TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

F. Javier Gil Chica

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Edita:
Publicaciones Universidad de Alicante

ISBN: 84-7908-270-4
Depósito Legal: MU-1.461-1996
Edición a cargo de Compobell, S.L. Murcia

Estos créditos pertenecen a la edición impresa de la obra.

Edición electrónica:

Espagrafic

F. Javier Gil Chica

TEORÍA DE ECLIPSES, OCULTACIONES Y TRÁNSITOS

Capítulo X
Ocultación de estrellas por la Luna

Índice

Capítulo X
Ocultación de estrellas por la Luna

Introducción

La Luna tiene un período orbital sidéreo de, aproximadamente, 27 días y un tercio, por lo que en este tiempo habrá completado una revolución sobre la esfera celeste, moviéndose hacia el Este con referencia a las estrellas a una velocidad de algo más de medio grado por hora. En su recorrido por el cielo, se produce frecuentemente la interposición del disco lunar entre el observador y una estrella. A la súbita desaparición y posterior reaparición de una estrella tras el disco lunar se le llama ocultación, y a los momentos en que la estrella desaparece y reaparece, inmersión y emersión, respectivamente.

Los instantes de inmersión y emersión dependen de las posiciones de la Luna y el observador, además, claro está, de la posición de la estrella. Es por esta causa por la que, antes del desarrollo de métodos más modernos, la observación de ocultaciones se usaba para determinar longitudes. Si se conoce la posición aproximada de la Luna, pueden calcularse las circunstancias de la ocultación para un observador dado, y es de esperar que los resultados de la observación coincidan con los cálculos. La posición de la Luna es calculada de acuerdo con una teoría muy elaborada de su movimiento, pero se encuentra, en parte como resultado de la observación de ocultaciones, que la longitud media de la Luna deducida de las observaciones difiere en algunos segundos de arco del valor teórico. Esta discrepancia se atribuye a cambios en el período de rotación de la Tierra, y de ahí la importancia de la observación de ocultaciones.

La ocultación de una estrella fija por la Luna puede tratarse como un simple caso de eclipse solar en el cual el Sol se ha trasladado a una distancia tan grande que su paralaje y semidiámetro se hacen nulos. El cono de sombra se transforma en un cilindro y el punto Z no es más que la posición de la estrella. De ahí que las coordenadas de la Luna en el sistema de referencia fundamental vengan dadas por:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\delta\, sen\,(\alpha - a) \\ y &= r\,[\,sen\,\delta\cos d - \cos\delta\, sen\, d\cos(\alpha - a)\,] \\ z &= r\,[\,sen\,\delta\, sen\, d + \cos\delta\cos d\cos(\alpha - a)\,] \end{aligned} \tag{1}$$

siendo ahora a y d la ascensión recta y declinación de la estrella. De la misma forma, las coordenadas del punto de observación son

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \, sen\, (\mu - a) \\ \eta &= \rho \, [\, sen\, \varphi' \cos \mathrm{d} - \cos \varphi' \, sen\, d \cos (\mu - a) \,] \\ \zeta &= \rho \, [\, sen\, \varphi' \, sen\, d + \cos \varphi' \cos \mathrm{d} \cos (\mu - a) \,] \end{aligned} \qquad (2)$$

El radio de la sombra es una constante k cuyo valor en unidades del radio terrestre es k=0.2725.

Predicción de una ocultación para un lugar dado

Supongamos que ya conocemos que va a producirse una ocultación. Calcularemos los instantes aproximados de inmersión y emersión con objeto de preparar convenientemente la observación. Para proceder con rigor, debemos emplear el método por el que calculamos los instantes de comienzo y fin de un eclipse solar en un lugar dado teniendo en cuenta las modificaciones señaladas arriba. Llamaremos T_0 al instante en que se produce la conjunción en ascensión recta de la Luna con la estrella. En el instante T en que se produce la inmersión o emersión se cumplirá

$$\begin{aligned} k \, sen\, Q &= x - \xi \\ k \cos Q &= y - \eta \end{aligned} \qquad (3)$$

siendo

$$T = T_0 + \tau \tag{4}$$

Las coordenadas de la Luna y del lugar de observación vienen dadas por (1) y (2), siendo $\theta = \mu - a$ el Ángulo Horario de la estrella.

En T:

$$\begin{aligned} k \, sen \, Q &= x - \xi + (x' - \xi')\,\tau \\ k \cos Q &= y - \eta + (y' - \eta')\,\tau \end{aligned} \tag{5}$$

Como hemos hecho en repetidas ocasiones, llamaremos

$$\begin{aligned} m \, sen \, M &= x - \xi \;;\; n \, sen \, N = x' - \xi' \\ m \cos M &= y - \eta \;;\; n \cos N = y' - \eta' \end{aligned} \tag{6}$$

con lo que (5) queda

$$\begin{aligned} k \, sen \, Q &= m \, sen \, M + \tau \, n \, sen \, N \\ k \cos Q &= m \cos M + \tau \, n \cos N \end{aligned} \tag{7}$$

de donde

$$\begin{aligned} sen \, \psi &= \frac{m \, sen \, (M - N)}{k} \\ \tau &= \frac{k \cos \psi}{n} - \frac{m \cos (M - N)}{n} \end{aligned} \tag{8}$$

siendo $\psi = Q - N$.

Basta suponer que la ascensión recta y declinación de la Luna varían uniformemente durante el tiempo de la ocultación. En el momento de la conjunción será, aproximadamente,

$$y_0 = \frac{\delta - \delta'}{\pi} \qquad (9)$$
$$x_0 = 0$$

siendo π y δ la declinación y paralaj e de la Luna y δ' la declinación de la estrella. (9) se sigue de la segunda de (1) viendo que r = $1/\pi$ y escribiendo δ' en lugar de d. Llamemos $\Delta\alpha$, en segundos de arco, y $\Delta\delta$ a las variaciones horarias de la ascensión recta y declinación de la Luna en T_0. Entonces tenemos

$$x' = \cos\delta \frac{\Delta\alpha}{\pi}$$
$$y' = \frac{\Delta\delta}{\pi} \qquad (10)$$

Si llamamos μ_1 al tiempo sidéreo en Greenwich:

$$\theta = \mu - \alpha' = \mu_1 - \omega - \alpha' \qquad (11)$$

y, en tiempo medio

$$\theta' = \mu_1' = 54148 \, sen \, 1'' \qquad (12)$$

con lo cual

$$\xi' = \mu_1' \rho \cos \varphi' \cos \theta$$
$$\eta' = \mu_{1'} \xi \, sen \, \delta' \qquad (13)$$

y las fórmulas (8) resuelven el problema.

Especialmente interesante es conocer el instante en que se produce la emersión, y sobre todo el punto del limbo lunar en que tendrá lugar. Este ángulo fue calculado para el limbo del Sol en el caso de eclipses solares, y diferirá en 180° del ángulo similar medido sobre el limbo de la Luna. El ángulo del punto de contacto desde el punto Norte del limbo lunar será entonces

$$\theta = 180^\circ + N + \psi \qquad (14)$$

Si en algún caso el cálculo proporciona $m \, sen \, (M - N) > k$, obtenemos un valor superior a la unidad para $sen \, \psi$, lo cual es imposible. Interpretaremos entonces que desde el lugar considerado no se observa la ocultación.

La mínima distancia lineal entre el centro de la Luna y la línea que une al observador con la estrella será

$$\Delta = \pm \, m \, sen \, (M\text{-}N) \qquad (15)$$

como calculamos en el caso de los eclipses solares. Tomaremos el signo que haga positivo a Δ. $\pi\Delta$, por otro lado, será la distancia angular entre la estrella y el centre de la Luna en el momento de máxima proximidad.

Paralelos límite de la ocultación

Hemos desarrollado para el caso de eclipses solares el cálculo de las curvas límite Norte y Sur que delimitan los puntos sobre la superficie de la Tierra desde los que es posible observar un eclipse. Aquí nos limitaremos al problema más simple de determinar las latitudes extremas en que una ocultación puede observarse. Nótese que el hecho de que un punto se encuentre entre estos extremos no garantiza que pueda observarse la ocultación, ya que las curvas límite no coinciden con los paralelos geográficos, sino que cortan a los meridianos con ángulos variables. Digamos sin embargo que desde un punto situado sobre una curva límite, Norte o Sur, la estrella pasará tangente al limbo lunar. Pero comoquiera que la superficie de la Luna es irregular, el limbo no es exactamente circular, y en una tangencia pueden observarse varias inmersiones y emersiones, fenómeno de gran interés para el estudio de la topografía lunar.

Los paralelos límite tocan en un punto a la curva límite. En ese punto, la distancia del observador al eje del cilindro es el radio de la Luna k, luego la condición (15) es en este caso

$$k = \pm\, m\ sen(M - N) \tag{16}$$

y como

$$x - \xi = m\ sen\ M$$
$$y - \eta = m \cos M$$

entonces

$$(x - \xi) \cos N - (y - \eta)\ sen\ N = \pm\, k \tag{17}$$

viniendo determinado el ángulo N por

$$x' - \xi' = n\ sen\ N$$
$$y' - \eta' = n \cos N$$

Pero para un cálculo aproximado, basta tomar

$$\begin{aligned} n\ sen\ N &= x' \\ n \cos N &= y' \end{aligned} \tag{18}$$

En el instante de la conjunción

$$-\xi \cos N - (y_0 - \eta)\ sen\ N = \pm\, k \tag{19}$$

Si despreciamos el achatamiento terrestre:

$$sen\ \varphi = \eta \cos \delta' + \zeta\ sen\ \delta' \tag{20}$$

donde

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \tag{21}$$

Nuestro objetivo es determinar los valores máximo y mínimo de φ que satisfacen (20) con las condiciones (19) y (21). Podríamos hacer

$$\Omega(\xi, \eta, \zeta) = sen\, \varphi = \eta \cos \delta' + \zeta\, sen\, \delta'$$

$$X(\xi, \eta, \zeta) = -\xi \cos N - (y_0 - \eta)\, sen\, N \pm k = 0$$

$$\Xi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} = 0$$

e introduciendo los multiplicadores λ y ε tendríamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial X}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial X}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial \Xi}{\partial \eta} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} + \lambda \frac{\partial X}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

que junto con

$$\begin{aligned} X(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \Xi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

constituyen un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas que determinan los valores de las coordenadas que hacen máximo o mínimo a $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$. Sin embargo, éste es un complicado sistema no lineal, de modo que procederemos por un camino distinto. Sean

$$\begin{aligned} a &= -\xi \cos N + \eta \, sen \, N \\ b &= \xi \, sen \, N + \eta \cos N \end{aligned} \tag{24}$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} -\xi &= a \cos N - b \, sen \, N \\ \eta &= a \, sen \, N + b \cos N \\ \zeta &= \sqrt{1 - a^2 - b^2} \end{aligned} \tag{25}$$

y la condición X se reduce a

$$a = y_0 \, sen \, N \pm k \tag{26}$$

que es una cantidad constante, ya que supondremos que x' e y son constantes. Como

$$a^2 + b^2 + \zeta^2 = 1$$

podemos introducir las variables γ y ε de forma que

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= a \\ sen \, \gamma \cos \varepsilon &= b \\ sen \, \gamma \, sen \, \varepsilon &= \zeta \end{aligned} \tag{27}$$

donde *sen* γ queda restringido a valores positivos. Con todo esto:

$$\begin{aligned} sen \, \varphi = {} & \cos \gamma \, sen \, N \cos \delta' + sen \, \gamma \cos \varepsilon \cos \mathrm{N} \cos \delta' + \\ & sen \, \gamma \, sen \, \varepsilon \, sen \, \delta' \end{aligned} \tag{28}$$

y llamando

$$\begin{aligned} sen\,\beta &= sen\,N \cos\delta' \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos N \cos\delta' \\ \cos\beta\, sen\,\lambda &= sen\,\delta' \end{aligned} \qquad (29)$$

restringiendo cos β a valores positivos, queda

$$sen\,\varphi = sen\,\beta\cos\gamma + \cos\beta\, sen\,\gamma\cos(\lambda - \varepsilon) \qquad (30)$$

donde las únicas variables son φ *y ε.* Como cos β *sen* γ es positivo, *sen φ* es máximo cuando cos (λ – *ε)* = 1 o λ – *ε* = 0, y mínimos cuando cos (λ – *ε)* = 1 o λ - *ε* = 180°. Entonces tenemos los límites

$$sen\,\varphi = sen\,\beta\cos\varphi \pm \cos\beta\, sen\,\varphi = sen\,(\beta \pm \varphi) \qquad (31)$$

es decir

$$\begin{aligned} \varphi &= \beta + \varphi && \text{para el límite Norte} \\ \varphi &= \beta - \varphi && \text{para el límite Sur} \end{aligned}$$

Como hemos de limitarnos a valores ζ > 0, también será *sen ε* > 0. Para el límite Norte, con λ = *ε, sen* λ ha de ser positivo, y de acuerdo con cos β *sen* λ = *sen* δ' sólo ocurrirá si δ' > 0. Según todo esto, la fórmula que da el límite Norte es sólo válida cuando la declinación de la estrella es Norte. Para el límite Sur, λ = ε + 180° y *sen* λ ha de ser negativo, lo cual sólo ocurrirá para $\delta' < 0$. Es decir, la fórmula que da el límite Sur sólo es válida cuando la estrella tiene declinación Sur. El segundo límite de visibilidad en cada caso será uno de los puntos en que $\zeta = 0$ y en consecuencia también $sen\ \varepsilon = 0$, cos $\varepsilon = \pm 1$, con lo cual

$$sen\ \varphi = (\ sen\ N \cos \varphi \pm \cos N\ sen\ \varphi\ ) \cos \delta' \tag{32}$$

Si nos restringimos a valores de cos N positivos, el signo positivo en (32) da el límite Norte, que será usado cuando $\varphi = \beta - \gamma$ haya proporcionado el límite Sur. El signo negativo da el límite Sur para el caso en que $\varphi = \beta + \gamma$ haya dado el límite Norte.

Correcciones en la longitud de la Luna

Se ha hablado antes de la aplicación de la observación de ocultaciones al importante problema de determinación de errores en la longitud de la Luna, discrepancias entre las posiciones calculadas según la teoría del movimiento de nuestro satélite y las posiciones realmente observadas. Trataremos este problema con algún detenimiento. Sea T el instante en que se produce una ocultación, en ese momento

$$\begin{aligned} x &= 15\,\frac{\alpha - \alpha'}{\pi} \cos \delta \\ y &= \frac{\delta - \delta'}{\pi} \end{aligned} \tag{33}$$

donde α y δ son la ascensión recta y declinación de la Luna, π su paralaje y α' y δ' la ascensión recta y declinación de la estrella. El factor 15 convierte el ángulo α - α' medido en horas en grados sexagesimales. En lugar de la forma escrita para y se prefiere la más aproximada

$$y = \frac{\delta - \delta'}{\pi} + \frac{(\alpha - \alpha')\cos\delta \, sen\,\delta'}{2\pi} 15^2 (\alpha - \alpha') \, sen\, 1'' \tag{34}$$

que se deduce de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y &= r\,[\,sen\,\delta \cos\delta' + (\cos\delta\, sen\,\delta' - \cos\delta\, sen\,\delta') - \\ &\quad \cos\delta\, sen\,\delta' \cos(\alpha - \alpha')\,] \\ &= r\,[\,sen\,\delta\cos\delta' - \cos\delta\, sen\,\delta' + \\ &\quad \cos\delta\, sen\,\delta' \{1 - \cos(\alpha - \alpha')\}] \\ &= r\,[\,sen\,(\delta - \delta') + 2\cos\delta\, sen\,\delta'\, sen^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2}\,] \\ &= \frac{\delta - \delta'}{\pi} + \frac{\cos\delta\, sen\,\delta' (\alpha - \alpha')^2}{2\,\pi} \end{aligned}$$

y con objeto de poner el resultado en forma homogénea escribimos el segundo miembro como

$$\cos\delta\, sen\,\delta' \frac{15\,(\alpha - \alpha')}{2\,\pi} 15\,(\alpha - \alpha')\, sen\, 1''$$

que utilizando (33) también se puede poner

$$y = \frac{\delta - \delta'}{\pi} + \frac{x\, sen\,\delta' (\alpha - \alpha')}{27502} \tag{35}$$

Las fórmulas anteriores nos permiten calcular x e y en un instante dado, y las ecuaciones (2) las coordenadas ξ, η del observador.

Consideremos la fig. 48:

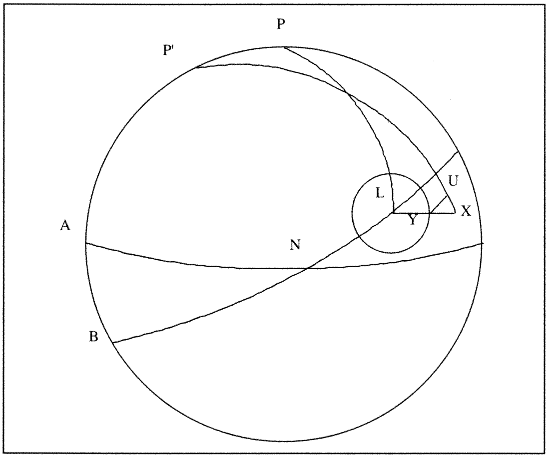

FIGURA 48.

El arco NA es el Ecuador, y el arco la órbita de la Luna. N ε el nodo, P el polo celeste y P' el polo de la órbita lunar. L es el centro de la Luna. Sea X la posición de la estrella en el instante calculado del contacto, y supongamos que, debido a un error en la longitud de la Luna, la ascensión recta y declinación tabuladas son errónea. L es el centro de la Luna según estos valores tabulados. El arco observado L entre la posición de la estrella y el centro de la Luna diferirá del semidiámetro lunar S. Sea S'=XL. El ángulo de posición PLX viene dado por, fig. 49.

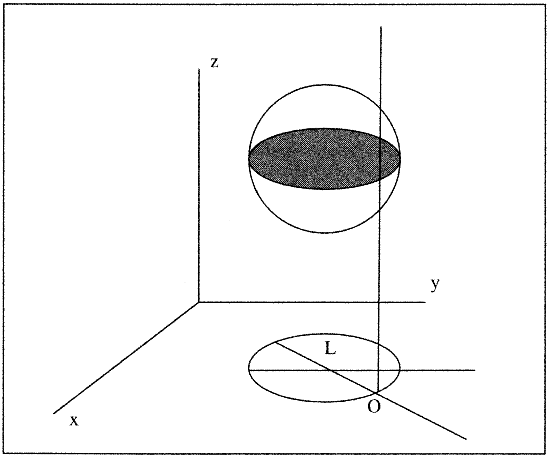

FIGURA 49.

$$\tan \theta = \frac{x - \xi}{y - \eta} \qquad (36)$$

Por otra parte

$$S' = (x - \xi) \operatorname{cosc} \theta = (y - \eta) \sec \theta \qquad (37)$$

En la fig. 48, el pequeño arco YU es paralelo al círculo máximo de la órbita de la Luna, NL. Llamaremos ω al ángulo de posición PLQ, con lo cual

$$QLX = \theta - \omega \qquad (38)$$

Sean $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ las variaciones de la ascensión recta y declinación en un minuto, en segundos de tiempo y en segundos de arco, respectivamente, que pueden obtenerse de las Efemérides. Las componentes del movimiento de la Luna sobre su órbita son

$$15\ \Delta\delta \cos\delta\ sen\ 1''$$

sobre el paralelo de declinación constante que pasa por la Luna y

$$\Delta\delta\ sen\ 1''$$

sobre el meridiano PL, como se comprueba sin dificultad.

Entonces

$$\tan\omega = \frac{15\ \Delta\alpha \cos\delta}{\Delta\delta} \tag{39}$$

Como LY = S e YX = S' - S, si consideramos el triángulo plano UYX, siendo recto el ángulo en U, tenemos

$$S' - S = UY \cos(\theta-\omega) + UX\ sen\ (\theta-\omega) \tag{40}$$

Ahora bien, UY es el error en la longitud tabulada de la Luna, y UX es la corrección a la posición tabulada en la dirección perpendicular a la órbita. Llamando $\Delta\lambda$ y $-\Delta\beta$ a estas correcciones,

$$S'\text{-}S = \Delta\lambda \cos(\theta\text{-}\omega)\text{-} \Delta\delta\, sen\,(\theta\text{-}\omega) \qquad (41)$$

Si se realizan varias observaciones de una misma observación, se dispone de varias ecuaciones de la forma (41), y por mínimos cuadrados pueden obtenerse ambas correcciones.

Ocultación de estrellas fijas por planetas

Las estrellas débiles desaparecen de la visión antes de ser realmente ocultadas por el limbo iluminado del planeta, mientras que las ocultaciones de estrellas brillantes son un fenómeno bastante raro. Sin embargo, las observaciones de una de tales ocultaciones llevadas a cabo desde distintos puntos de la Tierra tienen un gran valor para determinar la corrección al paralaje del planeta mediante una discusión de las ecuaciones de condición que serán tratadas en el capítulo XII. Si la ocultación ocurre cerca de uno de los puntos estacionarios del planeta, el intervalo de tiempo entre la inmersión y la emersión puede ser grande y el término de $\Delta\pi$ en (31). XII se hará proporcionalmente grande, permitiendo una estimación muy aproximada de esta corrección.