TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante

ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:

Espagrafic

F. Javier Gil Chica

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

Capítulo VII
Previsión general de eclipses solares

Índice

Capítulo VII
Previsión general de eclipses solares

Intersección del cono con la superficie terrestre

La línea de intersección del cono con la superficie de la Tierra contiene a todos puntos desde los cuales pueden verse los limbos del Sol y la Luna en contacto.

La distancia de tales puntos al eje de sombra es igual al radio del cono en el plano paralelo al fundamental que contiene al observador. Tendremos por tanto:

$$\begin{aligned} (1 - i\zeta)\ sen\ Q &= x-\xi \\ (1 -i\ \zeta) \cos Q &= y -h \end{aligned} \qquad (1)$$

siendo $\theta = \mu - \alpha = \mu_1 - \omega$, recordemos que

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi'\ sen\ 8 \\ \eta &= \rho\ sen\ \varphi' \cos d - p \cos \varphi'\ sen\ d \cos \theta \\ \zeta &= \rho\ sen\ \varphi'\ sen\ d + p \cos \varphi' \cos d \cos \theta \end{aligned} \qquad (2)$$

Las cinco ecuaciones anteriores involucran las seis variables ξ, η, ζ, φ', θ y Q, una de las cuales puede ser tomada como un parámetro. Para cada valor del parámetro, las ecuaciones anteriores determinan el resto de las variables. Tomaremos a Q como parámetro variable. En la forma en que están escritas, aparece la cantidad ρ, que es a su vez función de φ'. Se puede despreciar el achatamiento tomando en primera aproximación $\rho = 1$ y obteniendo de este modo un valor aproximado de φ' que proporciona un nuevo ρ con el que repetir el cálculo.

Este largo proceso puede evitarse siguiendo las transformaciones dadas por Bessel que permiten tener en cuenta el achatamiento desde un principio. Consisten simplemente en introducir los resultados conocidos

$$\rho \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}$$

$$\rho\, sen\, \varphi' = \frac{sen\, \varphi\,(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}$$

$$\tan \varphi' = \tan \varphi\,(1 - e^2)$$

donde se ha tomado como unidad el radio ecuatorial a, y transformar el resultado de forma que las ecuaciones aparezcan de forma más sencilla y simétrica. Tomando una nueva variable de forma que

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}$$

se tiene

$$sen\ \varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1} = \frac{sen\ \varphi\ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}}$$

con lo cual

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \rho \cos \varphi' \\ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\ sen\ \varphi_1 &= \rho\ sen\ \varphi' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

y las ecuaciones (2) se escriben:

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \varphi_1\ sen\ \theta \\ \eta &= sen\ \varphi_1\ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cos d - \cos\ \varphi_1\ sen\ d - \cos \theta \\ \zeta &= sen\ \varphi_1\ (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\ sen\ d + \cos \varphi_1 \cos d - \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Introduzcamos las variables ρ_1, ρ_2, d_1, d_2 mediante

$$\begin{aligned} \rho_1\ sen\ d_1 &= sen\ d \\ \rho_2 \cos d_2 &= \cos d \\ \rho_1 \cos d_1 &= (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \cos d \\ \rho_2\ sen\ d_2 &= (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}\ sen\ d \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \varphi_1\ sen\ \theta \\ \eta &= \rho_1\ sen\ \varphi_1 \cos d_1 - \rho_1 \cos \varphi_1\ sen\ d_1 \cos \theta \\ \zeta &= \rho_2\ sen\ \varphi_1\ sen\ d_2 + \rho_2 \cos \varphi_1 \cos d_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Pongamos ahora $\eta_1 = \dfrac{\eta}{\rho_1}$ y asumamos ζ_1 tal que

$$\xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1 \tag{6}$$

o lo que es igual

$$\begin{aligned} \xi &= \cos\varphi_1 \, sen\, \theta \\ \eta_1 &= sen\, \varphi_1 \cos d_1 - \cos\varphi_1 \, sen\, d_1 \cos\theta \\ \zeta_1 &= sen\, \varphi_1 \, sen\, d_1 + \cos\varphi_1 \cos d_1 \cos\theta \end{aligned} \tag{7}$$

La cantidad ζ_1 difiere tan poco de ζ que se puede sustituir una por otra en el término $\iota\zeta$ Pero si se desea mayor precisión, puede recuperarse ζ una vez conocido ζ_1. En efecto, de la segunda y tercera de (7)

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 \cos\theta &= -\eta_1 \, sen\, d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ sen\, \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \, sen\, d_1 \end{aligned}$$

que sustituidos en ζ dan

$$\zeta = \rho_2 \zeta_1 \cos(d_1 - d_2) - \rho_2 \eta_1 \, sen\,(d_1 - d_2) \tag{8}$$

El problema tiene ahora la forma

$$\begin{aligned} (l - i\zeta)\, sen\, Q &= x - \xi \\ (l - i\zeta) \cos Q &= y - \eta \\ \xi^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

que para un valor de Q determinan ξ, μ_1 y ζ_1. Una vez conocidos estos, las ecuaciones

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 \, sen\,\theta &= \xi \\ \cos\varphi_1 \cos\theta &= -\eta_1 \, sen\, d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ sen\,\varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \, sen\, d_1 \end{aligned} \tag{10}$$

proporcionan φ_1 y θ, con los cuales se encuentra la latitud y longitud del punto correspondiente al valor de Q elegido mediante

$$\tan\varphi = \frac{\tan\varphi_1}{\sqrt{1 - e^2}} \;\; ; \;\; \omega = \mu_1 - \theta \tag{11}$$

Procederemos por tanto y en primer lugar a resolver (9). De la primera y la segunda

$$\begin{aligned} \xi &= x - l\, sen\, Q + i\,\zeta_1\, sen\, Q \\ \eta_1 &= \frac{y}{\rho_1} - \frac{l\cos Q}{\rho_1} + \frac{i\,\zeta_1}{\rho_1}\cos Q \\ &\simeq \frac{y}{\rho_1} - \frac{l\cos Q}{\rho_1} + i\,\zeta_1 \cos Q \end{aligned}$$

y si llamamos

$$\begin{aligned} a &= x - l\, sen\, Q = sen\,\beta\, sen\,\gamma \\ b &= \frac{y}{\rho_1} - \frac{l\cos Q}{\rho_1} = sen\,\beta\cos\gamma \end{aligned} \tag{12}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \xi &= sen\,\beta\, sen\,\gamma + i\,\zeta_1\, sen\, Q \\ \eta_1 &= sen\,\beta\cos\gamma + i\,\zeta_1 \cos Q \end{aligned} \tag{13}$$

que sustituimos en la tercera de (9) encontrando sin dificultad

$$\begin{aligned}\zeta_1^2 &= 1 - \xi^2 - \eta_1^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\, i\, \zeta_1\, sen\,\beta \cos(\,Q - \gamma\,) - i^2 \zeta_1^2\end{aligned}$$

de donde

$$\zeta_1 = \frac{-2i\, sen\,\beta\cos(\,Q-\gamma\,) \pm \sqrt{[2i\, sen\,\beta \cos(\,Q-\gamma\,)]^2 + 4(1+i^2)\cos^2\beta}}{2(1+i^2)}$$

y si despreciamos los términos en i^2

$$\zeta_1 = \pm [\,\cos\beta - i\, sen\,\beta \cos(\,Q - \gamma\,)\,]$$

Para eliminar la ambigüedad del signo vemos que una generatriz del cono corta a la superficie de la Tierra en dos puntos, uno por encima y otro por debajo del plano fundamental. Pero si observamos un eclipse lo hacemos por encima del plano fundamental, con lo cual habremos de tomar el valor positivo. β y γ vienen determinados por (12). Conocidos estos, (14) proporciona ζ_1 y 13 da ξ y η_1, con lo que el problema queda resuelto mediante (10) y (11).

De los puntos pertenecientes a la línea que hemos encontrado, en unos el eclipse estará comenzando y en otros acabando. Si en un instante T un punto se encuentra sobre la superficie del cono, en un instante posterior T+dT se encontrará dentro o fuera del mismo según que el eclipse esté comenzando o terminando. Es decir, según que

$$\frac{d}{dT}\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - (l - i\,\zeta)^2 \right]$$

sea positiva o negativa. Efectuando la derivación:

$$P \equiv (x - \xi)\left[\frac{dx}{dT} - \frac{d\xi}{dT}\right] + (y - \eta)\left[\frac{dy}{dT} - \frac{d\eta}{dT}\right] - (l - i\,\zeta)\left[\frac{dl}{dT} - i\,\frac{d\zeta}{dT}\right] \qquad (15)$$

y teniendo en cuenta (1)

$$P = (l - i\,\zeta)\left[(x' - \xi')\, sen\, Q + (y' - \eta')\cos Q - (l' - i\,\zeta') \right] = LP' \qquad (16)$$

La cantidad P será positiva o negativa según que L y P' tengan signos iguales u opuestos. Para eclipses anulares L es positivo, y por tanto el eclipse comienza o termina según que P' sea negativo o positivo. Para eclipses totales L es negativo, y el eclipse comienza o termina según que P' sea positivo o negativo.

x', y' y 1' se deducen de las tablas de elementos Besselianos, pero ξ', η' y ζ' han de encontrarse a partir de (2) considerando fijos ω y φ. Como $\theta = \mu_1 - \omega$, $\theta' = \mu'_1$, y poniendo

$$\mu' = \mu_1'\; sen\; 1'' \;\; ; \;\; d' = \frac{dd}{dT}\; sen\; 1''$$

$$\begin{aligned}
\xi' &= \mu' \rho \cos \varphi' \cos \theta \\
&= \mu' (- \eta \, sen\, d + \zeta \cos d) \\
&= \mu' [- y \, sen\, d + \zeta \cos d + (l - i \zeta) \, sen\, d \cos Q] \\
\eta' &= \mu' \xi \, sen\, \dot{d} - d' \zeta \\
&= \mu' [- x \, sen\, d - (l - i \zeta) \, sen\, d \, sen\, Q] - d' \zeta \\
\zeta' &= - \mu' \xi \cos d + d' \eta \\
&= \mu' [- x \cos d + (l - i \zeta) \cos d \, sen\, Q] \\
&\quad + d' [y - (l - i \zeta) \cos Q]
\end{aligned} \tag{17}$$

Sustituyendo en (16) y despreciando los términos en i^2 e id

$$\begin{aligned}
P' = a' - b' \cos Q + c' \, sen\, Q \\
- \zeta (\mu' \cos d \, sen\, Q - d' \cos Q)
\end{aligned} \tag{18}$$

siendo

$$\begin{aligned}
a' &= - l' - \mu' i x \cos d \\
b' &= - y' + \mu' x \, sen\, d \\
c' &= x' + \mu' y \, sen\, d + \mu' i l \cos d
\end{aligned} \tag{19}$$

En la práctica, cuando se dibujan sobre el mapa las intersecciones del cono con la superficie de la Tierra, se advierte inmediatamente en que puntos el eclipse está comenzando y en que otros terminando. La condición de comienzo o fin del eclipse puede ponerse en forma más compacta llamando

$$\begin{aligned}
e \, sen\, E = b' \;&;\; f \, sen\, F = d' \\
e \cos E = c' \;&;\; f \cos F = \mu' \cos d
\end{aligned} \tag{20}$$

con lo cual

$$P' = a' + e\ sen\ (Q - E) - \zeta f\ sen\ (Q - F)$$

Puesto que sólo nos interesa el signo de P' y como a' y F son cantidades muy pequeñas, poniendo ζ_1 en lugar de ζ encontramos las condiciones:

$$\begin{aligned} &e\ sen\ (Q - E) < \zeta_1 f\ sen\ Q \quad \textit{comenzando} \\ &e\ sen\ (Q - E) > \zeta_1 f\ sen\ Q \quad \textit{terminando} \end{aligned} \tag{21}$$

para el eclipse anular o parcial. Para eclipses totales las condiciones son las inversas:

$$\begin{aligned} &e\ sen\ (Q - E) < \zeta_1 f\ sen\ Q \quad \textit{terminando} \\ &e\ sen\ (Q - E) > \zeta_1 f\ sen\ Q \quad \textit{comenzando} \end{aligned} \tag{22}$$

Método iterativo

Si bien el método analítico es elegante y directo, las numerosas transformaciones de variables pueden oscurecer una idea sencilla. Por eso se expone el método iterativo, que aunque es tosco y más lento sólo usa las ecuaciones fundamentales y puede ser programado con facilidad.

Partimos de

$$\begin{aligned} (l - i\zeta)\ sen\ Q &= x - \xi \\ (l - i\zeta) \cos Q &= y - \eta \\ \rho \cos \varphi'\ sen\ \theta &= \xi \end{aligned}$$

$$\rho \, sen \, \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \, sen \, d \cos \theta = \eta$$
$$\rho \, sen \, \varphi' \, sen \, d + \rho \cos \varphi' \cos d \cos \theta = \zeta$$

En primera aproximación, supondremos que la Tierra es esférica y tomaremos $\rho = 1$:

$$(l - i \zeta) \, sen \, Q = x - \xi$$
$$(l - i \zeta) \cos Q = y - \zeta$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

Como $i\zeta$ es pequeño, podemos tomar en primera aproximación

$$\xi_0 = x - l \, sen \, Q$$
$$\eta_0 = y - 1 \cos Q$$
$$\zeta_0 = (1 - \xi_0^2 - \eta_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

y a partir de aquí

$$\xi_1 = x - (1 - i \zeta_0) \, sen \, Q$$
$$\eta_1 = y - (1 - i \zeta_0) \cos Q$$
$$\zeta_1 = (1 - \xi_1^2 - \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

El proceso puede reiterarse, convergiendo rápidamente hasta obtener los valores deseados. Entonces

$$\xi = \cos \varphi' \, sen \, \theta$$
$$\eta = sen \, \varphi' \cos d - \cos \varphi' \, sen \, d \cos \theta$$
$$\zeta = sen \, \varphi' \, sen \, d + \cos \varphi' \cos d \cos \theta$$

de donde

$$\cos \varphi' \, sen\, \theta = \xi$$

$$sen\, \varphi' = \eta \cos d + \zeta \cos d$$

$$\cos \varphi' \cos \theta = - \eta \, sen\, d + \zeta \cos d$$

que proporcionan en primera aproximación φ' y θ y por tanto φ y ω de

$$\tan \varphi' = (1 - e^2) \tan \varphi \;\; ; \;\; \omega = \mu_1 - \theta$$

Conocida φ obtenemos en segunda aproximación el radio terrestre mediante

$$\rho = \frac{1 - 2e^2 sen^2\varphi + e^4 sen^2\varphi}{(1 - e^2 sen^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

Esto nos permite encontrar en segunda aproximación las coordenadas del punto de la curva partiendo de

$$(1 - i\, \zeta) \, sen\, Q = x - \xi$$

$$(1 - i\, \zeta) \cos Q = y - \zeta$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2$$

y siguiendo el esquema

$$\xi_0 = x - l \, sen\, Q$$

$$\eta_0 = y - l \cos Q$$

$$\zeta_0^2 = \rho^2 - \xi_0^2 - \eta_0^2$$

....

$$\xi_n = x - l \, sen\, Q + i\, \zeta_{n-1} \, sen\, Q$$

$$\eta_n = y - l \cos Q + i\, \zeta_{n-1} \cos Q$$

$$\zeta_n = \rho^2 - \xi_n^2 - \eta_n^2$$

obtener una nueva terna de coordenadas.

Ahora

$$\xi = \rho \cos \varphi' \; sen \; \theta$$
$$\eta = \rho \; sen \; \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \; sen \; d \cos \theta$$
$$\zeta = \rho \; sen \; \varphi' \; sen \; d + \rho \cos \varphi' \cos d \cos \theta$$

de donde

$$\cos \varphi' \; sen \; \theta = \frac{\xi}{\rho}$$
$$sen \; \varphi' = \frac{\eta}{\rho} \cos d + \frac{\zeta}{\rho} \; sen \; d$$
$$\cos \varphi' \cos \theta = - \frac{\eta}{\rho} \; sen \; d + \frac{\zeta}{\rho} \cos d$$

y obtenemos en segunda aproximación θ y φ' y por consiguiente ω y φ que proporcionan una nueva aproximación para el radio con la que puede iniciarse de nuevo del proceso. En segunda aproximación, sin embargo, el resultado es ya satisfactorio, teniendo en cuenta que estamos despreciando el efecto de la refracción atmosférica.

Curva de contacto en el horizonte

Esta curva está formada por aquellos puntos para los cuales el eclipse comienza o termina cuando el Sol se encuentra en el horizonte. Dado que en este caso el efecto de la refracción es notable, será suficiente tomar $\zeta_1 = 0$ como la condición que han de satisfacer todos estos puntos sin temor a cometer un error mayor que el ya asumido al despreciar la refracción. Entonces (1) adopta la forma simple

$$\begin{aligned} l\ sen\ Q &= x - \xi \\ l \cos Q &= y - \eta \end{aligned} \tag{23}$$

Llamando

$$\begin{aligned} m\ sen\ M &= x \ ; \ p\ sen\ \gamma = \xi \\ m \cos M &= y \ ; \ p \cos \gamma = \eta \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} l\ sen\ Q &= m\ sen\ M - p\ sen\ \gamma \\ l \cos Q &= m \cos M - p \cos \gamma \end{aligned} \tag{24}$$

de donde

$$l^2 = m^2 + p^2 - 2\, m\, p \cos (M - \gamma)$$

o bien

$$1 - \cos (M - \gamma) = \frac{l^2 - (m - p)^2}{2\, m\, p} = 2\ sen^2 \frac{1}{2} (M - \gamma) \tag{25}$$

Si ponemos $\lambda = M - \gamma$ o bien $\lambda = \gamma - M$, ya que al estar el seno elevado al cuadrado el resultado es el mismo, tendremos:

$$2\, sen^2 \frac{\lambda}{2} = \frac{l^2 - (m - p)^2}{2\, m\, p} = \frac{(l + m - p)(l - m + p)}{2\, m\, p}$$

o:

$$sen \frac{\lambda}{2} = \pm \sqrt{\frac{(l + m - p)(l - m + p)}{4\, m\, p}} \tag{26}$$

$\frac{\lambda}{2}$ ha de tomarse siempre menor que 90° y el doble signo permite calcular los dos puntos de la superficie de la Tierra que satisfacen la condición en un instante dado. En (25) conocemos aproximadamente 1, m, M, pero desconocemos p. Sin embargo, de

$$\begin{gathered} \xi^2 + \eta_1^2 = 1 \quad ; (\zeta_1 = 0) \\ p\, sen\, \gamma = \xi \\ p \cos \gamma = \eta \end{gathered}$$

se deduce que ha de ser $p \cong 1$. Tomando en primera aproximación p = 1 en (25) obtenemos un valor de γ que puede mejorarse en la siguiente forma: poniendo ξ = sen γ'_1, de $\xi^2 + \eta^2_1 = 1$, $\eta_1 = \cos \gamma'$, y como $\eta = \rho_1\, \eta_1$

$$\begin{gathered} p\, sen\, \gamma = sen\, \gamma' \\ p \cos \gamma = \rho_1 \cos \gamma' \end{gathered} \tag{27}$$

de donde

$$\tan \gamma = \frac{1}{\rho_1} \tan \gamma' \tag{28}$$

$$p = \frac{sen\ \gamma'}{sen\ \gamma} = \frac{\rho_1 \cos \gamma'}{\cos \gamma} \tag{29}$$

El nuevo valor de p dado por (28) puede usarse de nuevo en (25) para obtener un γ que en (27) da γ', valor que puede tomarse como definitivo.

Sustituyendo en (10)

$$\begin{aligned} \xi &= sen\ \gamma' \\ \eta_1 &= \cos \gamma' \\ \zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1\ sen\ \theta &= sen\ \gamma' \\ \cos \varphi_1 \cos \theta &= - \cos \gamma'\ sen\ d_1 \\ sen\ \varphi_1 &= \cos \gamma' \cos d_1 \end{aligned} \tag{30}$$

que junto con

$$\omega = \mu_1 - \theta \ ; \ \tan \varphi = \frac{\tan \varphi_1}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}$$

resuelven el problema. El Sol está saliendo o poniéndose según que el ángulo θ, que es el ángulo horario del punto Z, se encuentre entre 180 y 360° o entre 0 y 180°.

Queda por determinar si el eclipse está empezando o terminando. Como ζ = 0 y a' es pequeña, a efectos prácticos basta conocer el signo de *sen* (Q - E). Usando (24) en la condición de principio o fin del eclipse tenemos para eclipses anulares o parciales

$$\begin{aligned} m \, sen\,(M - E) &< p \, sen\,(\gamma - E) \quad comenzando \\ m \, sen\,(M - E) &> p \, sen\,(\gamma - E) \quad terminando \end{aligned} \tag{31}$$

Límites temporales del eclipse

Para aplicar el método precedente de determinación de las curvas de contacto en el orto y en el ocaso, es necesario conocer los extremos del intervalo temporal en que la solución es posible. Cuando la superficie del cono sea tangente al elipsoide, las dos soluciones dadas por (26) se reducirán a una, lo que ocurre cuando $\lambda = 0$ es decir, cuando $M = \gamma$. Pero si $\lambda = 0$ el numerador del segundo miembro también ha de anularse, con lo que tenemos las dos posibilidades

$$l + m - p = 0 \qquad (32)$$

$$l - m + p = 0 \qquad (32)$$

Hay dos tangencias exteriores del cono con el elipsoide: la que da comienzo al eclipse, primer punto de la superficie desde el que se observa contacto, y la que le da fin, último punto de la superficie que observa contacto. En ambos casos el eje del cono se encuentra fuera de la Tierra, con lo que ha de ser

$$m = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = p + l \tag{33}$$

que es el valor más alto de las dos condiciones anteriores. Los contactos interiores ocurren cuando el eje de sombra está cortando al elipsoide, con lo cual

$$m = p - l$$

Tenemos por tanto en el primer y último contacto

$$\begin{aligned} (p + l)\ sen\ M &= x \\ (p + l)\ cos\ M &= y \end{aligned} \tag{34}$$

y sea T el instante en que estas condiciones se satisfacen. Si T_0 es un instante intermedio, pongamos

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \tau \\ x &= x_0 + x' \tau \\ y &= y_0 + y' \tau \end{aligned} \tag{35}$$

Llamando

$$\begin{aligned} m_0\ sen\ M_0 &= x_0 \ ;\ n\ sen\ N = x' \\ m_0 \cos M_0 &= y_0 \ ;\ n\ cos\ N = y' \end{aligned}$$

las condiciones (34) se escriben como

$$\begin{aligned} (p + l)\ sen\ M &= m_0\ sen\ M_0 + \tau\, n\ sen\ N \\ (p + l) \cos M &= m_0 \cos M_0 + \tau\, n \cos N \end{aligned} \tag{36}$$

a partir de donde

$$\begin{aligned} (p+l)\,sen\,(M-N) &= m_0\,sen\,(M_0-N) \\ (p+l)\cos(M-N) &= m_0\cos(M_0-N)+n\,\tau \end{aligned} \tag{37}$$

y definiendo $\psi = M - N$:

$$\begin{aligned} sen\,\psi &= \frac{m_0\,sen\,(M_0-N)}{p+l} \\ \tau &= \frac{p+l}{n}\cos\psi - \frac{m_0}{n}\cos(M_0-N) \\ T &= T_0+\tau \end{aligned} \tag{38}$$

cos ψ puede tener signo positivo o negativo, lo que da los dos valores de T requeridos. Para los contactos interiores

$$\begin{aligned} sen\,\psi &= \frac{m_0\,sen\,(M_0-N)}{p-l} \\ \tau &= \frac{p-l}{n}\cos\psi - \frac{m_0}{n}\cos(M_0-N) \end{aligned} \tag{39}$$

Estos dos contactos no pueden ocurrir para p - l < m_0 *sen* $(M_0 - N)$ lo que daría un valor imposible para *sen* ψ. Asumiremos que p = 1 en (38). Teniendo en cuenta que $\lambda = 0$, $\gamma = M$, y como $M = N + \psi$, $\gamma = N + \psi$ valor con el que calculamos una nueva aproximación de p mediante (27) y (28) que empleamos nuevamente en (38).

Método iterativo

La condición de que el punto de observación se encuentre sobre el cono es:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2$$

Si consideramos la Tierra como esférica,

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 = 1 \;\; ; \;\; \zeta = 0 \\ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2 \end{aligned} \qquad (40)$$

es un sistema no lineal que determina π ξ y η y que puede resolverse de forma iterativa o gráfica. En efecto, los dos puntos (ξ, η) que satisfacen (40) son las dos intersecciones de dos circunferencias: una de centro en el origen y de radio unidad y otra de centro (x, y) y radio l. Si obtenemos gráficamente los valores (ξ, η) de los dos puntos, primero y último, en que el eclipse comienza o termina sobre el horizonte, podremos usarlos después para buscar una mejor aproximación siguiendo el esquema siguiente:

$$\eta_1 = \pm (1 - \xi_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi_1 = x \pm (l^2 - (y - \eta_1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_k = \pm (1 - \xi_{k-1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi_k = x \pm (l^2 - (y - \eta_k)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Es necesario elegir el signo correcto, lo que se hace teniendo en cuenta los valores obtenidos gráficamente. La tercera iteración es ya suficiente, y de

$$\xi = \cos\varphi' \; sen\,\theta$$
$$\eta \cos d = sen\,\varphi'$$
$$-\eta \; sen\,d = \cos\varphi' \cos\theta$$
$$\theta = \mu_1 - \omega \;\; ; \;\; \tan\varphi = \frac{1}{1 - e^2}\tan\varphi'$$

obtenemos ω y θ. φ se determina como sen-1 $(\eta \cos d)$ y teniendo en cuenta que no puede ser $|\varphi - d| > 90°$. θ se obtiene teniendo en cuenta el signo del seno y del coseno. Si se desea obtener las curvas correspondientes al eclipse total o anular se reproducirán los cálculos empleando el valor del radio l_1 del cono de sombra en lugar del valor 1 del cono de penumbra.

Curva de máximo en el horizonte

Encontraremos la curva que contiene a los puntos desde los que se observa el máximo del eclipse con el Sol en el horizonte.

Cuando un punto de la Tierra de coordenadas (ξ, η, ζ) no se encuentra en la superficie del cono sino a una distancia Δ de su eje, tenemos:

$$\Delta \; sen\, Q = x - \xi$$
$$\Delta \cos Q = y - \eta \qquad (41)$$

El grado de oscurecimiento, es decir, la fracción del diámetro solar ocultada por la Luna, depende de que distancia el lugar de observación se encuentre inmerso en el cono, esto es, de la distancia $L - \Delta$, siendo L el radio de sombra en un plano paralelo al principal y que contiene al punto de observación. Para el máximo del eclipse se cumplirá la condición

$$\frac{dL}{dT} - \frac{d\Delta}{dT} = 0 \tag{42}$$

De (41)

$$\frac{d\Delta}{dT} = (x' - \xi') \, sen \, Q + (y' - \eta') \cos Q \tag{43}$$

y de L = l - i ζ

$$\frac{dL}{dT} = l' - i \, \zeta' \tag{44}$$

de forma que la condición (42) no es otra que

$$(x' - \xi') \, sen \, Q + (y' - \eta') \cos Q - (l' - i \, \zeta') = 0$$

o

$$P' = 0 \tag{45}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} P' &= a' - b' \cos Q + c' \, sen \, Q - \zeta \, (\mu' \cos d \, sen \, Q - d' \cos Q) \\ &= a' + e \, sen \, (Q - E) - \zeta f \, sen \, (Q - F) \end{aligned}$$

Como no necesitamos gran precisión, ya que las observaciones de máximo oscurecimiento no son especialmente importantes, basta tomar $\zeta = 0$, $\alpha' = 0$, con lo que la condición (45) se reduce a

$$sen \, (Q - E) = 0 \tag{46}$$

que se cumple si

$$Q = E; \; Q = E + 180^\circ \tag{47}$$

y entonces la condición (41) es

$$\begin{aligned} \pm \Delta \, sen \, E &= x - \xi \\ \pm \Delta \cos E &= y - \eta \end{aligned} \tag{48}$$

que junto con

$$\xi^2 + \eta_1^2 = 1$$

determinan los puntos requeridos de la curva. El ángulo E es conocido para cada instante dado, pero O es desconocido. Escribiendo

$$\begin{aligned} m \, sen \, M &= x \;\; ; \;\; p \, sen \, \gamma = \xi \\ m \cos M &= y \;\; ; \;\; p \cos \gamma = \eta \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \pm \Delta \, sen \, E &= m \, sen \, M - p \, sen \, \gamma \\ \pm \Delta \cos E &= m \cos M - p \cos \gamma \end{aligned} \tag{49}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= m \, sen \, (M - E) - p \, sen \, (\gamma - E) \\ \pm \Delta &= m \cos (M - E) - p \cos (\gamma - E) \end{aligned} \tag{50}$$

y llamando $\psi = \gamma - E$:

$$sen \, \psi = \frac{m \, sen \, (M - E)}{p} \tag{51}$$

La primera de estas ecuaciones da dos valores de ψ, ya que podemos tomar el coseno como positivo o negativo. Pero como satisfacen el problema aquellos puntos que se encuentran dentro del cono, ha de ser $\Delta < l$. Por tanto, el valor de ψ para el que $\Delta > l$ ha de ser excluido. Por otra parte, p es un número próximo a l, y podemos tomar este valor para calcular en primera aproximación ψ. Entonces $\gamma = \psi + E$, y mediante (28) y (29) obtendremos un valor de p con el que recalcular ψ. A partir de este nuevo valor buscaremos γ, y de $\tan \psi = \rho_1 \tan \gamma$, γ'. La longitud y la latitud de un punto de la curva buscada, para un cierto valor de E, la encontramos a partir de (29).

El intervalo temporal en que existe la solución a este problema es el mismo que el determinado anteriormente al buscar las curvas de contacto en el horizonte.

El grado de oscurecimiento se expresa usualmente como la fracción del diámetro aparente del Sol cubierto por la Luna. Cuando el punto de observación se encuentra inmerso en la penumbra hasta llegar al borde mismo de la sombra, en cuyo momento se observará eclipse total, la distancia del punto al borde de la penumbra es igual a la diferencia entre los radios de la penumbra y de la sombra, que es la suma algebraica $L + L_1$, ya que L_1, radio de la sombra en el plano del observador, es negativo. En cualquier otro caso, la distancia del lugar de observación a la penumbra es $L - \Delta$, con lo que, aproximadamente, el grado de oscurecimiento es

$$D = \frac{L - \Delta}{L - L_1} \tag{52}$$

Como puede apreciarse en la fig. 39, el grado de oscurecimiento para un observador situado en Q es

$$D = \frac{AB}{AC}$$

que es aproximadamente

$$\frac{QL}{L_1L} \simeq \frac{L - \Delta}{L + L_1}$$

Esta fórmula puede usarse si el eclipse es anular, en cuyo caso L_1 es positivo. Incluso cuando Δ es cero, y en consecuencia el eclipse es central, el valor de D dado por (52) es menor que la unidad, como debe de ser de acuerdo con el hecho de que el oscurecimiento no es total, ya que puede observarse un delgado anillo alrededor de la Luna.

En nuestro caso, $\zeta = 0$,

$$D = \frac{L - \Delta}{l + l_1} \tag{53}$$

siendo l y l_1 los radios de penumbra y sombra en el plano principal.

Curvas límite norte y sur

Buscaremos la curva que contiene aquellos puntos más al Norte o al Sur desde los cuales puede observarse el eclipse. Desde uno de estos puntos, los discos del Sol y la Luna se tocan en un solo punto. La Luna pasa totalmente al Sur o totalmente al Norte del Sol, produciéndose una única tangencia. Esta curva es la envolvente de la familia de curvas que son las intersecciones del cono con la superficie de la Tierra en los instantes sucesivos del eclipse. La solución de este problema se deriva de la consideración de que en este caso el contacto simple es el máximo del eclipse. Entonces P'= 0, o bien

$$a' + e\, sen\,(Q - E) = \zeta f\, sen\,(Q - F) \tag{54}$$

En un instante determinado T, hemos de encontrar un punto perteneciente a la intersección del cono con el elipsoide para el cual los valores correspondientes de Q y z satisfagan la ecuación (54). Esto sólo puede hacerse mediante sucesivas aproximaciones. En primer lugar es necesario conocer un valor aproximado de Q. Para acotar los posibles valores, despreciamos a' y F en (54), ya que son siempre pequeños, y obtenemos

$$e \; sen \; (Q - E) = \zeta f \; sen \; Q \tag{55}$$

Los valores extremos de ζ son 0 y 1. Para $\zeta = 0$ tendríamos que

$$Q = E \; o \; Q = 180^{\circ} + E \tag{56}$$

Para $\zeta = 1$

$$e \; sen \; (\; Q - E \;) = f \; sen \; Q \tag{57}$$

Poniendo la ecuación anterior como

$$e \; sen \; (\; Q - \frac{E}{2} - \frac{E}{2} \;) = f \; sen \; (\; Q + \frac{E}{2} - \frac{E}{2} \;)$$

y desarrollando se obtiene

$$\tan \; (\; Q - \frac{E}{2} \;) = \frac{e + f}{e - f} \tan \frac{E}{2} \tag{58}$$

y haciendo

$$\tan \psi = \frac{e + f}{e - f} \tan \frac{E}{2}$$

queda

$$\tan \left(Q - \frac{E}{2} \right) = \tan \psi$$

que da como límites

$$Q = \frac{E}{2} + \psi \ ; \ Q = \frac{E}{2} + \psi + 180^0 \tag{59}$$

Por tanto asumiremos que Q se encuentra en el intervalo $[E, \frac{E}{2} + \psi]$ o bien en el intervalo $[E + 180^0, \frac{E}{2} + \psi + 180^0]$. Cuando la Tierra intersecta completamente al cono, existen dos curvas límite, Norte y Sur. Para una de ellas se toma Q en el primer intervalo, y para la otra en el segundo. Para calcular las líneas límite tomaremos una serie de instantes y dos series de valores de Q. A cada instante corresponden dos valores de Q, uno en cada intervalo. Solo existirá una curva límite si para una de las series de valores de Q se obtienen valores imposibles de ζ en el cálculo de la intersección del cono con el elipsoide. La ecuación $\eta = y - (l - i\zeta) \cos Q$, conocido el signo de cos Q, permite determinar si una serie pertenece a la curva Norte o Sur, ya que para la primera, la serie de los valores de η son mayores que la serie de valores de h deducidos de la segunda serie.

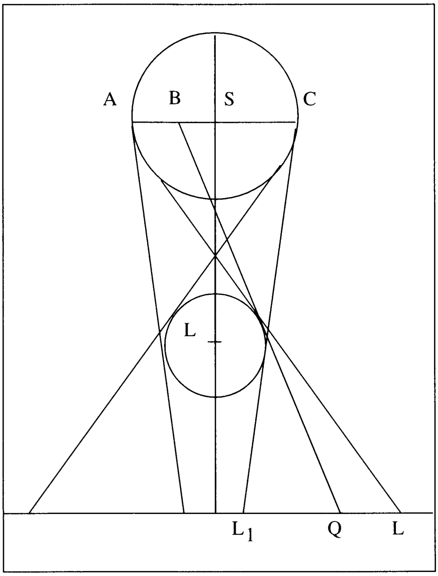

FIGURA 39.

Un esquema iterativo puede ser el siguiente: A partir del valor asumido de Q, y puesto que ζ puede sustituirse sin gran error por ζ_1, de (12), tomando $\rho_1 = 1$, encontramos β y de (14), aproximadamente, $\zeta_1 = \cos\beta$. Entonces (55) es

$$e \; sen \; (Q - E) = f \cos \beta \; sen \; Q$$

de donde

$$\tan\left(Q - \frac{E}{2}\right) = \frac{e + f\cos\beta}{e - f\cos\beta} \tan\frac{E}{2} \qquad (60)$$

que proporciona una nueva aproximación de Q que ya puede tomarse como definitiva. Conocido Q, (12) proporciona γ y β y (14) ζ_1; (13) ξ y η_1 y mediante (10) y (11) resolvemos finalmente el problema.

Otro posible esquema iterativo : El valor asumido de Q en (55) proporciona ζ y de

$$x - \xi = (l - i \zeta) \, sen \, Q$$
$$y - \eta = (l - i \zeta) \cos Q$$

encontramos ξ y η, y suponiendo $\rho = 1$, la condición

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

proporciona un nuevo valor de z, que en

$$\tan \left(Q - \frac{E}{2} \right) = \frac{e + f \zeta}{e - f \zeta} \tan \frac{E}{2}$$

da un segundo Q.

Para el cálculo de la serie de puntos, es necesario conocer los extremos temporales en los que el problema tiene solución. Éstos son evidentemente los mismos que determinan los contactos primero y último. Como puede verse, éste es uno de los problemas más intrincados de la teoría de eclipses.

Curva de eclipse central

La curva de eclipse central contiene a todos aquellos puntos desde los que se observa eclipse anular o total, y es la intersección del eje del cono con la superficie de la Tierra. En esencia es el mismo problema que el tratado en el primer apartado, con la particularidad de que la intersección del cono con la superficie se reduce a un punto. Esta condición se expresa como

$$l - i\zeta = 0$$

o bien

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta \end{aligned}$$

lo que supone una considerable simplificación de las ecuaciones. (9) y (12) se reducen a

$$\begin{aligned} \xi &= x = sen\,\beta\, sen\,\gamma \\ \eta_1 &= y_1 = \frac{y}{\rho_1} = sen\,\beta \cos\gamma \end{aligned} \tag{61}$$

Con

$$\zeta_1 = (1 - \xi^2 - \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

y (10)-(11) queda resuelto el problema.

Buscaremos a continuación los instantes extremos entre los que es posible la solución. Cuando puede observarse un eclipse central por primera vez desde la superficie de la Tierra, el eje del cono es tangente al elipsoide, luego $\zeta_1 = 0$ y

$$\xi^2 + \eta_1^2 = 1 \tag{62}$$

que equivale a

$$x^2 + y_1^2 = 1 \tag{63}$$

En (61) esto significa que *sen* $\beta = 1$ o cos $\beta = 0$, con lo que

$$x = sen\ \gamma$$
$$y_1 = cos\ \gamma \tag{64}$$

Llamando x' e y; a las variaciones horarias de x e y_1 y $T = T_0 + t$ al instante requerido del comienzo o fin del eclipse central, siendo T_0 un instante intermedio arbitrario, tenemos en el instante T

$$\left.\begin{aligned} sen\,\gamma &= x^0 + x'\,\tau \\ \cos\gamma &= y_1^0 + y_1'\,\tau \end{aligned}\right. \tag{65}$$

siendo x^0 e y^0_1 los valores de x e y_1 en T_0. Si ponemos

$$\left.\begin{aligned} m\,sen\,M &= x^0 \;;\; n\,sen\,N = x' \\ m\cos M &= y_1^0 \;;\; n\cos N = y_1 \end{aligned}\right. \tag{66}$$

tenemos

$$sen\,\gamma = m\,sen\,M + \tau\,n\,sen\,N$$
$$\cos\gamma = m\cos M + \tau\,n\cos N$$

a partir de donde

$$\begin{aligned} sen\,(\gamma - N) &= m\, sen\,(M - N) \\ \cos(\gamma - N) &= m \cos(M - N) + n\,\tau \end{aligned} \tag{67}$$

Llamando $\psi = \gamma$ - N se sigue

$$\begin{aligned} sen\,\psi &= m\, sen\,(M - N) \\ \tau &= \frac{\cos\psi}{n} - \frac{m\, cos\,(M - N)}{n} \\ T &= T_0 + \tau \end{aligned} \tag{68}$$

Tomaremos cos ψ con signo negativo para el comienzo y con signo positivo para el final del eclipse total. Para encontrar la longitud y latitud de los puntos extremos usaremos

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1\, sen\,\theta &= sen\,\gamma \\ \cos\varphi_1 \cos\theta &= -\cos\gamma\, sen\, d_1 \\ sen\,\varphi_1 &= \cos\gamma \cos d_1 \end{aligned}$$

junto con

$$\tan\varphi = \frac{\tan\varphi_1}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \omega = \mu_1 - \theta$$

que se deducen de (10), (11), (61) y (64).

Duración de un eclipse total o anular en un punto de la curva central

Si T es el instante en que se produce el eclipse central y t la duración del mismo, $T' = T \pm \frac{t}{2}$ son los instantes del comienzo y fin. Sean x e y las coordenadas de la Luna en T y ξ, η las del punto de observación. Sean x', y', ξ', η' las variaciones horarias correspondientes. Entonces, en el instante T'

$$
\begin{aligned}
(l - i\zeta)\, sen\, Q &= x \pm \frac{1}{2} x' t - (\xi \pm \frac{1}{2} \xi' t) \\
(l - i\zeta) \cos Q &= y \pm \frac{1}{2} y' t - (\eta \pm \frac{1}{2} \eta' t)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

siendo 1 el radio del cono de sombra en el plano principal. Pero, muy aproximadamente, en T' tenemos $x = \xi$ e $y = \eta$, con lo que (69) queda como

$$
\begin{aligned}
(l - i\zeta)\, sen\, Q &= \pm (x' - \xi') \frac{t}{2} \\
(l - i\zeta) \cos Q &= \pm (y' - \eta') \frac{t}{2}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Con suficiente aproximación, de (17) podemos tomar

$$
\begin{aligned}
\xi' &= \mu' [- y\, sen\, d + \zeta \cos d] \\
\eta' &= \mu' x\, sen\, d
\end{aligned}
$$

y usando (19)

$$
\begin{aligned}
x' - \xi' &= c' - \mu' \zeta \cos d \\
y' - \eta' &= - b'
\end{aligned}
$$

eliminando el doble signo en (70), ya que sólo nos interesa el valor numérico de t:

$$\tan Q = \frac{c' - \mu' \zeta \cos d}{- b'}$$
$$\frac{2 (l - i \zeta) \, sen \, Q}{c' - \mu' \zeta \cos d} = t \qquad (71)$$

Eclipse central a mediodía

Es interesante este punto, ya que desde él las observaciones se realizan en condiciones óptimas. En este caso será x = 0 , con lo que

$$y_1 = sen \, \beta \qquad (72)$$

Entonces las ecuaciones (10) se simplifican y toman la forma

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \, sen \, \theta &= \xi = x = 0 \\ \cos \varphi_1 \cos \theta &= - y_1 \, sen \, d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ &= \zeta_1 \cos d_1 - sen \, \beta \, sen \, d_1 \\ sen \, \varphi_1 &= y_1 \cos d_1 + \zeta_1 \, sen \, d_1 \end{aligned} \qquad (73)$$

De la primera, $\theta = 0$, con lo cual

$$\omega = \mu_1 \qquad (74)$$

y de la condición $\eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1$, la segunda o la tercera proporcionan

$$\varphi_1 = \beta + d_1 \qquad (75)$$

que determinan las coordenadas del punto buscado.

Límites norte y sur del eclipse total o anular

Las dos curvas límite del eclipse total o anular son muy próximas a la curva del eclipse central, y pueden deducirse de ésta sin recurrir al método del apartado 7. En realidad, las dos curvas límite están tan próximas a la curva del eclipse central que puede tomarse $\zeta_1 = \cos\beta$, donde β viene determinado por (61), en la ecuación aproximada que determina Q, que podemos encontrar mediante el método expuesto anteriormente. Las coordenadas de un punto de la curva central son ξ=x y $y_1 = \eta_1$ y las de un punto de la curva límite Norte o Sur son $x+dx$ e y_1+dy_1 . Entonces, de

$$(l - i\,\zeta_1)\, sen\, Q = x - \xi$$
$$(l - i\,\zeta_1) \cos Q = y - \rho_1 \eta_1$$

tenemos

$$dx = - (l - i\,\zeta_1)\, sen\, Q$$
$$dy_1 = - (l - i\,\zeta_1) \cos Q \qquad (76)$$

habiendo tomado $\rho_1 = 1$.

Sean φ_1, θ, ω los valores correspondientes a un punto de la curva central en un instante determinado, y $\varphi_1 + d\varphi_1$, $\omega + d\omega$ los de la curva límite. De

$$\cos\varphi_1\, sen\,\theta = \xi$$
$$\cos\varphi_1 \cos\theta = - \eta_1\, sen\, d + \zeta_1 \cos d_1$$
$$sen\,\varphi_1 = \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1\, sen\, d_1$$

diferenciando y teniendo en cuenta que $d\theta$ = -dω obtenemos

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 \cos\theta\, d\omega + sen\,\varphi_1\, sen\,\theta\, d\varphi_1 &= -\,dx \\ \cos\varphi_1\, sen\,\theta\, d\omega - sen\,\varphi_1 \cos\theta\, d\varphi_1 &= -\,dy_1\, sen\, d_1 \\ &\quad + d\zeta_1 \cos d_1 \\ \cos\varphi_1\, d\varphi_1 &= dy_1 \cos d_1 \\ &\quad + d\zeta_1\, sen\, d_1 \end{aligned} \tag{77}$$

De las dos primeras

$$\begin{aligned} sen\,\varphi_1\, d\varphi_1 &= dy_1\, sen\, d_1 \cos\theta - dx\, sen\,\theta \\ &\quad - d\zeta_1 \cos d_1 \cos\theta \\ d\omega &= -\,dx \cos\theta - dy_1\, sen\, d_1\, sen\,\theta \\ &\quad + d\zeta_1 \cos d_1\, sen\,\theta \end{aligned}$$

Introduciendo $d\zeta_1$ a partir de la tercera se tiene

$$\begin{aligned} \zeta_1\, d\varphi_1 &= -\,dx\, sen\,\theta\, sen\, d_1 + dy_1 \cos\theta \\ \zeta_1 \cos\varphi_1\, d\omega &= -\,dx\,(\cos\varphi_1 \cos d_1 \\ &\quad + sen\,\varphi_1 \cos\theta\, sen\, d_1) \end{aligned} \tag{78}$$

Finalmente, poniendo $\zeta_1 = \cos\beta$ y sustituyendo (75) en (77)

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{l - i\cos\beta}{\cos\beta}\,[\,(\cos\theta\, sen\, Q\, sen\, d_1 + sen\,\theta \cos Q)\tan\varphi_1 \\ &\quad + sen\, Q \cos d_1\,] \\ d\varphi_1 &= \frac{l - i\cos\beta}{\cos\beta}\,(\,sen\,\theta\, sen\, Q\, sen\, d_1 - \cos\theta \cos Q\,) \end{aligned} \tag{79}$$

En la práctica, podemos tomar $d\varphi \cong d\varphi_1$. Este método no es bueno cuando cos β se hace muy pequeño, y en particular pierde toda su validez en los puntos extremos de la curva central, en los que $\beta = 0$.

Sin embargo, siempre puede usarse el método del artículo 7. Éste da dos valores de Q que difieren en 180°, y cada uno de los cuales proporciona el mismo valor numérico para $d\varphi$ *y* $d\omega$, salvo con signos opuestos, por lo que basta calcularlos para un solo Q y obtener los puntos de las curvas límite como

$$\omega \pm d\omega$$
$$\varphi_1 \pm d\varphi$$