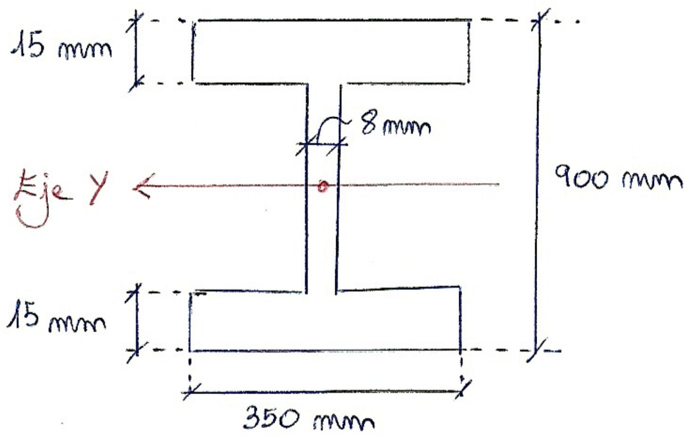
Ejemplo de Aplicación

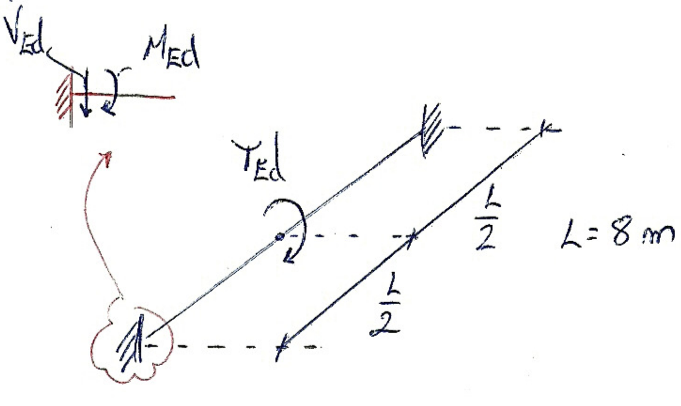
Método aproximado de Timoshenko

[Torsión de alabeo // Secciones doble T, H, U, Z, ...]

→ Dada una viga biempotrada de 8 m de longitud, cuya sección es la que se indica en la figura y sabiendo que en su punto medio actúa un torsor $T_{Ed} = 46'5$ KN·m, se pide:

- Si las secciones más solicitadas (las de los empotramientos) están sometidas a un flector $M_{Ed} = 490$ KN·m y a un cortante $V_{Ed} = 358$ KN, comprobar si la sección es capaz de soportar las solicitaciones indicadas





Resolución

[Como paso previo, habrá que clasificar la sección, por si fuese preciso reducirla, y calcular sus características]

En este caso: [Se propone comprobarlo]

- → La sección es clase 3
- → Área de la sección: $A = 17460 \text{ mm}^2$
- → Momento de inercia alrededor del eje Y: $I_y = 2'495 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$

① Cálculo de esfuerzos

En este ejemplo, en el enunciado nos dan directamente los esfuerzos ~~como dato~~, que son los siguientes:

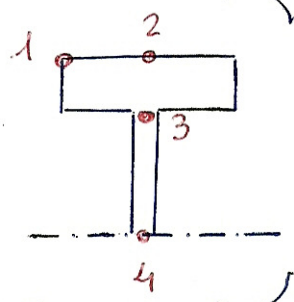
$$\left.\begin{array}{l} M_{Ed} = 490 \ KN \cdot m \\ V_{Ed} = 358 \ KN \end{array}\right\} \text{En las secciones más solicitadas}$$

$$T_{Ed} = 46'5 \ KN \cdot m \rightarrow \text{Aplicado en el centro de la viga}$$

Lo normal es que nos den las acciones que actúen sobre una determinada pieza (cargas puntuales, distribuidas, etc.), y a partir de ellas calcular los esfuerzos en la pieza, y elegir las secciones a comprobar (las más solicitadas)

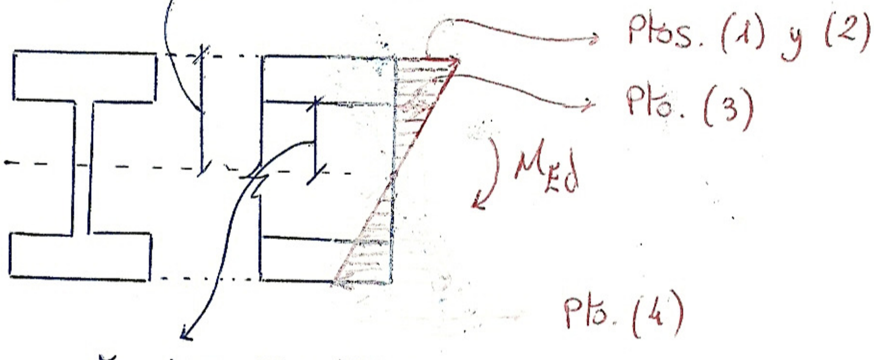
② Cálculo de las tensiones generadas por los esfuerzos en la sección

Los ptos. de la sección que estudiaremos en este caso serán:



(2.1) Tensiones que genera el flector (normales)

$$z_1 = z_2 = \frac{900}{2} = 450 \ mm$$



$$z_3 = 450 - 15 = 435 \ mm$$

(*) Ptos. (1) y (2) :

$$\sigma_{x,Ed_1} = \sigma_{x,Ed_2} = \frac{M_{Ed}}{I_y} \cdot z_1 = \frac{490 \cdot 10^6 \,[N \cdot mm]}{2'495 \cdot 10^9 \,[mm^4]} \cdot 450\,[mm] =$$

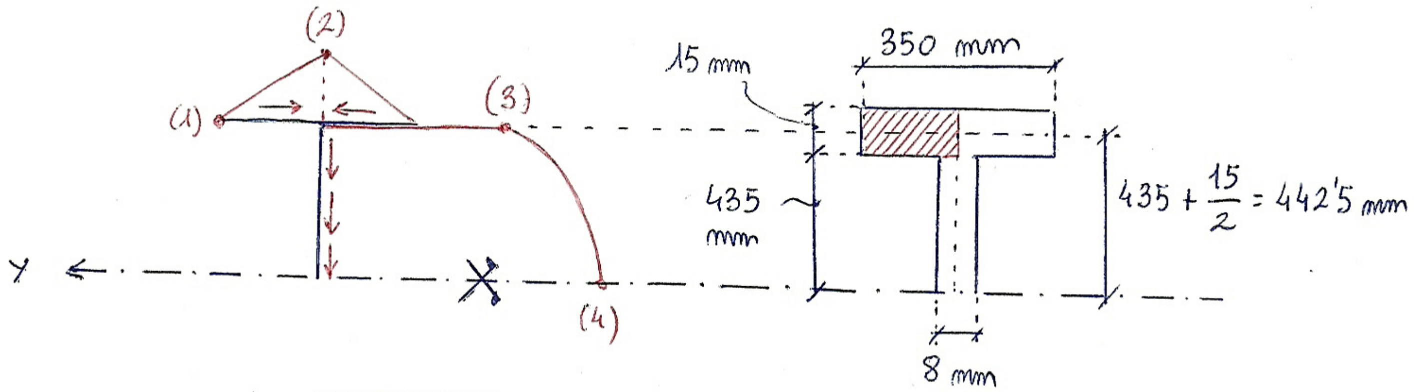
$$= \boxed{88'38 \; N/mm^2 = \sigma_{x,Ed_1} = \sigma_{x,Ed_2}}$$

(*) Pto. (3) :

$$\boxed{\sigma_{x,Ed_3}} = \frac{M_{Ed}}{I_y} \cdot z_3 = \frac{490 \cdot 10^6 \,[N \cdot mm]}{2'495 \cdot 10^9 \,[mm^4]} \cdot 435\,[mm] = \boxed{85'43 \; N/mm^2}$$

(*) Pto. (4) : $\boxed{\sigma_{x,Ed_4} = 0}$

2.2 Tensiones que genera el cortante (tangenciales)



(*) Pto. (1) : $\boxed{\tau_{V,Ed_1} = 0}$

(*) Pto. (2) :

$$\tau_{V,Ed_2} = \frac{V_{Ed} \cdot S}{e \cdot I} = \frac{358 \cdot 10^3 \,[N] \cdot \left\{ 15 \cdot \frac{350}{2} \cdot 442'5 \right\} [mm^3]}{15\,[mm] \cdot 2'495 \cdot 10^9 \,[mm^4]} = \boxed{11'11 \; N/mm^2 = \tau_{V,Ed_2}}$$

(*) Pto. (3) :

$$\tau_{V,Ed_3} = \frac{V_{Ed} \cdot S}{e \cdot I} = \frac{358 \cdot 10^3 \,[N] \cdot \left\{ 15 \cdot 350 \cdot 442'5 \right\} [mm^3]}{8\,[mm] \cdot 2'495 \cdot 10^9 \,[mm^4]} = \boxed{41'67 \; N/mm^2 = \tau_{V,Ed_3}}$$

(*) Pto. 4 :

$$\tau_{V,Ed_4} = \frac{V_{Ed} \cdot S}{e \cdot I} = \frac{358 \cdot 10^3 [N] \cdot \left\{ 15 \cdot 350 \cdot 442'5 + 435 \cdot 8 \cdot \frac{435}{2} \right\} [mm^3]}{8 [mm] \cdot 2'495 \cdot 10^9 [mm^4]} =$$

$$= \boxed{55'24 \; N/mm^2 = \tau_{V,Ed_4}}$$

(2.3) Tensiones que genera el torsor (normales y tangenciales)

Recordemos que el esfuerzo torsor tiene 2 componentes:

$$T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed} \qquad [\text{Art}^{\circ}\ 6.2.7 \text{ pág. SE-A-32}]$$

Esfuerzo torsor de cálculo

Componente de torsión uniforme ó de Saint Venant

Componente de torsión no uniforme o de alabeo

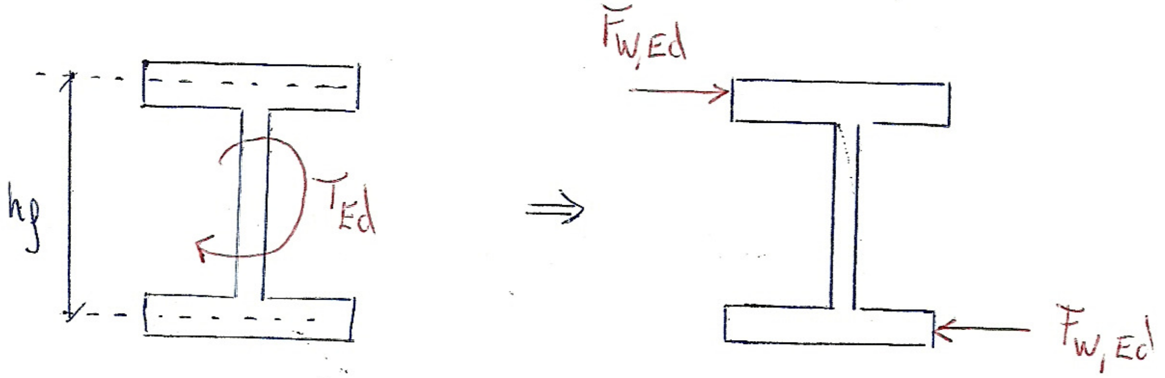
Sin embargo, en el Artº 6.2.7 pto. 3 del CTE DB SE-A, se indica que en las piezas formadas por un perfil en doble T (IPE, HEB, etc.) puede despreciarse la componente de torsión uniforme ó de Saint Venant. Luego:

$$T_{Ed} = \cancelto{0}{T_{t,Ed}} + T_{w,Ed} \Rightarrow \boxed{T_{Ed} = T_{w,Ed}}$$

El torsor generará únicamente tensiones por torsión de alabeo
El cálculo de las tensiones generadas por torsión de alabeo se determinan mediante el <u>Método aproximado de Timoshenko</u>
[Artº 3.4.6 EAE]

A continuación, vamos aplicar el método aproximado a nuestro ejemplo.

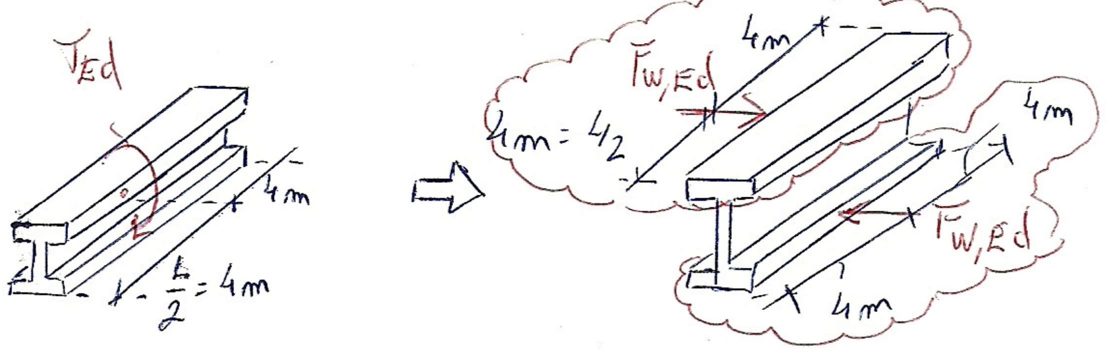
En primer lugar, en este método, el torsor (T_{Ed}) se divide en un par de fuerzas que actúan sobre las alas (estas fuerzas las vamos a designar como $F_{w,Ed}$):



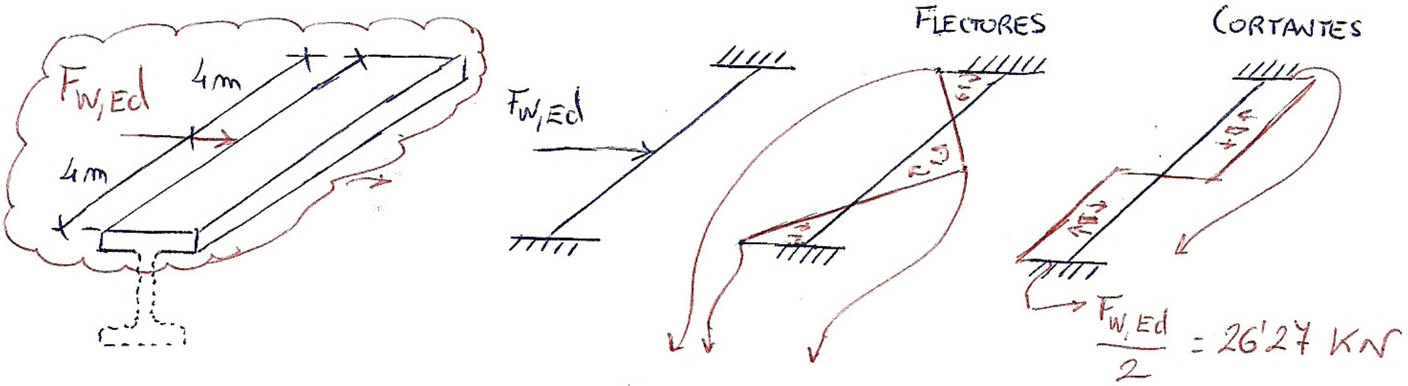
$h_f = 900 - 15 = 885$ mm

$$F_{w,Ed} = \frac{T_{Ed}}{h_f} = \frac{46'5\ [KN \cdot m]}{0'885\ [m]} = \boxed{52'54\ KN = F_{w,Ed}}$$

Recordemos que el torsor actuaba en la sección central de la pieza. En ese caso, con la simplificación, la situación quedaría de la siguiente manera:



A partir de ahora, el ala superior e inferior son dos piezas prismáticas biempotradas (porque la barra original era biempotrada) sometidas a una carga puntual $F_{W,Ed}$ en su punto medio. Ahora, calcularemos las tensiones que genera esa carga puntual en la sección [y esas serán las tensiones generadas por el torsor que estábamos buscando]



$$\frac{F_{W,Ed}}{2} = 26'27 \text{ KN}$$

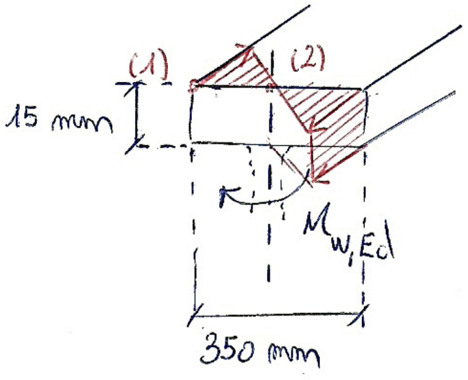
$$\frac{F_{W,Ed}\cdot L}{8} = \frac{F_{W,Ed}\cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} = 52'54 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

Nos quedamos con la sección del empotramiento, donde tenemos el mayor flector y el mayor cortante:

$$M_{W,Ed} = 52'54 \text{ KN}\cdot\text{m}$$

$$V_{W,Ed} = 26'27 \text{ KN}$$

- Tensiones normales ($\sigma_{W,Ed}$)



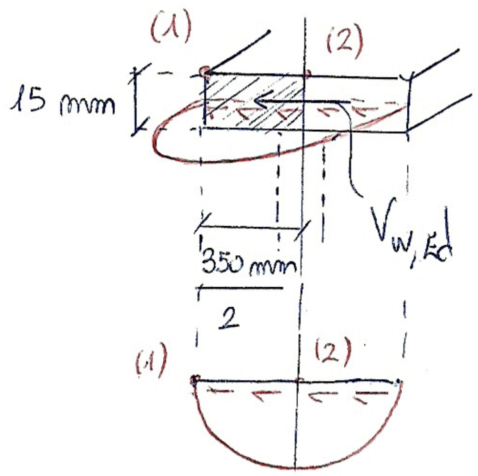
(*) Pto. 1:

$$\sigma_{W,Ed_1} = \frac{M_{W,Ed}}{I}\cdot z = \frac{52'54\cdot 10^6 \,[N\cdot mm]}{\frac{1}{12}\cdot 350^3\cdot 15\,[mm^4]}\cdot\frac{350\,[mm]}{2} =$$

$$= \boxed{171'56 \text{ N/mm}^2 = \sigma_{W,Ed_1}}$$

(*) Pto. 2 : $\boxed{\sigma_{w,Ed_2} = 0}$

→ Tensiones tangenciales ($\tau_{w,Ed}$)



(*) Pto. 1 : $\boxed{\tau_{w,Ed_1} = 0}$

(*) Pto. 2 :

$$\tau_{w,Ed_2} = \frac{V_{w,Ed} \cdot S}{e \cdot I} =$$

$$= \frac{26'27 \cdot 10^3 [N] \cdot \left[15 \cdot \frac{350}{2} \cdot \frac{350/2}{2}\right] [mm^3]}{15 [mm] \cdot \frac{1}{12} \cdot 350^3 \cdot 15} =$$

$$= \boxed{7'51 \ N/mm^2 = \tau_{w,Ed_2}}$$

③ Comprobación de la condición de resistencia de la sección según el criterio de Von Mises

En este caso tenemos una sección en doble T ó H, en la que predomina la torsión de alabeo, con interacción de flexión, cortante y torsión, luego la condición de Von Mises queda de la forma [ver transparencias tema 5.1, apartado 5 "Interacción de esfuerzos"]:

$$\sigma_{co} = \sqrt{(\sigma_{x,Ed} + \sigma_{w,Ed})^2 + 3(\tau_{v,Ed} + \tau_{w,Ed})^2} \leq f_{yd}$$

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Tenemos } t_f = 15 \text{ mm} \\ [t < 16 \text{ mm}] \text{ Tabla 4.1} \end{array} \right\} f_y = 275 \ N/mm^2 \Rightarrow f_{yd} = \frac{275}{1'05} = 261'9 \ N/mm^2$$

Luego, vamos a comprobar que la condición se cumple en los puntos de la sección indicados:

Pto. 1

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{x,Ed_1} = 88'38 \ N/mm^2 \\ \sigma_{w,Ed_1} = 171'56 \ N/mm^2 \\ \tau_{V,Ed_1} = 0 \\ \tau_{w,Ed_1} = 0 \end{array}\right\} \quad \sigma_{co} = \sqrt{(88'38+171'56)^2 + 3(0+0)^2} =$$

$$= 259'94 \ N/mm^2 < f_{yd}$$

CUMPLE !!

Pto. 2

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{x,Ed_2} = 88'38 \ N/mm^2 \\ \sigma_{w,Ed_2} = 0 \\ \tau_{V,Ed_2} = 11'11 \ N/mm^2 \\ \tau_{w,Ed_2} = 7'51 \ N/mm^2 \end{array}\right\} \quad \sigma_{co} = \sqrt{(88'38+0)^2 + 3(11'11+7'51)^2} =$$

$$= 94'08 \ N/mm^2 < f_{yd}$$

CUMPLE !!

Pto. 3

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{x,Ed_3} = 85'43 \ N/mm^2 \\ \tau_{V,Ed_3} = 41'67 \ N/mm^2 \end{array}\right\} \quad \sigma_{co} = \sqrt{(85'43+0)^2 + 3(41'67+0)^2} =$$

$$= 111'84 \ N/mm^2 < f_{yd}$$ CUMPLE !!!

Pto. 4

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{x,Ed_4} = 0 \\ \tau_{V,Ed_4} = 55'24 \ N/mm^2 \end{array}\right\} \quad \sigma_{co} = \sqrt{(0+0)^2 + 3(55'24+0)^2} =$$

$$= 95'68 \ N/mm^2 < f_{yd}$$ CUMPLE !!!

Conclusión: La sección es capaz de soportar las solicitaciones a las que está sometida.

Nota

Las tensiones tangenciales en el alma (ptos. 3 y 4) producidas por el cortante ($\tau_{V,Ed}$), se pueden considerar de forma simplificada uniformes e igual a:

$$\tau_{V,Ed} = \frac{V_{Ed}}{A_V}$$

Área de cortante que simplificadamente se puede calcular: $A_V \simeq h_w \cdot t_w$

Si aplicamos está simplificación a los ptos. 3 y 4 de nuestra sección, la tensión tangencial en estos ptos. producida por el cortante será:

$$\tau_{V,Ed_3} = \tau_{V,Ed_4} = \frac{358 \cdot 10^3 \, [N]}{\{900-30\} [mm] \cdot 8 [mm]} = 51'44 \; N/mm^2$$