TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante

ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:

Espagrafic

F. Javier Gil Chica

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

Capítulo V
Eclipses de Sol. Condiciones generales

Índice

Capítulo V

Eclipses de sol. Condiciones generales

Condiciones geométricas

En su movimiento de traslación alrededor de la Tierra, la Luna proyecta un cono de sombra y un cono de penumbra. El primero está definido por las tangentes externas al Sol y la Luna. El segundo por las tangentes internas, fig. 21. Cuando el cono de sombra o penumbra intersecta la superficie de la Tierra se produce un eclipse. El tipo de eclipse depende de las posiciones relativas del cono de sombra o penumbra y del punto de observación. Un punto situado dentro del cono de sombra a una distancia de la Luna menor que el vértice V' observará un eclipse total de Sol. Un observador situado en el interior del cono de penumbra observará un eclipse parcial. Si el observador se encuentra sobre el eje de sombra a una distancia de la Luna mayor que V', observa-

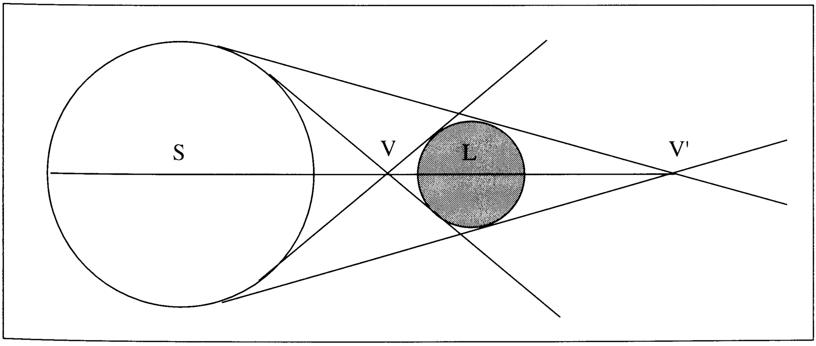


FIGURA 21.

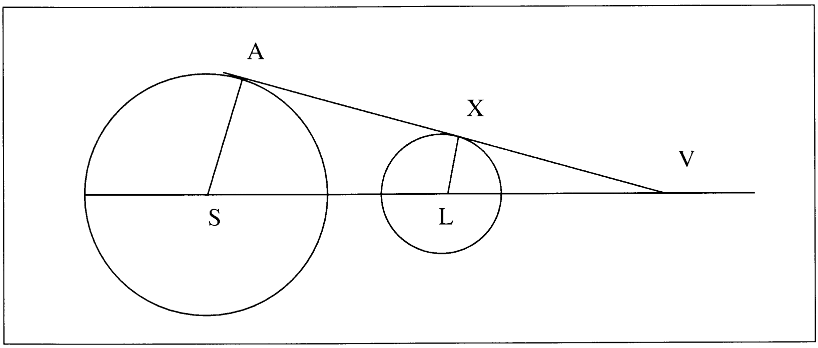


FIGURA 22.

rá un eclipse anular de Sol, ya que para tal observador el tamaño aparente del Sol será mayor que el de la Luna.

Preguntémonos en primer lugar sobre la longitud LV del cono de sombra, fig. 22. En esta figura se observa que

$$\frac{XL}{LV} = \frac{AS}{SL + LV} \qquad (1)$$

de donde

$$LV = \frac{SL \times R_1}{R - R_1} \qquad (2)$$

Siendo R el radio del Sol y R_1 el radio de la Luna. La longitud del cono de sombra resulta algo menor que la distancia Tierra-Luna, pero debido a las excentricidades de las órbitas de la Tierra y la Luna, el vértice del cono de sombra puede alcanzar ocasionalmente la superficie de la Tierra.

Si no lo alcanza, desde la intersección del eje del cono con la Tierra, se podrá observar un eclipse anular.

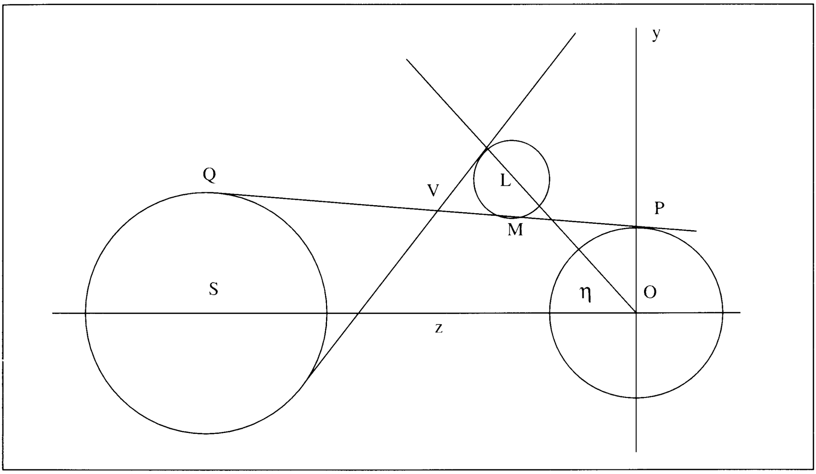
La condición para que se produzca un eclipse solar se puede expresar en términos de la distancia angular geocéntrica entre los centros del Sol y la Luna. Sea η esta distancia angular y supongamos, fig. 23, que SO y OP son perpendiculares. Se observará un eclipse parcial al menos en un punto de la superficie de la Tierra cuando ésta sea tangente al cono de penumbra. Sea QM la generatriz del cono y P el punto de tangencia con la Tierra. Si r es la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna, la condición para que se observe eclipse parcial al menos en un punto de la Tierra, el punto de tangencia, es que

$$r\,sen\,\eta - R_1 \leq y\,(\,r\cos\zeta\,) \qquad (3)$$

siendo y(z) la ecuación de la recta QP en el sistema formado por los ejes SO y OP. y(z) es de la forma

$$y\,(\,z\,) = R_t + \frac{(\,R - R_t\,)}{R_0}\,z \qquad (4)$$

donde R_t es el radio de la Tierra y R_0 la distancia Sol-Tierra.



Si llamamos

$S = R/R_0$ = Semidiámetro del Sol

$S_1 = R_1/r$ = Semidiámetro de la Luna

$P = R_t/R$ = Paralaje del Sol

$P_1 = R_t/r$ = Paralaje de la Luna

y tomamos sen $\eta \cong \eta$ y cos $\eta \cong 1$, la condición para que se produzca un eclipse parcial es que

$$\eta \leq S_1 + P_1 + S - P \tag{5}$$

Análogamente, la condición para que se produzca al menos en un punto un eclipse total de sol, fig. 24, es que el cono de sombra sea tangente a la Tierra:

$$r\, sen\, \eta - R_1 \leq y\,(\, r \cos \eta\,) \tag{6}$$

siendo ahora

$$y\,(\,z\,) = R_t - \frac{R_t + R}{R_0}\,z$$

de donde

$$\eta \leq S_1 + P_1 - P - S \tag{7}$$

Volvamos al caso de un eclipse parcial y relacionemos la separación geocéntrica η entre los centros del Sol y la Luna con la separación angular que se observa desde el punto P, fig. 25. Para un observador en P la distancia cenital de la Luna es 90-S_1 y la del Sol es 90+S. Si z_1 y z son las correspondientes distancias cenitales geocéntricas, entonces

$$\eta = z - z_1 \tag{8}$$

Observemos también que

$$z_1 - (\,90 - S_1\,) = j \tag{9}$$

luego

$$z_1 = 90 - S_1 + j$$

Pero $sen\, j \simeq \frac{r}{\Delta}$, siendo Δ la distancia Tierra-Luna y $r \cong R \cos S_1$, luego

$$sen\, j \simeq \frac{R \cos S_1}{\Delta} \simeq sen\, P_1 \cos S_1$$

y finalmente

$$z_1 = 90 - S_1 + sen^{-1}(\, sen\, P_1 \cos S_1\,)$$

y de la misma forma

$$z = 90 - S + sen^{-1}(\, sen\, P \cos S\,)$$

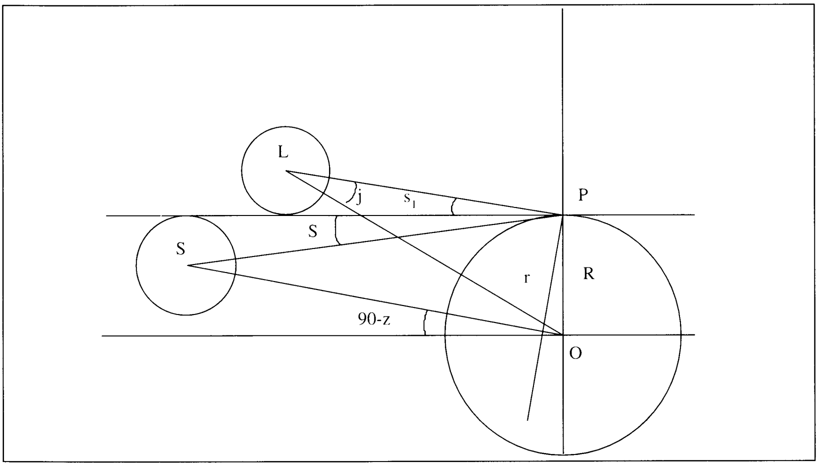


FIGURA 25.

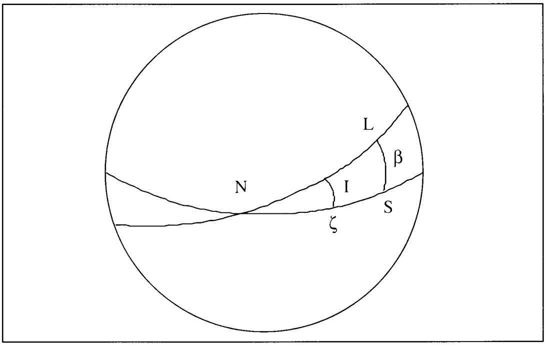


FIGURA 26.

Expresaremos la posibilidad de que se produzca un eclipse como una condición sobre la latitud β de la Luna. Se producirá un eclipse cuando el Sol y la Luna se encuentren alineados, es decir, cuando tengan la misma longitud eclíptica. Pero como la órbita de la Luna forma un cierto ángulo con la Eclíptica, puede suceder que en el momento de la conjunción la Luna esté tan separada de la Eclíptica que sea $\beta > \eta$.

Si la conjunción en longitud se produce cuando el Sol se encuentra en S y la Luna en L, fig. 26, habrá eclipse al menos parcial si

$$\beta \leq S_1 + P_1 + S - P \tag{12}$$

El hecho de que el movimiento en longitud de la Luna se produzca a una velocidad distintas a la del Sol, hace que la mínima distancia entre ambos se dé cuando tienen distintas longitudes. El efecto de esto es que pueda darse eclipse aún cuando sea $\beta > S_1 + P_1 + S - P$, aunque el límite superior para la latitud de la Luna está solo ligerísimamente por encima del segundo miembro de la desigualdad (12), que por tanto puede tomarse a efectos prácticos como exacta. Aplicando la relación del seno por el coseno al triángulo NSL de la fig. 26:

$$\cos\beta \; sen\,\zeta = sen\,NL \cos I \qquad (13)$$

pero como $sen\,NL = sen\,\beta / sen\,I$,

$$sen\,\zeta = \tan\beta \cot I \qquad (14)$$

En la fig. 27 se pretende representar el movimiento del Sol y la Luna. Como la latitud de esta última es pequeña en el momento de la conjunción, consideraremos a NSL como un triángulo plano. Cuando el Sol se encuentra en A, la Luna está en B, y los dos se mueven a distintas velocidades para llegar a S y L, momento en que tienen la misma longitud. Como sólo nos interesa la posición relativa Sol-Luna, podemos considerar a S como origen, y suponer que la Luna se mueve en una órbita N'L de inclinación I'. Así, al instante en que el Sol se encuentra en A y la Luna en B, le corresponde el punto B' de la nueva trayectoria, en el cual la posición relativa respecto al Sol es la misma. La mínima distancia Sol-Luna es

$$\eta = \beta \cos I' \tag{15}$$

Por otra parte

$$\tan I' = \frac{SL}{N'S} \;\; ; \;\; \tan I = \frac{SL}{NS}$$

luego

$$\tan I' = \frac{NS}{N'S} \tan I \tag{16}$$

Consideremos el intervalo de tiempo entre el paso de la Luna por el Nodo N y su conjunción en longitud con el Sol. Durante este tiempo la longitud de la Luna se ha incrementado en SN y la del Sol en NN'. Si q es la razón entre las velocidades del movimiento en longitud de la Luna y el Sol:

$$\frac{SN}{SN'} = \frac{SN}{SN - NN'} = \frac{q}{q - 1}$$

de donde

$$\tan I' = \frac{q}{q - 1} \tan I \tag{17}$$

Combinando (5) y (15), se encuentra que la condición para que se produzca un eclipse parcial es

$$\beta \leq (S_1 + P_1 + S - P) \sec I' \qquad (18)$$

En la práctica, esta condición no difiere apreciablemente de (12), ya que el valor medio de I' es de unos cinco grados y medio. Como tan β es una función creciente, de (14) se deduce la condición

$$\zeta \leq sen^{-1} (\cot I \tan \beta) \qquad (19)$$

Debe tenerse en cuenta que ninguno de los parámetros de los segundos miembros de (18) y (19) son constantes, pero pueden usarse los valores extremos dados en la tabla adjunta (Smart) para acotar los valores extremos de β y ζ.

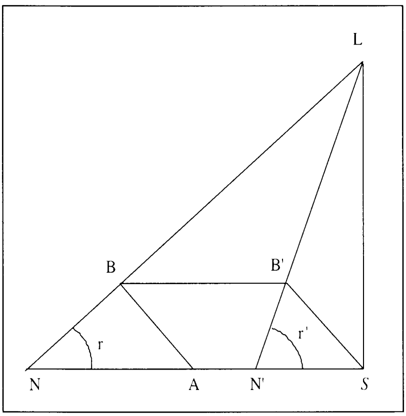


FIGURA 27.

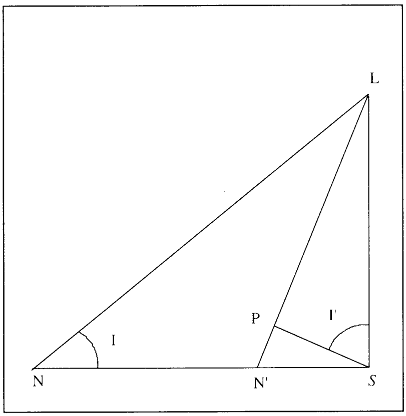


FIGURA 28.

Tabla I

	MAX	MIN	MED
S_1	16'45"	14'41"	15'33"
P_1	61'27"	53'53"	57'03"
S	16'18"	15'46"	16'00"
P	00'09"	00'09"	00’09"
I	5°18'	4°59'	05°08'
q	16.2	10.9	13.5
I'	5°50'	5°18'	5°32'

Por ejemplo, si en (18) tomamos los valores máximos de S_1, P_1, S e I' y el valor mínimo de P, se puede asegurar que no ocurrirá eclipse si $\beta > \beta_{max}$. De la misma manera, si se usan los valores mínimos de S_1, P_1, S e I' y el valor máximo de P, se puede asegurar que ocurrirá eclipse si $\beta < \beta_{min}$. Análogamente, puede asegurarse que ocurrirá eclipse si $\zeta < \zeta_{min}$ y que no ocurrirá si $\zeta > \zeta_{max}$ siendo

$$sen\ \zeta_{max} = \cot I_{min} \tan \beta_{max} \tag{20}$$

$$sen\ \zeta_{min} = \cot I_{max} \tan \beta_{min} \tag{21}$$

Acotar los valores de la latitud por encima y por debajo de los cuales un eclipse total es imposible o seguro, requiere una discusión paralela a la acabada de exponer pero sobre la condición

$$\beta < (P_1 + S_1 - S - P)\ sec\ I'$$

que resulta de combinar (7) y (15).

El Saros

El período Saros fue ya conocido por los astrónomos caldeos, quienes le dieron el nombre que aún conserva. Hemos dicho que la condición para que se produzca un eclipse es que el Sol y la Luna se encuentren cerca del Nodo de la órbita lunar. Supongamos que en un momento dado el Sol y la Luna se encuentran en el Nodo N_1, fig. 29. A partir de ese momento el Sol se mueve en sentido directo completando una revolución sidérea en 365.25 días medios. En efecto, de la relación

$$\frac{\text{año trópico}}{360^{\circ}\text{-}5''02} = \frac{\text{año sidéreo}}{360^{0}}$$

y sabiendo que un año trópico equivale a 365.24 días medios, se justifica el dato anterior. Por su parte, los nodos de la órbita lunar retrogradan completando una revolución en 6798.3 días medios. Por tanto, el Sol volverá a coincidir con el Nodo N_1 al cabo de 346.62 días medios. El período entre dos lunas nuevas consecutivas es de 29.53 días. Diecinueve pasos del Sol por el Nodo que hemos tomado como referencia son 6585.8 días, mientras que 223 lunaciones son 6585.3 días. Quiere decir esto que al cabo de 6585 días y un poco más se repetirá la situación de partida, coincidiendo el Sol y la Luna en el Nodo con una posición relativa muy parecida a la inicial, reproduciéndose el eclipse que tuvo lugar aproximadamente 6585 días antes, que son unos 18 años y 11 días.

Si anotamos las fechas y circunstancias de los eclipses producidos a partir de uno dado durante los 18 años y 11 días siguientes, obtendremos una serie que se reproducirá aproximadamente durante los siguientes períodos Saros. Así, el eclipse del 17 de abril de 1912 fue la repetición de los que ocurrieron el 5 de abril de 1894, el 25 de marzo de 1876, el 15 de marzo de 1858 ... y así hasta el 25 de mayo de 1389, en que ocurrió por primera vez.

Estas reproducciones no son en número indefinido debido a que el paso del Sol por el Nodo y la Lunación no son períodos exactamente conmensurables. Además, intervienen cantidades como paralajes y semidiámetros que varían con períodos distintos que tampoco son conmensurables. Sucede que ocurre un cierto eclipse de Sol para una determinada posición del Sol y la Luna respecto a un Nodo. Al cabo de un Saros, dicha posición se repite, pero más aproximada al Nodo, y así sucesivamente en Saros siguientes, hasta llegar al Nodo y rebasarlo. El eclipse continúa repitiéndose en Saros sucesivos, pero ya alejándose los astros del Nodo, hasta que este alejamiento hace el eclipse imposible. Cada serie de eclipses comienza con un eclipse parcial y de muy escasa duración, siendo tan sólo visible en las inmediaciones de un polo terrestre. En los Saros siguientes los eclipses de esa serie van siendo de mayor duración, aún parciales, y la región donde son visibles se va extendiendo hacia latitudes más bajas. Más adelante se presentará como anular o total y a partir de entonces se manifestará hacia latitudes cada vez mas cercanas al polo opuesto a aquel en que se observó por primera vez. Los últimos eclipses de la serie serán parciales y de escasa duración. Un eclipse puede repetirse 60 ó 70 veces en otros tantos Saros consecutivos.

Frecuencia de los eclipses

La máxima distancia del Sol al Nodo de la órbita para la que se puede dar un eclipse viene dada por (20), que usando los valores extremos de la TABLA I da 18°26'59"44. Sabemos que la línea de los Nodos retrograda completando una revolución en 6798.3 días. Como el intervalo entre dos pasos consecutivos del Sol por el Nodo es de 346.62 días, el Sol se separa del Nodo a razón de 30.67 grados por mes sinódico (intervalo entre dos lunas nuevas o lunaciones). En la fig. 30, NN' es la línea de los Nodos. $NS_1 = NS_2 = N'S'_1 = N'S'_2 =$ 18°26'59"44. El arco $S_1 S_2 = S'_1 S'_2 =$ 36°53'58", que es mayor que el ángulo en que el Sol se separa del Nodo en un mes sinódico. Por tanto, cuando el Sol se encuentre en el arco S_1 S_2 , pueden producirse uno o dos eclipses, y otro u otros dos cuando se encuentra en S'_1 S'_2. De hecho, siempre se producirán dos como mínimo, ya que la mínima distancia al Nodo ζ_{min}= 15°22'34"9 determina un arco M_1M_2 de 30°45'9"8 que el Sol recorre, respecto al Nodo, en un tiempo superior al de una lunación, y dentro del cual el eclipse se producirá con seguridad. Supongamos un caso favorable en que se produzca un eclipse en las proximidades de S2 en enero. Otros dos se producirán en las cercanías de S'_2 y S'_1 y cuando vayan a cumplirse los 346 días se producirá un cuarto eclipse cerca de S_1. Pero aún podrá producirse un quinto eclipse en diciembre. Así pues, el número mínimo de eclipses que puede haber en un año es de dos y el máximo de cinco.

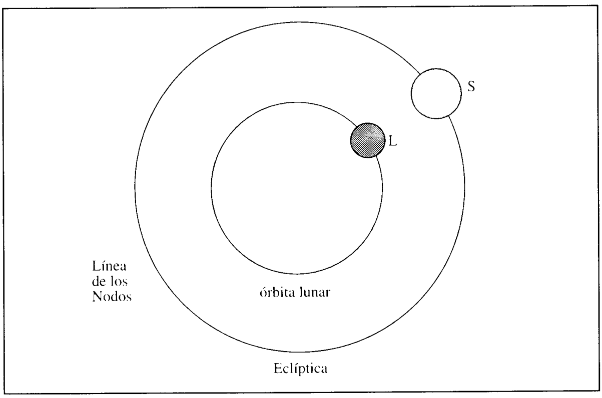


FIGURA 29.

Causa de la precesión de la línea de los nodos

Nos ocuparemos aquí de la causa que provoca la precesión de la línea de los Nodos lunares. Esta no es otra que el par ejercido por el Sol sobre la Luna, cuya órbita forma un ángulo de unos cinco grados con la Eclíptica. Debido a que el período de revolución de la Luna en torno a la Tierra es mucho menor que el período de la precesión, y unas 18 veces menor que el de revolución del sistemas Tierra-Luna en torno al Sol, es posible adoptar un modelo en el que tanto el Sol como la Luna son sustituidos por anillos circulares, es decir, los sustituimos por distribuciones uniformes de masa que ocupan sus respectivas órbitas, fig. 31.

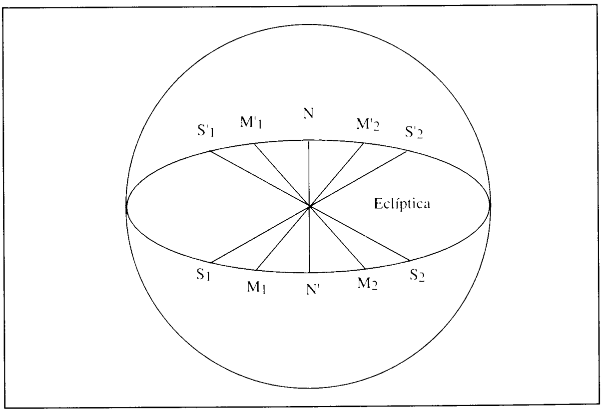


FIGURA 30.

Sea XYZ un sistema de referencia rectangular geocéntrico y sean r y R las distancias medias de la Tierra a la Luna y al Sol.

Si $\lambda=\frac{M}{2\pi R}$ y $\mu=\frac{m}{2\pi r}$ son las densidades lineales de ambos anillos, siendo M la masa del Sol y m la de la Luna, el par $d^2\boldsymbol{N}$ que el elemento de masa en la posición (R, ψ) ejerce sobre el elemento situado en (r, θ) viene dado por:

$$d^2\boldsymbol{N} = \frac{G\lambda\mu rRd\theta d\psi}{d^3}\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{d} \qquad (22)$$

siendo $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{R} - \mathbf{r}$, de donde $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R}$.

El vector **R** viene dado por

$$\boldsymbol{R} = R\,(\cos\psi,\ sen\psi,\ 0)$$

Para encontrar las componentes de ***r*** acudimos a la fig. 32, donde hemos introducido los ángulos auxiliares δ y μ, siendo δ = QP, μ = OP, φ = RQ.

En función de μ y δ, está claro que

$$\boldsymbol{r} = r\,(\cos\delta\cos\mu\,,\ \cos\delta\, sen\,\mu\,,\ sen\,\delta\,)$$

y usando las relaciones del seno, seno por el coseno y coseno, se encuentra sin dificultad que

$$\boldsymbol{r} = r\,(\cos\theta,\ \cos i\ sen\theta,\ sen\ i\ sen\ \theta)$$

siendo i la inclinación de la órbita lunar respecto a la Eclíptica, con lo cual

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = rR\,(-sen\ i\ sen\ \theta\ sen\ \psi)$$
$$sen\ i\ sen\ \theta\ sen\ \psi$$
$$\cos\theta\ sen\psi - \cos i\ sen\theta\cos\psi)$$

Por otra parte $d^2 = R^2 + r^2 - 2\,r\,R\cos\varphi$, y usando la relación del coseno, $d^2 = R^2 + r^2 - 2\,r\,R\,(\cos\theta\cos\psi + sen\ \theta\ sen\ \psi\cos i)$.

De donde

$$d^2\boldsymbol{N} = \frac{G\lambda\mu rRd\theta d\psi}{[\,R^2 + r^2 - 2rR(\cos\theta\cos\psi + sen\theta\, sen\psi\cos i\,)\,]^{\frac{3}{2}}}\,rR\,\hat{k} \qquad (23)$$

siendo $\hat{k} = \hat{r} \times \hat{d} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R}}{rR}$. El par total ejercido se obtiene efectuando la integral $\boldsymbol{N} = \iint d^2\boldsymbol{N}\,d\theta\,d\psi$. Esta puede simplificarse extrayendo el factor $(\,R^2 + r^2\,)^{\frac{3}{2}}$ y viendo que el factor $\frac{rR}{(\,R^2 + r^2\,)^{\frac{3}{2}}}\cos\varphi$ es muy pequeño, por lo que se puede tomar hasta primer orden del desarrollo en serie $(1-x)^{-n} \cong 1 + nx$ y nos queda

$$\frac{1}{d^3} - \frac{1}{(\,R^2 + r^2\,)^{\frac{3}{2}}}\left[\,1 + \frac{3rR}{R^2 + r^2}\cos\varphi\,\right]$$

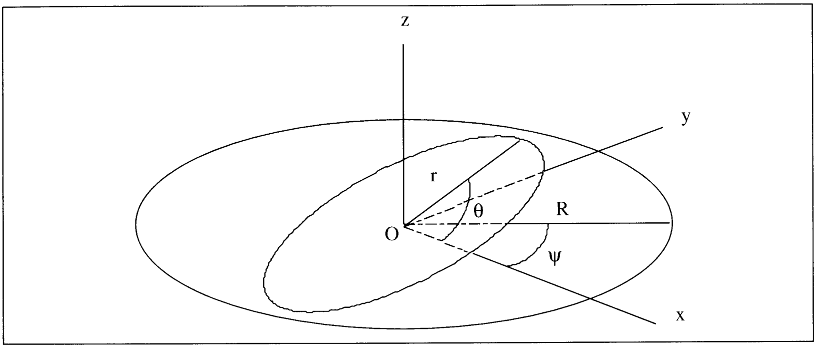


FIGURA 31.

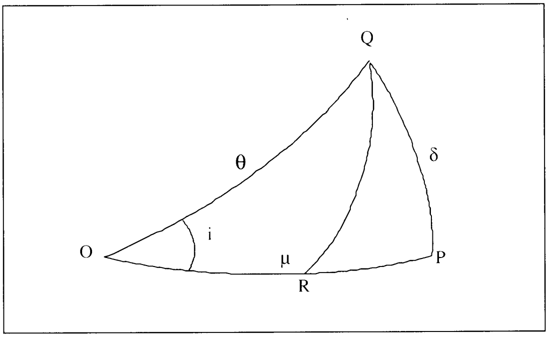


FIGURA 32.

El par ejercido por el anillo externo sobre el elemento de masa en la posición (r, θ) se obtiene integrando para ψ. Al efectuar la integración, sólo son distintos de cero los términos

$$\int_0^{2\pi} sen^2 \psi \; d\psi = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi \; d\psi = \pi$$

con lo cual

$$d\boldsymbol{N} = \frac{3\pi G\lambda\mu r^3 R^3}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} (-sen^2\theta \; seni \cos i \, , \, seni \; sen\theta \cos\theta \, , 0) \qquad (24)$$

El par total que el anillo externo ejerce sobre el interno es

$$\boldsymbol{N} = \int_0^{2\pi} d\theta \, d\boldsymbol{N} = -\frac{3\pi^2 G\lambda\mu r^3 R^3}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} (\, seni \cos i \, , \, 0 \, , 0 \,)$$

y como era de esperar es nulo para i=0 o para i=90°. En función de las masas del Sol y de la Luna

$$\boldsymbol{N} = (\, -\frac{3}{4}\frac{GMmr^2R^2}{(R^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} \, sen \, i \, cos \, i \, , 0 \, , 0 \,) \qquad (25)$$

Los vectores N y L, par y momento cinético respectivamente, son perpendiculares entre sí, lo que implica una precesión del vector ***L*** alrededor del eje z, o lo que es lo mismo, una precesión de la línea de los nodos. Apoyándonos en la fig. 33 y teniendo en cuenta

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

es decir, que ***N** y **dL*** son paralelos, vemos que

$$d\,\phi = \frac{|\,d\boldsymbol{L}|}{|\boldsymbol{L}|\,seni}$$

luego

$$\frac{d\,\phi}{dt} = \frac{|\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{L}|\,seni}$$

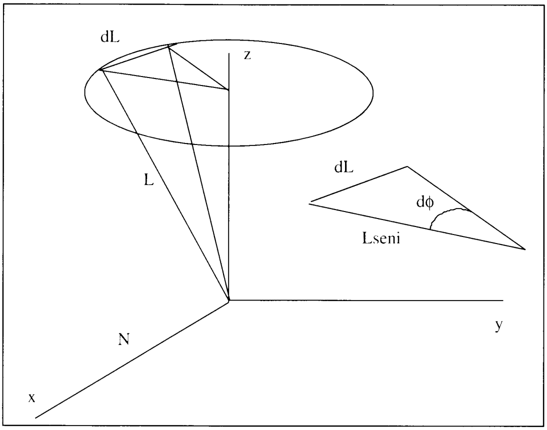


FIGURA 33.

Pero $|\mathbf{L}| = mr^2\omega$ siendo $\omega = \frac{2\pi}{27.3\ días}$, ya que 27.3 días es aproximadamente el período sidéreo de la Luna (2.358.720 seg.). Con todo esto obtenemos para la velocidad angular de precesión:

$$\Omega_{pre} = \frac{d\,\Phi}{dt} = \frac{3}{4}\,\frac{GM\,cosi}{\omega}\,\frac{R^2}{(\,R^2 + r^2\,)^{\frac{5}{2}}} \qquad (26)$$

de donde, introduciendo valores numéricos, se obtiene un período de 6551 días, en excelente acuerdo con el valor real de 6798 días.