modeling. 1995

(158) USO J.L., VILLACAMPAY., LLORET M., VIVES F.: A Mathematical Method for Estimation of Aerial Biomass of Bushes. International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden-Baden. 1995.

(159) USO J.L., VILLACAMPA Y., LLORET M., VIVES F.: Mariola II: Mathematical Foundations. A Method for calculate the flow equations. Ecological Modelling. 1996. ( PENDIENTE )

(160) VIDAL P., GILLE J. C., WEGRZYN S.: On Some Properties of Developmental Systems and their Modelling. Syst. Anal. Model. Simul. 6 4. 279-291. 1989

(161) VILLACAMPA Y., USO J.L., LLORET M., RAMOS MP.: Introduction to the formalization of ecological models. Theory and approximation by lineal models. 7<sup>th</sup> International Conference on Systems Research Informatics and Cybernetics. Baden-Baden. 1994.

(162) VILLACAMPA Y., USO J.L., LLORET M., VIVES F.: Mathematical Formulation of connection and internal relations of ecological models. International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden-Baden. 1995

(163) VILLACAMPA Y., USO J.L., LLORET M., VIVES F.: Introduction to Axiomatization of living Systems . International Conference on Systems Research, Informatics and Cybernetics. Baden-Baden. 1996

(164) VILLACAMPA Y., USO J.L., LLORET M., VIVES F.: Towards a Formalization of Ecosystems and Ecological Models (PENDIENTE)



- (165) VYSLOUZIL J. : Evaluation of the Recreational Function of the Forest by means of Mathematical Models. *Ekologia (CSSR)*, 5 (4), 367-379. 1986
- (166) WEBER B.H., DEPEW D.J., SMITH J.D. : Entropy, Information, and Evolution. *New Perspective on Physical and Biological Evolution*. A Bradford Book. The Mit Press.
- (167) WEGRZYN S., GILLE J. C., VIDAL P. : More on Developmental Systems and their Modelling. *Syst. Anal. Model. Simul.* 7 4. 289-297. 1990
- (168) WEGRZYN S., VIDAL P., GILLE J. C. : Synthesis of Developmental Systems based on Elementary Organs. *Syst. Anal. Model. Simul.* 9 251-258. 1992
- (169) WENNEKERS T., GIERSCH C. : Sensitivity analysis of a simple model food chain. *Ecological Modelling*, 54 , 265-276. 1991
- (170) WIENS J. H. : Review of Andrewartha and Birch. *Ecology*, 67 : 1433. 1986
- (171) WOLFRAM S. : Celular Automata as Models of Complexity, *Nature* 311, 419-4. 1984
- (172) WOLKOWSKI Z. : The Concept of Coherence considered as a Systems Isomorphism. *Systems Research*. Vol. 9. No 4. 61-66. 1992
- (173) WOODGER J. H. : From biology to mathematics. *Br. J. Philos. Sci.*, 31 : 1-21. 1952
- (174) WOSCHNI E. : The Importance of Estimation and Aproximation Methods in System Theory. *Cybernetics and Systems. An International Journal*. 23. 335-343. 1992
- (175) YANG Z. B. : A New Model of General Systems Theory. *Cybernetics and Systems : An International Journal* 20, 67-76. 1989



(176) ZEIGLER B. P.: Multifaceted Modelling and Discrete Event  
Simulation. Academic Press. London 1989

Universitat d'Alacant  
Universidad de Alicante