

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante
ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Reservados todos los derechos. No se permite reproducir, almacenar en sistemas de recuperación de la información ni transmitir alguna parte de esta publicación, cualquiera que sea el medio empleado –electrónico, mecánico, fotocopia, grabación, etc.–, sin el permiso previo de los titulares de los derechos de la propiedad intelectual.

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:



F. Javier Gil Chica

**TEORÍA DE ECLIPSES,
OCULTACIONES
Y TRÁNSITOS**

**Capítulo XI
Ocultación de planetas por la Luna**

Índice

Portada

Créditos

Capítulo XI: Ocultación de planetas por la Luna..... 5

 Perfil del disco del planeta..... 6

 Contacto entre los limbos de la Luna y el planeta .. 25

Capítulo XI

Ocultación de planetas por la Luna

Capítulo XI

Ocultación de planetas por la Luna

Si el disco de un planeta fuese perfectamente circular y se encontrase completamente iluminado, su ocultación por la Luna podría tratarse como si fuese un eclipse solar con sólo sustituir el paralaje y semidiámetro del Sol por los valores correspondientes al planeta. Pero la precisión de las observaciones es tanta como para que sea necesario tener en cuenta la forma verdadera del planeta. En cualquier caso, encontrar la forma aparente del disco de un planeta iluminado por el Sol es un problema con el suficiente interés intrínseco como para considerarlo con detenimiento. La teoría que a continuación se expone es debida fundamentalmente a Bessel.

Consideraremos a los planetas como elipsoides de revolución que presentan un perfil elíptico cuando se encuentran completamente iluminados. Cuando sólo están iluminados parcial-

mente, caso evidente en los planetas internos, el perfil está formado por dos elipses: una que delimita la superficie del planeta por el lado iluminado y otra que separa la parte iluminada de la parte oscura.

Perfil del disco del planeta

Comenzaremos calculando la ecuación de la primera de estas curvas. Para ello, sea un sistema de referencia planetocéntrico, cuyo plano principal es perpendicular al eje de revolución. En este sistema, (x, y, z) son las coordenadas de un punto de la superficie, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

y sean (ξ, η, ζ) las coordenadas de un punto sobre la superficie de la Tierra. Llamaremos ρ a la distancia del punto de observación al centro del planeta, y ρ' a la distancia de (ξ, η, ζ) a (x, y, z) . Sean λ y λ' las longitudes del centro del planeta y del punto de su superficie para el observador terrestre medidas sobre el círculo máximo del ecuador del planeta y β y β' las latitudes de los mismos puntos. Entonces

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos(-\beta) \cos(\lambda + 180) = -\rho \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \rho \cos(-\beta) \operatorname{sen}(\lambda + 180) = -\rho \cos \beta \operatorname{sen} \lambda \\ \zeta &= \rho \operatorname{sen}(-\beta) = -\rho \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \quad (2)$$

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

$$\begin{aligned}
 x - \xi &= \rho' \cos \beta' \cos \lambda' \\
 y - \eta &= \rho' \cos \beta' \operatorname{sen} \lambda' \\
 z - \zeta &= \rho' \operatorname{sen} \beta'
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

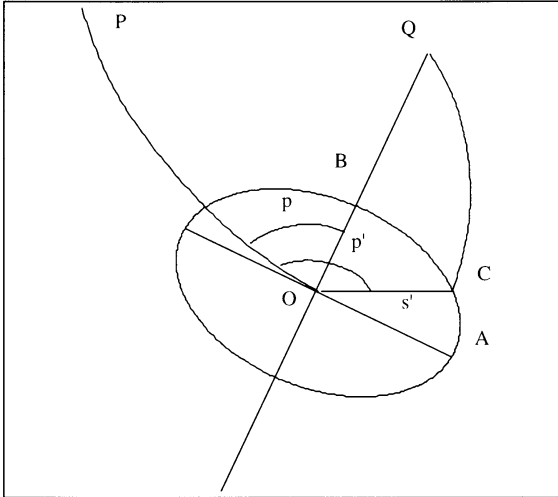


FIGURA 50.

La fig. 50 representa la proyección del planeta sobre la esfera celeste. O es el centro aparente del planeta y C la posición aparente de un punto sobre la superficie. Q es el polo del Ecuador del planeta y P el polo del ecuador terrestre. Llamaremos p' al ángulo de posición POC del punto C y p al ángulo de posición del polo del planeta. s' es el arco OC. Si tomamos OA y OB como ejes de referencia, las coordenadas de C son

$$\begin{aligned} u &= s' \operatorname{sen} (p' - p) \\ v &= s' \operatorname{cos} (p' - p) \end{aligned} \tag{4}$$

Consideremos ahora el triángulo esférico QOC de lados

$$\begin{aligned} QO &= \beta \\ QC &= \beta' \\ OC &= s' \end{aligned}$$

y ángulos

$$\begin{aligned} QOC &= p' - p \\ OCQ &= q \\ CQO &= \lambda - \lambda' \end{aligned}$$

Del teorema del seno

$$\operatorname{sen} s' \operatorname{sen} (p' - p) = \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} (\lambda' - \lambda)$$

y del teorema del seno y el coseno

$$\operatorname{sen} s' \operatorname{cos} (p' - p) = \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen} \beta' - \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta' \operatorname{cos} (\lambda' - \lambda)$$

Si multiplicamos por ρ' y hacemos uso de (2) y (3) tenemos

$$\begin{aligned} \rho' \operatorname{sen} s' \operatorname{sen} (p' - p) &= -x \operatorname{sen} \lambda + y \operatorname{cos} \lambda = \rho u \\ \rho' \operatorname{sen} s' \operatorname{cos} (p' - p) &= -x \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \lambda - y \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \lambda + z \operatorname{cos} \beta = \rho v \end{aligned} \tag{5}$$

y como s' es pequeño y ρ' difiere poco de ρ , pongamos

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

$$\begin{aligned} \rho s' \sin (p' - p) &= -x \sin \lambda + y \cos \lambda = \rho u \\ \rho s' \cos (p' - p) &= -x \sin \beta \cos \lambda - y \sin \beta \sin \lambda + z \cos \beta = \rho v \end{aligned} \quad (6)$$

ecuaciones que son válidas para cualquier punto del planeta. Ahora bien, sólo nos interesan aquellos puntos que resultan de la tangencia entre el planeta y las rectas que pasan por el observador; esto es, de las líneas de visión que determinan el perfil aparente del planeta. En la fig. 51, (ξ, η, ζ) es el punto de observación y (x, y, z) un punto perteneciente al perfil aparente del planeta. En este punto, el vector gradiente de la superficie

$$\Psi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

es perpendicular al vector

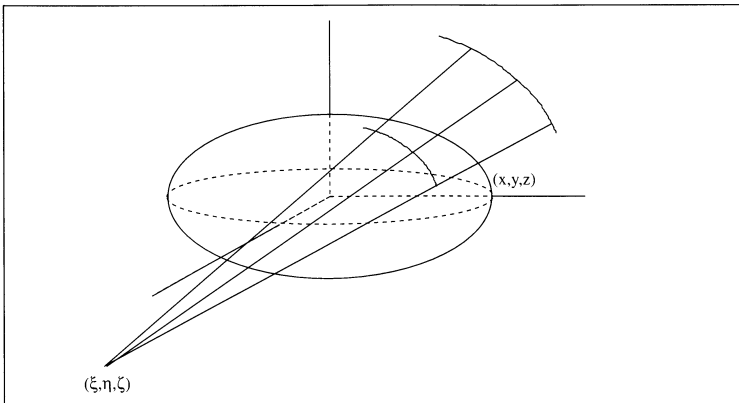


FIGURA 51.

$$\mathbf{R} = (x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$$

y la condición que cumplen los puntos del contorno es pues

$$\nabla\Psi\mathbf{R} = 0 \tag{7}$$

de donde

$$\frac{x \xi}{a^2} + \frac{y \eta}{a^2} + \frac{z \zeta}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Si dividimos (8) por ρ , tenemos aproximadamente

$$\frac{x \cos \beta \cos \lambda}{a^2} + \frac{y \cos \beta \operatorname{sen} \lambda}{a^2} + \frac{z \operatorname{sen} \beta}{b^2} = 0 \tag{9}$$

Esta ecuación junto con (6) permite encontrar (x, y, z) en función de u y v , y sustituyendo el resultado en (1) tendremos la ecuación del contorno del disco del planeta sobre un plano perpendicular a la línea de visión. En efecto, de

$$\begin{aligned} \rho u &= -x \operatorname{sen} \lambda + y \cos \lambda \\ \rho v &= -(x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda) \operatorname{sen} \beta + z \cos \beta \\ 0 &= (x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda) \frac{b^2}{a^2} \cos \beta + z \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \tag{10}$$

usando $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$:

$$-x \operatorname{sen} \lambda + y \cos \lambda = \rho u$$

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

$$\begin{aligned}
 -x \cos \lambda - y \operatorname{sen} \lambda &= \rho v \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \\
 z &= \rho v \frac{(1 - e^2) \cos \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta}
 \end{aligned} \tag{11}$$

En el sistema de referencia que hemos elegido, cuyo plano principal coincide con el plano ecuatorial del planeta, y dado que éste es una figura de revolución, la curva del perfil del disco no depende de λ . Multiplicando la primera de (11) por $\operatorname{sen} \lambda$, la segunda por $\cos \lambda$ y sumando:

$$-x = \rho u \operatorname{sen} \lambda + \rho v \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \cos \lambda$$

Multiplicando la primera de (11) por $\cos \lambda$, la segunda por $\operatorname{sen} \lambda$ y restando

$$y = \rho u \cos \lambda - \rho v \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \operatorname{sen} \lambda$$

Sustituyendo x , y , z en (1) obtenemos finalmente

$$u^2 + \frac{v^2}{c^2} = s^2 \tag{12}$$

siendo $s + \frac{a}{\rho}$ y $c = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta}$ y habiendo tenido en cuenta

que $b^2 = a^2 (1 - e^2)$.

(12) es la ecuación del perfil del disco proyectado sobre la esfera celeste, o sobre el plano que pasa por el centro del planeta y es perpendicular a la línea de visión. Es la ecuación de una elipse de ejes $2s$ y $2sc$, siendo e la excentricidad de los meridianos del planeta. ¿Qué porción de esta elipse se observa iluminada desde la Tierra?

Si consideramos al Sol como un punto, suposición que no conduce a gran error, la curva de iluminación del planeta, vista desde el Sol, puede determinarse de manera análoga a como se ha hecho para la Tierra. Únicamente hay que sustituir las coordenadas del punto (ξ, η, ζ) por las del Sol en el mismo sistema de referencia planetocéntrico.

Si llamamos

Δ, B = Longitud y Latitud heliocéntricas del centro del planeta los puntos pertenecientes al borde del disco, vistos desde el Sol, cumplen

$$0 = \frac{x \cos B \cos \Lambda}{a^2} + \frac{y \cos B \sin \Lambda}{a^2} + \frac{z \sin B}{b^2} \quad (13)$$

Si cada punto que satisface esta ecuación es proyectado sobre la esfera celeste por una línea que parte del observador terrestre, denominando de nuevo por u y v las coordenadas de la curva proyectada tenemos:

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

$$\begin{aligned} \rho u &= -x \operatorname{sen} \lambda + y \cos \lambda \\ \rho v &= -(x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda) \operatorname{sen} \beta + z \cos \beta \end{aligned} \quad (14)$$

pues recordemos que estas ecuaciones son válidas para cualquier punto de la superficie del planeta.

Pongamos

$$\begin{aligned} x_1 &= x \operatorname{sen} \lambda + y \cos \lambda \\ y_1 &= x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= x_1 \operatorname{sen} \lambda + y_1 \cos \lambda \\ y &= x_1 \cos \lambda + y_1 \operatorname{sen} \lambda \end{aligned} \quad (15)$$

e introduzcamos b_1 y B_1 mediante

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \cos \beta_1 &= \cos \beta \quad ; \quad \frac{1}{G} \cos B_1 = \cos B \\ \frac{1}{g} \operatorname{sen} \beta_1 &= \frac{a}{b} \operatorname{sen} \beta \quad ; \quad \frac{1}{G} \operatorname{sen} B_1 = \frac{a}{b} \operatorname{sen} B \end{aligned} \quad (16)$$

De (15) y (16), las tres ecuaciones (13) y (14) quedan como

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cos B_1 \operatorname{sen} (\Lambda - \lambda) + y_1 \cos B_1 \cos (\Lambda - \lambda) \\ &\quad + \frac{a}{b} z \operatorname{sen} B_1 \\ \rho u &= x_1 \\ \frac{a}{b} g \rho v &= -y_1 \operatorname{sen} \beta_1 + \frac{a}{b} z \cos \beta_1 \end{aligned} \quad (17)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \rho u \\
 N y_1 &= -\rho u \cos \beta_1 \cos B_1 \operatorname{sen}(\Lambda - \lambda) \\
 &\quad - \frac{a}{b} g \rho v \operatorname{sen} B_1 \\
 N \frac{a}{b} z &= -\rho u \operatorname{sen} \beta_1 \cos B_1 \operatorname{sen}(\Lambda - \lambda) \\
 &\quad + \frac{a}{b} g \rho v \cos B_1 \cos(\Lambda - \lambda)
 \end{aligned} \tag{18}$$

siendo

$$N = \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} B_1 + \cos \beta_1 \cos B_1 \cos(\Lambda - \lambda) \tag{19}$$

Consideremos cual es el significado geométrico de β_1 y B_1 . Si desde el centro del planeta trazamos líneas rectas hacia el observador y hacia el Sol, éstas intersectan a la superficie del planeta en los puntos de latitudes β y B . Mediante líneas perpendiculares al plano del ecuador, proyectamos los puntos anteriores sobre una esfera circunscrita al elipsoide. Las latitudes de los puntos proyectados serán β_1 y B_1 , y los radios desde el centro del elipsoide, g y G .

En efecto, en la fig. 52, donde el ángulo BOA es β y el ángulo COA es β_1 , se aprecia

$$\begin{aligned}
 g \cos \beta &= a \cos \beta_1 \\
 \frac{b}{a} &= \frac{g \operatorname{sen} \beta}{a \operatorname{sen} \beta_1}
 \end{aligned}$$

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

y expresando b en unidades de a :

$$g \cos \beta = \cos \beta_1$$
$$g \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{sen} \beta_1$$

que son la mitad de las ecuaciones (16). La otra mitad se demuestra de forma totalmente análoga.

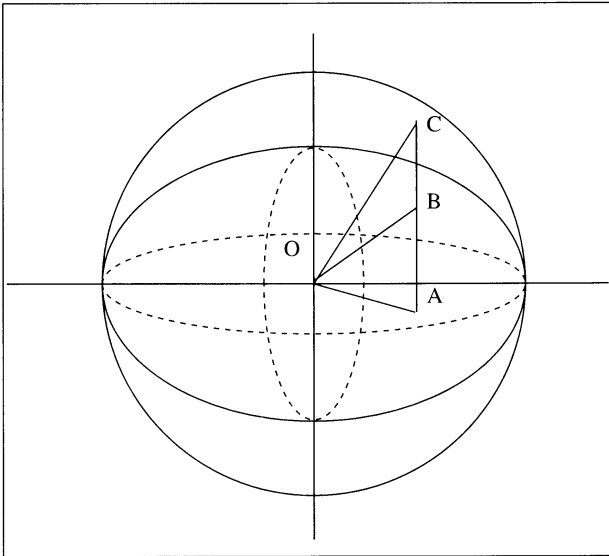


FIGURA 52.

Sean O y S los puntos que resultan de la intersección con la esfera celeste de las rectas que unen el centro del planeta con los puntos de latitudes β_1 y B_1 sobre la esfera circunscrita, y

consideremos el triángulo QOS, siendo Q el polo del Ecuador, fig. 53. Los lados y ángulos son

$$\begin{aligned} OQS &= \Lambda - \lambda \\ QOS &= \omega \\ QO &= 90 - \beta_1 \\ QS &= 90 - B_1 \\ OS &= V \end{aligned}$$

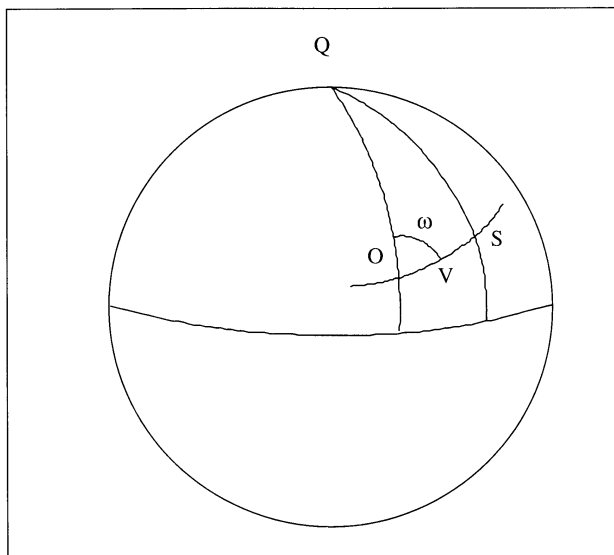


FIGURA 53.

De las tres relaciones fundamentales de la Trigonometría Esférica se sigue

$$\begin{aligned} \text{sen } V \text{ sen } \omega &= \cos B_1 \text{ sen } (\Lambda - \lambda) \\ \cos V &= \text{sen } B_1 \text{ sen } \beta_1 + \cos B_1 \cos \beta_1 \cos (\Lambda - \lambda) \\ \text{sen } V \cos \omega &= \text{sen } B_1 \cos \beta_1 - \cos B_1 \text{ sen } \beta_1 \cos (\Lambda - \lambda) \end{aligned} \tag{20}$$

y usando las mismas relaciones, también se deduce

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

$$\begin{aligned}
 \cos B_1 \operatorname{sen} (\Lambda - \lambda) &= \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \omega \\
 \operatorname{sen} B_1 &= \cos V \operatorname{sen} \beta_1 + \operatorname{sen} V \cos \beta_1 \cos \omega \\
 \cos B_1 \cos (\Lambda - \lambda) &= \cos V \cos \beta_1 - \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \beta_1 \cos \omega
 \end{aligned} \tag{21}$$

Con (20) y (21), (18) queda

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \rho u \\
 y_1 \cos V &= -\rho u \cos \beta_1 \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \omega - \frac{a}{b} g \rho v \\
 &\quad [\cos V \operatorname{sen} \beta_1 + \operatorname{sen} V \cos \beta_1 \cos \omega] \\
 z \frac{a}{b} \cos V &= -\rho u \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \omega + \frac{a}{b} g \rho v \\
 &\quad [\cos V \cos \beta_1 - \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \beta_1 \cos \omega]
 \end{aligned} \tag{22}$$

que sustituiremos en la ecuación del elipsoide teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$:

$$\begin{aligned}
 \cos^2 V \frac{a^2}{\rho^2} &= u^2 \cos^2 V \\
 + [(u \operatorname{sen} \omega + \frac{a}{b} g v \cos \omega) \operatorname{sen} V \cos \beta_1 \\
 &\quad + \frac{a}{b} g v \cos V \operatorname{sen} \beta_1]^2 \\
 + [(u \operatorname{sen} \omega + \frac{a}{b} g v \cos \omega) \operatorname{sen} V \operatorname{sen} \beta_1 \\
 &\quad - \frac{a}{b} g v \cos V \cos \beta_1]^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

Desarrollando los cuadrados y teniendo en cuenta que

$$\frac{b}{a g} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} = c$$

como se deduce de (16), se encuentra que

$$\begin{aligned} \cos^2 V \frac{a^2}{\rho^2} &= u^2 \cos^2 V \\ &+ u^2 \operatorname{sen}^2 V \operatorname{sen}^2 \omega + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \omega \operatorname{sen}^2 V \\ &+ \frac{2uv}{c} \operatorname{sen} \omega \cos \omega \operatorname{sen}^2 V \cos^2 \beta_1 \\ &+ \frac{v^2}{c^2} \cos^2 V + \frac{2uv}{c} \operatorname{sen} \omega \cos \omega \operatorname{sen}^2 V \operatorname{sen}^2 \beta_1 \end{aligned}$$

y si ponemos

$$\begin{aligned} u^2 \cos^2 V &= u^2 \cos^2 V (\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) \\ \frac{v^2}{c^2} \cos^2 V &= \frac{v^2}{c^2} \cos^2 V (\operatorname{sen}^2 \omega + \cos^2 \omega) \\ \frac{2uv}{c} \operatorname{sen} \omega \cos \omega \operatorname{sen}^2 V &= \\ &\frac{2uv}{c} \operatorname{sen} \omega \cos \omega (1 - \cos^2 V) \end{aligned}$$

se encuentra sin dificultad

$$\begin{aligned} s^2 &= (u \cos \omega - \frac{v}{c} \operatorname{sen} \omega)^2 + \\ &(u \operatorname{sen} \omega + \frac{v}{c} \cos \omega)^2 \operatorname{sec}^2 V \end{aligned} \tag{25}$$

Esta es la curva de iluminación del planeta por el Sol vista desde la Tierra y proyectada sobre la esfera celeste. Representa una elipse con centro en el origen pero cuyos ejes

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

se encuentran inclinados un ángulo ω respecto a los ejes coordenadas. Véase también que cuando $V = 0$, (25) se reduce a (12). Los ejes de esta elipse son $2s$ y $2s \cos V$. La superficie visible del planeta está limitada por un arco de la primera elipse y un arco de la segunda. En la fig. 54, los puntos C y C' son los puntos comunes de tangencia de las dos elipses, y podemos determinar su ángulo de posición. En efecto, como satisfacen (12) y (25), llamando u_1 y v_1 a sus coordenadas y combinando ambas ecuaciones:

$$\left(u_1 \operatorname{sen} \omega + \frac{v_1}{c} \cos \omega \right)^2 \tan^2 V = 0 \quad (26)$$

que se cumple en general si

$$u_1 \operatorname{sen} \omega + \frac{v_1}{c} \cos \omega = 0 \quad (27)$$

Si llamamos P_1 al ángulo de posición del punto (u_1, v_1) y como

$$u_1 = s_1 \operatorname{sen} (p_1 - p)$$

$$v_1 = s_1 \cos (p_1 - p)$$

sustituyendo en (27):

$$s_1 \operatorname{sen} (p_1 - p) \operatorname{sen} \omega + \frac{s_1}{c} \cos \omega \cos (p_1 - p) = 0$$

Si llamamos

$$\operatorname{sen} \omega = c_1 \operatorname{sen} \omega_1 ; \quad \frac{\cos \omega}{c} = c_1 \cos \omega_1$$

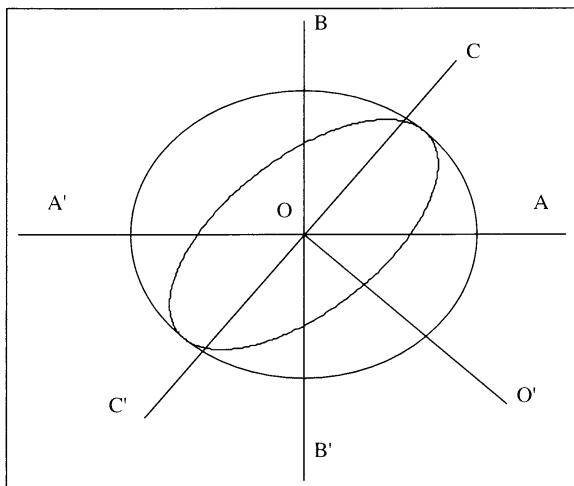


FIGURA 54.

tenemos

$$c_1 s_1 \cos (p_1 - p - \omega_1) = 0$$

de donde

$$p_1 = p + \omega \pm 90^\circ \tag{28}$$

que son los ángulos de posición de C y C'. El arco OO' une el centro del planeta con el punto en que el planeta es visto desde el Sol, y su valor es V. Cuando este ángulo se encuentra en el segundo o tercer cuadrante el planeta presenta un aspecto de

Capítulo XI

Ocultación de planetas por la Luna

cuarto creciente como en la fig. 55.a, y cuando se encuentra en el primer o cuarto cuadrantes la figura presenta el aspecto giboso de fig. 55.b.

Por otra parte, de (28), se deduce que un punto con ángulo de posición p' se encuentra en el limbo Este si

$$p + \omega_1 + 90^\circ > p' > p + \omega_1 - 90^\circ$$

y se encuentra en el limbo Oeste si

$$p + \omega_1 - 90^\circ > p' > p + \omega_1 + 90^\circ$$

En el caso de la fig. 55.a, existen dos puntos con el mismo ángulo de posición, uno perteneciente a la frontera de sombra y otro al borde del planeta, por lo que es necesario especificar en que limbo se encuentra el punto que se está observando.

Para aplicar la teoría expuesta, es necesario conocer las cantidades p , β , λ , B , Λ

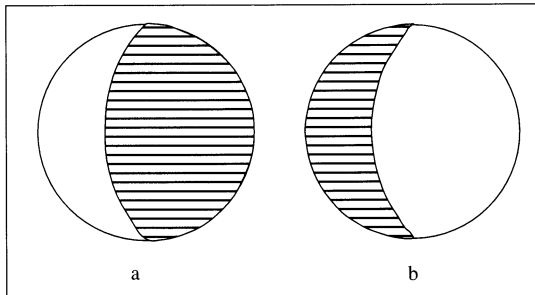


FIGURA 55.

Al definir el sistema de referencia centrado en el planeta, no se especificó la dirección del eje x, que ahora tomaremos en la dirección del nodo ascendente del Ecuador del planeta respecto al Ecuador terrestre. Conocidas la longitud del nodo ascendente n y la inclinación del Ecuador del planeta respecto al Ecuador terrestre, i , podemos encontrar (λ, β) a partir de la ascensión recta y declinación del planeta (α', δ') . De la misma forma, conocidas las coordenadas heliocéntricas eclípticas del planeta y la relación entre los círculos del Ecuador del planeta y la Eclíptica, encontramos (Λ, B) . Por ejemplo, para conocer la longitud y latitud del planeta a partir de la ascensión recta y declinación recurrimos a la fig. 56. En el triángulo QPE, siendo E la posición del planeta,

$$\begin{aligned} PQE &= 90^\circ - \lambda \\ QPE &= 90^\circ + \alpha - n \\ QP &= i \\ PE &= 90^\circ - \delta \\ QE &= 90^\circ - \beta \end{aligned}$$

De las relaciones del seno, coseno y seno por coseno se deducen

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos (\alpha - n) \cos \delta \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos i - \cos \delta \sin i \sin (\alpha - n) \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i \sin (\alpha - n) \end{aligned} \tag{29}$$

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

El ángulo de posición se mide hacia el Este, luego

$$p = 360^{\circ} - \eta$$

siendo η el ángulo QEP. Este ángulo viene dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \eta \cos \beta &= \operatorname{sen} i \cos (\alpha - n) \\ \cos \eta \cos \beta &= \cos i \cos \delta + \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} (\alpha - n) \end{aligned} \quad (30)$$

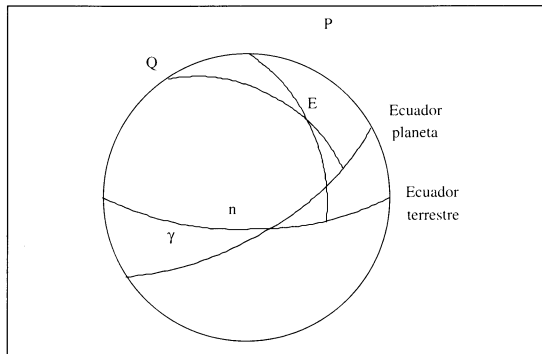


FIGURA 56.

Téngase en cuenta que mientras (α', δ') están tabulados con valores geocéntricos, en nuestra teoría hemos usado (λ, β) topocéntricos, medidos por el observador desde la superficie de la Tierra, que han de obtenerse a partir de los geocéntricos vía reducción de latitud: conocidas ascensión recta y declinación geocéntricas, encontraremos los valores topocéntricos, y con éstos y las ecuaciones de transformación hallaremos la longitud y latitud topocéntricos que necesitamos.

De acuerdo con las peculiaridades de cada planeta, la teoría expuesta admite precisiones para cada caso. Así, para Júpiter y Saturno, planetas exteriores, la diferencia entre el disco observado y el verdadero es despreciable. Para Júpiter, la inclinación de cuya órbita respecto a la Eclíptica es muy pequeña, al igual que la de su Ecuador, puede tomarse $\omega = 0$ y $V = \Lambda - \lambda$, mientras que

$$c = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} \approx \sqrt{1 - e^2}$$

Para Saturno, $\beta \cong 28^\circ$, de forma que c es variable con el tiempo. Puede tomarse sin gran error $V = 0$. Un caso interesante es el de sus anillos, que puede considerarse como un elipsoide cuyo eje menor es cero, y por tanto la excentricidad de sus meridianos es 1, con lo cual $c \cong \text{sen } \beta$.

Mayor importancia tienen los planetas interiores, que pueden ser considerados como esféricos, con lo cual la excentricidad de sus meridianos es nula. En este caso toma importancia la figura aparente del disco iluminado. Al ser planetas esféricos, carece de importancia que punto tomemos como polo y puede tomarse aquél que resulte más conveniente en cada caso, aunque parece natural la línea paralela a las cúspides de la porción iluminada que pasa por el centro del planeta y es perpendicular al plano que contiene al Sol, la Tierra y el planeta.

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

Contacto entre los limbos de la Luna y el planeta

En lo que sigue, se supondrá conocido el conjunto de valores (p , ω , V , c) para el instante de la ocultación, y se considerarán constantes durante la misma y válidos para todo punto de la superficie terrestre.

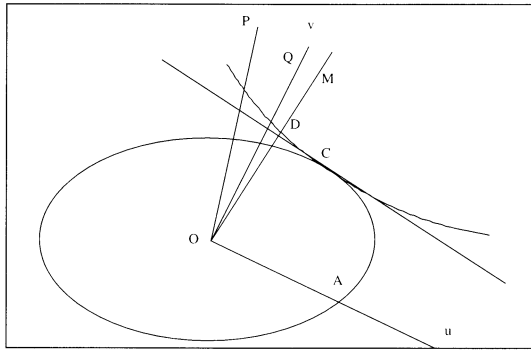


FIGURA 57.

En la fig. 57, O es el centro del planeta y C el punto de contacto de su limbo con el limbo de la Luna. OM es la línea en dirección al centro de la Luna y D el punto en que intersecta al limbo de la misma. Como ningún planeta presenta un semi-diámetro mayor de 31", no se comete error apreciable si se supone que el pequeño arco CD del limbo lunar coincide con la tangente común al planeta y a la Luna en el punto de contacto C. Sean OA y OQ los ejes u y v a los cuales se refiere la ecuación de la curva iluminada y sea θ el ángulo QOD. Sea

también s'' la distancia OD. Si el planeta fuese esférico de radio OD, se observaría el contacto en D en el mismo instante en que realmente se observa en C. Entonces, el caso de contacto de la elipse con el disco lunar se puede reducir al caso del eclipse de un cuerpo esférico sustituyendo su radio por la perpendicular OD al disco lunar. La ecuación de la tangente CD referida a los ejes que hemos establecido es aproximadamente

$$u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta = s'' \quad (31)$$

y por otra parte

$$\frac{dv}{du} = -\tan \theta \quad (32)$$

Supondremos que el punto D cumple simultáneamente (25) y (31), suposición que no conduce a un error muy grande al ser pequeña la excentricidad de los meridianos planetarios. Entonces, diferenciando (25)

$$\begin{aligned} & \left(u \cos \omega - \frac{v}{c} \operatorname{sen} \omega \right) \left(\cos \omega + \frac{\operatorname{sen} \omega}{c} \tan \theta \right) + \\ & \left(u \operatorname{sen} \omega + \frac{v}{c} \cos \omega \right) \left(\operatorname{sen} \omega - \frac{\cos \omega}{c} \tan \theta \right) \sec^2 V = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

y de (25), (31) y (33) se pueden eliminar u y v obteniendo una relación entre s y s'' . Llamando

$$\begin{aligned} x &= u \cos \omega - \frac{v}{c} \operatorname{sen} \omega ; \quad y = u \operatorname{sen} \omega + \frac{v}{c} \cos \omega \\ c' \operatorname{sen} \theta' &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{c} ; \quad c' \cos \theta' = \cos \theta \end{aligned}$$

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

tenemos

$$\begin{aligned}
 x \cos (\theta' - \omega) - y \operatorname{sen} (\theta' - \omega) \sec^2 V &= 0 \\
 x^2 + y^2 \sec^2 V &= s^2 \\
 x \operatorname{sen} (\theta' - \omega) + y \cos (\theta' - \omega) &= \frac{s''}{c'}
 \end{aligned} \tag{34}$$

como se comprueba inmediatamente sin más que tener en cuenta que

$$\begin{aligned}
 u &= x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega \\
 \frac{v}{c} &= -x \operatorname{sen} \omega + y \cos \omega
 \end{aligned}$$

De la primera y segunda de (34)

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{s \operatorname{sen} (\theta' - \omega)}{\sqrt{1 - \cos^2 (\theta' - \omega) \operatorname{sen}^2 V}} \\
 y &= \frac{s \cos (\theta' - \omega) \cos^2 V}{\sqrt{1 - \cos^2 (\theta' - \omega) \operatorname{sen}^2 V}}
 \end{aligned}$$

que sustituidos en la tercera da

$$s'' = s c c' \sqrt{1 - \cos^2 (\theta' - \omega) \operatorname{sen}^2 V} \tag{35}$$

y si ponemos

$$\operatorname{sen} X = \cos (\theta' - \omega) \operatorname{sen} V$$

entonces

$$s'' = s c c' \cos X \quad (36)$$

Como en todos los casos prácticos puede tomarse $\omega = 90^\circ$, tenemos

$$\begin{aligned} \tan \theta' &= \frac{\tan \theta}{c} \\ \text{sen } X &= \text{sen } \theta' \text{ sen } V \\ s'' &= \frac{s \text{ sen } \theta \cos X}{\text{sen } \theta'} \end{aligned} \quad (37)$$

s'' es el semidiámetro del cuerpo eclipsado. Recordemos que llamábamos H al semidiámetro aparente del cuerpo eclipsado a la distancia unidad en la expresión

$$\text{sen } f = \frac{\text{sen } H \pm k \text{ sen } \pi_0}{r' g}$$

Por tanto ahora hemos de poner

$$\text{sen } H = r' \text{ sen } s''$$

o bien, de (37)

$$\text{sen } H = \frac{\text{sen } s_0 \text{ sen } \theta \cos X}{\text{sen } \theta'} \quad (38)$$

siendo s_0 el semidiámetro medio.

Capítulo XI Ocultación de planetas por la Luna

En este caso, el ángulo del cono es muy pequeño, y puede tomarse el seno en lugar de la tangente, quedando para el radio del cono

$$L = (z - \zeta) \operatorname{sen} f \pm k = (z - \zeta) \frac{\operatorname{sen} H}{r'g} \pm k \pm (z - \zeta) \frac{k \operatorname{sen} \pi_0}{r'g} \quad (39)$$

y el cálculo puede a partir de aquí seguir el mismo camino que el expuesto para los eclipses solares, ya que la geometría es la misma. Queda por calcular el ángulo θ .

Para encontrarlo, sea en la fig. 57 $POQ = p$, y llamando Q a POM:

$$\theta = Q - p \quad (40)$$

Q tiene aquí el mismo significado que tenía cuando estudiamos los eclipses solares (reflexiónese sobre la geometría) y vale $N + \psi$, donde N y ψ son calculados mediante

$$\begin{aligned} n \operatorname{sen} N &= x' ; m \operatorname{sen} M = x_0 - \xi \\ n \cos N &= y' ; m \cos M = y_0 - \eta \\ \operatorname{sen} \Psi &= \frac{m \operatorname{sen} (M - N)}{L} \end{aligned}$$

Pero para calcular ψ hemos de conocer L , que involucra a H que a su vez es función de θ . El problema sólo puede ser resuelto por aproximaciones sucesivas, aunque en este caso la

segunda aproximación es suficiente. Sólo hay una situación en que es necesario calcular ψ por tercera vez, y es el de la ocultación de los anillos de Saturno, que tienen una figura acusadamente elíptica. En primera aproximación puede tomarse $L = \pm k$.