TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante

ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:

Espagrafic

F. Javier Gil Chica

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

Capítulo II
Forma de la Tierra

Índice

Capítulo II

Forma de la Tierra

Un modelo físico sencillo

Las posiciones aparentes de aquellos cuerpos celestes que se encuentran a distancias mensurables de la Tierra son diferentes para observadores en distintos puntos sobre su superficie, y por tanto, antes de comparar observaciones realizadas en puntos distintos, hemos de tener cierto conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra.

Si la Tierra no girase alrededor de un eje, la atracción mutua de todas sus partes le conferiría una forma esférica, que es la que asegura un mínimo de energía potencial autogravitatoria. Pero cuando esta esfera se pone en movimiento de rotación, la fuerza centrífuga hace que adopte la forma de un elipsoide de revolución con el eje mayor en el plano del Ecuador, y aunque debido a las diferencias de densidad y a la cohesión de las partículas la superficie de la Tierra no alcanzará exactamente esta forma, es de esperar que la de los océanos no se alejará mucho de ella.

Consideremos como un modelo sencillo que sólo pretende poner de manifiesto los factores más básicos del problema una esfera de radio R y masa M aislada en el espacio y girando con una velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de uno de sus diámetros, fig. 2.

Buscaremos la ecuación de las superficies isobáricas de un océano sobre la superficie de dicha esfera.

Una de las superficies de esta familia, aquella para la cual la presión hidrostática se anula, es la superficie del océano. Al calcularla supondremos que el campo gravitatorio es siempre radial, aunque sabemos que al cambiar la forma del cuerpo cambiará también el campo gravitatorio, lo que a su vez influirá en la forma final de equilibrio. Pero si suponemos que la profundidad máxima del océano es muy pequeña comparada con el radio de la esfera, nuestra suposición estará justificada.

Sea un punto P situado a una latitud λ y a una distancia r del centro de la esfera. La ecuación del movimiento para un pequeño volumen de fluido en torno al punto P es:

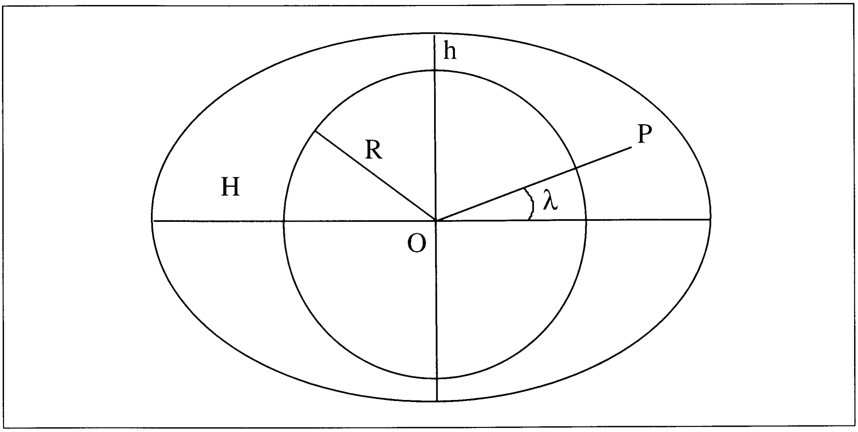

FIGURA 2.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = \rho \, \vec{a} \qquad (1)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad del elemento de volumen que contiene a P, p es la presión hidrostática y $\rho\vec{a}$ la fuerza por unidad de volumen. En definitiva, (1) establece que la aceleración sobre nuestro volumen de prueba está producida por el gradiente de presión y las distintas fuerzas que sobre él actúen. Ya que P se mueve con el fluido, para él la situación será estática y $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$. Este observador supondrá que existe una fuerza centrífuga que contrarresta la de la gravedad. Entonces, la ecuación del movimiento es:

$$\begin{aligned}\nabla p &= \left(-\frac{GM}{r^2}\hat{r} + \omega^2 r\cos\lambda\,\hat{x}\right)\\ &= \left(-\frac{GM}{r^2}\hat{r} + \omega^2 r\cos^2\lambda\,\hat{r}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Pero veamos que

$$\begin{aligned}-\frac{GM}{r^2}\hat{r} &= -\nabla\left(-\frac{GM}{r}\right)\\ \omega^2 r\cos^2\lambda\, r &= -\nabla\left(-\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\lambda\right)\end{aligned} \tag{3}$$

de manera que

$$\nabla\left(p - \rho\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\cos^2\lambda\right) = 0 \tag{4}$$

con lo cual

$$p - \rho\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\cos^2\lambda = constante \tag{5}$$

y la ecuación de las superficies isobáricas es

$$\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\lambda = constante \tag{6}$$

Si p_1 es la presión en el fondo del océano en e polo, entonces la presión en un punto genérico $\vec{r}$ es:

$$p = p_1 + \rho\, GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\cos^2\lambda \tag{7}$$

La diferencia H-h puede encontrarse sabiendo que la superficie del océano es una superficie isobárica de presión nula que cumple la ecuación (6):

$$\frac{GM}{(R+H)} + \frac{1}{2}\omega^2 (R+H)^2 = \frac{GM}{(R+h)} \qquad (8)$$

dé donde, aproximadamente

$$H - h = \frac{\omega^2 R^2}{2g_0} \qquad (9)$$

siendo g_0 la intensidad de la gravedad en la superficie de la esfera interior.

Forma de la Tierra

Observando oscilaciones de un péndulo en la superficie de la Tierra se encuentra que en el Ecuador oscila más lentamente, es decir, un reloj de péndulo en el Ecuador atrasa respecto a otro en latitudes más altas. Este hecho fue observado por el astrónomo francés Richer durante su expedición a Cayena, en 1672, e indica un achatamiento de la figura de la Tierra. Pero en aquella época las medidas indicaban que la Tierra era más bien alargada que achatada, y hubo que esperar a mediciones más exactas realizadas durante las expediciones a Perú y Laponia para confirmar el achatamiento. Para determinar la forma de la Tierra se efectúan mediciones de longitudes de arcos meridianos. En toda medición de este tipo hay que efectuar dos operaciones. Una es geodésica y consiste en medir la distancia que separa a dos puntos sobre un meridiano. La otra es astronómica y consiste en la medida de la separación angular de los cenits de ambos puntos.

Así, si la Tierra fuese esférica, las distancias angulares entre los cenits de dos parejas de puntos (A,B) y (A' B') que definen arcos meridianos dé igual longitud serían idéntica. Pero al ser la Tierra elipsoidal, aproximadamente, esta separación

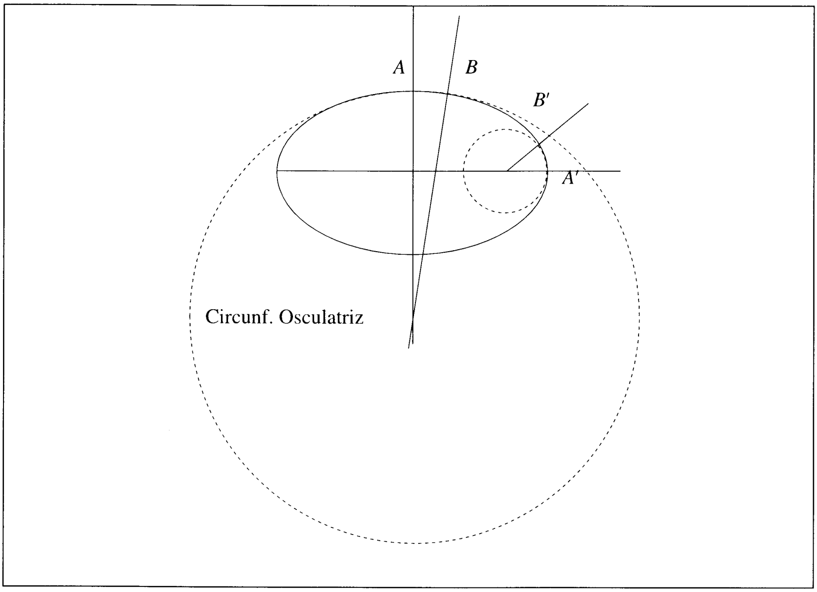

FIGURA 3.

angular es distinta para dos parejas de puntos situados a la misma distancia. El radio de curvatura de la circunferencia osculatriz en A es mayor que en A', y por tanto la longitud meridiana AB representa un arco menor que el de A' B' . Medidas de este tipo permiten encontrar el achatamiento terrestre, que se define como la diferencia entre los semiejes mayor y menor expresada en unidades del semieje mayor.

Las primeras medidas realizadas con instrumentos de precisión fueron hechas por Maupertuis en Laponia y por Bouger y La Condamine en Perú. El problema en principio estaba resuelto, y sólo se trataba ya de mejorar la precisión de las medidas. En este sentido, la aportación más importante fue la de Bessel, cuyos resultados no fueron superados hasta finales del siglo pasado.

La fig. 4 representa una elipse meridiana de la Tierra. EQ es el diámetro del Ecuador. PP' el diámetro polar, C el centro y F un foco de la elipse. Sean:

a= semieje mayor o radio ecuatorial= CE

b= semieje menor o radio polar= CP

c= achatamiento terrestre

e= excentricidad de la elipse meridiana

El achatamiento es la diferencia entre los semiejes mayor y menor expresada en unidades del primero:

$$c = (a-b)/a = 1-b/a \tag{10}$$

La excentricidad es la distancia del foco al centro, expresada en unidades del semieje mayor. Como, de la definición métrica de la elipse, PF = CE , se tiene:

$$e^2 = \frac{CF^2}{CE^2} = \frac{(PF^2 - PC^2)}{PF^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - (1 - c)^2 \tag{11}$$

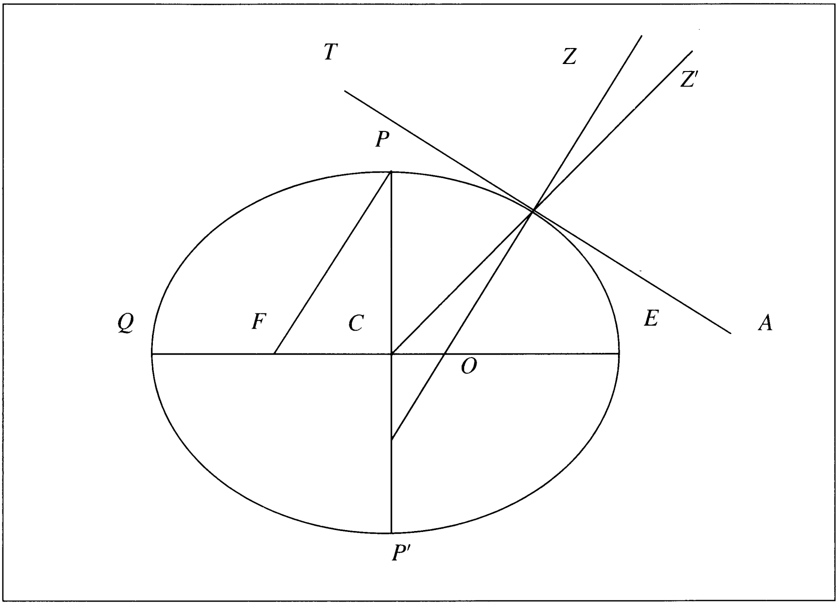

FIGURA 4.

Sea A un punto de la superficie de la Tierra; AT la tangente al meridiano en ese punto; AO, perpendicular a AT, la normal a la superficie de la Tierra en A; AZ es la dirección del cenit en A, puesto que AT es la intersección del plano del horizonte, perpendicular al papel, con el plano meridiano. Esta línea vertical no coincide con el radio OA salvo en los polos y el Ecuador. El ángulo ZO' E es la declinación del cenit, o latitud geográfica, y Z es el cenit geográfico. Z'CE es la declinación del cenit geocéntrico, también llamada latitud geocéntrica. A ZAZ' se le llama «reducción de latitud». De la figura es evidente que la latitud geocéntrica siempre es menor que la latitud geográfica.

La ecuación de la elipse meridiana es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

Si ponemos

φ = latitud geográfica
φ' = latitud geocéntrica

como φ es el ángulo que la normal forma con el eje de abcisas

$$\tan \varphi = -\frac{dx}{dy} \qquad (13)$$

$$\tan \varphi' = \frac{y}{x} \qquad (14)$$

diferenciando la ecuación de la elipse

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{dx}{dy} \tag{15}$$

luego

$$\tan\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\tan\varphi = (1 - e^2)\tan\varphi \tag{16}$$

Para encontrar la diferencia φ–φ', o «reducción de latitud», usaremos el desarrollo en serie de la ecuación de la forma

$$\tan x = p \tan y$$

que es

$$x - y = q \operatorname{sen} 2y + \frac{1}{2}q^2 \operatorname{sen} 4y + \ldots$$

donde

$$q = \frac{p - 1}{p + 1}$$

Aplicando este resultado tenemos, después de dividir por sen 1'' para reducir a segundos de arco todos los términos de la serie:

$$\varphi - \varphi' = -\frac{q}{sen\ 1''} sen\ 2\varphi - \frac{q^2}{2 sen\ 1''} sen\ 4\varphi + \ldots \tag{17}$$

donde

$$q = -\frac{e^2}{2 - e^2}$$

Si tomamos el achatamiento según Hayford, c=1/297.0, queda finalmente:

$$\varphi - \varphi' = 6''9566 \; sen \; 2\varphi - 1'' \; 17 \; sen \; 4\varphi \qquad (18)$$

Por otro lado, el radio de la Tierra viene dado por

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Usando

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} &= a^2 \\ \frac{y}{x} &= (1 - e^2) \tan \varphi \end{aligned} \qquad (19)$$

se encuentra eliminando que

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 sen^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \rho \cos \varphi' \\ y &= \frac{a (1 - e^2) \; sen \; \varphi}{(1 - e^2 sen^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \rho \; sen \; \varphi' \end{aligned} \qquad (20)$$

y por tanto

$$\rho = a \frac{1 - 2e^2 sen^2 \varphi + e^4 sen^2 \varphi}{(1 - e^2 sen^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \qquad (21)$$

Finalmente, calcularemos el radio de curvatura. Del cálculo diferencial:

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = a\frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2 sen^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{22}$$