

# TEMA 8: APRENTATGE I ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES



Alberto Vidal Calatayud



## TEMA 8: APRENTATGE I ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES

### Objectius

- Conèixer els diferents conceptes matemàtics.
- Comprendre com s'adquireix el coneixement matemàtic.
- Valorar els aspectes importants per a la solució dels problemes aritmètics i algebraics.
- Conèixer la visió tradicional i actual de l'ensenyament de les matemàtiques.
- Considerar com dur a terme una millor instrucció.



## TEMA 8: APRENTATGE I ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES

### Esquema

1. Consideracions prèvies.
2. Adquisició del coneixement.
3. Solució de problemes aritmètics.
4. Solució de problemes algebraics.
5. Passos per a resoldre problemes matemàtics.
6. Ensenyament de les matemàtiques.
7. Conseqüències per a la instrucció.



## Què són els algorismes?

Són **procediments o regles** que s'apliquen a una classe concreta de problemes. Seguint adequadament es garanteix la resposta correcta.

## Què és l'aritmètica?

És la branca de la matemàtica l'objecte d'estudi de la qual són els nombres i les **operacions elementals** fetes amb aquests: suma, resta, multiplicació i divisió.

## Què és l'àlgebra?

L'àlgebra és la branca de les matemàtiques que estudia les estructures, les relacions i les quantitats (en el cas de l'àlgebra elemental).

- Ensenyar matemàtiques és una tasca complexa.
- L'alumnat ha d'adquirir habilitats procedimentals, solucionar problemes matemàtics i comprendre els conceptes i principis que es relacionen amb aquestes habilitats.
- Si s'abusa de la pràctica repetitiva, l'alumne no comprèn el que fa i no posa en pràctica les matemàtiques en la vida diària. El propòsit hauria de ser una **alfabetització matemàtica**.
- Les operacions matemàtiques van més enllà de l'aprenentatge memorístic: requereixen l'adquisició de xarxes de **representacions mentals**.
- Problema clau: reconèixer si una informació conceptual o procedimental s'adequa a un problema concret → necessitat d'ensenyar més **coneixements heurístics** (estratègics) que augmenten la flexibilitat per a resoldre problemes.

### **Cal tindre en compte:**

- Com més base conceptual i procedimental en matemàtiques, més vinculació entre aquests elements i més eficàcia i flexibilitat en la resolució de problemes.
- Els matemàtics experts utilitzen trets semàntics (de significat) del problema per a codificar el més rellevant. Els menys experts, trets sintàctics o superficials.
- Exemple d'estructura sintàctica: problemes de paraula clau. Per exemple, en un problema, la paraula "queden" activa l'esquema de la resta. En els llibres de text, a partir d'aquest mètode se soluciona un 97% dels problemes.

### **Enfocament tradicional**

Es considera que l'alumnat ha d'adquirir i dominar primer els aspectes computacionals (suma, resta ...), considerats com a habilitats bàsiques que marquen els fonaments de la comprensió conceptual.

### **Visió actual**

Les noves investigacions van en la línia de prioritzar els conceptes. Si la comprensió conceptual és rígida o inexistent, els algorismes s'apliquen de memòria i la transferència de l'aprenentatge és deficient.



## Dels errors s'aprén

Què podem observar en estes restes?

$$\begin{array}{r} 8 \\ -3 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ -16 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 47 \\ -35 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 52 \\ -17 \\ \hline 45 \end{array}$$

És possible que atribuïm a la resta 2 un descuit i a la 4 la complexitat de la resta portant. No obstant això, s'observa que s'aplica de manera sistemàtica la resta dels nombres majors menys els menors.







## Tipus de problemes

Baroody i Standifer (1993) han classificat cinc situacions de suma i resta: canviar-afegir; canviar-traure; part-part-tot; igualar; comparar.

## Estratègies per a sumar

Els xiquets més xicotets utilitzen tres nivells d'estratègies per comptar:

- El model de comptar tot
- Comptar des del primer
- Comptar des del major

*En la resta s'utilitza comptar de manera progressiva.*

## **Importància del coneixement aritmètic**

El text del problema o enunciat proporciona la base de la comprensió de la tasca, que comporta la representació del problema. Quan s'activen determinats esquemes (emmagatzemats en la MLLT) es representa a la M. de treball un esquema d'acció i es porta a terme un intent de solució.

Tot problema d'aritmètica requereix tres classes de coneixement:

- 1 - Esquemes de problemes.
- 2 - Esquemes d'accions.
- 3 - Coneixement estratègic.

## El llenguatge i la comprensió lectora

- Els problemes d'aritmètica "senzills" poden ser més o menys difícils, depenent de la naturalesa del llenguatge que s'utilitza en l'enunciat.
- La pregunta influeix en la representació del problema i, per tant, en l'aplicació de l'esquema de solució adequat.
- La **comprensió** es dona en dos passos: primer, el lector crea esquemes de comprensió del text del problema; després, aquests esquemes textuais activen esquemes matemàtics.
- *Alguns problemes aritmètics són en realitat problemes de lectura.*

## Aspectes evolutius

- Els **nens xicotets** tenen **dificultats de memòria**, que poden afectar la solució de problemes aritmètics abstractes, per senzills que siguin.
- Hem de parlar més de ***falta de memòria a curt termini*** que de falta de maduresa. Els nous enfocaments de l'ensenyament de conceptes aritmètics es basen cada vegada més en ***elements manipulables*** i en les estratègies que els nens inventen per a representar-se mentalment els conceptes numèrics (ex. utilitzar dits), per a construir la comprensió i per a evitar les fallades de memòria a curt termini.

- Cal **comprendre** les proposicions del text i convertir-les en una representació matemàtica.
- Doble tasca: **llegir** (comprendre) l'enunciat d'un problema d'àlgebra, i **construir la representació** matemàtica adequada per a resoldre'l.
  - Repte difícil
- Una **representació adequada** del problema és decisiva perquè només quan és bona porta a la solució. Importància d'una àmplia varietat d'esquemes de problemes.



## Errors algebraics

Si els problemes d'àlgebra requereixen un esquema nou per a cada subtipus, és probable que el seu elevat nombre impedisca que s'apreguen tots. A mesura que s'aprenen esquemes, augmenta la possibilitat de aprendre'ls incorrectament. Tipus d'errors:

- Utilitzar esquemes inadequats.
- Realitzar estimacions incorrectes.
- Utilització ineficaç de les analogies.

### Què cal saber per a resoldre problemes matemàtics?

*Les rajoles a la venda són quadrats de 30cm de costat. Quant costaria enrajolar una habitació rectangular de 7'2 metres de llarg i 5'4 metres d'ample, si cada rajola costa 0'72€?*



**Resoldre un problema suposa més que limitar-se a aconseguir la resposta final:**

- 1- Traducció de cada enunciat del problema.
- 2- Integració de la informació en una representació coherent del problema.
- 3- Disseny i supervisió d'un pla de solució.
- 4- Execució precisa i eficaç del pla de solució.



## 1- La traducció del problema

Coneixement previ:

- coneixement de la llengua “**lingüístic**” (rajoles i rajoles per a terra és el mateix).
- coneixement sobre el món “**fàctic**” (un quadrat té quatre costats iguals i un metre són 100 centímetres).

Problemés més difícils si impliquen:

- Comprensió de frases de relació.
- Ús de coneixement fàctic.





## *1- La traducció del problema*

Els bons solucionadors de problemes tenen millors probabilitats de comprendre les frases dels enunciats dels problemes expressats mitjançant paraules que els mals solucionadors, especialment si existeix relació entre dues variables.

La traducció del problema podria ser una de les principals dificultats en la resolució de problemes matemàtics. L'alumnat s'enfronta a la tasca de resoldre problemes mancants del coneixement lingüístic i fàctic necessari.



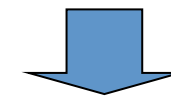
## 2- Integració del problema

Representació mental d'una situació concreta del problema.  
Necessari posseir coneixement esquemàtic.

### → Esquemes de l'alumnat per a problemes verbals.

- \* Alumnat amb experiència → tracta problemes amb coneixement sobre els tipus.
- \* Errors quan s'utilitza un esquema equivoccat.
- \* Mayer (1981) va trobar 100 tipus de problemes.
- \* L'intent de recordar tipus de problemes depén de la freqüència.

Si no s'aconsegueix → intent de fer similars els problemes.



**ERROR**



## 2- Integració del problema

### → Diferències experts-principiants

Alumnat amb experiència:

↳ se centra en aspectes estructurals.

Alumnat sense experiència:

↳ se centra en aspectes superficials.

### → Diferències evolutives

Errors en els problemes de comparació en alumnat que no té esquemes adequats més que per no tindre habilitats de càlcul.



## 2- Integració del problema

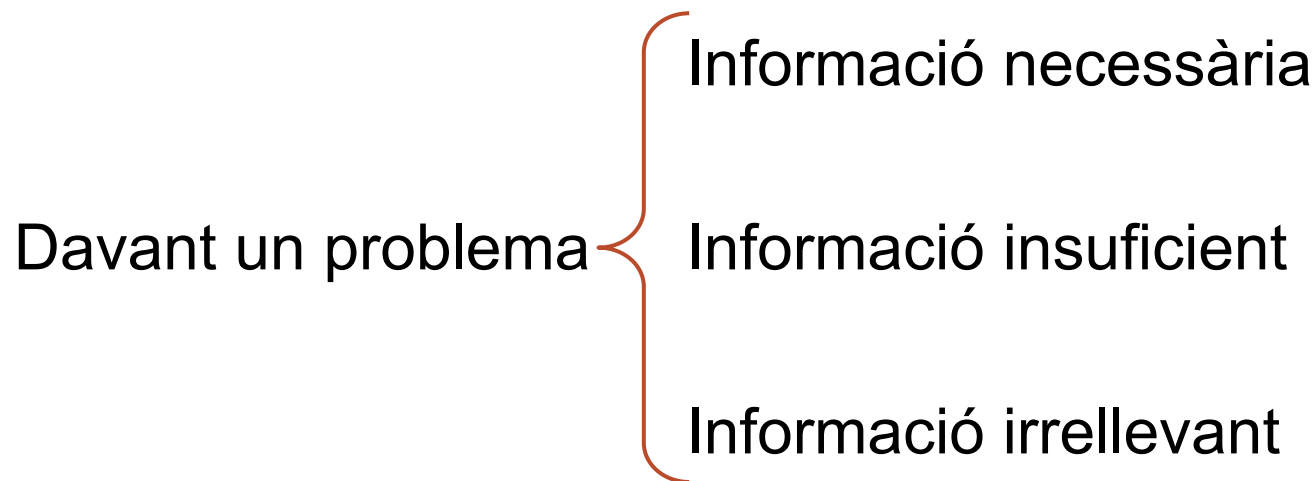
### → Perspectiva detallada dels processos d'integració del problema

- Errors en la SP per processos d'integració superficials, abús i mal ús de les paraules clau.
- Integració del problema incorrecte com a responsable dels errors.
- Traducció directa en la integració del problema.
- En lloc de recolzar-se en paraules clau, cal representar el problema amb les pròpies paraules (imatges).



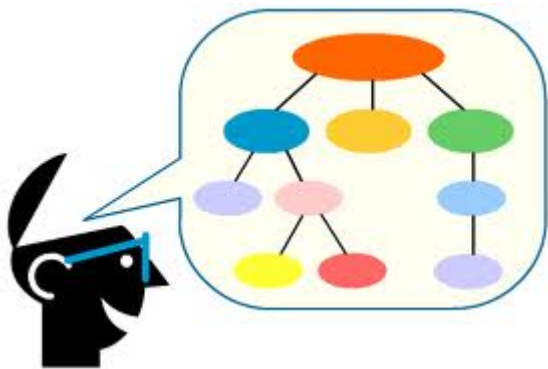
## 2- Integració del problema

### → Ensenyament d'habilitats d'integració de problemes



Ensenyar a valorar la rellevància de la informació

→ millor rendiment



### *3- Disseny i supervisió d'un pla de solució*

Polya (1945) aconsellava:

“si no sou capaços de resoldre el problema proposat, intenteu primer resoldre algun problema semblant. Sou capaços d'imaginar un problema més accessible i semblant? És possible utilitzar-lo? Seria possible utilitzar els seus resultats? És possible utilitzar el seu mètode? Caldria introduir algun element auxiliar perquè fóra possible utilitzar-lo?”



Disseny del pla:

- 1- Trobar un problema semblant.
- 2- Reformular el problema.
- 3- Descompondre el problema en submetes.



### *3- Disseny i supervisió d'un pla de solució*

- Es suggeriment de Polya encaixa amb teories cognitives actuals: transferència analògica.
- L'alumne resol un problema nou (objectiu) recordant un altre problema (base) que sap resoldre, abstractant el mètode de solució base i projectant-lo sobre l'objectiu.

#### **TRANSFERÈNCIA ANALÒGICA**

- 1- Reconeixement: identificar problema relacionat (base) capaç de resoldre.**
- 2- Abstracció: abstraure el mètode de solució o principi de la base.**
- 3- Projecció: aplicar el mètode o principi objectiu.**



### 3- Disseny i supervisió d'un pla de solució

- Creença destructiva per a planificació:  
resolució de problemes matemàtics aplicant procediments sense sentit.

Schoenfeld (1991): suspensió de l'establiment de significat en resoldre problemes matemàtics, “suspensen el requisit que l'enunciat dels problemes ha de tenir sentit”.

Schoenfeld (1991): “existeixen raons per a creure que eixa suspensió de l'establiment de significat es desenvolupa en l'escola, com a resultat de la pròpia escola”.



**Disposició productiva:** considera les matemàtiques com una cosa dotada de significat, útil i que mereix la pena.



### 3- Disseny i supervisió d'un pla de solució

Aventures de Jasper Woodbury: s'enfronta a desafiaments que requereixen solucionar problemes.

L'alumnat resol els problemes treballant en grups xicotets i després assisteix a un altre vídeo en que es mostra com va resoldre el protagonista el problema.



Les aventures de Jasper Woodbury es basen en tres principis que les diferencien dels programes de matemàtiques convencionals:

**Aprenentatge generatiu:** l'alumnat aprèn millor quan construeix activament el seu coneixement.

**Instrucció contextualitzada:** l'alumnat aprèn millor quan els continguts se'ls presenta en una situació interessant.

**Aprenentatge cooperatiu:** l'alumnat aprèn millor quan es comunica sobre el problema en grups.



#### *4- Execució precisa i eficaç del pla de solució.*

Es requereixen coneixements procedimentals: com executar la suma, resta, multiplicació o divisió.

Durant quasi 100 anys, els exercicis i la pràctica han sigut el mètode d'instrucció dominant per a ensenyar els procediments aritmètics.



## Cal tindre en compte

- Cal tractar tota la instrucció en ***matemàtiques*** com una activitat de ***solució de problemes***.
- La ***instrucció tradicional***, orientada a la ***computació***, ensenya al xiquet que les matemàtiques constitueixen un simple exercici de manipulació de símbols que no es relaciona amb la solució de problemes.
- Hi ha proves raonables que tindre estratègies més poderoses i flexibles basades en el coneixement conceptual millora la solució de problemes. Un ***rendiment*** versàtil en matemàtiques implica combinar els ***coneixements conceptual, procedimental i estratègic***.

## Cal tindre en compte

- Un aprenentatge de les matemàtiques del qual formen part el raonament de l'alumne, la solució de problemes i el pensament creatiu ***encara no*** s'ha incorporat per complet a la instrucció.
- Molts professors de matemàtiques ***segueixen posant l'accent*** en el desenvolupament de ***procediments***, i molts alumnes continuen adquirint coneixements matemàtics de memòria.
- El ***rendiment*** precís i flexible en àlgebra i aritmètica procedeix de l'adquisició de ***coneixements declaratius, procedimentals i condicionals***, dels quals deriven les solucions.

Els enfocaments cognitius de l'aprenentatge de les matemàtiques impliquen un enfocament reflexiu de la instrucció que promou l'aprenentatge per comprensió.

**1- Cal ensenyar les matemàtiques des d'una perspectiva de solució de problemes basada en la comprensió.** Hem d'ensenyar matemàtiques dins d'un marc de la solució de problemes significatiu, no com a elements aïllats.

**2- Cal centrar la instrucció en matemàtiques en els processos, les estructures i les decisions, no en les respostes.** S'han d'estructurar els problemes de manera que l'alumne no es limite a buscar la resposta correcta, sinó que tracte de trobar les raons que un procediment siga o no útil en una situació determinada.



3- ***Cal basar-se en el coneixement informal de l'alumnat.*** L'alumne construeix significat a partir de la seua experiència. Cal relacionar l'aprenentatge amb situacions de problema autèntiques que l'alumnat compregua bé.

4- ***El professor ha de dedicar temps a modelar verbalment la conducta de solució de problemes de matemàtiques.*** Parlar de les estratègies de solució mentre es posen en pràctica detalla els processos procedimentals i estratègics que s'empren per a resoldre problemes i en demostra la importància.

5- ***Ajudar l'alumnat a verbalitzar i visualitzar els processos utilitzats en els intents de solució.*** Si s'encalla, cal evitar donar la resposta.

**6- Utilitzar els errors de l'alumne com a font d'informació del seu grau de comprensió.**

**7- Oferir una mescla de tipus de problema.** El contacte amb problemes diferents porta a discriminar-los i a generalitzar millor el coneixement matemàtic.

**8- El professor necessita posseir un nivell adequat d'habilitat matemàtica.** El professor ha de saber desenvolupar les habilitats de l'alumnat que ja té adquirides.





## BIBLIOGRAFIA

Bruning, R.H., Schraw, G.J., y Ronning, R. (2002). *Psicología cognitiva e instrucción*. Madrid: Alianza Editorial.

Mayer, R. (2010). *Aprendizaje e Instrucción*. Madrid: Alianza Editorial.