

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante
ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Reservados todos los derechos. No se permite reproducir, almacenar en sistemas de recuperación de la información ni transmitir alguna parte de esta publicación, cualquiera que sea el medio empleado –electrónico, mecánico, fotocopia, grabación, etc.–, sin el permiso previo de los titulares de los derechos de la propiedad intelectual.

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:



F. Javier Gil Chica

**TEORÍA DE ECLIPSES,
OCULTACIONES
Y TRÁNSITOS**

**Capítulo VI
Ecuaciones fundamentales**

Índice

Portada

Créditos

Capítulo VI: Ecuaciones fundamentales	5
Posición del eje de sombra	6
Distancia del punto de observación al eje de sombra	10
Radios de los conos de sombra y penumbra	14
Expresión analítica de la condición de principio o fin del Eclipse.....	17

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

Más adelante trataremos de las circunstancias en que un eclipse será observado en un punto dado, respondiendo a preguntas como cual será la hora de comienzo y final, en que puntos se tocarán los limbos del Sol y la Luna, que fracción del disco solar se verá oscurecida, cuanto durará el eclipse y a que hora se producirá el máximo oscurecimiento. Pero aquí no nos interesaremos por un eclipse como un fenómeno local, sino como un suceso a escala planetaria, y de esta manera nos plantearemos y daremos respuesta a preguntas como: en que punto se producirá el primer contacto del cono de sombra o penumbra y a que hora, en que zona se podrá observar el eclipse en un momento dado, en que región de la Tierra se podrá observar el eclipse en algún momento, en que puntos se observará el primer contacto a la

salida del Sol y en que otros en el ocaso, que trayectoria sobre la superficie seguirá la zona de totalidad, si el eclipse es total, y cual será su extensión... Pero comencemos, en este capítulo y en el siguiente, a dar respuesta a todas estas preguntas y a algunas más.

Posición del eje de sombra

El eje de sombra, que es aquel que une los centros de la Luna y el Sol, corta a la esfera celeste en aquel punto en que el observador situado en el centro de la Luna vería proyectado el centro del Sol. Sea O el centro de la Tierra, S el centro del Sol y L el centro de la Luna. Todas las líneas paralelas a SL cortan a la esfera celeste en el mismo punto Z. En primer lugar, calcularemos las coordenadas de este punto. Consideremos un sistema de referencia geocéntrico, ecuatorial y rectangular. El eje x está dirigido hacia el punto vernal γ , el eje y hacia el punto del Ecuador cuya ascensión recta es de 90° y el eje z es perpendicular a ambos. Sean en este sistema (α, δ, r) y (α', δ', r') las coordenadas esféricas de la Luna y el Sol respectivamente:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \cos \alpha & x' &= r' \cos \delta' \cos \alpha' \\y &= r \cos \delta \sin \alpha & y' &= r' \cos \delta' \sin \alpha' \\z &= r \sin \delta & z' &= r' \sin \delta'\end{aligned} \tag{1}$$

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

Consideremos ahora el sistema selenocéntrico paralelo al anterior. La posición del Sol en este sistema determina el punto Z. Si (a,d,G) son las coordenadas del Sol en el nuevo sistema, entonces:

$$\begin{aligned}x_s &= G \cos d \cos a \\y_s &= G \cos d \operatorname{sen} a \\z_s &= G \operatorname{sen} d\end{aligned}\tag{2}$$

y evidentemente

$$\begin{aligned}G \cos d \cos a &= r' \cos \delta' \cos \alpha' - r \cos \delta \cos \alpha \\G \cos d \operatorname{sen} a &= r' \cos \delta' \operatorname{sen} \alpha' - r \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\G \operatorname{sen} d &= r' \operatorname{sen} \delta' - r \operatorname{sen} \delta\end{aligned}\tag{3}$$

Ahora bien, si la Luna y el Sol están aparentemente muy próximos, las diferencias entre las coordenadas del punto Z y la Luna serán pequeñas, por lo que conviene proceder como sigue. Multiplicando la primera de (3) por $\operatorname{sen} \alpha'$ y la segunda por $\cos \alpha'$ y restando y multiplicando ahora la primera por $\cos \alpha'$, la segunda por $\operatorname{sen} \alpha'$ y sumando:

$$\begin{aligned}G \cos d \operatorname{sen} (a - \alpha') &= -r \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - \alpha') \\G \cos d \cos (a - \alpha') &= r' \cos \delta' - r \cos \delta \cos (\alpha - \alpha') \\G \operatorname{sen} d &= r' \operatorname{sen} \delta' - r \operatorname{sen} \delta\end{aligned}\tag{4}$$

Llamando $g=G/r'$ y $b=r/r'$

F. Javier Gil Chica
Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos

$$\begin{aligned}
 g \cos d \operatorname{sen} (a - \alpha) &= - b \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - \alpha') \\
 g \cos d \cos (a - \alpha') &= \cos \delta' - b \cos \delta \cos (\alpha - \alpha') \\
 g \operatorname{sen} d &= \operatorname{sen} \delta' - b \operatorname{sen} \delta
 \end{aligned} \tag{4}'$$

De las dos primeras

$$\tan (a - \alpha') = \frac{-n \operatorname{sen} (\alpha - \alpha')}{1 - n \cos (\alpha - \alpha')} \tag{5}$$

con $n = \frac{b \cos \delta}{\cos \delta'}$. La expresión anterior admite el desarrollo en serie de Fourier hasta segundo orden (Schaum. Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas)

$$a - \alpha' = - \left(n \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{n^2}{2} \frac{\operatorname{sen} 2 (\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen} 1''} \right) \tag{6}$$

donde el divisor $\operatorname{sen} 1''$ reduce los términos de la serie a segundos de arco.

Si tomamos $\cos (\alpha - \alpha') \cong 1$ y $\cos (\alpha - \alpha') \cong 1$, de la segunda y tercera de (4)' se tiene

$$\tan (d - \delta') = \frac{- b \operatorname{sen} (\delta - \delta')}{1 - b \cos (\delta - \delta')} \tag{7}$$

que de nuevo admite el desarrollo en serie

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

$$d - \delta = - \left(b \frac{\text{sen} (\delta - \delta')}{\text{sen } 1''} + \frac{b^2}{2} \frac{\text{sen } 2 (\delta - \delta')}{\text{sen } 1''} \right) \quad (8)$$

En la práctica, son suficientes las expresiones aproximadas de (5) y (7)

$$a - \alpha' = - \frac{b \cos \delta \sec \delta'}{1 - b} (\alpha - \alpha') \quad (9)$$

$$d - \delta' = - \frac{b \text{sen} (\delta - \delta')}{1 - b \cos (\delta - \delta')} \quad (10)$$

El eje paralelo al eje de sombra por el centro de la Tierra intersecta en un punto al plano perpendicular a él y que contiene al observador. La intersección del cono con este plano es una circunferencia. Una vez encontrada la posición del eje de sombra mediante (9) y (10) buscaremos la distancia entre el punto de observación y dicho eje, y la compararemos con el radio de esta circunferencia.

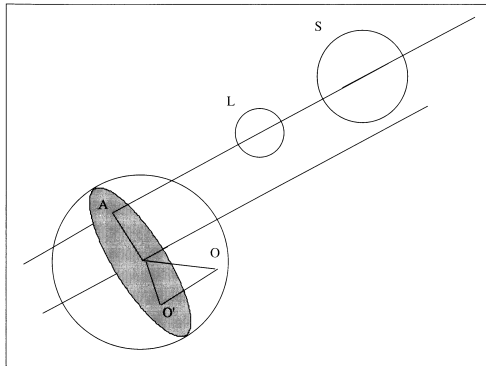


FIGURA 34.

Distancia del punto de observación al eje de sombra

Consideremos un sistema rectangular de referencia, cuyo plano principal contiene al centro de la Tierra y es perpendicular al eje de sombra, fig. 35.

Sea π este plano que contiene a los ejes x e y , y sea zy el plano perpendicular a π definido por el círculo de declinación que contiene al punto Z . La ascensión recta del punto X es $90^\circ + a$. Sean x, y, z las coordenadas de la Luna M' en este sistema. Entonces

$$\begin{aligned}x &= r \cos M'X \\y &= r \cos M'Y \\z &= r \cos M'Z\end{aligned}$$

Aplicando la trigonometría esférica a los triángulos $M'PX$, $M'PY$, $M'PZ$:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a) \\y &= r [\operatorname{sen} \delta \cos d - \cos \delta \operatorname{sen} d \cos (\alpha - a)] \\z &= r [\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} d + \cos \delta \cos d \cos (\alpha - a)]\end{aligned} \tag{11}$$

En efecto, en el triángulo $M'PX$:

$$\cos M'X = \cos M'P \cos PX + \operatorname{sen} M'P \operatorname{sen} PX \cos P = \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a)$$

En el triángulo $M'PY$

$$\begin{aligned}\cos M'Y &= \cos M'P \cos PY + \operatorname{sen} M'P \operatorname{sen} PY \cos P = \operatorname{sen} \delta \cos \delta \\&\quad - \cos \delta \operatorname{sen} \delta \cos (\alpha - a)\end{aligned}$$

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

En el triángulo M'PZ:

$$\cos M'Z = \cos M'P \cos PZ + \sin M'P \sin PZ \cos P = \sin \delta \sin \delta + \cos \delta \cos \delta \cos (\alpha - a)$$

Hasta ahora hemos hecho lo siguiente: usando dos sistemas paralelos entre sí, ecuatoriales, uno geocéntrico y otro selenocéntrico, hemos encontrado la dirección del eje de sombra. Usando un eje paralelo al eje de sombra que pasa por el centro de la Tierra, definimos un nuevo sistema, en el cual acabamos de encontrar las ecuaciones que determinan la posición de la Luna. Cualquier punto del eje de sombra, fig. 34, tiene las mismas coordenadas x e y representadas por el punto A sobre el plano fundamental π . Si observamos desde un punto O, sus coordenadas (ζ, η, θ) determinan un punto O', que es la proyección de O sobre el plano fundamental, de forma que la distancia entre el lugar de observación y el eje de sombra viene dada por:

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \tag{12}$$

que puede ponerse en la forma paramétrica

$$\begin{aligned} \Delta \sin Q &= x - \xi \\ \Delta \cos Q &= y - \eta \end{aligned} \tag{13}$$

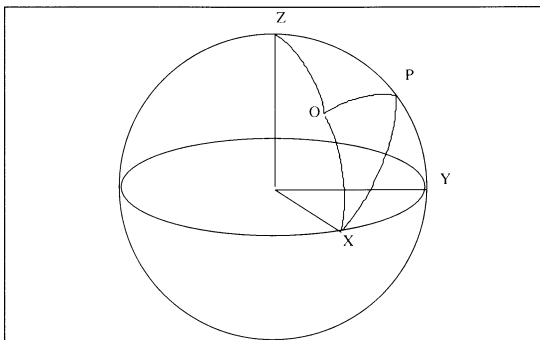


FIGURA 36.

Para encontrar las coordenadas del punto de observación recurriremos a la fig. 36, donde

ξ, η, ζ = Coordenadas del punto de observación

φ = Latitud del lugar

φ' = Latitud geocéntrica

ρ = Radio del elipsoide a la latitud del observador

μ = Tiempo sidéreo

Si O es el cenit geocéntrico del observador, tenemos entonces:

$$\xi = \rho \cos OX = \rho [\cos OP \cos PX + \text{sen } OP \text{ sen } PX \cos P]$$

siendo:

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

$$OP = 90 - \varphi'$$

$$PX = 90$$

El ángulo en P es la diferencia entre las ascensiones rectas de O y X. Como $\mu - \alpha = H$, y O con P define el meridiano del lugar, $H = 0$ y $\alpha = \mu$ ascensión recta del lugar. Por tanto:

$$\xi = \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} (\mu - \alpha)$$

Considerando los triángulos POY y POZ completamos el conjunto de ecuaciones (14)

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} (\mu - \alpha) \\ \eta &= \rho [\operatorname{sen} \varphi' \cos d - \cos \varphi' \operatorname{sen} d \cos (\mu - \alpha)] \\ \zeta &= \rho [\operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} d + \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - \alpha)] \end{aligned} \quad (14)$$

Si determinamos A y B por las ecuaciones

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen} B &= \rho \operatorname{sen} \varphi' \\ A \cos B &= \rho \cos \varphi' \cos (\mu - \alpha) \end{aligned}$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} (\mu - \alpha) \\ \eta &= A \operatorname{sen} (B - d) \\ \zeta &= A \cos (B - d) \end{aligned} \quad (14)$$

$\mu - \alpha$ es el Ángulo Horario del punto Z. Si para un instante dado

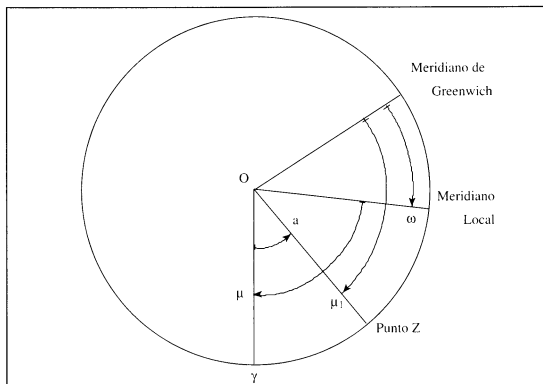


FIGURA 37.

μ_1 = Ángulo Horario de Z respecto a Greenwich

ω = Longitud Oeste del lugar de observación

entonces el Ángulo Horario del punto Z para el observador es

$$\theta = \mu - \alpha = \mu_1 - \omega$$

como se deduce de la fig. 37.

Radios de los conos de sombra y penumbra

Nos apoyaremos en las figs. 38 que representan los conos de sombra y penumbra. Sean:

H = Semidiámetro aparente del Sol a su distancia media

k = Razón entre los radios de la Luna y del Ecuador terrestre

Capítulo VI Ecuaciones fundamentales

f = ángulo del cono

$c = VF$ = distancia del vértice del cono al plano principal

$1 = EF$ = Radio de la sombra en el plano principal

$L = CD =$ Radio de la sombra en el plano $z = \zeta$

Si llamamos a al radio terrestre, r a la distancia Tierra-Sol, r' a la distancia Tierra-Luna y π y π' a los paralajes del Sol y la Luna (ángulo subtendido por el radio ecuatorial de la Tierra a la distancia del Sol y la Luna, respectivamente), tenemos

$$\frac{a}{r} = \text{sen } \pi ; \frac{a}{r'} = \text{sen } \pi' ; \frac{r'}{r} = \frac{\text{sen } \pi}{\text{sen } \pi'}$$

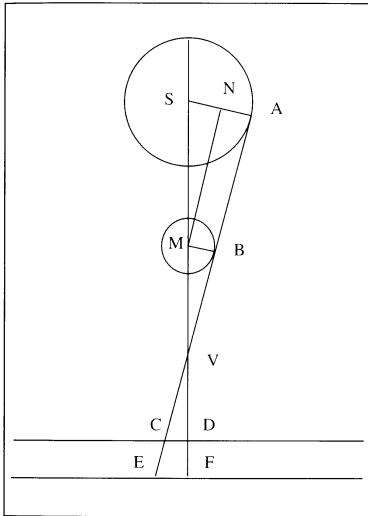


FIGURA 38A.

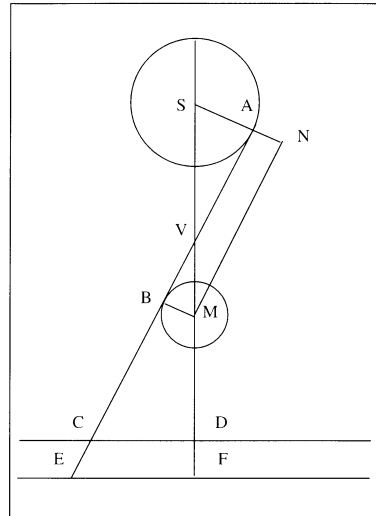


FIGURA 38B.

de manera que si π_0 es el paralaje medio del Sol y tomamos como unidad la distancia media Tierra-Sol

$$r' = \frac{\text{sen } \pi_0}{\text{sen } \pi'} \quad (15)$$

También tenemos

$$\text{sen } \pi_0 = \text{Radio de la Tierra}$$

$$\text{sen } H = \text{Radio del Sol}$$

$$k \text{ sen } \pi_0 = \text{Radio de la Luna}$$

Para el cono de penumbra se deduce de la figura que

$$\text{sen } f = \frac{SN}{SM} = \frac{SA + AN}{MS} = \frac{\text{sen } H + k \text{ sen } \pi_0}{r'g} \quad (16)$$

y para el cono de sombra

$$\text{sen } f = \frac{SN}{MS} = \frac{SA - AN}{MS} = \frac{\text{sen } H - k \text{ sen } \pi_0}{r'g} \quad (17)$$

en definitiva

$$\text{sen } f = \frac{\text{sen } H \pm k \text{ sen } \pi_0}{r'g} \quad (18)$$

Si tomamos ahora como unidad el radio terrestre, tenemos que

$$VM = \frac{k}{\text{sen } f} \quad \text{ya que} \quad \text{sen } f = \frac{MB}{VM}$$

Capítulo VI

Ecuaciones fundamentales

de donde

$$c = VF = z \pm \frac{k}{\operatorname{sen} f} \quad (19)$$

y de aquí

$$l = VF \tan f = z \tan f \pm k \operatorname{sec} f \quad (20)$$

$$L = (c - \zeta) \tan f = l - \zeta \tan f \quad (21)$$

Para el cono de penumbra, $c - \zeta$ es siempre positivo, y por tanto también L es positivo. Para el cono de sombra, $c - \zeta$ es negativo cuando el vértice del cono cae por debajo del plano del observador. En este caso se produce eclipse total y L es una cantidad negativa. Cuando el vértice del cono de sombra cae por encima del plano del observador, L es positivo, y en este caso se tiene eclipse anular. Por brevedad, llamaremos $i = \tan f$

Expresión analítica de la condición de principio o fin del eclipse

Comenzará o terminará un eclipse en un punto cuando su distancia al eje de sombra sea igual al radio del cono en el plano paralelo al fundamental que contiene al punto, es decir, cuando

$$\Delta = L \quad (22)$$

o lo que es igual

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (l - i \zeta)^2 \quad (23)$$

que puede escribirse en forma paramétrica

$$\begin{aligned} x - \xi &= (l - i \zeta) \operatorname{sen} Q \\ y - \eta &= (l - i \eta) \operatorname{cos} Q \end{aligned} \quad (24)$$

(22) es la ecuación fundamental de la teoría de eclipses. Las cantidades a , d , x , l , e e i pueden ser calculadas mediante las fórmulas anteriores. Son independientes del lugar de observación y es conveniente calcularlas unas horas antes y unas horas después de la conjunción en longitud del Sol y la Luna, a partir de las cuales, por interpolación, pueden hallarse para cualquier instante intermedio. A estos elementos se les conoce como «**Elementos Besselianos**» del eclipse, y pueden encontrarse por ejemplo en las Efemérides del Observatorio de San Fernando, donde en lugar de la Ascensión Recta del punto Z se da el Ángulo Horario para Greenwich.