TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante

ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Edición electrónica:

Espagrafic

F. Javier Gil Chica

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

Capítulo I
Trigonometría esférica

Índice

Capítulo I

Trigonometría esférica

La herramienta principal de la Astronomía de Posición es la Trigonometría Esférica, que trata de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico. A continuación se exponen de forma condensada los principales resultados. Los más importantes son las relaciones del seno, del seno por el coseno, del coseno y la relación de las cotangentes. Las analogías de Delambre y de Napier no son muy usuales, mientras que las fórmulas diferenciales son ampliamente usadas en el tratamiento de la Refracción, Aberración, Paralaje y errores instrumentales, principalmente.

Relaciones fundamentales

Un triángulo esférico simple es la superficie limitada por tres círculos máximos sobre una esfera, de modo que ninguno de los lados sea mayor que una semicircunferencia. Los ángulos del triángulo esférico son los diedros entre los planos definidos por los lados y el centro de la esfera, que consideraremos de radio unidad. Para deducir las relaciones buscadas nos apoyaremos en la figura 1. O es el centro de la esfera; A, B, C son los vértices del triángulo y a, b, c sus lados. El punto D es la proyección de A sobre el plano determinado por OBC. AE y AF están respectivamente contenidos en los planos OAC y OAB y son perpendiculares a OC y OB. DE y DF son perpendiculares a las rectas OC y OB; FJ es paralela a DE y DH lo es a OC.

De la figura se deduce que:

$$\begin{aligned} AD &= AF \, sen \, AFD \\ AD &= AE \, sen \, AED \end{aligned} \tag{1}$$

de donde:

$$AF \, sen \, AFD = AE \, sen \, AED \tag{2}$$

Denotando con la misma letra minúscula el lado opuesto a un vértice dado tenemos finalmente:

$$sen \, c \, sen \, B = sen \, b \, sen \, C \tag{3}$$

Si proyectásemos B sobre el plano OAC y C sobre el plano OAB obtendríamos:

$$\begin{aligned} sen \, a \, sen \, C &= sen \, c \, sen \, A \\ sen \, a \, sen \, B &= sen \, b \, sen \, A \end{aligned}$$

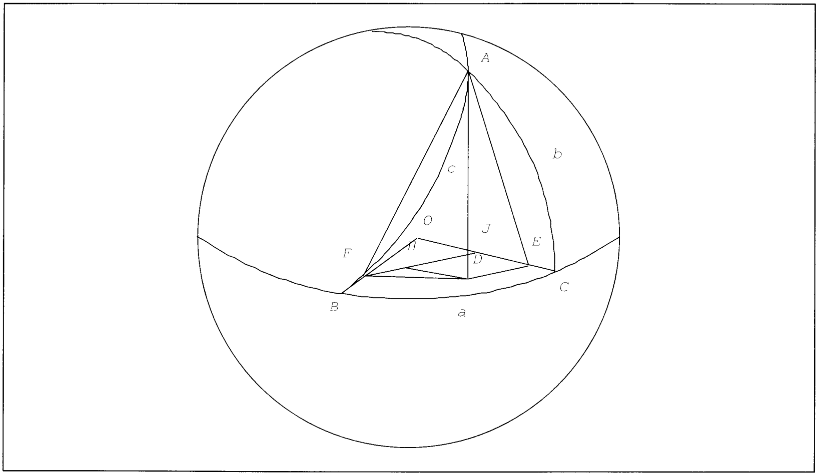

FIGURA 1.

y en general tenemos:

$$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\ b}{sen\ B} = \frac{sen\ c}{sen\ C} \tag{4}$$

Esta es la relación del seno. Por otra parte:

$$\cos b = OE = OJ + JE \tag{5}$$

pero

$$\begin{aligned} OJ &= OF \cos a \\ JE &= HD = FD\ sen\ a \\ FD &= FA \cos\ B \end{aligned} \tag{6}$$

luego

$$\cos b = \cos a \cos c + sen\ a\ sen\ c \cos B \tag{7}$$

Proyectando los otros dos vértices podríamos haber obtenido:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + sen\, b\, sen\, c \cos A \\ \cos c &= \cos a \cos b + sen\, a\, sen\, b \cos C \end{aligned} \tag{8}$$

Las tres últimas son conocidas como relaciones del coseno. Tomando la primera de (8) y usando (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} sen\, b\, sen\, c \cos A &= sen^2\, b \cos a \\ &\quad - sen\, b \cos b\, sen\, a \cos C \end{aligned} \tag{9}$$

y dividiendo por sen b

$$sen\, c \cos A = sen\, b \cos a - sen\, a \cos b \cos C \tag{10}$$

que es la relación del seno por el coseno. Dividiendo ésta entre la relación del seno adecuada se obtiene la relación de las cotangentes:

$$sen\, a \cot b = \cot B\, sen\, c + \cos a \cos C \tag{11}$$

Éstas son las principales, y omitiremos las que hacen referencia al ángulo doble y mitad, ángulo perimetral y triángulo polar.

Deduciremos a continuación las fórmulas Gaussianas o Analogías de Delambre. Partiendo de las relaciones fundamentales que acabamos de encontrar:

$$\begin{aligned} sen\ a\ sen\ B &= sen\ A\ sen\ b \\ sen\ a\cos B &= \cos b\ sen\ c - sen\ b\cos c\cos A \\ \cos a &= \cos b\cos c + sen\ b\ sen\ c\cos A \end{aligned} \qquad (12)$$

y considerando el triángulo esférico de lados 180-A, 180-B, 180-C y ángulos 180-a, 180-b, 180-c, se obtiene

$$\begin{aligned} sen\ A\ sen\ b &= sen\ B\ sen\ a \\ sen\ A\cos b &= \cos B\ sen\ C + sen\ B\ sen\ C\cos a \\ \cos A &= sen\ B\ sen\ C\cos a - \cos B\cos C \end{aligned} \qquad (13)$$

Tomemos la primera ecuación de *(12) y* su análoga:

$$\begin{aligned} sen\ a\ sen\ B &= sen\ A\ sen\ b \\ sen\ a\ sen\ C &= sen\ c\ sen\ A \end{aligned} \qquad (14)$$

sumando

$$sen\ a\ (\ sen\ B + sen\ C\ ) = sen\ A\ (\ sen\ b + sen\ c\ ) \qquad (15)$$

ahora bien:

$$\begin{aligned} sen\ a &= 2\ sen\ \frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \\ sen\ A &= 2\ sen\ \frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \\ sen\ b + sen\ c &= 2\ sen\ \frac{(b+c)}{2}\cos\frac{(b-c)}{2} \\ sen\ B + sen\ C &= 2\ sen\ \frac{(B+C)}{2}\cos\frac{(B-C)}{2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (15) se obtiene:

$$\begin{aligned} & sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+C)}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{(B-C)}{2} = \\ & sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b+c)}{2}\,\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{(b-c)}{2} \end{aligned} \tag{16}$$

y del mismo modo, considerando la diferencia en (14) se obtiene

$$\begin{aligned} & sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B-C)}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{(B+C)}{2} = \\ & sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b-c)}{2}\,\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{(b+c)}{2} \end{aligned} \tag{17}$$

Si tratamos de idéntica manera la relación del seno por el coseno y su análoga

$$sen\ \mathrm{a}\ cos\ C = cos\ a\ sen\ b - sen\ c\ cos\ b\ cos\ A$$

se encuentra para la suma y para la diferencia respectivamente:

$$\begin{aligned} & sen\,\frac{a}{2}\,\cos\frac{(B-C)}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{(B+C)}{2} = \\ & sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b+c)}{2}\,sen\,\frac{A}{2}\,\cos\frac{(b+c)}{2} \\ & sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B-C)}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+C)}{2} = \\ & \cos\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b-c)}{2}\,\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{(b-c)}{2} \end{aligned} \tag{18}$$

Por otra parte, la segunda de (13) sumada y restada con su análoga proporciona:

$$\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{(B+C)}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+C)}{2} =$$

$$\begin{array}{l} sen\,\frac{A}{2}\cos\frac{(b+c)}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{(b-c)}{2} \\ sen\,\frac{a}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}\,sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B-C)}{2} = \\ sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b+c)}{2}\cos\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b-c)}{2} \end{array} \qquad (19)$$

Poniendo ahora:

$$r = sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b+c)}{2}$$

$$r' = sen\,\frac{a}{2}\cos\frac{(B-C)}{2}$$

$$s = sen\,\frac{A}{2}\cos\frac{(b+c)}{2}$$

$$s' = sen\,\frac{a}{2}\cos\frac{(B+C)}{2}$$

$$t = \cos\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b-c)}{2}$$

$$t' = sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+\text{Ç})}{2}$$

$$u = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{(b-c)}{2}$$

$$u' = \cos\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+C)}{2}$$

las ecuaciones (16)-(17), (18) y (19) quedan como

$$ru = r'u'$$

$$rs = r's'$$

$$rt = r't'$$

$$ts = t's'$$

$$tu = t'u'$$

$$su = s'u'$$

y como se han hecho todas las combinaciones posibles, es necesario que sean

$$\begin{aligned} r &= r' \\ s &= s' \\ t &= t' \\ u &= u' \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} sen\,\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b+c)}{2} &= sen\,\frac{a}{2}\cos\frac{(B-C)}{2} \\ sen\,\frac{A}{2}\cos\frac{(b+c)}{2} &= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{(B+C)}{2} \\ \cos\frac{A}{2}\,sen\,\frac{(b-c)}{2} &= sen\,\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B-C)}{2} \\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{(b-c)}{2} &= \cos\frac{a}{2}\,sen\,\frac{(B+C)}{2} \end{aligned} \tag{20}$$

que son conocidas como analogías de Delambre o fórmulas Gaussianas.

Si realizamos ahora una rotación cíclica de los elementos del triángulo esférico obtendremos:

$$\begin{aligned} sen\,\frac{C}{2}\,sen\,\frac{(a+b)}{2} &= sen\,\frac{c}{2}\cos\frac{(A-B)}{2} \\ sen\,\frac{C}{2}\cos\frac{(a+b)}{2} &= \cos\frac{c}{2}\cos\frac{(A+B)}{2} \\ \cos\frac{C}{2}\,sen\,\frac{(a-b)}{2} &= sen\,\frac{c}{2}\,sen\,\frac{(A-B)}{2} \\ \cos\frac{C}{2}\cos\frac{(a-b)}{2} &= \cos\frac{c}{2}\,sen\,\frac{(A+B)}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

Dividiendo ordenadamente la tercera entre la cuarta, la cuarta entre la segunda, la primera entre la segunda y la tercera entre la primera se obtienen las Analogías de Napier.

Fórmulas diferenciales

Acabaremos este capítulo con la exposición de la principales fórmulas diferenciales, que tienen una aplicación extensa en muchos problemas de Astronomía Esférica. Estas fórmulas relacionan las variaciones de los elementos del triángulo esférico cuando alguno o algunos de ellos cambian en una cantidad pequeña. Partiremos del siguiente conjunto de ecuaciones que damos sin demostrar y que relacionan las variaciones de tres lados y un ángulo de un triángulo esférico:

$$\begin{aligned} da - \cos C\, db - \cos B\, dc &= sen\, b\, sen\, C\, dA \\ -\cos C\, da + db - \cos A\, dc &= sen\, c\, sen\, A\, dB \\ -\cos B\, da - \cos A\, db + dc &= sen\, a\, sen\, B\, dC \end{aligned} \tag{22}$$

Si eliminamos *da* de (22):

$$\begin{aligned} sen\, C\, db - \cos a\, sen\, B\, dc &= sen\, b \cos C\, dA + sen\, a\, dB \\ -\cos a\, sen\, C\, db + sen\, B\, dc &= sen\, c \cos B\, dA + sen\, a\, dC \end{aligned} \tag{23}$$

que relacionan las variaciones de dos lados y dos ángulos. Finalmente, al eliminar *db* de (23):

$$sen\, a\, sen\, B\, dc = \cos b\, dA + \cos a\, dB + dC \tag{24}$$

o también, eliminando dA:

$$\begin{aligned} &\cos b \; sen \; C \; db - \cos c \; sen \; B \; dc = \\ &sen \; c \cos B \; dB - sen \; b \cos C \; dC \end{aligned} \tag{25}$$

A veces es útil

$$\cot b \; db - \cot c \; de = \cot B \; dB - \cot C \; dC \tag{26}$$

que se obtiene de (25) dividiendo término a término por sen b sen C o su equivalente sen c sen B.

Y de esta forma concluimos con las relaciones más usuales de la Trigonometría Esférica.