# APUNTES DE HORMIGÓN ARMADO

## Adaptados a la Instrucción EHE-08


**FCO. DE BORJA VARONA MOYA**
**JOSÉ ANTONIO LÓPEZ JUÁREZ**
**LUIS BAÑÓN BLÁZQUEZ**

**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**
**UNIVERSIDAD DE ALICANTE**


**Curso 2012-2013**

*Título:* Apuntes de Hormigón Armado. Adaptados a la Instrucción EHE-08

*Autores:* Fco. de Borja Varona Moya, José Antonio López Juárez y Luis Bañón Blázquez

*e-mail de contacto:* borja.varona@ua.es

Dpto. de Ing. de la Construcción, Obras Públicas e Infraestructura Urbana
Escuela Politécnica Superior – Universidad de Alicante
Edificio Politécnica II
Ctra. San Vicente del Raspeig, s/n
03690 – San Vicente del Raspeig - ESPAÑA

*Fotografía de portada:* Auditorio de Tenerife "Adán Martín", Santa Cruz de Tenerife (España), obra de Santiago Calatrava completada en 2003. Detalle de fotografía original de Wladyslaw, bajo licencia *Creative Commons*.

Septiembre de 2012

# CONTENIDO

**NOTA PRELIMINAR** ..... 1

**CAPÍTULO 1 - INTRODUCCIÓN AL HORMIGÓN ARMADO** ..... 3
1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA ..... 3
1.1 HISTORIA DEL CEMENTO ..... 3
1.2 EL HORMIGÓN ARMADO: LA ÉPOCA DE LAS PATENTES ..... 4
1.3 LOS PRIMEROS ESTUDIOS ..... 6
1.4 LA TEORÍA DEL HORMIGÓN ARMADO Y LOS PRIMEROS REGLAMENTOS ..... 8
1.5 EL HORMIGÓN ARMADO EN ESPAÑA ..... 9
2. COMPONENTES DEL HORMIGÓN Y TIPOS DE HORMIGONES ..... 11
2.1 LOS CEMENTOS ..... 11
2.2 EL AGUA EN EL HORMIGÓN ..... 19
2.2 LOS ÁRIDOS ..... 20
2.3 LOS ADITIVOS ..... 22
2.4 TIPOS DE HORMIGONES ..... 23
3. DOSIFICACIÓN, PREPARACIÓN Y PUESTA EN OBRA ..... 25
3.1 DOSIFICACIÓN DEL HORMIGÓN ..... 25
3.2 PUESTA EN OBRA DEL HORMIGÓN ..... 28

**CAPÍTULO 2 - BASES DE CÁLCULO Y DURABILIDAD** ..... 33
1. BASES DE CÁLCULO ..... 33
1.1 EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ..... 33
1.2 EL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE ..... 35
1.3 TRATAMIENTO DE LAS ACCIONES ..... 35
2. LA DURABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ..... 40
2.1 ESTRATEGIAS PARA ASEGURAR LA DURABILIDAD ..... 41
2.2 ESTIMACIÓN DE LA VIDA ÚTIL ..... 48

**CAPÍTULO 3 - PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES** ..... 51
1. PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HORMIGÓN ..... 51
2. ARMADURAS PASIVAS EN EL HORMIGÓN ARMADO ..... 54
2.1 ACEROS PARA ARMADURAS PASIVAS ..... 54

2.2 LÍMITE ELÁSTICO CARACTERÍSTICO Y DE CÁLCULO DE UN ACERO ..... 59
2.3 PROCESOS DE ELABORACIÓN, ARMADO Y MONTAJE DE LAS ARMADURAS PASIVAS ..... 60

**CAPÍTULO 4 - AGOTAMIENTO POR SOLICITACIONES NORMALES** ..... 67
1. FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A SOLICITACIONES NORMALES ..... 67
1.1 HIPÓTESIS DE CÁLCULO Y DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN ..... 67
1.2 DOMINIOS DE DEFORMACIÓN ..... 72
1.3 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y EQUILIBRIO EN UN CASO GENERAL ..... 75
2. CÁLCULO CON EL DIAGRAMA DEL BLOQUE RECTANGULAR EN SECCIONES RECTANGULARES ..... 77
2.1 FLEXIÓN PURA ..... 77
2.2 FLEXIÓN COMPUESTA ..... 86
2.3 FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA EN SECCIÓN RECTANGULAR ..... 94
3. DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES EN T ..... 99
3.1 EL ARRASTRE POR CORTANTE Y EL ANCHO EFICAZ DEL ALA ..... 99
3.2 FLEXIÓN PURA EN SECCIONES EN T CON EL ALA COMPRIMIDA ..... 101

**CAPÍTULO 5 - EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES** ..... 105
1. ANÁLISIS DE REGIONES D ..... 105
2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LAS BIELAS Y LOS TIRANTES ..... 107
3. MODELOS DE BIELAS Y TIRANTES ..... 110
3.1 CASO DE CARGAS CONCENTRADAS SOBRE MACIZOS ..... 110
3.2 LAS VIGAS DE GRAN CANTO ..... 111
3.3 LAS MÉNSULAS CORTAS ..... 115

**CAPÍTULO 6 - AGOTAMIENTO POR SOLICITACIONES TANGENCIALES** ..... 121
1. SECCIONES SOMETIDAS A ESFUERZO CORTANTE ..... 121
1.1 INTRODUCCIÓN: ANALOGÍA DE LA CELOSÍA ..... 121
1.2 DIMENSIONAMIENTO PRÁCTICO DE LAS ARMADURAS DE CORTANTE EN ELEMENTOS LINEALES ..... 123
1.3 INTERACCIÓN DE CORTANTE-FLECTOR ..... 128
1.4 RASANTE ALAS-ALMA EN VIGAS EN T ..... 130
2. TENSIONES TANGENCIALES: LA TORSIÓN ..... 131
3. TENSIONES TANGENCIALES: EL PUNZONAMIENTO ..... 133
3.1 ELEMENTOS ESTRUCTURALES SIN ARMADURA DE PUNZONAMIENTO ..... 134
3.2 ELEMENTOS ESTRUCTURALES CON ARMADURA DE PUNZONAMIENTO ..... 137

**CAPÍTULO 7 - ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE INESTABILIDAD** ..... 141
1. CONCEPTOS PREVIOS SOBRE EL FENÓMENO DE INESTABILIDAD ..... 141

1.1 EL CONCEPTO DE ESBELTEZ ..... 143
1.2 EL CONCEPTO DE TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LAS ESTRUCTURAS ..... 144
1.3 LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO EN LAS PIEZAS COMPRIMIDAS ..... 145
2. COMPROBACIÓN DE INESTABILIDAD EN LA EHE-08 ..... 147
2.1 CASOS EN LOS QUE PUEDE OMITIRSE LA COMPROBACIÓN DE INESTABILIDAD ..... 147
2.2 CASO DE SOPORTES DE ESBELTEZ COMPRENDIDA ENTRE $\lambda_{inf}$ Y 100 ..... 149
2.3 CASO DE SOPORTES CON ESBELTEZ SUPERIOR A 100 ..... 151

**CAPÍTULO 8 - DISEÑO Y DISPOSICIONES EN VIGAS Y SOPORTES** ..... 155
1. ANÁLISIS LINEAL CON REDISTRIBUCIÓN LIMITADA DE MOMENTOS ..... 155
1.1 INTRODUCCIÓN Y DEFINICIÓN ..... 155
1.2 LA REDISTRIBUCIÓN LIMITADA EN LA INSTRUCCIÓN EHE-08 ..... 157
2. DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS DE ARMADO ..... 164
2.1 CUANTÍAS MECÁNICAS DE ARMADO ..... 164
2.2 CUANTÍAS GEOMÉTRICAS DE LAS ARMADURAS LONGITUDINALES ..... 166
2.3 DIÁMETROS Y SEPARACIONES ..... 167
2.4 DISPOSICIÓN DE SEPARADORES ..... 170
2.5 REGLAS DE ANCLAJE Y DESPIECE ..... 171
3. DISPOSICIONES EN ZONAS SÍSMICAS ..... 173
3.1 DISPOSICIONES RELATIVAS A LAS VIGAS ..... 174
3.2 DISPOSICIONES RELATIVAS A LOS SOPORTES ..... 176

**CAPÍTULO 9 - LOS ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO DEL HORMIGÓN** ..... 179
1. ESTUDIO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR FISURADA ..... 179
2. EL ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN ..... 181
2.1 FINALIDAD DEL ESTUDIO DE LA FISURACIÓN ..... 181
2.2 CÁLCULO DE LA ABERTURA MÁXIMA DE FISURA ..... 183
2.3 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS ..... 186
3. EL ESTADO LÍMITE DE DEFORMACIÓN ..... 189
3.1 CANTOS MÍNIMOS EN LA INSTRUCCIÓN ESPAÑOLA ..... 191
3.2 CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES ..... 195
4. EL ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES ..... 201

**CAPÍTULO 10 - ELEMENTOS DE CIMENTACIÓN Y CONTENCIÓN** ..... 203
1. INTRODUCCIÓN ..... 203
1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS CIMENTACIONES ..... 204
1.2 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN EL TERRENO ..... 206
1.3 CRITERIOS DE DISEÑO ..... 208

2. DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE ZAPATAS AISLADAS ..... 209
2.1 PREDIMENSIONAMIENTO ..... 209
2.2 COMPROBACIONES ESTRUCTURALES ..... 214
2.3 ZAPATAS DE MEDIANERÍA ..... 218
3. ZAPATAS COMBINADAS Y VIGAS DE CIMENTACIÓN ..... 221
4. CIMENTACIONES PROFUNDAS ..... 226
4.1 PILOTES ..... 226
4.2 ENCEPADOS ..... 229
5. VIGAS DE ATADO ..... 235
6. MUROS DE CONTENCIÓN Y MUROS DE SÓTANO ..... 237
6.1 DETERMINACIÓN DE LOS EMPUJES DEL TERRENO ..... 239
6.2 CRITERIOS DE DISEÑO ..... 241

**BIBLIOGRAFÍA** ..... 251

**APÉNDICE 1. TABLAS** ..... 253

**APÉNDICE 2. PRONTUARIO** ..... 255

# NOTA PRELIMINAR

Esta colección de apuntes tiene su razón de ser en el contexto de las asignaturas "Hormigón Armado" que cursan los estudiantes de Arquitectura y "Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado" que cursan los estudiantes del Grado en Ingeniería Civil en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Alicante. Como tal, la estructura de los mismos y su alcance están diseñados a medida de ambas asignaturas y como complemento a las clases teóricas. A falta de los temas dedicados a forjados de edificación, control de calidad e introducción al hormigón pretensado y a las estructuras mixtas de hormigón y acero estructural, estos apuntes desarrollan el temario completo de ambas asignaturas. Se ha prestado un especial cuidado en mantener el rigor técnico en todos los aspectos tratados (desarrollos, explicaciones, ecuaciones, unidades, ejemplos prácticos, etc.). No obstante, es casi imposible conseguir una infalibilidad absoluta y las posibles erratas que sean detectadas serán debidamente comunicadas y publicadas a través del Campus Virtual de la Universidad de Alicante.

El estudio atento de los mismos no excluye en modo alguno el valor y la utilidad de las notas que los alumnos puedan tomar en las clases teóricas o en las dedicadas a la resolución de problemas. Y, aún más importante, el alumno debe considerar estos apuntes como un mero complemento a la lectura personal de las fuentes citadas en el capítulo de bibliografía y, en especial, de la normativa asociada a la edificación y al diseño y comprobación del hormigón estructural, con la cual se debe lograr un alto grado de familiaridad.

Por su propia naturaleza, las normas y las instrucciones no tienen vocación de textos didácticos, sino que están orientadas hacia los profesionales ya formados y familiarizados con la problemática específica de su contenido. Por ello, no pueden constituir un material docente apropiado por sí solas. En el contexto del hormigón armado, tanto el estudiante como el profesional más capacitado deben contar con el respaldo bibliográfico de la Instrucción EHE-08 y de varios buenos libros de consulta, en especial las obras *"Hormigón armado"* de Pedro Jiménez Montoya, Álvaro García Meseguer y Francisco Morán Cabré y *"Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón"* de José Calavera Ruíz. Ambos textos están disponibles en la biblioteca de nuestra universidad y aunque en estos apuntes hay numerosas referencias a ellos, es altamente recomendable su consulta.

Por último estos "Apuntes de Hormigón Armado" están basados en su práctica totalidad en las normas nacionales vigentes y, como tal, la tecnología de las estructuras de hormigón se trata desde el punto de vista de la Instrucción EHE-08. No obstante, en la medida de lo posible se tratará de hacer adecuada referencia a los textos europeos de referencia: el Código Modelo de 1.990 y el Eurocódigo 2 de 2.004.

En Alicante, a 27 de Agosto de 2.011

Los autores

# CAPÍTULO 1
# INTRODUCCIÓN AL HORMIGÓN ARMADO

## 1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

### 1.1 HISTORIA DEL CEMENTO

El empleo del cemento se remonta en el tiempo a las pastas y morteros que se empleaban en la época prerromana en las obras de mampostería. Sin embargo, fueron los ingenieros romanos quienes lo llevaron al más alto grado de desarrollo conocido en el mundo occidental antiguo. La palabra cemento tuvo su origen en la denominación latina *opus caementicium* para el material de construcción que se empleó durante la República y el Imperio Romano. Los ingenieros de la época lo fabricaban mezclando y calentando puzolanas machacadas, limos y, en ocasiones, cenizas volcánicas. El producto resultante endurecía al añadirle agua, por lo que era un primitivo conglomerante hidráulico. Al parecer, el empleo de las puzolanas data del siglo I a.C. y se obtenían de las canteras de Pozzuoli, próximas al Vesubio. Este cemento "natural" fue utilizado a gran escala en todo tipo de obras urbanas destacando, de entre todas ellas, el Panteón de Agripa y las termas del emperador Caracalla, construidas entre los años 212 y 216 d.C. En la cúpula del Panteón, que no pertenecía al templo original construido por Agripa sino que fue añadida en la época de los emperadores Trajano y Adriano (comienzos del s. II d.C.), se empleó un increíble antecedente del hormigón de áridos ligeros empleando piedra pómez como árido del hormigón en los niveles más elevados de la cúpula.

Figura 1. Interior de la cúpula del Panteón

Tras la caída del Imperio Romano, durante la Edad Media y el Renacimiento y hasta mediados del siglo XVIII, no se produjo ningún avance tecnológico relevante. Hasta que en 1.759 el ingeniero **John Smeaton** (1.724-1.792), que estaba a cargo de la reconstrucción del Faro de Eddystone en Plymouth (Inglaterra), se enfrentó con el problema de mejorar la velocidad de fraguado del cemento que empleaba, construido a base de limos. La base de la cimentación del faro estaba situada en la carrera de mareas y era necesario que endureciera lo suficiente en un período de pocas horas. La clave de la solución fue el descubrimiento de que la velocidad de la reacción de hidratación de la pasta de

cemento era directamente proporcional a la cantidad de arcilla contenida en el limo original. Sin embargo, una vez completada la realización del faro, no continuó sus investigaciones.

La arcilla fue un componente clave en las patentes de cemento posteriores. En 1.796 el británico James Parker patentó el *cemento Romano*, obtenido de la mezcla de minerales de arcilla y carbonato cálcico. En 1.817 el francés **Louis Vicat** (1.786-1.861), graduado en la Escuela de Ingenieros de Puentes y Caminos de París en 1.806, desarrolló con un cemento a base de arcilla que empleó durante los años 1.812 a 1.824 en la construcción del puente de Souillac, de 180 m de largo. El uso de ese cemento se hizo muy popular durante algún tiempo y su hijo, Joseph Vicat, fundó la empresa de cementos *Vicat*.

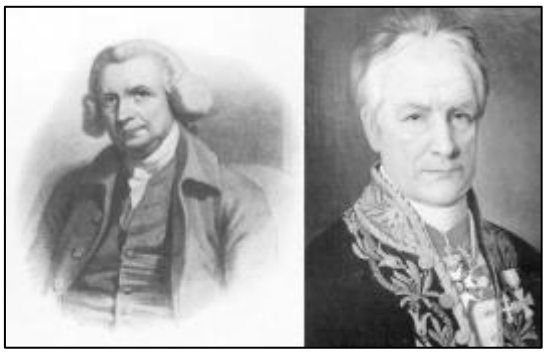


Figura 2. Joseph Smeaton (izda.) y Louis Vicat (dcha.)

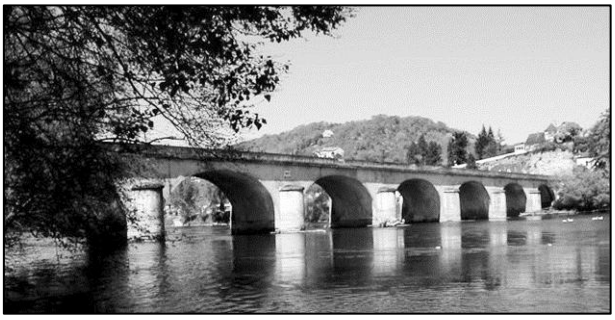


Figura 3. Puente de Souillac

En 1.822 otro británico, James Frost, presentó una mejora del *cemento Romano*, a la que patentó como *cemento Británico*. Sin embargo, la llegada del ***cemento Portland***, en 1.824, supuso una auténtica revolución. Fue patentado por **Joseph Aspdin** (1.778-1.855) (*"An Improvement in the Modes of Producing an Artificial Stone"*) quien lo bautizó así por la similitud del color del cemento producido con las rocas características de la Isla de Portland. Este cemento, con las lógicas mejoras introducidas a lo largo de los años, es el más utilizado actualmente a nivel mundial.

## 1.2 EL HORMIGÓN ARMADO: LA ÉPOCA DE LAS PATENTES

La mezcla de cemento, agua, arena y fragmentos de roca machacados podía ser moldeada mientras estaba fresca hasta que la reacción de hidratación conseguía el endurecimiento de la pasta, dotándola de resistencia a la compresión. Este producto era el **hormigón**, bautizado en Francia como *béton* y como *concrete* en Gran Bretaña. Quería verse en él una especie de piedra sintética, la *"artificial stone"* del título de la patente de Aspdin. El principal problema era su deficiente resistencia a la tracción, inferior a la de la piedra natural. En plena Revolución Industrial, era sólo cuestión de tiempo dar con una solución, obtenida apenas un cuarto de siglo después de la patente del *cemento Portland*. La primera aplicación de un hormigón reforzado con acero fue idea del francés **François Coignet** (1.814-

1.888) quien llevó a cabo en 1.853 la construcción de un inmueble de cuatro plantas en el número 72 de la *rue* Charles Michels de París. El edificio fue concebido con fines propagandísticos para demostrar la aptitud del hormigón como material de construcción y el 100% de la estructura y sus ornamentos fueron fabricados con hormigón encofrado en moldes. Era el forjado de la azotea el que estaba además reforzado con perfiles metálicos. Su invención fue presentada en la Exposición Universal de París de 1.855 y un año más tarde consiguió la patente de un sistema de construcción de hormigón reforzado con barras metálicas.

En 1.854 el británico **William Boutland Wilkinson** (1.819-1.902) ya había patentado un sistema de forjados reticulares construidos con encofrados perdidos de yeso. La propaganda que hizo de su patente demuestra además que Wilkinson ya se había dado cuenta de algunas de las ventajas que tiene el hormigón como material para construcción de edificios: su resistencia al fuego y su capacidad de "proteger" al acero.

El nuevo material fue también empleado en otras aplicaciones. Por ejemplo, **Joseph Louis Lambot** (1.814-1.887) presentó en la Exposición de París de 1.855 un bote para navegar construido con cemento armado. El francés **Joseph Monier** (1.823-1.906) lo utilizó en un principio para fabricar jardineras (una aplicación a la que también se había dedicado Lambot) y su primera patente data de 1.867. Se trataba de un mortero de cemento reforzado con alambres de acero, encofrado dentro de unos moldes que permitían su industrialización. La principal ventaja que explotó Monier y que lo situó por delante de Lambot, Wilkinson y otros competidores, fue su propia visión comercial al comprender rápidamente las posibilidades del nuevo material. Sus cuatro patentes posteriores aplicaron el hormigón a la construcción de tubos y tanques hidráulicos, paneles prefabricados para fachadas, pasarelas para peatones y vehículos y vigas. En 1.875 proyectó y construyó un puente de 13,80 m de luz y 4,25 m de ancho. Sin embargo, detrás de todos estos logros no había ninguna base teórica, sino que todos los diseños se basaban en ensayos de prototipos. Monier, al igual que Coignet, franquició sus patentes fuera de las fronteras de Francia por medio de concesionarios.

Figura 4. El número 1 de rue Danton

Otro nombre imprescindible en la historia del hormigón y la "guerra" de las patentes es el de **François Hennebique** (1.843-1.921), que comenzó su carrera como albañil. En 1.879 patentó un sistema de construcción que empleaba el hormigón como elemento de revestimiento de perfiles metálicos contra el fuego, lo que constituía la clave de la propaganda con la que publicitó su sistema. Hennebique adquirió numerosas patentes y diseñó una estrategia comercial tan eficaz que la empresa que fundó estuvo muy cerca de lograr un monopolio mundial. En 1.900 trasladó la sede de su red empresarial al número 1 de la *rue* Danton de París, un edificio construido íntegramente en hormigón armado según el

*sistema Hennebique*. En 1.902 había llevado a cabo más de 7.000 realizaciones y en 1.909 sus más de 60 oficinas se distribuían por Europa, Estados Unidos, África y Asia. Al igual que en el caso de Monier, los diseños se basaban en prototipos y no se desarrolló ningún aporte teórico que buscase comprender el funcionamiento del hormigón, lo que además hubiera puesto en peligro la protección de las patentes. De hecho, su revista *"Le Béton Armé"* estaba más orientada a la propaganda que a la divulgación científico-tecnológica. No obstante, sí se tiene constancia de que su empresa desarrolló ábacos que permitían el dimensionamiento rápido de algunos elementos.

Otros logros dignos de mención son los forjados de hormigón sin vigas, construidos por primera vez en 1.906 en los Estados Unidos por **Claude A. P. Turner** (1.869-1.955). La patente, obtenida en 1.908, los validaba mediante pruebas de carga en las que se sometían al doble de la de servicio. Paralelamente y, al parecer, de forma independiente, el francés **Robert Maillard** (1.872-1.940) proyectó y realizó un sistema de forjado de hormigón armado sin vigas en 1.908. La principal diferencia entre ambos sistemas era la disposición de las armaduras: Turner las colocaba según las direcciones de los momentos principales (según las "diagonales") mientras que Maillard las disponía en forma de emparrillado ortogonal, que es la que más se emplea en la actualidad. En cualquier caso, el estudio analítico tuvo que esperar a 1.921, cuando Westergaard y Slater publicaron una contribución titulada *"Moments and Stresses in Slabs"* en los *"Proceedings of the American Concrete Institute"*.

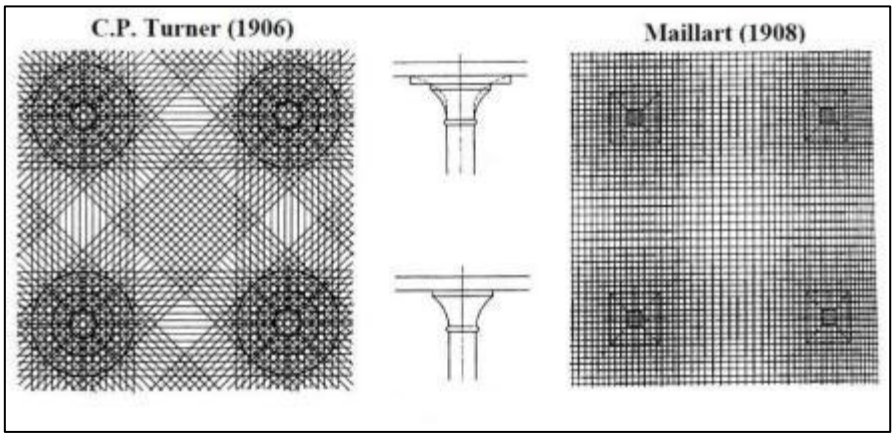



Figura 5. Disposición de armaduras en los sistemas de Turner y Maillart

## 1.3 LOS PRIMEROS ESTUDIOS

La difusión internacional del nuevo sistema de construcción llevó inevitablemente a que algunos ingenieros buscasen una comprensión de su funcionamiento que fuera más allá del ensayo de prototipos y permitiera abordar el diseño mediante procedimientos analíticos. El ingeniero alemán **G. A. Wayss** (1.851-1.917) era co-fundador de la empresa *Wayss und Freytag*, que había comprado los derechos de la patente de Monier en Alemania. La filosofía de esta firma consistía en que los diseños debían estar basados en cálculos. Wayss y Könen escribieron en 1.887 el primer libro en alemán dedicado a los principios de hormigón armado, titulado *"Das System Monier"*, lo que constituye uno de los primeros pasos hacia una teoría del hormigón armado y una liberalización del conocimiento tecnológico que no pasara necesariamente por estar en posesión de los derechos de las patentes. Sin embargo, éste era también el talón de Aquiles, ya que la Teoría de la Elasticidad no estaba lo suficientemente avanzada como para poder respaldar proyectos tan singulares como los que llevaba a cabo su competidor *Hennebique*, quien sorteaba las lagunas de la Elasticidad mediante los ensayos de prueba y error.

Como ejemplo, una de las víctimas del sistema de patentes fue el ingeniero norteamericano **Thadeus Hyatt** (1.816-1.901), afincado profesionalmente en Gran Bretaña. Se le puede atribuir el primer estudio serio del hormigón al margen de cualquier patente: *"An account of some experiments with Portland cement concrete combined with iron as building material"* (1.877). Este texto revela que Hyatt

se había dado cuenta de la importancia de varios aspectos clave: la adherencia entre la armadura y el hormigón que la recubra, la medida del recubrimiento a la hora de cuantificar la protección frente al fuego del acero dentro del hormigón y la similitud entre los coeficientes de dilatación térmica de ambos materiales. La falta de fondos para sus investigaciones y las trabas inherentes al sistema de patentes evitaron que pudiera avanzar más. Inevitablemente, una vez que el progreso del conocimiento permitió que los profesionales tuvieran a su disposición un cuerpo teórico-analítico ya no se pudo seguir protegiendo las patentes de los diferentes sistemas de construcción en hormigón. Quizá fue debido a ello que la empresa francesa *Hennebique* cerrara en la década de los 60 del siglo pasado, mientras que los alemanes continuaron hasta el año 2.000, fecha en la que *Wayss und Freytag* se subdividió en otras cuatro empresas.

En cuanto al hormigón pretensado, la idea dicho sistema había sido planteada por el alemán Könen en 1.907 pero es sin duda al francés **Eugene Freyssinet** (1.879-1.962) a quien debe atribuirse el mérito de su comprensión y desarrollo. Fue alumno de Rabut en París y su primer logro fue el puente de Le Veurdre sobre el río Allier. Con un presupuesto que batió record de economía construyó un puente de tres arcos de 72,5 m cada uno y con una esbeltez de $^1/_{15}$ . El diseño del puente se basaba en un modelo de 50 m cuya particularidad era la de que los estribos estaban conectados por barras de acero cuya tensión podía modificarse mediante gatos. Al detectar que las deformaciones del prototipo, sometido tan sólo a su peso propio, se incrementaban con el paso del tiempo, Freyssinet mantuvo el puente de Le Veurdre en observación tras su finalización. En 1.911, un año después de su inauguración, midió un descenso de hasta 13 cm en la clave de los arcos del puente. Durante una noche en la víspera de un día de mercado, Freyssinet y otros cuatro compañeros accedieron a unos nichos situados en las tres claves en donde podían operar los gatos que controlaban la tensión de las barras de acero. Con la referencia de un nivel elevó los arcos y alineó el tablero. La estructura del puente cumplió satisfactoriamente durante 33 años hasta que fue dinamitado en la II Guerra Mundial. Esta experiencia hizo que Freyssinet comenzara a realizar estudios detallados para comprender el comportamiento reológico y las deformaciones diferidas de las estructuras de hormigón armado.

Figura 6. Realizaciones de Freyssinet: puente de Plougastel (izda.) y hangares de Orly (dcha.)

En 1.925 Freyssinet se embarcó en la construcción del puente de Plougastel, formado por tres arcos de 188 m cada uno, obra que le ocuparía hasta 1.930 y en la que se empleó por primera vez el sistema de construcción por voladizos sucesivos. La primera aplicación del *sistema Freyssinet de pretensado* se hizo en la reparación de la cimentación del puerto de Le Havre. Otra espectacular realización suya son los hangares de Orly. La práctica totalidad de técnicas y aparatos que se emplean en la actualidad en la ejecución de obras de hormigón pretensado en casi todo el mundo son fruto del genio y de la inventiva de Freyssinet.

## 1.4 LA TEORÍA DEL HORMIGÓN ARMADO Y LOS PRIMEROS REGLAMENTOS

Los primeros libros sobre la técnica del hormigón armado fueron eminentemente descriptivos cuando no propagandísticos. Por ejemplo, en 1.861 Coignet había publicado un libro en el que presentaba su propio sistema y algunas realizaciones. El contenido del curso de "Construcciones de Hormigón Armado" que impartía **Charles Rabut** (1.852-1.925) en la Escuela de Ingenieros de Puentes y Caminos de París desde 1.897 era también eminentemente descriptivo y presentaba los diferentes sistemas y patentes. Los tratados que permitieran abordar el cálculo y dimensionamiento parecían un imposible, debido a dos razones: la carencia de una base teórica sobre el comportamiento del material y el bloqueo de información que suponían las patentes. Fue el alemán **Emil Mörsch** (1.872-1.950), uno de los ingenieros que trabajaban para *Wayss und Freytag*, quien sentó en 1.902 las bases del Método Elástico o Método Clásico para el cálculo de elementos de hormigón armado.

Figura 7. Charles Rabut (izda.) y Eugene Freyssinet (dcha.)

Casualmente, ese mismo año se creó en Francia la *Comisión del Cemento Armado* cuyo objetivo era la redacción de un reglamento específico para las estructuras de hormigón armado. Desde un principio se vio la imposibilidad de utilizar como base la norma francesa para estructuras metálicas, dado lo diferente de ambos materiales, por lo que los trabajos científicos tuvieron como fin el articular una Resistencia de Materiales particularizada para el hormigón: la Teoría del Hormigón Armado. Como anécdota, las campañas de ensayos encargadas por la comisión ya se dieron cuenta de la gran dispersión de resultados a pesar del gran cuidado que se había puesto en la preparación de probetas. Entre los miembros de la comisión se encontraba el profesor Charles Rabut y también formaron parte de ella constructores como Hennebique y Coignet, entre otros. La Comisión finalizó sus trabajos con la publicación de la **Circular Ministerial de 1.906**. La lucha de intereses entre los partidarios de seguir manteniendo el sistema de patentes y los partidarios de dar cuerpo a una teoría accesible a cualquier especialista, posturas bien representadas en la comisión, supusieron por primera vez en la historia la división entre constructores y proyectistas, unos roles que se habían solapado hasta aquel momento.

En Alemania fueron la *Asociación de Ingenieros y Arquitectos* y la *Asociación Alemana del Hormigón* quienes comenzaron una labor similar en 1.904. La redacción del reglamento correspondiente fue promulgada por el gobierno prusiano. La primera normativa alemana para el hormigón armado es la **DIN 1045** de 1.932, elaborada bajo la dirección de Emil Mörsch. La primera norma alemana para el hormigón pretensado data de 1.953.

En Gran Bretaña se fundó a principios del siglo XX el *Instituto Británico del Hormigón* (*The Concrete Institute*). Sus integrantes buscaban hacer frente a la asociación creada por los representantes de los sistemas protegidos de patentes. Un *Joint Committee*, integrado por miembros del *Concrete Institute*, el *British Fire Prevention Committee* y otras empresas constructoras de hormigón armado publicaron en 1.907 un informe técnico de contenido análogo al de la Circular Ministerial francesa. El primer reglamento británico oficial es el **Código de Londres** de 1.915, antecesor de la serie de las sucesivas *British Standard* BS 8110.

En los Estados Unidos la historia de los reglamentos de hormigón armado ha sido más compleja y la primera norma del *American Concrete Institute* es la **ACI-318** de 1.947. Su última revisión es del año 2.008. No obstante, debe tenerse en cuenta que la filosofía norteamericana es fundamentalmente prestacional y la ACI-318 no es un reglamento oficial de obligado cumplimiento en el sentido en que lo son sus análogos europeos. En cualquier caso, es un texto respetado y de referencia no sólo en su país de origen sino en todo el continente americano.

A nivel europeo, en 1.964 se fundó el *Comité Europeo del Hormigón* (*Comité Européen du Béton*, *CEB*), entidad que publicó ese mismo año una serie de recomendaciones sobre el hormigón estructural con vocación de reglamentos. Éstas fueron revisadas en 1.970 y en 1.977, año en que el *CEB* y la *FIP* (*Federación Internacional del Pretensado*) aprobaron en Granada el **Código Modelo** de 1.978. En 1.996 ambas asociaciones se fusionaron creando la *Federación Internacional del Hormigón* (*Fédération Internationale du Béton*, *FIB*) con sede en Lausana (Suiza). En 1.990 se redactó el CEB-FIB 1990, la versión actualmente vigente del Código Modelo, que ha constituido la base del **Eurocódigo 2** del año 2.004 y la de más de 20 reglamentos nacionales de Europa.

## 1.5 EL HORMIGÓN ARMADO EN ESPAÑA

El Hormigón Armado entró en España a través de las franquicias francesas de finales del siglo XIX. Por ejemplo, el ingeniero militar **Francesc Maciá** (1.859-1.933), que luego fuera Presidente de la Generalitat, fue franquiciado del sistema Monier desde 1.893, mientras que el ingeniero de caminos **José Eugenio Ribera** (1.864-1.936) lo fue del sistema Hennebique. El primer edificio de entidad construido en España con hormigón armado fue la fábrica de harinas *La Ceres*, inaugurada en Bilbao en 1.900 y rehabilitada en la actualidad como edificio de viviendas.

Eugenio Ribera fue profesor y director de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, así como uno de los redactores de la revista *"Le Béton Armé"*. En 1.897 sustituyó el tablero de madera originalmente proyectado para su puente de Ciaño (Asturias) por uno de hormigón armado según el sistema de Hennebique. En 1.899 fundó junto con los hermanos Gomendio una sociedad limitada franquiciaria de dicho sistema. Antes de finales del siglo XIX ya empleó el hormigón armado en los pilares, forjados y depósitos de la primera fábrica de cemento Pórtland de España, ubicada en Tudela (Navarra), así como en la construcción de los forjados de la cárcel de Oviedo. A partir de esta obra, se desentendió del sistema Hennebique y publicó en 1.902 uno de los primeros tratados sobre el hormigón en nuestro país, *"Hormigón y cemento armado: mi sistema y mis obras"*, con prólogo de José Echegaray y redactado con un marcado carácter personal. En 1.915 transformó su sociedad limitada en la empresa *Hidrocivil*, en la que trabajaron los ingenieros Eduardo Torroja y José Entrecanales.

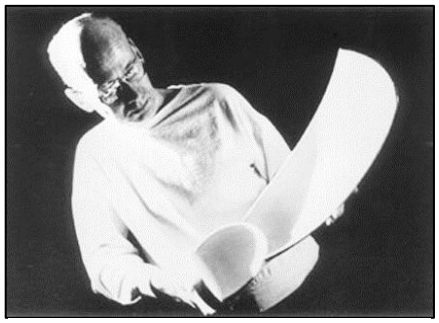


Figura 8. Eduardo Torroja Miret

Precisamente, una figura clave en el desarrollo tecnológico del hormigón estructural en España es la del ingeniero **Eduardo Torroja** (1.899-1.961). Fue alumno de Ribera en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. Formó parte de la *Sociedad de Cursos y Conferencias* y junto con arquitectos jóvenes vinculados culturalmente a la Generación del 27 se encargó de difundir en España las ideas de la arquitectura contemporánea, en especial del racionalismo; merecen destacarse las conferencias impartidas por referentes europeos como Gropius, Le Corbusier y Mendelson. Tras su marcha de *Hidrocivil*, en 1.927, fundó su propio equipo de proyectistas. Ese mismo año desarrolló por propia iniciativa un proyecto de ejecución para un puente para vehículos y ferrocarril de 1.250 m que uniera las puntas de Trocadero y Puntales en la Bahía de Cádiz. El exhaustivo estudio económico que realizó planteaba una amortización de la obra en 16 años y justificaba el puente como una de las piezas clave para hacer de Cádiz la sede del Puerto de Europa para América. En lo estructural, el puente planteaba el empleo sinérgico del hormigón del tablero como elemento de trabajo mixto junto con la estructura metálica. El paso de los navíos se solucionaba mediante el tramo central giratorio del puente. Por desgracia, la Administración no

mostró el menor interés en dicha obra. Desde 1.928 colaboró con el equipo de arquitectos que dirigía las obras de la Ciudad Universitaria de Madrid. Una de sus joyas como ingeniero proyectista es la cubierta del Mercado de Abastos de Algeciras (Málaga, 1.932), de estilo racionalista y que fue, en su momento, la mayor cúpula del mundo construida en hormigón (casi 50 m de diámetro con un espesor de 9 cm). Dos años más tarde fundó junto con un grupo de ingenieros y arquitectos el *Instituto de la Construcción y de la Edificación* y la revista *"Hormigón y Acero"*, que es en la actualidad uno de los máximos referentes en lengua hispana sobre el mundo de la construcción en hormigón. De hecho, el francés Freyssinet fue durante algún tiempo miembro de su comité científico. En 1.935 completó sus dos proyectos más espectaculares: las tribunas del Hipódromo de la Zarzuela y el Frontón de Recoletos, en colaboración con los arquitectos Arniches y Domínguez, y Zuazo, respectivamente. Un año más tarde fue objeto de un homenaje que le tributaron sus compañeros de profesión, promovido por su antiguo profesor, José Eugenio Ribera, quien falleció ese mismo año, dos meses antes del inicio de la Guerra Civil.

Figura 9. Interior del Mercado de Abastos de Algeciras

Figura 10. Cubiertas del Hipódromo de la Zarzuela

En 1.947 Eduardo Torroja fue nombrado director del *Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento*, fruto de la fusión de la entidad que había fundado en 1.934 con el *Instituto del Cemento*. A su muerte, el instituto pasó a denominarse *Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja*, nombre que aún conserva en la actualidad. Durante los años 50 fue presidente de *RILEM* (*Reunión Internacional de Laboratorios de Ensayos de Materiales*), la *FIP* (*Federación Internacional del Pretensado*) y la *IASS* (*International Association for Shell and Spacial Structures*). Además, Eduardo

Torroja fue uno de los fundadores del *Comité Europeo del Hormigón* (*CEB*) junto con profesionales de Francia, Bélgica, Luxemburgo, Alemania y Suecia.

La primera *instrucción* para el proyecto de obras de hormigón en España fue promulgada por el Ministerio de Obras Públicas en 1.939 y revisada en 1.944 y 1.961. En 1.968 se creó la ***Comisión Permanente del Hormigón*** (*CPH*), que se encarga desde entonces de la elaboración de los proyectos normativos para la regulación del proyecto, ejecución y mantenimiento de las obras de hormigón. Esta comisión redactó las instrucciones EH-68 y EP-77, que regulaban el proyecto de obras de hormigón armado y pretensado, respectivamente. Las revisiones del año 1.980 nacieron al amparo del Código Modelo del 78. A finales del siglo XX, la Instrucción EHE-98 vino a refundir ambas técnicas e incorporó con carácter de novedad las metodologías y estrategias para el aseguramiento de la durabilidad en las estructuras de hormigón y la adopción del método de cálculo de bielas y tirantes. La versión actual de la Instrucción es la **EHE-08** y cumple con el objetivo de conducir la reglamentación española hacia su armonización con el programa de los Eurocódigos, cuya entrada se prevé para el próximo 2.010, además de incorporar al articulado aspectos medioambientales y de sostenibilidad.

## 2. COMPONENTES DEL HORMIGÓN Y TIPOS DE HORMIGONES

El hormigón es un ***material polifásico*** elaborado mediante una mezcla dosificada de ***cemento***, ***agua***, ***áridos*** y ***aditivos***. Con ayuda de un sistema moldeante, el ***encofrado***, la pasta fresca adquiere la forma definitiva hasta su endurecimiento. El sistema descrito es el hormigón en masa. El ***hormigón armado*** dispone necesariamente de una ***ferralla armada*** formada por redondos corrugados de acero, la cual se coloca en los encofrados antes del hormigonado. Las ***armaduras*** del sistema, denominadas ***pasivas***, se encargan de suplir la deficiente resistencia a tracción del hormigón. Si el acero se dispone de manera que trabaja en tensión con anterioridad a la aplicación de la totalidad o parte de las cargas que actúen sobre la estructura, precomprimiendo de esta forma las secciones de hormigón, entonces el sistema estructural es el ***hormigón pretensado*** y se dice que las armaduras son ***activas***.

### 2.1 LOS CEMENTOS

Los cementos están regulados en España por la Instrucción de Recepción de Cementos, RC-08, cuyo objeto es establecer las prescripciones técnicas generales que deben satisfacer los cementos empleados en las obras de hormigón, en las centrales de fabricación de hormigón y en cualesquiera otras instalaciones que utilicen el cemento para la fabricación de productos de construcción.

Los componentes de los cementos son los siguientes:

- **Clínkeres Pórtland**: Se obtienen al calcinar hasta fusión parcial mezclas muy íntimas de calizas y arcilla, preparadas artificialmente hasta una combinación prácticamente total de sus componentes
- **Clínkeres aluminosos**: Se obtienen por fusión de calizas y bauxitas en unas condiciones tales que el contenido mínimo de alúmina sea del 36%.
- **Escorias siderúrgicas** (*S*), obtenidas mediante templado de ganga fundida procedente de procesos siderúrgicos.
- **Puzolanas naturales** (*P*), **cenizas volantes** (*V*), **humo de sílice** (*D*)
- **Fílleres calizos** (*L*), compuestos de carbonato cálcico que molidos junto con clínker Pórtland, mejoran las propiedades y comportamiento de los morteros y hormigones, tanto frescos como una vez endurecidos: dispersión, hidratación, **trabajabilidad**, retención de agua, capilaridad, **retracción**, **fisuración**.

- **Reguladores de fraguado** (p. ej. sulfato cálcico) y aditivos de los cementos (inferiores al 1% en masa).

De acuerdo con la RC-08, los cementos sujetos al marcado CE son los siguientes:

- Cementos comunes, según norma UNE-EN 197-1
- Cementos de escorias de horno alto, de baja resistencia inicial, según UNE-EN 197-4
- Cementos especiales de muy bajo calor de hidratación, según UNE-EN 14216
- Cementos de aluminato de calcio, según UNE-EN 14647
- Cementos de albañilería, según UNE-EN 413-1

Por otro lado, los tipos de cementos sujetos al Real Decreto RD 1313/1988 son:

- Cementos resistentes a los sulfatos, según UNE 80303-1 y UNE 80303-1/1M
- Cementos resistentes al agua de mar, según UNE 80303-2 y UNE 80303-2/1M
- Cementos blancos, según UNE 80305
- Cementos para usos especiales, según UNE 80307

### 2.1.1 Cementos comunes

Los cementos Pórtland se obtienen por molturación conjunta de clínker Pórtland, una cantidad adecuada de regulador de fraguado y hasta un 5% de adiciones. La composición química de un cemento Pórtland corriente es la siguiente:

Cal combinada (CaO) (62,5%) Sílice ($SiO_2$) (21%)

Alúmina ($Al_2O_3$) (6,5%) Hierro ($Fe_2O_3$) (2,5%)

El 7,5% restante se compone, entre otros, de:

- cal libre (que en cantidad suficiente puede producir expansión al hidratarse tardíamente)
- óxido magnésico (que también puede producir una expansión tardía si se encuentra en estado cristalizado de periclasa)
- trióxido de azufre (que puede provenir del yeso empleado como regulador o del combustible del horno y que en exceso puede contribuir al fenómeno del falso fraguado)

Los cementos Pórtland con adiciones de escoria, puzolana, humo de sílice, caliza o ceniza volante se emplean fundamentalmente por razones económicas debido al ahorro de energía en su producción y a que dan salida a ciertos productos naturales y a subproductos y residuos industriales. Cada tipo de adición tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

La Tabla A1.1.1 de la RC-08, recogida en la página siguiente, define los tipos de cementos comunes y su composición:

- CEM I → Cementos Pórtland (con clínker Pórtland entre el 95% y el 100%)
- CEM II → Cementos Pórtland con escoria, o con humo de sílice, o con puzolana, o con esquistos calcinados, o con caliza, o Pórtland compuesto
- CEM III → Cementos con escorias de horno alto
- CEM IV → Cementos puzolánicos
- CEM V → Cementos compuestos

## Tabla A1.1.1 Cementos comunes

| Tipos | Denominación | Designación | Composición (proporción en masa [1]) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Componentes principales | | | | | | | | | | Componentes. minoritarios |
| | | | Clínker K | Escoria de horno alto S | Humo de sílice D [2] | Puzolana | | Cenizas volantes | | Esquistos calcinados T | Caliza[4] | | |
| | | | | | | Natural P | Natural calcinada Q | Silíceas V | Calcáreas W | | L | LL | |
| CEM I | Cemento pórtland | CEM I | 95-100 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| CEM II | Cemento pórtland con escoria | CEM II/A-S | 80-94 | 6-20 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-S | 65-79 | 21-35 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | Cemento pórtland con humo de sílice | CEM II/A-D | 90-94 | – | 6-10 | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | Cemento pórtland con puzolana | CEM II/A-P | 80-94 | – | – | 6-20 | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-P | 65-79 | – | – | 21-35 | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/A-Q | 80-94 | – | – | – | 6-20 | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-Q | 65-79 | – | – | – | 21-35 | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | Cemento pórtland con ceniza volante | CEM II/A-V | 80-94 | – | – | – | – | 6-20 | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-V | 65-79 | – | – | – | – | 21-35 | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/A-W | 80-94 | – | – | – | – | – | 6-20 | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-W | 65-79 | – | – | – | – | – | 21-35 | – | – | – | 0-5 |
| | Cemento pórtland con esquistos calcinados | CEM II/A-T | 80-94 | – | – | – | – | – | – | 6-20 | – | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-T | 65-79 | – | – | – | – | – | – | 21-35 | – | – | 0-5 |
| | Cemento pórtland con caliza | CEM II/A-L | 80-94 | – | – | – | – | – | – | – | 6-20 | – | 0-5 |
| | | CEM II/B-L | 65-79 | – | – | – | – | – | – | – | 21-35 | – | 0-5 |
| | | CEM II/A-LL | 80-94 | – | – | – | – | – | – | – | – | 6-20 | 0-5 |
| | | CEM II/B-LL | 65-79 | – | – | – | – | – | – | – | – | 21-35 | 0-5 |
| | Cemento pórtland mixto[3] | CEM II/A-M | 80-94 | <---------- 6-20 ----------> | | | | | | | | | 0-5 |
| | | CEM II/B-M | 65-79 | <---------- 21-35 ----------> | | | | | | | | | 0-5 |
| CEM III | Cemento con escorias de horno alto | CEM III/A | 35-64 | 36-65 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM III/B | 20-34 | 66-80 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM III/C | 5-19 | 81-95 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0-5 |
| CEM IV | Cemento puzolánico[3] | CEM IV/A | 65-89 | – | <---------- 11-35 ----------> | | | | | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM IV/B | 45-64 | – | <---------- 36-55 ----------> | | | | | – | – | – | 0-5 |
| CEM V | Cemento compuesto[3] | CEM V/A | 40-64 | 18-30 | – | <---- 18-30 ----> | | | – | – | – | – | 0-5 |
| | | CEM V/B | 20-38 | 31-50 | – | <------- 31-50 --------> | | | – | – | – | – | 0-5 |

1) Los valores de la tabla se refieren a la suma de los componentes principales y minoritarios (núcleo de cemento).
2) El porcentaje de humo de sílice está limitado al 10%.
3) En cementos pórtland mixtos CEM II/A-M y CEM II/B-M, en cementos puzolánicos CEM IV/A y CEM IV/B y en cementos compuestos CEM V/A y CEM V/B los componentes principales diferentes del clinker deben ser declarados en la designación del cemento (véase el apartado A1.1.2).).
4) El contenido de carbono orgánico total (TOC), determinado conforme al UNE EN 13639, será inferior al 0,20% en masa para calizas LL, o inferior al 0,50% en masa para calizas L.

Por ejemplo, un cemento Pórtland de resistencia inicial normal con adición de escoria (75% de clínker y 25% de escoria) y con una resistencia de 42,5 N/mm$^2$ se designa de la manera siguiente:

EN 197-1 CEM II/B-S/42,5 N

Si fuera de alta resistencia inicial, entonces la designación sería :

EN 197-1 CEM II/B-S/42,5 R

Existen varias clases de resistencia: 32,5, 42,5 y 52,5, expresadas en MPa (N/mm$^2$), con la variación adicional de si son de resistencia inicial normal (N) o de alta resistencia inicial (R). En cualquier caso, la resistencia de un hormigón será tanto mayor cuanto mayor sea la del cemento empleado en su construcción. Pero esta característica no basta por sí sola para garantizar otras igual de importantes, como por ejemplo, la durabilidad.

**Tabla A1.1.3 Prescripciones mecánicas y físicas de los cementos comunes, incluidos los de bajo calor de hidratación**

| Clase de resistencia[1] | Resistencia a compresión UNE-EN 196-1[2] | | | | Tiempo de fraguado UNE-EN196-3 | | Estabilidad de volumen según UNE-EN 196-3 | Calor de hidratación [3] | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Resistencia inicial (N/mm$^2$) | | Resistencia nominal (N/mm$^2$) | | Inicio (min) | Final (h) | Expansión (mm) | UNE-EN 196-9 (J/g) | UNE-EN 196-8 (J/g) |
| | 2 días | 7 días | 28 días | | | | | 41 horas | 7días |
| 32,5N | - | ≥ 16,0 | ≥ 32,5 | ≤ 52,5 | ≥ 75 | ≤ 12 | ≤ 10 | ≤ 270 | |
| 32,5R | ≥ 10,0 | - | | | | | | | |
| 42,5N | ≥ 10,0 | - | ≥42,5 | ≤ 62,5 | ≥ 60 | | | | |
| 42,5R | ≥ 20,0 | - | | | | | | | |
| 52,5N | ≥ 20,0 | - | ≥52,5 | - | ≥ 45 | | | | |
| 52,5R | ≥ 30,0 | | | | | | | | |

[1] R = Alta resistencia inicial
N = Resistencia inicial normal
[2] 1 N/mm$^2$ = 1 MPa
[3] Solo para los comunes de bajo calor de hidratación

La Tabla A1.1.3 de la RC-08 recoge las prescripciones que deben cumplir los cementos comunes. Los cementos deben asegurar una serie de prescripciones físicas y mecánicas para su utilización:

a) **Fraguado**: La velocidad de fraguado de un cemento está limitada por la normativa mediante la definición de un período de tiempo que comienza con el amasado y en el cual debe haberse producido el comienzo y el fin del fraguado. El ensayo asociado es el de la aguja de Vicat. Las penetraciones que consigue la aguja de Vicat, invención del ingeniero francés, en una probeta de pasta normal de cemento a lo largo de determinados instantes de tiempo permiten hacer un seguimiento del proceso de fraguado.

En la Tabla A1.1.3 de la RC-08 se define el tiempo de inicio y término de fraguado para los cementos comunes. Como comentario, el tiempo de inicio de fraguado es crítico en aquellas situaciones en las que la distancia de transporte sea grande. Por otro lado:

- cuanto más elevada sea la finura del cemento, más corto y rápido será el fraguado en su comienzo
- la meteorización del cemento por almacenamiento prolongado, aumenta la duración del fraguado
- a menor cantidad de agua de amasado y cuanto mayor sea la sequedad del ambiente, el fraguado será más corto
- la presencia de materia orgánica (en el agua de amasado o en la arena) puede llegar a inhibir el fraguado

b) **Expansión**: Un fenómeno que debe evitarse en el cemento una vez fraguado es el de su expansión tardía por hidratación del óxido de calcio y/o del óxido magnésico libres. El ensayo asociado es el de las agujas de Le Chatelier: se emplea un pequeño molde cilíndrico abierto por una generatriz y terminado por dos agujas, el cual, una vez relleno con pasta de cemento y transcurridas 24 horas en

una cámara húmeda, es sumergido en agua en ebullición durante otras 3 horas. El aumento de la distancia entre las dos puntas mide la expansión de dicho cemento. En la Tabla A1.1.3 de la RC-08 se limita a 10 mm su valor en los cementos comunes.

c) **Finura de molido**: La finura de molido influye decisivamente en las reacciones químicas que tienen lugar durante el fraguado y primer endurecimiento del cemento. Al contacto con agua, los granos de cemento se hidratan sólo en una profundidad de 10 micras. Si los granos son gruesos, el rendimiento del cemento será muy bajo al quedar el núcleo prácticamente inerte. Si, por el contrario, son excesivamente finos, el cemento resulta en exceso sensible a su meteorización por efecto del almacenamiento prolongado y su retracción y calor de fraguado serán en exceso elevados. En resumen, debe llegarse a una situación de compromiso entre un molido muy fino que contribuya a dotar de resistencia al cemento pero nunca en exceso. En cualquier caso, la resistencia del cemento debe depender más de la calidad del clínker que de la finura de molido. Existe un ensayo como es el de la superficie específica Blaine que determina la superficie de un gramo de cemento en el cual todas sus partículas estuvieran completamente sueltas.

d) **Resistencia mecánica**: la resistencia mecánica es la de una probeta amasada con una arena de granulometría y características determinadas, con una relación agua/cemento igual a 0,5 y en las condiciones definidas por la norma UNE-EN 196-1. Las probetas son prismáticas de 4×4×16 $cm^3$. Se ensayan a flexotracción con carga centrada y cada uno de los trozos resultantes a compresión centrada, normalmente a los 2, 7 y 28 días.

### 2.1.2 Cementos de escorias de horno alto, de baja resistencia inicial

Estos cementos están definidos por la norma UNE-EN 197-4 y su composición se basa en la de los cementos CEM/III. En su designación se usa la letra L después del valor numérico de la resistencia. Por ejemplo, un cemento con 50% de clínker y 50% de escorias y con resistencia de 32,5 se designa como:

EN 197-4 CEM III/A/32,5 L

En los elementos de hormigón fabricados con este tipo de cementos, deberán tomarse precaciones especiales en lo que respecta a los tiempos de retirada de los encofrados, que podrán ser más dilatados. Deberá tenerse también cuidado en condiciones climatológicas adversas.

### 2.1.3 Cementos de muy bajo calor de hidratación

Este tipo de cementos están definidos en la norma UNE-EN 14216 y su composición es la definida en la Tabla A1.3.1 de la RC-08. De acuerdo con las prescripciones mecánicas y físicas de este tipo de cementos, recogidas en la Tabla A1.3.3, la clase resistente es 22,5, lo que quiere decir que, a 28 días de edad, la resistencia del cemento estará comprendida entre 22,5 MPa y 42,5 MPa. Por otro lado, la generación de calor en la reacción de hidratación tendrá que ser inferior a 220 J por gramo. Los hormigones fabricados con cementos de muy bajo calor de hidratación deben protegerse adecuadamente contra la desecación y la carbonatación durante la fase de curado. La resistencia al hielo deberá ser adecuada a las condiciones ambientales en donde se empleen este tipo de cementos.

**Tabla A1.3.1 Cementos especiales de muy bajo calor de hidratación**

| Tipos | Denominación | Designación | Composición (proporción en masa)[1] | | | | | | | Componentes minoritarios |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Componentes principales | | | | | | | |
| | | | Clínker K | Escorias de horno alto S | Humo de sílice D[2] | Puzolana | | Cenizas volantes | | |
| | | | | | | Natural P | Natural Calcinada Q | Silíceas V | Cálcicas W | |
| VLH III | Cemento de escorias de horno alto | VLH III/B | 20-34 | 66-80 | - | - | - | - | - | 0-5 |
| | | VLH III/C | 5-19 | 81-95 | - | - | - | - | - | 0-5 |
| VLH IV | Cemento puzolánico)[3] | VLH IV/A | 65-89 | - | <----------11-35----------> | | | | | 0-5 |
| | | VLH IV/B | 45-64 | - | <----------36-55----------> | | | | | 0-5 |
| VLH V | Cemento compuesto)[3] | VLH V/A | 40-64 | 18-30 | - | <----------18-30----------> | | | - | 0-5 |
| | | VLH V/B | 20-38 | 31-50 | - | <----------31-50----------> | | | - | 0-5 |

[1] Los valores de la tabla se refieren a la suma de los componentes principales y minoritarios. Los requisitos para la composición se refieren a la suma de todos los componentes principales y minoritarios. El cemento final es la suma de los componentes principales y minoritarios más el sulfato de calcio y cualquier aditivo.
[2] El porcentaje de humo de sílice está limitado al 10 %.
[3] En los cementos puzolánicos VLH IV/A y VLH IV/B y en cementos compuestos VLH V/A y VLH V/B los componentes principales diferentes del clínker deben ser declarados en la designación del cemento.

### 2.1.4 Cementos de aluminato de calcio

Los cementos de aluminato de calcio están definidos en norma UNE-EN 14647 y su composición y prescripciones están recogidas en el apartado A1.4 de la RC-08. Los componentes principales de este tipo de cementos son los cristales hexagonales de *aluminato monocálcico*, responsables de su elevada resistencia mecánica inicial. Estos cementos pueden llegar en pocas horas a los mismos niveles de resistencia que los cementos comunes tardan 28 días en alcanzar. Son muy poco porosos y casi insensibles a agentes químicos ácidos, debiendo adoptarse precauciones en medios alcalinos. Con áridos adecuados es posible obtener morteros y hormigones refractarios. Resulta también adecuado para reparaciones rápidas de urgencia y bancadas y basamentos de carácter temporal. ***Nunca deben emplearse en hormigón armado ni pretensado porque favorecen la corrosión de las armaduras***. El Anejo 3 de la Instrucción EHE-08 admite su empleo, debidamente justificado, para elementos de hormigón armado de uso no estructural. Se avisa también de que no es adecuado para cimentaciones de hormigón en masa de gran volumen. Asimismo su uso está expresamente prohibido en hormigón pretensado.

### 2.1.5 Cementos especiales sujetos al RD 1313/1988

Se trata de cementos comunes que están dotados además de características adicionales:

- **Cementos resistentes al agua de mar** (*MR*), según UNE 80303-2: en estos cementos se limita superiormente el contenido de aluminato tricálcico; los cementos de horno alto CEM III/B son siempre resistentes al agua de mar.
- **Cementos resistentes a los sulfatos** (*SR*), según UNE 80303-1: aplicables en obras en contacto con terrenos yesíferos o selenitosos; el contenido de aluminato tricálcico está aún más limitado que en los cementos resistentes al agua de mar
- **Cementos de bajo calor de hidratación** (*LH*): los que a la edad de 5 días desarrollan un calor de hidratación no superior a 65 cal/g; en general están asociados a una baja retracción lo que los hace indicados para elementos sensibles a la fisuración por retracción.

Su designación es la misma que la de los cementos comunes, prescindiendo del prefijo CEM y colocando la norma de referencia al final y no al principio. Por ejemplo, para un cemento Pórtland que lleve característica adicional de resistencia a los sulfatos, cuya resistencia sea 42,5 y que además sea de alta resistencia inicial, su designación será:

I 42,5 R/SR UNE 80303-1

Si además llevase la característica de bajo calor de hidratación, entonces se designaría como:

I 42,5 R-LH/SR UNE 80303-1

### 2.1.6 Cemento blanco

El cemento blanco es un cemento común que, de acuerdo con la definición de la norma UNE 80305 cumple el requisito de color establecido por las coordenadas CIELAB, determinadas según ensayo UNE 80117, de tal manera que el parámetro L* es superior a 85,0. Por ello, deben cumplir además las especificaciones de sus homólogos de la norma UNE-EN 197-1. Es fundamental emplear áridos muy limpios y evitar el uso de herramientas de hierro que puedan manchar la pasta con partículas de óxido. Obviamente, si se fabrica hormigón blanco deberá también prestarse atención al color de los áridos.

La designación del cemento blanco es la misma que la de los cementos comunes, sustituyendo el prefijo CEM por BL y colocando la referencia a la norma al final. Por ejemplo la designación:

BL II/A-L 52,5 N-LH UNE 80305

corresponde a un cemento blanco cuya composición está dentro del rango de la de un cemento común con adición de caliza, cuya composición es según el tipo II/A, cuya resistencia es de, por lo menos, 52,5 MPa a los 28 días, y que posee las características de resistencia inicial normal y bajo calor de hidratación.

### 2.1.7 Cementos para usos especiales

Los cementos para usos especiales se definen según la norma UNE 80307. Su clase resistente viene dada por el valor de resistencia alcanzado a los 90 días, seguida del sufijo (N), ya que no tiene sentido la exigencia de alta resistencia inicial. Su designación lleva el prefijo ESP VI-1. Por ejemplo:

ESP VI-1 42,5 N UNE 80307

### 2.1.8 Criterios de utilización de los cementos

El Anejo 8 de la RC-08, así como el Anejo 4 de la Instrucción EHE-08 contienen unas tablas con los cementos recomendables en función de la aplicación. Las dos tablas siguientes están extraídas de la RC-08. Por su parte, el libro *"Hormigón armado"* de los profesores Pedro Jiménez Montoya, Álvaro García Meseguer y Francisco Morán Cabré (en adelante se citará sólo por su primer autor, Jiménez Montoya) recoge unas criterios de utilización práctica al final de su primer capítulo.

**Tabla A8.2.1**

| Aplicación | Cementos recomendados |
|---|---|
| Hormigón en masa | Todos los cementos comunes, excepto los tipos<br>CEM II/A-Q, CEM II/B-Q, CEM II/A-W, CEM II/B-W, CEM II/A-T, CEM II/B-T y CEM III/C<br>Cementos para usos especiales ESP VI-1 (*) |
| Hormigón armado | Todos los cementos comunes excepto los tipos CEM II/A-Q, CEM II/B-Q, CEM II/A-W, CEM II/B-W, CEM II/A-T,<br>CEM II/B-T, CEM III/C, CEM V/B |
| Hormigón pretensado incluidos los prefabricados estructurales | Cementos comunes (**) de los tipos CEM I, CEM II/A-D,<br>CEM II/A-V, CEM II/A-P y CEM II/A-M (V-P) (***) |
| Elementos estructurales prefabricados de hormigón armado | Resultan muy adecuados los cementos comunes (**) de los tipos CEM I, CEM II/A .y adecuado el cemento común tipo<br>CEM IV/A cuando así se deduzca de un estudio experimental específico. |
| Hormigón en masa y armado en grandes volúmenes | Resultan muy adecuados los cementos comunes CEM III/B y CEM IV/B y adecuados los cementos comunes tipo<br>CEM II/B, CEM III/A, CEM IV/A y CEM V/A,<br>Cementos para usos especiales ESP VI-1 (*)<br>Es muy recomendable la característica adicional de bajo calor de hidratación (LH) y de muy bajo calor de hidratación (VLH), según los casos |
| Hormigón de alta resistencia | Muy adecuados los cementos comunes tipo CEM I y adecuados los cementos comunes tipo CEM II/A-D y<br>CEM II/A 42,5 R.<br>El resto de cementos comunes tipo CEM II/A pueden resultar adecuados cuando así se deduzca de un estudio experimental específico. |
| Hormigones para reparaciones rápidas de urgencia | Los cementos comunes tipo CEM I, CEM II/A-D, y<br>el cemento de aluminato de calcio (CAC), |
| Hormigones para desencofrado y descimbrado rápido | Los cementos comunes (**) tipo CEM I, y CEM II, |
| Hormigón proyectado | Los cementos comunes tipo CEM I, y CEM II/A |
| Hormigones con áridos potencialmente reactivos (****) | Resultan muy adecuados los cementos comunes tipo<br>CEM III, CEM IV, CEM V, CEM II/A-D, CEM II/B-S y<br>CEM II/B-V, y adecuados los cementos comunes tipo<br>CEM II/B-P y CEM II/B-M |

(*) En el caso de grandes volúmenes de hormigón en masa.
(**) Dentro de los indicados son preferibles los de alta resistencia inicial.
(***) La inclusión de los cementos CEM II/A-V, CEM II/A-P y CEM II/A-M (V-P) como utilizables para la aplicación de hormigón pretensado, es coherente con la posibilidad, contemplada en la EHE, de utilización de adición al hormigón pretensado de cenizas volantes en una cantidad no mayor del 20 % del peso de cemento.
(****) Para esta aplicación son recomendables los cementos con bajo contenido en alcalinos o aquellos citados en la tabla.

**Tabla A8.2.2.1**

| Aplicación | Cementos recomendados |
|---|---|
| Cimentaciones de hormigón en masa | Muy adecuados los cementos comunes tipo CEM IV/B, siendo adecuados el resto de cementos comunes, excepto los CEM II/A-Q, CEM II/B-Q, CEM II/A-W, CEM II/B-W, CEM II/A-T y CEM II/B-T<br>En todos los casos es recomendable la característica adicional de bajo calor de hidratación (LH).<br>Es necesario cumplir las prescripciones relativas al empleo de la característica adicional de resistencia a sulfatos (SR) o al agua de mar (MR) cuando corresponda |
| Cimentaciones de hormigón armado | Muy adecuados los cementos comunes tipo CEM I y CEM II/A, siendo adecuados el resto de cementos comunes a excepción de los CEM III/B, CEM IV/B CEM II/A-Q, CEM II/B-Q, CEM II/A-W, CEM II/B-W, CEM II/A-T y CEM II/B-T<br>Es necesario cumplir las prescripciones relativas al empleo de la característica adicional de resistencia a sulfatos (SR) o al agua de mar (MR) cuando corresponda |

## 2.2 EL AGUA EN EL HORMIGÓN

Las misiones del agua de amasado el hormigón son dos:

- la hidratación del conglomerante hidráulico, el cemento
- dotar a la masa de trabajabilidad suficiente

Por otro lado:

- si se utiliza un exceso de agua, ésta crea al evaporarse una serie de huecos o capilares que disminuyen la resistencia del hormigón; cada litro de agua de amasado añadido de más es equivalente a emplear dos kilos menos de cemento
- pero si se utiliza muy poca agua, la mezcla es poco trabajable y de difícil colocación en obra

La Figura 11 reproduce una gráfica, extraída del libro *"Hormigón armado"* de Jiménez Montoya, en la que se muestra claramente la influencia que tiene el exceso de agua en la consistencia-trabajabilidad y en su resistencia mecánica. El agua de curado se aplica tras el hormigonado y durante el proceso de fraguado y primer endurecimiento del hormigón, teniendo como misión el mejorar la hidratación del cemento e impedir una retracción prematura.

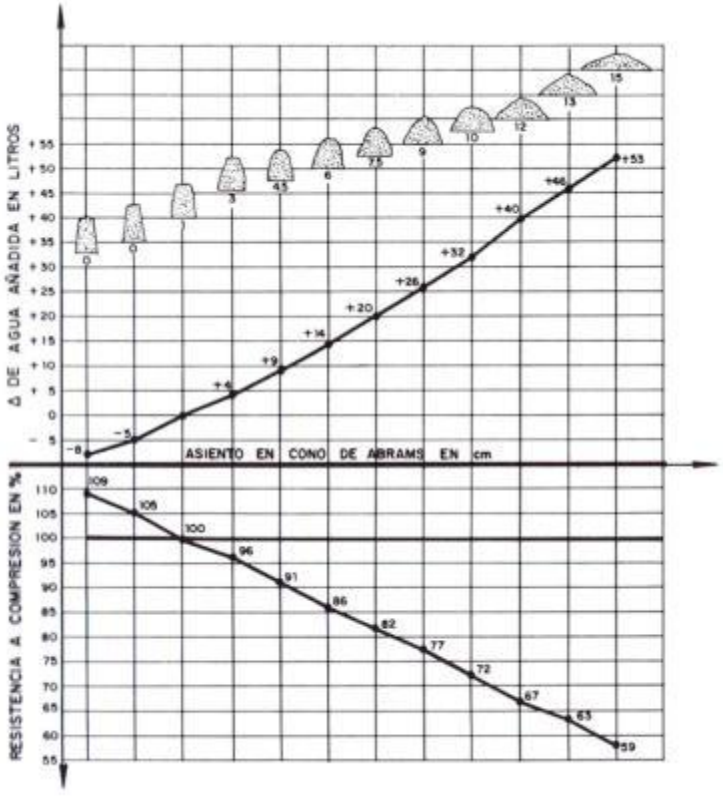



Figura 11. Extraída de *"Hormigón armado"* de Jiménez Montoya et al.

Ambas "aguas" deben cumplir una serie de requisitos, más exigentes en el agua de curado porque es el agua que recibe el hormigón cuando está endureciendo. En general, cualquier agua potable es apta para el uso en ambos procesos, a excepción de las aguas de alta montaña, que pueden resultar agresivas. Algunas aguas insalubres pueden también ser aptas. La Instrucción EHE-08 establece que:

- no deben emplearse aguas con un pH inferior a 5

- el contenido de cloruros del agua deberá estar limitado a un máximo de 3 g por litro en elementos de hormigón armado y 1 g por litro en elementos de hormigón pretensado
- el contenido de sulfatos se limitará a un máximo de 1 g por litro, aunque si el cemento empleado lleva la característica (SR) podría llegarse hasta 5 g de sulfatos por litro de agua
- tampoco deben emplearse aguas con aceites, grasas e hidratos de carbono. Y tampoco deben emplearse aguas con materias sólidas en suspensión como limos o arcillas, porque éstos disminuyen la adherencia de la pasta con el árido.

Como consideración medioambiental, se permite el empleo de aguas recicladas procedentes del lavado de cubas en la propia central de hormigonado, siempre y cuando:

- se cumplan las prescripciones definidas con carácter general para el agua (contenido de cloruros, sulfatos, etc.)
- la densidad relativa del agua reciclada no será mayor que 1,3
- la densidad relativa del agua total no será mayor que 1,1

La Instrucción EHE-08 permite el empleo del agua de mar en aplicaciones hormigones en masa, advirtiendo de la caída de la resistencia en un 15%. Esta agua debe estar libre de algas que puedan disminuir la adherencia pasta-árido y provocar la presencia de poros en el hormigón.

## 2.2 LOS ÁRIDOS

Como áridos para la confección de hormigones pueden emplearse arenas y gravas naturales procedentes de machaqueo, que reúnan en igual o superior grado las ***características de resistencia y durabilidad*** que se le exijan al hormigón.

Con vistas a la durabilidad, son preferibles:

- áridos de tipo silíceo (gravas y arenas de río o cantera)
- áridos provenientes de machaqueo de rocas volcánicas (basalto) o calizas sólidas y densas
- previo análisis también pueden emplearse rocas sedimentarias y volcánicas sueltas

No deben emplearse calizas blandas, feldespatos, yesos, piritas, rocas friables o porosas o áridos que contengan sulfuros oxidables. En general el árido se compone de:

- grava o árido grueso: la fracción mayor de 5 mm
- arena o árido fino: la fracción menor de 5 mm

El árido se suministra por fracciones y se designa por $d/D$, siendo $d$ y $D$ las dimensiones de la mínima abertura de tamiz (expresadas en mm) que cumplen los requisitos de la Tabla 28.3.a de la Instrucción EHE-08. Además, la relación $D/d$ no debe ser inferior a 1,4. Las series de tamices para especificar tamaños de áridos pueden consultarse en la Tabla 28.3.b de la Instrucción. Por ejemplo, para un árido grueso con 20/40:

- la relación $D/d$ es igual a 2 y por tanto cumple el requisito de no ser inferior a 1,4
- todo el árido deberá pasar por el tamiz de 80 mm
- el tamiz más próximo a 56 mm deberá retener menos del 2% en masa del árido
- el tamiz de 40 mm, deberá retener menos del 15% en masa
- el tamiz de 20 mm no deberá dejar pasar más del 20% en masa
- y el tamiz de 10 mm no deberá dejar pasar más del 5% en masa.

Tabla 28.3.a de la EHE-08. Requisitos generales de los tamaños máximo *D* y mínimo *d*

| | | Porcentaje que pasa (en masa) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 *D* | 1,4 *D* [a)] | *D* [b)] | *d* | *d*/2 [a)] |
| Árido grueso | *D* > 11,2 ó *D*/*d* > 2 | 100 | 98 a 100 | 90 a 99 | 0 a 15 | 0 a 5 |
| | *D* ≤ 11,2 ó *D*/*d* ≤ 2 | 100 | 98 a 100 | 85 a 99 | 0 a 20 | 0 a 5 |
| Árido fino | *D* ≤ 4 y *d* = 0 | 100 | 95 a 100 | 85 a 99 | - | - |

[a)] Como tamices 1,4 *D* y *d*/2 se tomarán de la serie elegida o el siguiente tamaño del tamiz más próximo de la serie.

[b)] El porcentaje en masa que pase por el tamiz *D* podrá ser superior al 99%, pero en tales casos el suministrador deberá documentar y declarar la granulometría más representativa, incluyendo los tamices *D*, *d* y *d*/2 y los tamices intermedios entre *d* y *D* de la serie básica más la serie 1, o de la serie básica más la serie 2. Se podrán excluir los tamices con una relación menor a 1,4 veces el siguiente tamiz más bajo.

Los áridos gruesos pueden ser rodados o de machaqueo. Los rodados dotan al hormigón de mayor trabajabilidad y, por el contrario, los de machaqueo hacen que el hormigón fresco posea mayor acritud y dificultan la puesta en obra; sin embargo, dotan al hormigón de una mayor trabazón y, por lo tanto, de mayor resistencia mecánica y química. Tanto los áridos rodados como los de machaqueo deben ir limpios de "camisas" de arcillas o polvo, respectivamente, que disminuirían su adherencia con la pasta. Las gravas óptimas serían las de caliza, con una densidad superior a 2,6 y resistencia superior a 100 MPa ("no son rayadas por la navaja"). Gravas de densidad inferior a 2,3 y de resistencia de apenas 50 MPa ("rayadas por el latón") no son admisibles.

Una propiedad importante es la ***compacidad***, que es la relación entre el volumen real del árido y el volumen aparente. Cuanto mayor es la compacidad, menor es el volumen de huecos y menor es la cantidad de pasta de cemento que se necesita para llenarlos. Podrían obtenerse hormigones resistentes y durables pero a costa de dificultar la puesta en obra debido a masas poco trabajables y fácilmente disgregables. Las formas inadecuadas de los áridos pueden llegar a comprometer la resistencia de un hormigón, por lo que es preciso disponer de algún parámetro que permita su control. La Instrucción EHE-08 "mide" la forma del árido grueso a través del ***índice de lajas***, que es el porcentaje en peso de los áridos considerables como lajas, es decir, con formas laminares o aciculares. Este tipo de formas disminuye la trabajabilidad del hormigón fresco, lo que hace que se necesite más agua de amasado y se pierda resistencia. Y además, una vez endurecido el hormigón, las aristas de las lajas pueden favorecer el deslizamiento interno o el agrietamiento del hormigón sometido a tensiones, reduciendo su resistencia en determinadas direcciones. El índice de lajas deberá ser menor que 35. La versión anterior de la Instrucción admitía también el ***coeficiente de forma*** como medida del árido grueso; éste es la relación entre el volumen de *n* granos de dicho árido y el correspondiente a *n* esferas cuyos diámetros sean las mayores dimensiones de cada uno de los granos. La Instrucción EHE-98 establecía que dicho coeficiente, determinado conforme a UNE 7238 no debía ser inferior a 0,20. Según algunos autores, se podría precisar aún más, exigiéndose un límite de 0,25 para áridos de tamaños de entre 12,5 mm y 25 mm, mientras que para áridos de entre 25 mm y 40 mm podría bajarse a 0,15.

La arena o árido fino es la fracción de más responsabilidad. En general las mejores arenas son las de río, de cuarzo puro, lo que las hace resistentes y durables. Las arenas de mina deben ser lavadas de arcilla y las arenas de mar pueden emplearse también en hormigón armado previo lavado con agua dulce. La arena debe estar libre de sustancias que perjudiquen la durabilidad del hormigón y la Instrucción EHE-08 establece una serie de ensayos a tal efecto. Es preciso contar con un óptimo contenido de áridos finos para asegurar la trabajabilidad de la masa y facilitar su puesta en obra, a costa de incrementar las cantidades de agua y de cemento.

La distribución de los distintos tamaños de los granos que componen el árido (sea grueso o fino) tiene una importancia decisiva en las características del hormigón y el estudio de dicha distribución suele

efectuarse mediante la ***curva granulométrica*** (ver Figura 12) que se determina cribando el árido a través de una serie normalizada de cribas y tamices. La curva representa en abscisas las aberturas de los tamices y en ordenadas el porcentaje que pasa por cada tamiz en valor absoluto. Como se ha comentado, la serie de tamices para el árido grueso se incluye en la Tabla 28.3.b de la Instrucción, mientras que la serie de tamices para el árido fino está en progresión geométrica de razón dos, comenzando en el valor 4 mm y adoptando valores cada vez más pequeños hasta 0,063 mm (Tabla 28.4.1.b de la Instrucción). No es posible definir una curva granulométrica óptima, pero existen métodos aplicables en determinadas situaciones como el de las parábolas de Fuller y Bolomey o el método del módulo granulométrico de Abrams. La instrucción EHE-08 define en su apartado 28.4.1 los límites de la curva granulométrica para el árido fino.

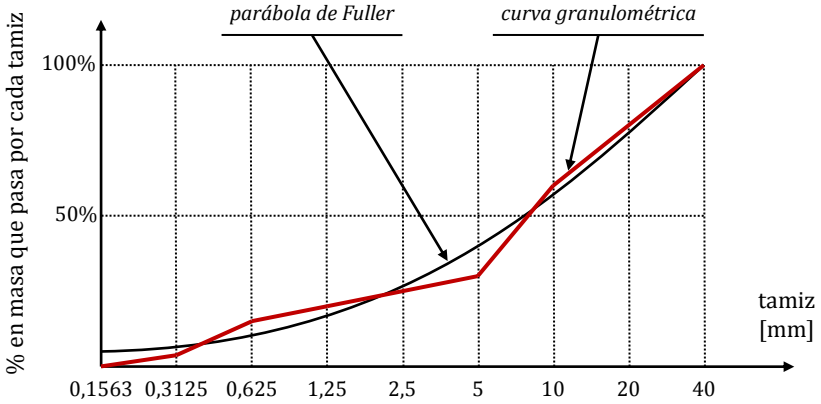



Figura 12. Ejemplo de curva granulométrica

Desde la entrada en vigor de la Instrucción EHE-08, el control de calidad de los áridos se realizará de forma documental y deberán disponer del marcado CE, con la excepción de los que provengan de autoconsumo, en cuyo caso se deberá aportar un certificado de ensayo con antigüedad inferior a 3 meses en el que se demuestre un nivel de garantía estadística equivalente al exigido para los aditivos con marcado CE.

## 2.3 LOS ADITIVOS

Los aditivos del hormigón se designarán de acuerdo con la norma UNE-EN 934-2. Su dosificación, que se recuerda es inferior al 5% del peso del cemento, debe ser objeto de gran atención ya que, de no ser la adecuada, puede incluso tener efectos desfavorables. Además suelen tener "efectos secundarios" favorables o perjudiciales. ***Los aditivos pueden mejorar las propiedades de hormigones bien dosificados y preparados pero no son un "parche" para corregir aquellos mal proyectados o confeccionados***. Los más importantes son los siguientes:

- **Aceleradores**: aquellos que adelantan el fraguado y/o el endurecimiento del hormigón. Por ejemplo, el carbonato sódico es acelerador de fraguado y los cloruros, las bases alcalinas y sus sales son aceleradores de endurecimiento. La misión de los aceleradores es reducir el tiempo de desmoldeo o desencofrado y son especialmente útiles en situaciones de hormigonado en tiempo frío. El acelerador más eficaz en estas condiciones es el carbonato cálcico. Debe tenerse en cuenta que el calor es también un acelerador de fraguado y endurecimiento. Una menor cantidad de agua de amasado es acelerador del fraguado
- **Retardadores**: aquellos que retrasan el fraguado del hormigón y generalmente son sustancias orgánicas como lignosulfatos e hidratos de carbono. A corto plazo, la resistencia que alcanza el

hormigón es menor que cuando no se utilizan pero sin embargo, a 28 ó 90 días pueden llegar a ser mayores. Son de utilidad con tiempo caluroso o con largas distancias de transporte del hormigón fresco. Tienen como inconveniente el que suelen aumentar la retracción del hormigón. Debido a ello, se recomienda emplear fluidificantes en su lugar.

- **Fluidificantes y plastificantes**: aquellos que aumentan la docilidad y la trabajabilidad del hormigón. Se emplean para masas de hormigón de difícil puesta en obra o bien para reducir la cantidad necesaria de agua de amasado en beneficio de un incremento de la resistencia o la dosificación del cemento. Los plastificantes actúan mecánica y físicamente (por retención de agua) mientras que los fluidificantes actúan mediante procesos físico-químicos (permitiendo una reducción del agua). Los ***plastificantes*** son productos a base de polvos muy finos que completan la granulometría del cemento y facilitan el deslizamiento de los granos en el mortero, mejorando la trabajabilidad, aunque necesitan de una mayor cantidad de agua de amasado y no benefician la resistencia del hormigón. Los ***fluidificantes*** son productos orgánicos de molécula larga y tensoactiva, lo que les confiere un efecto lubricante, aumentando la plasticidad de la masa, disminuyen su tendencia a segregación en el transporte, mejoran la resistencia y aumentan la durabilidad y resistencia a abrasión del hormigón. Como contrapartida, retrasan el fraguado y primer endurecimiento del hormigón y no deben emplearse con hormigones de consistencia blanda o fluida. Los ***superfluidificantes*** palian en cierta medida estos efectos indeseables de los fluidificantes.
- **Aireantes**: aquellos que favorecen la presencia de infinidad de burbujas de aire ocluido en la masa de hormigón, uniformemente repartidas y de entre 20 a 200 micras de diámetro. Interceptan la red capilar del hormigón endurecido y mejoran considerablemente su resistencia a heladas y agentes agresivos. También hacen que las masas sean más dóciles y trabajables, que los hormigones sean más impermeables y presenten mejor aspecto tras desencofrar (reducen el número de coqueras y poros). Como contrapartida, la resistencia mecánica es menor.
- **Impermeabilizantes**: aquellos que tienen por objeto evitar la penetración de agua en la red capilar del elemento de hormigón, por efecto de presión (depósitos o conducciones) o contacto con el medios húmedos (capilaridad). La red capilar se forma por evaporación de un exceso de agua de amasado, que es necesario para mejorar la docilidad de la masa. Existen impermeabilizantes de masa (bentonitas, sales de ácidos grasos, los plastificantes en general) o de superficie (aplicados sobre hormigón endurecido actuando a muy poca profundidad).
- **Otros**: expansivos o compensadores de retracción, gasificantes, endurecedores de superficie, colorantes, inhibidores de corrosión, plastificantes-aireantes, etc.

## 2.4 TIPOS DE HORMIGONES

A continuación se recoge una breve clasificación de los hormigones para usos estructurales:

- ***hormigones convencionales*** (HA): aquellos de resistencias características a compresión no superiores a 50 MPa; para su aplicación en estructuras de hormigón armado y pretensado, la resistencia característica deberá ser igual o superior a 25 MPa
- ***hormigones de alta resistencia*** (HA): son hormigones convencionales con resistencias características de entre 50 y 100 MPa
- ***hormigones con fibras*** (HRF): un hormigón reforzado con fibras incluye en su composición fibras cortas, discretas y aleatoriamente distribuidas de acero o materiales polímericos (p. ej. fibra de carbono, etc.); la adición de fibras, que no deberá superar el 1,5% en volumen, es admisible en hormigón en masa, armado o pretensado; el aporte de fibras puede obedecer a un fin estructural, como la mejora del comportamiento en Estados Límite Últimos a edades tempranas o con el hormigón ya endurecido; también puede obedecer a fines no estructurales

como la mejora de la resistencia al fuego, el control de la fisuración o la modificación de otras propiedades no estructurales (p. ej. la conductividad)

- ***hormigones reciclados*** (HR): tal y como se ha comentado, es posible reciclar áridos procedentes de la demolición de obras de hormigón y emplearlos en nuevas realizaciones; la Instrucción EHE-08 admite el empleo de áridos reciclados en una nueva obra hasta un 20% del peso total de áridos sin que deban modificarse las propiedades y bases de cálculo para un hormigón convencional; el hormigón reciclado puede emplearse para estructuras de hormigón armado de resistencia característica no superior a 40 MPa, no pudiendo utilizarse para hormigón pretensado
- ***hormigón ligero estructural*** (HLE): se trata de hormigones que poseen una cierta proporción de árido ligero, natural o artificial (p. ej. arcilla expandida), y cuya densidad está entre 1200 kg/m$^3$ y 2000 kg/m$^3$, siendo inferior a la de un hormigón convencional; sin embargo, debido a la naturaleza de los áridos ligeros, la densidad en estado fresco puede ser superior; la resistencia característica mínima es de 15 ó 20 MPa y la máxima es de 50 MPa, aunque existe constancia de experiencias con hormigones ligeros de alta resistencia; suelen necesitar de una compactación más enérgica que los convencionales, pero no deberá ser excesiva, ya que puede favorecer la flotabilidad de los áridos; son hormigones adecuados cuando se trate de elementos poco cargados y en los que el peso propio suponga una fracción importante de la carga total (p. ej. cubiertas); también debe considerarse su uso en el caso de losas de hormigón soportadas por estructuras rehabilitadas, en cerramientos resistentes, etc.
- ***hormigones de alta densidad***: al contrario que los hormigones ligeros, éstos poseen áridos de alta densidad, naturales o sintéticos (bolitas de acero, escorias pesadas, etc.), que le confieren al hormigón una densidad superior a la del hormigón convencional, en torno a 2800 a 3500 kg/m$^3$; sus ámbitos de aplicación son fundamentalmente la protección radiológica (hospitales, centrales nucleares, etc.) y el efecto de "lastre" (losas de cimentación, contrapesos de puentes móviles, etc.); estos hormigones pueden necesitar de técnicas especiales para su puesta en obra, para evitar la tendencia a la segregación que tienen los áridos pesados
- ***hormigones autocompactantes*** (HA-/AC): como su propio nombre indica, son aquellos que no precisan de ningún aporte de energía de vibración para lograr su compactación, sino que ésta se consigue gracias exclusivamente al peso propio; un hormigón autocompactante fresco debe ser capaz de fluir hasta ocupar todo el volumen del elemento sin que se produzca segregación, bloqueo del árido grueso, sangrado, ni exudación de la lechada; el concepto de hormigón autocompactable fue formulado en Japón por el profesor Okamura de la Universidad de Tokio en 1.986 y el primer prototipo se desarrolló en 1.988; estos hormigones deben aplicarse en piezas cuyo hormigonado sea difícil debido a una gran densidad de armado; no deben emplearse áridos con *D* mayor de 25 mm, pero se aconseja que el tamaño máximo esté entre 12 mm y 20 mm; además del árido grueso y del árido fino necesitan de una tercera fracción de fílleres; su docilidad no puede medirse igual que la de los hormigones convencionales y llevan asociados una serie de ensayos específicos (escurrimiento, caja en L, etc.); estos hormigones necesitan de aditivos superfluidificantes y moduladores de la viscosidad
- ***hormigones proyectados***: se trata de hormigones que se proyectan a gran velocidad contra un encofrado, por lo que necesitan de dosificaciones muy especiales para paliar el problema de la segregación de árido; en Norteamérica este tipo de hormigón se denomina *shotcrete* (*shot* se traduce como disparo) y en España se ha popularizado con el nombre de ***gunita*** (del inglés *gun*, pistola); existen dos tipologías de pistola de proyección, de rotor o de pistón (flujo denso), siendo ésta a la que más se tiende en la actualidad; además del inconveniente de la segregación del árido, este tipo de hormigones presentan otros problemas como la pérdida de material durante la proyección del hormigón fresco y la gran emisión de polvo; no obstante, son especialmente indicados para la ejecución de las bóvedas de túneles y taludes para contención de tierras

Existen técnicas compatibles con el uso estructural del hormigón. Por ejemplo, actualmente se dispone en el mercado de patentes comerciales que emplean principios activos como aditivos del hormigón y que producen un efecto foto-catalítico en la superficie de los elementos de hormigón, lo que le aporta propiedades ***autolavantes*** y ***descontaminantes*** (absorción de monóxido y dióxido de carbono). Para las aplicaciones en obras subacuáticas, hay patentes que emplean ***aditivos especiales anti-deslavado y encapsulantes*** de los granos de cemento para mejorar la calidad final, la resistencia y la durabilidad de los elementos de hormigón sumerigidos.

El hormigón admite también una gran gama de usos no estructurales, entre los que cabe mencionar:

- ***hormigón de limpieza*** (HL): es un hormigón que tiene como finalidad el evitar la desecación del hormigón estructural durante su vertido así como una posible contaminación de éste durante las primeras horas de su hormigonado (p. ej. la capa de hormigón de limpieza previa a la ejecución de un elemento de cimentación)
- ***hormigón no estructural*** (HNE): es un hormigón que tiene como fin conformar volúmenes de material no resistente (p. ej. aceras, bordillos, rellenos, etc.)
- ***hormigón para acabados con árido visto***: empleados fundamentalmente en pavimentos rugosos y antideslizantes, resistentes a los agentes atmosféricos; se puede conseguir una amplia gama de efectos estéticos combinando áridos de distintos colores y con distintos ataques de profundidad)
- ***hormigón traslúcido***: invención del arquitecto húngaro Áron Losonczi (2.005), en la que se combina el hormigón con fibras ópticas de cristal orientadas (hasta un 4% en volumen); es un material apto para bloques de hormigón en masa, aunque la particularidad de que las fibras deban estar orientadas complica y compromete estructuralmente la intersección de elementos verticales y horizontales, especialmente si están armados; por esta razón no es adecuado para su uso estructural en la actualidad

## 3. DOSIFICACIÓN, PREPARACIÓN Y PUESTA EN OBRA

### 3.1 DOSIFICACIÓN DEL HORMIGÓN

La dosificación de un hormigón tiene por objeto ***determinar las proporciones en que hay que mezclar los distintos componentes del mismo para obtener masas y hormigones que reúnan las características y propiedades exigidas en el proyecto***.

En el complejo problema de la dosificación los datos de partida pueden ser o bien la resistencia mecánica final o bien la dosificación de cemento por metro cúbico de hormigón compactado y debe tener en cuenta los siguientes factores:

- las propiedades exigidas al hormigón, como se ha dicho,
- pero también las características de los materiales disponibles
- y los medios de fabricación, transporte y colocación.

No existen "fórmulas mágicas" y por ello, lo más conveniente es establecer las proporciones definitivas con la ayuda de ensayos realizados en laboratorio y posteriores factores de corrección. Lo habitual en los países desarrollados es la elaboración del hormigón en central en condiciones bien controladas y contando con la garantía del suministrador. Uno de los factores que más influyen en la resistencia del hormigón es la relación agua/cemento (A/C) de la masa. Sin embargo, no existe una relación biunívoca entre ambos factores. La relación A/C debe mantenerse tan baja como sea posible pero sin restar docilidad al hormigón. Además, bajos valores de la relación A/C pueden fomentar la segregación de los

áridos gruesos. Por todo ello, debe utilizarse una mayor cantidad de agua de la estrictamente necesaria y/o bien hacer uso de aditivos adecuados.

La durabilidad es otra característica exigible a un hormigón y tan importante como lo pueda ser su resistencia. La Tabla 37.3.2.a de la Instrucción EHE-08 limita superiormente la relación A/C e inferiormente el contenido de cemento del hormigón, en función de las condiciones ambientales a que esté expuesta la estructura proyectada. Asimismo, define también la mínima cantidad de cemento que debe contener un hormigón en función de dichas condiciones ambientales. Por otro lado, con objeto de evitar valores altos del calor de fraguado y problemas por retracción en las primeras edades, el máximo contenido de cemento está limitado a 500 kg/m$^3$, salvo en casos excepcionales. Esta cantidad puede estar aún más limitada si el hormigón va a estar sometido a una clase de exposición E.

Tabla 37.3.2.a de la EHE-08. Máxima relación agua/cemento y mínimo contenido de cemento

| Parámetro de dosificación | Tipo de hormigón | CLASE DE EXPOSICIÓN | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | IIa | IIb | IIIa | IIIb | IIIc | IV | Qa | Qb | Qc | H | F | E |
| Máxima Relación a/c | masa | 0,65 | - | - | - | - | - | - | 0,50 | 0,50 | 0,45 | 0,55 | 0,50 | 0,50 |
| | armado | 0,65 | 0,60 | 0,55 | 0,50 | 0,50 | 0,45 | 0,50 | 0,50 | 0,50 | 0,45 | 0,55 | 0,50 | 0,50 |
| | pretensado | 0,60 | 0,60 | 0,55 | 0,45 | 0,45 | 0,45 | 0,45 | 0,50 | 0,45 | 0,45 | 0,55 | 0,50 | 0,50 |
| Mínimo contenido de cemento | masa | 200 | - | - | - | - | - | - | 275 | 300 | 325 | 275 | 300 | 275 |
| | armado | 250 | 275 | 300 | 300 | 325 | 350 | 325 | 325 | 350 | 350 | 300 | 325 | 300 |
| | pretensado | 275 | 300 | 300 | 300 | 325 | 350 | 325 | 325 | 350 | 350 | 300 | 325 | 300 |

Tabla 37.3.2.b de la EHE-08. Resistencias mínimas recomendadas en función de los requisitos de durabilidad (*)

| Parámetro de dosificación | Tipo de hormigón | CLASE DE EXPOSICIÓN | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | IIa | IIb | IIIa | IIIb | IIIc | IV | Qa | Qb | Qc | H | F | E |
| Resistencia mínima [N/mm$^2$] | masa | 20 | - | - | - | - | - | - | 30 | 30 | 35 | 30 | 30 | 30 |
| | armado | 25 | 25 | 30 | 30 | 30 | 35 | 30 | 30 | 30 | 35 | 30 | 30 | 30 |
| | pretensado | 25 | 25 | 30 | 30 | 35 | 35 | 35 | 30 | 35 | 35 | 30 | 30 | 30 |

(*) Estos valores reflejan las resistencias que pueden esperarse con carácter general cuando se emplean áridos de buena calidad y se respetan las especificaciones estrictas de durabilidad incluidas en esta Instrucción. Se trata de una tabla meramente orientativa, al objeto de fomentar la deseable coherencia entre las especificaciones de durabilidad y las especificaciones de resistencia. En este sentido, se recuerda que en algunas zonas geográficas en las que los áridos sólo pueden cumplir estrictamente las especificaciones definidos para ellos en esta Instrucción, puede ser complicado obtener estos valores

Los comentarios de la CPH al apartado 37.3.2 de la Instrucción EHE-08 recomiendan unas categorías resistentes mínimas del hormigón, compatibles con las especificaciones dadas para cada clase de exposición ambiental (Tabla 37.3.2.b). Adelantando contenidos que se desarrollarán posteriormente, la clase resistente de un hormigón viene dada por la resistencia característica a compresión de una probeta cilíndrica de dimensiones normalizadas a los 28 días, expresada en MPa.

Además, en ambientes III y IV deberá prestarse especial atención a la impermeabilidad del hormigón. Esta se mide a través del ensayo de penetración de agua bajo presión, según UNE-EN 12390-8, de forma que el hormigón será considerado como suficientemente impermeable para su uso en elementos de hormigón armado o en masa si la profundidad media de penetración no supera los 30 mm y la profundidad máxima no supera los 50 mm. En el caso de elementos de hormigón pretensado, estas profundidades no superarán ni 20 ni 30 mm, respectivamente.

La dosificación del hormigón debe definir también los parámetros relativos a la granulometría del árido. En primer lugar, según la Instrucción EHE-08, apartado 28.3.1, el tamaño máximo del árido grueso ($D$) deberá ser menor que:

a) el 80% de la distancia horizontal libre entre vainas o armaduras que no formen grupo, o entre un borde de pieza y una vaina o armadura horizontales (o que formen un ángulo mayor que 45° con la dirección de hormigonado).

b) 1,25 veces la distancia entre un borde de la pieza y una vaina o armadura verticales (o que formen un ángulo no mayor que 45° con la dirección de hormigonado).

c) un cuarto de la dimensión mínima de la pieza, a excepción de las situaciones siguientes:

   - losa superior de los forjados, donde el tamaño máximo del árido será menor que 0,4 veces el espesor mínimo

   - piezas de ejecución muy cuidada (prefabricación en taller) y en aquellos elementos en los que el efecto pared del encofrado sea reducido (forjados que se encofran por una sola cara), en cuyo caso será menor que 0,33 veces el espesor mínimo.

No es conveniente emplear áridos de tamaño superior a 40 mm, para no crear discontinuidades importantes dentro de la masa.

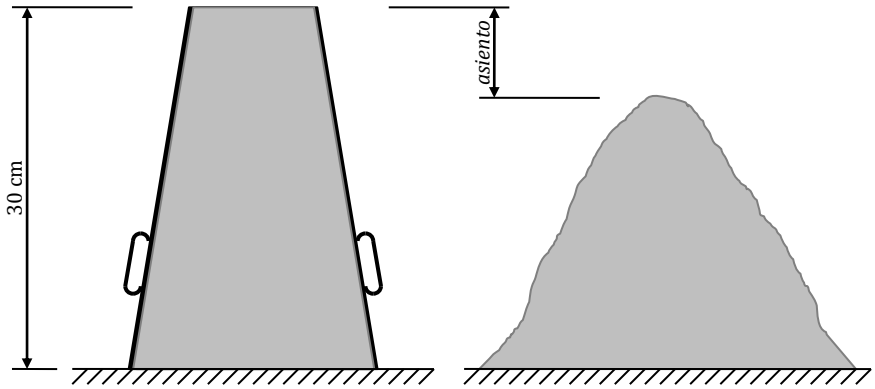



Figura 13. Ensayo de medida de la consistencia mediante el cono de Abrams

La puesta en obra de la masa de hormigón fresco depende de la docilidad de la misma. La docilidad suele medirse cualitativamente a través de la consistencia, la cual, a su vez, se mide mediante el asiento observado en el ensayo del cono de Abrams (UNE-EN 12350-2), representado en la Figura 13. La Instrucción EHE-08 define 5 tipos de consistencia (apartado 31.5 de la Instrucción):

- ***seca*** (asiento en cono de Abrams entre 0 y 2 cm) → compactación con vibrado enérgico en taller
- ***plástica*** (asiento en cono de Abrams entre 3 y 5 cm) → compactación con vibrado enérgico en obra

- ***blanda*** (asiento en cono de Abrams entre 6 y 9 cm) → compactación mediante vibrado o apisonado
- ***fluida*** (asiento en cono de Abrams entre 10 y 15 cm) → compactación mediante picado con barra
- ***líquida*** (asiento en cono de Abrams entre 16 y 20 cm) → auto-compactación

Salvo en aplicaciones específicas que así lo requieran, deberá evitarse el empleo de las consistencias seca y plástica. La consistencia fluida se aconseja para los hormigones bombeados, en especial si están fabricados con áridos de machaqueo. Asimismo, también se aconseja el empleo de la consistencia fluida para elementos de hormigón visto. En cualquier caso, se recomienda que la consistencia fluida se consiga mediante el empleo de aditivos superplastificantes, para evitar tener que añadir un exceso de agua de amasado. El empleo de los superplastificantes es obligatorio cuando se emplee una consistencia líquida. La consistencia debe indicarse en el Pliego de Prescripciones Técnicas Particulares de cada realización y será función del tipo de elemento, de su geometría, de la disposición de las armaduras y del tipo de sistema de compactación previsto. Una vez fijada la consistencia, se puede determinar la cantidad de agua por metro cúbico de hormigón, de acuerdo con los valores orientativos recogidos en la Tabla 1.1:

Tabla 1.1 Litros de agua por $m^3$ de hormigón (sin aditivos)
(Fuente "Hormigón Armado" (13ª ed.) de Jiménez Montoya et al.)

| Consistencia | Asiento cono Abrams [cm] | Áridos rodados | | | Piedra partida y arena de machaqueo | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 80 mm | 40 mm | 20 mm | 80 mm | 40 mm | 20 mm |
| Seca | 0-2 | 135 | 155 | 175 | 155 | 175 | 195 |
| Plástica | 3-5 | 150 | 170 | 190 | 170 | 190 | 210 |
| Blanda | 6-9 | 165 | 185 | 205 | 185 | 205 | 225 |
| Fluida | 10-15 | 180 | 200 | 220 | 200 | 220 | 240 |

Una vez que se haya fijado la cantidad de agua y que se conozca la relación A/C se calcula la cantidad de cemento debiendo comprobarse que no sea inferior a lo consignado en la Tabla 37.3.2.a de la Instrucción EHE-08.

## 3.2 PUESTA EN OBRA DEL HORMIGÓN

La Instrucción EHE-08 distingue entre las dos formas siguientes de preparar el hormigón:

- Hormigón fabricado en central: requiere disponer de una central de hormigonado que puede estar o no a pie de obra.
- Hormigón no fabricado en central: el que se fabrica en hormigoneras de obra; su empleo no es aconsejable, salvo en obras de escasa importancia.

Una central de hormigonado consta de:

- instalaciones de almacenamiento de materias primas
- instalaciones de dosificación

- equipos de amasado
- equipos de transporte
- laboratorio de control de calidad de la producción
- técnico responsable de fabricación
- técnico responsable del servicio de control de la calidad

Debe llevarse a cabo una adecuada campaña de ensayos orientados a comprobar la homogeneidad (control de la dispersión de características dentro de la misma amasada) y la uniformidad (control de la dispersión de características entre diferentes amasadas).

Durante el transporte debe prestarse atención a las siguientes observaciones:

- debe evitarse la segregación de los áridos gruesos (en especial los rodados), lo que podría provocar pérdidas de homogeneidad y resistencia en el hormigón. El exceso de agua, los choques y las vibraciones favorecen la segregación.
- también debe evitarse que se seque el hormigón. Si en la recepción en obra se advierte el principio de fraguado en la masa, ésta debe ser desechada.
- en el caso de emplear hormigones de diferentes tipos de cemento, el material de transporte debe ser cuidadosamente limpiado antes de proceder a cada nuevo transporte.

Por otro lado, el vertido de la masa en su puesta en obra:

- no debe realizarse desde gran altura (no más de 1 ó 2 m como máximo en caída libre), procurando que su dirección sea vertical y evitando desplazamientos horizontales de la masa.
- debe evitarse, mediante el eventual empleo de canaletas, que el hormigón choque contra el encofrado o las armaduras.
- la colocación se efectuará por tongadas de entre 20 y 30 cm (pudiéndose llegar a 40 ó 60 cm en hormigón en masa o armado, respectivamente). Cada capa quedará "cosida" a la anterior a través de la compactación que se aplique.
- no se lanzará el hormigón con palas a gran distancia ni tampoco se emplearán rastrillos, a fin de evitar que se disgregue.
- en piezas muy armadas puede ser conveniente comenzar hormigonando una capa de entre 2 y 3 cm de hormigón exento de árido grueso, vertiendo inmediatamente después el hormigón ordinario.
- en superficies no demasiado inclinadas debe hormigonarse de abajo a arriba y "por roscas" de manera que el hormigón ocupe su lugar definitivo con la mínima acción de vibrado. Con pendientes grandes, puede ser necesario emplear un contraencofrado superior.

Si la puesta en obra es mediante bombeo:

- se recomienda utilizar consistencias plástico-blandas, y el contenido mínimo de cemento deberá ser de 300 kg/m$^3$.
- se recomienda emplear arena y árido grueso rodados.
- puede ser conveniente el empleo de cementos puzolánicos o aditivos plastificantes, fluidificantes o superplastificantes
- el tamaño máximo de árido no deberá ser superior a un cuarto del de la tubería de bombeo si es metálica o a un tercio si es de plástico (no deben utilizarse tuberías de aluminio)
- durante la colocación debe evitarse que el chorro de hormigón impacte directamente contra las armaduras

La compactación dependerá de la consistencia elegida y tiene como objetivo el que se cierren todos los huecos en el seno de la masa, sin que llegue a producirse la segregación. El proceso de compactación se prologará hasta que se observe el reflujo de la pasta hasta la superficie:

- la compactación por **picado** se efectúa mediante una barra metálica que se introduce repetidas veces en la masa de hormigón, "cosiendo" cada capa con la anterior, y es típica con hormigones de consistencia blanda y fluida en obras de escasa importancia
- la compactación por **apisonado** consiste en el golpeteo repetido con un pisón sobre tongadas de entre 15 cm y 20 cm. Es adecuado en elementos de poco espesor y gran superficie y con consistencias blanda y fluida.
- la compactación por **vibrado** es especialmente adecuada para consistencias secas y está, por lo tanto, asociada a un ahorro en la cantidad de cemento y en la del agua de amasado, manteniendo la calidad y permitiendo un desencofrado más rápido. Es el método más adecuado para estructuras de hormigón armado. Existen tres tipos de vibradores: de aguja, de superficie y externos.
- existen otros métodos "especiales" como son la consolidación por **inyección**, la consolidación por **vacío** y la consolidación por **centrifugado**.

Al interrumpir el hormigonado de una estructura, es necesario que las juntas de hormigonado queden orientadas lo más perpendicularmente posible a la dirección de las tensiones de compresión, siendo deseable alejarlas de las zonas de máximos esfuerzos. Antes de reanudar el hormigonado debe limpiarse la junta de toda suciedad y eliminar la capa de mortero hasta dejar los áridos al descubierto (por ejemplo, mediante cepillo de alambre). No debe hormigonarse sobre superficies que hayan sufrido efectos de heladas. Si no se puede evitar una junta de hormigonado a lo largo de una viga, ésta deberá estar situada hacia un cuarto de la luz e inclinada a 45°C. Es conveniente recurrir siempre que sea posible al empleo de productos adhesivos como resinas epoxi.

El hormigonado deberá interrumpirse cuando se prevea que en las 48 horas siguientes descienda la temperatura ambiente por debajo de 0°C. No deberá hormigonarse cuando la masa tenga una temperatura inferior a 5°C o cuando la de los moldes o encofrados sea inferior a 3°C. En tiempo frío es conveniente emplear relaciones A/C lo más bajas posible, pudiendo ser necesario el empleo de un aditivo adecuado. Si no hubiera más remedio que hormigonar pueden tomarse algunas medidas: calentar el agua de amasado o los áridos, añadir aditivos al agua de amasado, emplear superficies radiantes calentadas, etc. En el apartado 37.3.3 de la Instrucción EHE se prescribe que en los hormigones sometidos a exposición de clase F (*heladas sobre elementos sometidos a contacto con sales fundentes*) se deberá introducir un contenido mínimo de aire ocluido del 4,5%.

El problema del hormigonado en tiempo caluroso es el de la evaporación prematura del agua de amasado. Puede ser conveniente en esos casos refrigerar el agua, mantener los áridos protegidos de la luz solar, proteger del viento el hormigón recién colocado, etc. Como norma general, no debe hormigonarse por encima de los 40°C ó incluso de 35°C en elementos de gran superficie. Con temperaturas próximas a éstas, deberá prolongarse el curado durante al menos 10 días.

En condiciones normales, con elementos de hormigón armado con cemento Pórtland, el período mínimo de curado debe ser de 7 días, pudiendo reducirlo a la mitad si se emplean cementos de altas resistencias iniciales. Al hormigonar elementos de gran superficie, suele sustituirse el curado por aporte de agua por la aplicación de productos (aceites, resinas, plásticos) que evitan la evaporación. Otro método de curado eficaz es el curado al vapor, que acelera notablemente el endurecimiento, aunque su empleo está restringido a la prefabricación. Es muy importante preservar al hormigón de sobrecargas o impactos que puedan agrietarlo antes de que se haya concluido la fase de curado y endurecimiento.

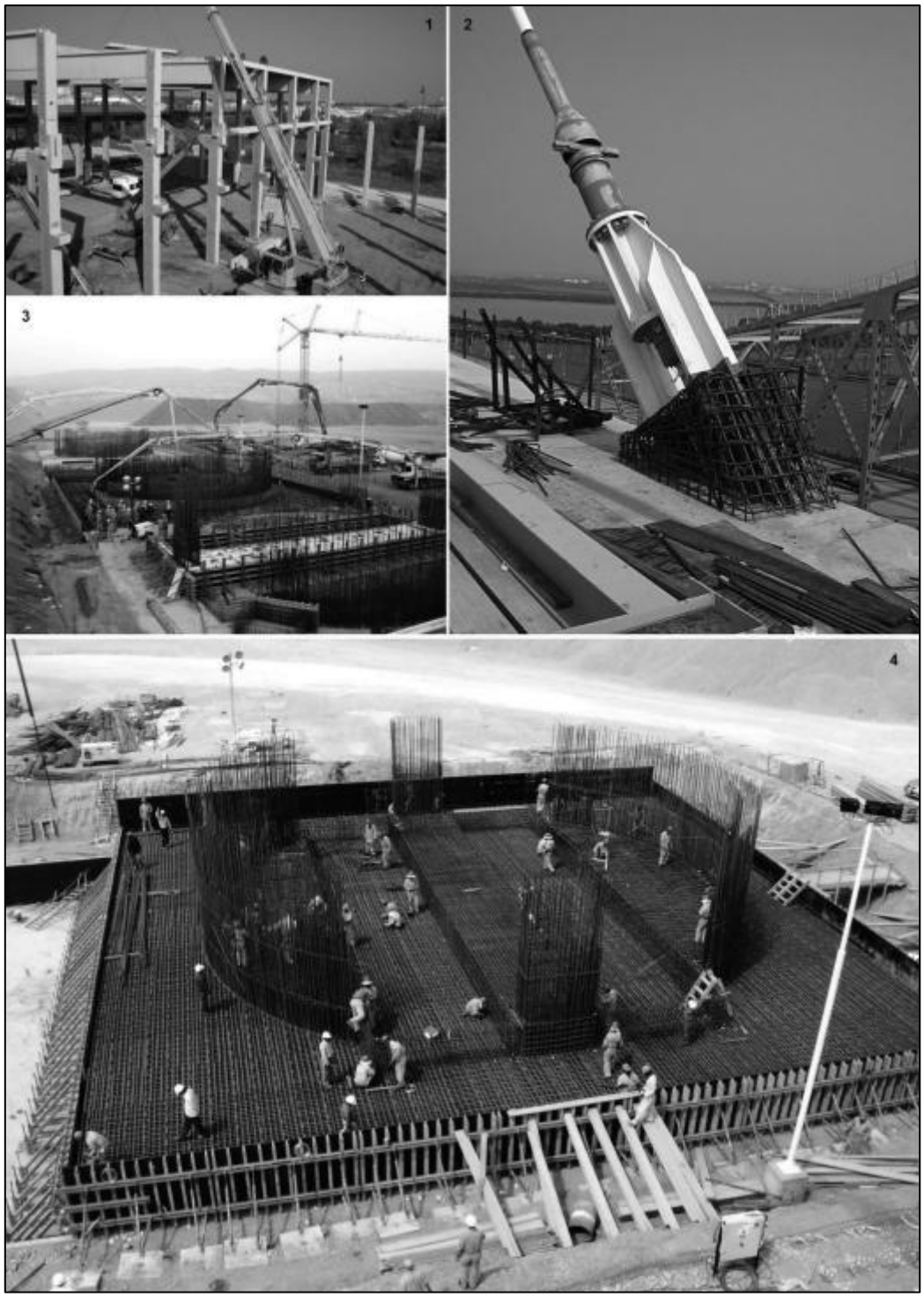



Figura 14. Edificio de estructura prefabricada en construcción (1); estructura de anclaje del puente A. Ravenel Jr. en Charleston, EE.UU. (2); construcción de silos en una planta de cemento en Fujaira, Emiratos Árabes Unidos (3 y 4)

La misión del ***encofrado*** y de la ***cimbra*** es contener y soportar el hormigón fresco hasta su endurecimiento, sin permitir asientos o deformaciones. En prefabricación se habla de moldes en lugar de encofrados. Los encofrados suelen ser de metálicos (nunca de aluminio) o de madera, debiendo estos últimos humedecerse antes de la colocación del hormigón. Las superficies interiores de los encofrados deben estar limpias y exentas de sustancias perjudiciales para el hormigón en el momento del vertido del hormigón fresco. Si se reutiliza una pieza de encofrado debe limpiarse con cepillo de

alambre para eliminar el mortero que pueda haber quedado adherido. En elementos de gran luz (por encima de los 6 m) es conveniente dotar al sistema de encofrado de una contraflecha.

El constructor deberá disponer de un ***Proyecto de Cimbra*** en el que se justifique su seguridad, se defina completamente la cimbra y sus elementos por medio de planos y se indiquen las características que deban cumplir todos los elementos en un Pliego de Prescripciones.

Los encofrados y moldes deberán poderse retirar sin causar sacudidas ni daños en el hormigón. La retirada de costeros, en condiciones normales puede efectuarse a las 10 horas del hormigonado en verano o a las 30 horas en invierno.

En aquellos casos en los cuales no se poseyese suficiente experiencia, podría ser necesario realizar campañas de ensayos orientados a conocer la resistencia realmente alcanzada por el hormigón a fin de fijar plazos adecuados de desencofrado. A fin de evitar imperfecciones, no es conveniente dejar aristas vivas, por lo que se recomienda biselarlas de origen mediante la utilización de berenjenos en las esquinas del encofrado.

Tras el desencofrado, debe procederse al examen del acabado de superficies y a la reparación de pequeños defectos que puedan apreciarse, tales como coqueras superficiales, irregularidades, etc. Si los defectos fueran importantes o estuvieran situados en zonas críticas, pudiera ser necesaria una demolición total o parcial del elemento estructural.

Durante el proceso de ejecución deberán controlarse las emisiones de ruido y de polvo, pudiendo recurrir en este último caso al regado de las pistas de la obra. Asimismo también deben controlarse las aguas residuales generadas. Como ya se ha comentado anteriormente, en aras del respeto medioambiental, debe también considerarse el empleo de áridos provenientes de reciclado y agua de amasado proveniente del lavado de cubas, así como emplear técnicas y materiales ambientalmente adecuados. Obviamente, ante un eventual vertido accidental, deberá efectuarse un saneamiento del terreno y evitar la afección de acuíferos.

A modo de resumen final, se recomienda la lectura atenta de los siguientes apartados de la Instrucción EHE-08:

- Artículo 66º Criterios generales para la ejecución de la estructura
- Artículo 67º Actuaciones previas al comienzo de la ejecución
- Artículo 68º Procesos previos a la colocación de las armaduras
- Artículo 69º Procesos de elaboración, armado y montaje de las armaduras pasivas
- Artículo 70º Procesos de colocación y tesado de las armaduras activas
- Artículo 71º Elaboración y puesta en obra del hormigón
- Artículo 72º Hormigones especiales
- Artículo 73º Desencofrado y desmoldeo
- Artículo 74º Descimbrado
- Artículo 75º Acabado de superficies
- Artículo 76º Elementos prefabricados
- Artículo 77º Aspectos medioambientales básicos y buenas prácticas medioambientales durante la ejecución de la estructura

# CAPÍTULO 2
# BASES DE CÁLCULO Y DURABILIDAD

## 1. BASES DE CÁLCULO

### 1.1 EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

El hormigón armado presenta una serie de particularidades que no hacen viable la aplicación directa de la Resistencia de Materiales en el análisis estructural, esto es, en la obtención de esfuerzos en las estructuras:

- por un lado, el hormigón ***no es un material equirresistente***, ya que no tiene la misma resistencia a compresión que a tracción, la cual se desprecia; por esta razón, el proyecto y la disposición de las armaduras, pasivas o activas, deberán ser coherentes con las hipótesis del modelo de cálculo con el que se hayan obtenido los esfuerzos
- además, el diagrama tensión-deformación del hormigón en compresión ***no es lineal***
- por otro lado, como ya se comentó al describir la historia del puente de Le Veurdre, el hormigón es un material que presenta un ***comportamiento reológico muy acusado***, que se manifiesta a través de la ***fluencia*** (incremento de las deformaciones a lo largo del tiempo sin que se hayan aparecido nuevas cargas) y de la ***retracción*** (aumento de la fisuración producida por la progresiva pérdida de agua)

Piénsese en una viga de sección constante sometida a flexión simple. Si el material fuera lineal y equirresistente, la profundidad de la fibra neutra de todas las secciones transversales a lo largo de la viga se situaría a la misma profundidad, más concretamente, a la correspondiente al *centroide* o centro de gravedad de la sección transversal tipo. Ahora bien, como se verá más adelante, en el caso de un material como el hormigón, la profundidad de la fibra neutra no dependerá en exclusiva de la geometría de la sección transversal, sino que también dependerá fuertemente del momento aplicado y de la cantidad de refuerzo. Por lo tanto, en una viga de hormigón armado de sección constante, la profundidad de la fibra neutra variará a lo largo de la viga y ya no se podrá hablar de un elemento viga con inercia constante. Esto tiene una gran importancia en el caso de piezas hiperestáticas (vigas continuas, entramados, etc.) ya que, en principio, los prontuarios de esfuerzos basados en la resistencia de materiales no serán aplicables.

Si la relación entre tensiones y deformaciones no es lineal, el tipo de análisis estructural más indicado será el no-lineal, con el que también se podrá tener en cuenta la no linealidad geométrica permitiendo estudiar el equilibrio de la estructura en su geometría deformada. Esto último es especialmente necesario en el caso de estructuras esbeltas como edificios de gran altura, donde además deberá estudiarse el comportamiento dinámico. Por otro lado, cuando las propiedades de los materiales pueden sufrir variaciones a lo largo del tiempo, entonces los principios clásicos como el de *superposición* dejan de ser válidos y los esfuerzos a una edad determinada de la estructura dependerán de la historia de aplicación de cargas e incluso de la variación de la meteorología (temperatura, humedad, etc.).

A continuación se indican y describen brevemente los tipos de análisis admitidos para estructuras de hormigón en el ámbito de la Instrucción EHE-08.

### 1.1.1 Análisis lineal

En el ámbito de la Instrucción EHE-08, este tipo de análisis es aplicable tanto a los Estados Límite Últimos como a los de Servicio (ELU y ELS) y está basado en la hipótesis de comportamiento elástico-lineal de los materiales constituyentes y en la consideración del equilibrio en la estructura sin deformar. En este caso se permite utilizar la *sección bruta de hormigón* para el cálculo de las solicitaciones. Esto quiere decir que una pieza de sección constante podrá suponerse como de inercia constante a los efectos de la obtención de las solicitaciones. También quiere decir que se podrá emplear el principio de superposición, facilitando la obtención de combinaciones de hipótesis de cargas. Es preciso señalar que el Código Modelo admite este tipo de análisis en las comprobaciones de ELS, avisando de que en el caso de los ELU será necesario asegurar un cierto grado de ductilidad en las secciones críticas

En el Apéndice incluido al final de estos apuntes se recoge un prontuario de esfuerzos y deformaciones en vigas de sección constante, calculados con análisis lineal

### 1.1.2 Análisis no lineal

Es el que tiene en cuenta el comportamiento no lineal del diagrama tensión-deformación de los materiales que forman parte de la sección resistente, así como la no-linealidad geométrica, permitiendo el análisis de la estructura con su geometría deformada. De acuerdo con la EHE-08, este análisis es aplicable tanto a los ELS como a los ELU. Tal y como se ha comentado anteriormente, el comportamiento no lineal invalida, por definición, el principio de superposición y, por lo tanto, el formato de seguridad propuesto por la Instrucción y que se explicará más adelante en estos apuntes, no es aplicable directamente a este tipo de análisis.

Este tipo de análisis precisa necesariamente de herramientas informáticas para su aplicación.

### 1.1.3 Análisis lineal con redistribución limitada

En este tipo de análisis se parte de los esfuerzos obtenidos mediante un análisis estructural lineal para, a continuación, redistribuir los esfuerzos incrementándolos o disminuyéndolos siempre que se sigan satisfaciendo las condiciones de equilibrio entre cargas, esfuerzos y reacciones. La Instrucción EHE-08 sólo admite este tipo de análisis para los ELU. La redistribución limitada de esfuerzos implica, obligatoriamente, el control de la ductilidad de las secciones críticas para garantizar el grado de redistribución adoptado en la obtención de los esfuerzos de cálculo. Este procedimiento de análisis se describirá en el Capítulo 8, “Diseño y disposiciones en vigas y soportes”.

### 1.1.4 Análisis plástico

Es aquel que está basado en un comportamiento plástico, elasto-plástico o rígido-plástico de los materiales y que cumple al menos uno de los teoremas básicos de la plasticidad: el del límite inferior, el del límite superior o el de unicidad. Debe asegurarse que la ductilidad de las secciones críticas es suficiente para garantizar la formación del mecanismo de colapso planteado en el cálculo. El análisis plástico se podrá utilizar solo para comprobaciones de ELU y no está permitido en el caso de estructuras en las que sea necesario considerar los efectos de segundo orden.

## 1.2 EL MÉTODO DE LOS ESTADOS LÍMITE

Tal y como define el apartado 8.1 de la Instrucción EHE-08, los Estados Límite son aquellas situaciones para las que, en caso de ser superadas, puede considerarse que la estructura no cumple alguna de las funciones para las que ha sido proyectada. Este conjunto de situaciones se clasifican en:

- Estados Límite Últimos (ELU)
- Estados Límite de Servicio (ELS)
- Estado Límite de Durabilidad

### 1.2.1 Estados Límite Últimos (ELU)

Esta denominación engloba a todos aquellos que producen una puesta fuera de servicio de la estructura, por colapso o rotura de la misma o de una parte de ella, lo que podría llegar a poner en riesgo la vida de personas. Pueden ser debidos a:

- fallo por deformaciones plásticas excesivas, rotura o pérdida de la estabilidad de la estructura o parte de ella
- pérdida del equilibrio de la estructura o parte de ella, considerada como un sólido rígido
- fallo por acumulación de deformaciones o fisuración progresiva bajo cargas repetidas

Los Estados Límite de **Equilibrio** se estudian generalmente a nivel de toda la estructura. Los Estados Límite de **Agotamiento** se estudian generalmente a nivel de sección; se consideran los siguientes:

- por solicitaciones normales: tracción, flexión simple o compuesta, compresión simple
- por tensiones tangenciales: cortante, torsión, punzonamiento, rasante

El Estado Límite de **Inestabilidad** se puede estudiar a nivel de estructura o a nivel de elemento estructural. Y el Estado Límite de **Fatiga** se estudia generalmente a nivel de sección.

### 1.2.2 Estados Límite de Servicio (ELS)

Esta denominación engloba a todas aquellas situaciones de la estructura para las cuales no se cumplen los requisitos de funcionalidad, de comodidad, de durabilidad o de aspecto requeridos. La Instrucción EHE-08 contempla los siguientes: Estado Límite de **Deformación** (posible fuente de daño en elementos no estructurales, o bien porque puede llegar a afectar las acciones aplicadas, o bien porque puede perjudicar la apariencia); Estado Límite de **Vibraciones**; y Estado Límite de **Fisuración** (la cual puede mermar la durabilidad de la estructura).

### 1.2.3 Estado Límite de Durabilidad

Como se explicará más adelante, en el Estado Límite de Durabilidad deberá clasificarse la agresividad ambiental de acuerdo con los contenidos del Artículo 8º de la Instrucción y desarrollar una estrategia eficaz para el aseguramiento de la durabilidad de la estructura durante su vida útil, de acuerdo con el Título 4º de la Instrucción.

## 1.3 TRATAMIENTO DE LAS ACCIONES

En función de su naturaleza, las acciones se clasifican en:

- ***directas***: peso propio de la estructura, resto de cargas permanentes, sobrecargas de uso, etc.
- ***indirectas***: deformaciones o aceleraciones impuestas, acciones térmicas, acciones reológicas, acciones sísmicas, asientos de la cimentación, etc.

En función de su variación en el tiempo, las acciones se clasifican como:

- ***acciones permanentes*** ($G$): peso propio de la estructura + peso propio de elementos embebidos + peso propio de accesorios + peso propio de instalaciones fijas, etc.
- ***acciones permanentes de valor no constante*** ($G^*$): acciones cuya magnitud no es constante y varían con el tiempo en un único sentido y tendiendo a un valor límite, tales como las acciones reológicas
- ***acciones debidas al pretensado*** ($P$)
- ***acciones variables*** ($Q$): aquellas que pueden actuar o no sobre la estructura, tales como sobrecargas de uso, acciones climáticas, acciones debidas al proceso constructivo, etc.
- ***acciones accidentales*** ($A$): aquellas cuya posibilidad de actuación es pequeña pero de gran importancia, tales como impactos, explosiones, efectos sísmicos, etc.

Salvo en los casos de algunos hormigones especiales que se han indicado anteriormente, para la determinación del peso propio de una estructura de hormigón se tomará como densidad:

- 2300 kg/m$^3$ si se trata de hormigón en masa de resistencia característica no superior a 50 MPa (peso específico, **23 kN/m$^3$**)
- 2400 kg/m$^3$ si se trata de hormigón en masa de alta resistencia (peso específico, **24 kN/m$^3$**)
- 2500 kg/m$^3$ si se trata de hormigón armado y pretensado (peso específico, **25 kN/m$^3$**)

Por último, en función de su variación en el espacio, las acciones se clasifican en:

- ***acciones fijas***: básicamente, los pesos propios de los elementos estructurales y funcionales
- ***acciones libres***: fundamentalmente, las sobrecargas de uso

Por otro lado, a la hora de emplear los valores de las acciones deben distinguirse:

- ***valor característico*** ($F_k$): el principal valor representativo de una acción; puede venir determinado por un valor medio, un valor nominal o un valor correspondiente a una determinada probabilidad de no ser superado durante un período de referencia que tiene en cuenta la vida útil de la estructura y la duración de la acción
- ***valor representativo***: el valor de la acción utilizado para la comprobación de los Estados Límite; una acción puede tener uno o varios valores representativos:
    a) valor de combinación ($\Psi_0 F_k$) cuando dicha acción actúa aisladamente o con alguna otra acción variable
    b) valor frecuente ($\Psi_1 F_k$) sobrepasado únicamente en períodos de corta duración durante la vida útil de la estructura
    c) valor cuasipermanente ($\Psi_2 F_k$) sobrepasado durante gran parte de la vida útil de la estructura
- ***valor de cálculo*** ($F_d$): el obtenido del valor representativo afectado por un *coeficiente parcial de seguridad* $\gamma_f$:

$$F_d = \gamma_f \cdot \Psi_i \cdot F_k \qquad [2.1.1]$$

Los valores de los coeficientes parciales de seguridad (coeficientes de mayoración de acciones) para las acciones se indican en las Tablas 2.1 y 2.3, según se trate de ELU ó de ELS, y corresponden con lo establecido en el Artículo 12º de la Instrucción EHE-08. Dicho artículo avisa de que si los resultados de una comprobación son muy sensibles a las variaciones de la magnitud de la acción per- manente ($G$) de una parte a otra de la estructura, las partes favorable y desfavorable de dicha acción se considerarán como acciones individuales. Esta situación puede darse a la hora de comprobar el ***Estado Límite Último de Equilibrio***, en cuyo caso se adoptarían los valores indicados en la Tabla 2.2 (ver Figura 15).

Tabla 2.1 Coeficientes de seguridad parciales para acciones en comprobaciones de ELU, en el ámbito de la EHE-08

| Tipo de acción | Situación persistente o transitoria | | Situación accidental | |
|---|---|---|---|---|
| | Efecto favorable | Efecto desfav. | Efecto fav. | Efecto desfav. |
| Permanente | $\gamma_G = 1$ | $\gamma_G = 1{,}35$ | $\gamma_G = 1$ | $\gamma_G = 1$ |
| Pretensado | $\gamma_P = 1$ | $\gamma_P = 1$ | $\gamma_P = 1$ | $\gamma_P = 1$ |
| Permanente de valor no constante | $\gamma_{G^*} = 1$ | $\gamma_{G^*} = 1{,}5$ | $\gamma_{G^*} = 1$ | $\gamma_{G^*} = 1$ |
| Variable | $\gamma_Q = 0$ | $\gamma_Q = 1{,}5$ | $\gamma_Q = 0$ | $\gamma_Q = 1$ |
| Accidental | - | - | $\gamma_A = 1$ | $\gamma_A = 1$ |

Tabla 2.2 Coeficientes de seguridad parciales para el peso propio de la estructura en la comprobación del ELU de Equilibrio, en el ámbito de la EHE-08

| Tipo de situación | Efecto favorable | Efecto desfav. |
|---|---|---|
| Transitoria en fase de construcción | $\gamma_G = 0{,}95$ | $\gamma_G = 1{,}05$ |
| Persistente, construcción finalizada | $\gamma_G = 0{,}9$ | $\gamma_G = 1{,}1$ |

Tabla 2.3 Coeficientes de seguridad parciales para acciones en comprobaciones de ELS, en el ámbito de la EHE-08

| Tipo de acción | | Efecto favorable | Efecto desfav. |
|---|---|---|---|
| Permanente | | $\gamma_G = 1$ | $\gamma_G = 1$ |
| Pretensado | Armadura pretesa | $\gamma_P = 0{,}95$ | $\gamma_P = 1{,}05$ |
| | Armadura postesa | $\gamma_P = 0{,}90$ | $\gamma_P = 1{,}10$ |
| Permanente de valor no constante | | $\gamma_{G^*} = 1$ | $\gamma_{G^*} = 1$ |
| Variable | | $\gamma_Q = 0$ | $\gamma_Q = 1$ |

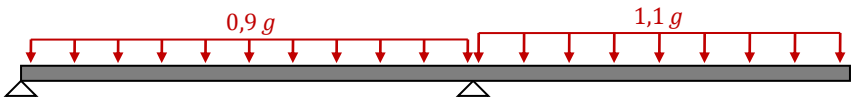



Figura 15. Ejemplo de comprobación de ELU de Equilibrio en situación persistente

Como se desprende de las tablas anteriores, para aplicar correctamente el coeficiente de mayoración a una determinada acción, no es suficiente con haber determinado su naturaleza, sino que también debe razonarse si su efecto es ***favorable*** o ***desfavorable***:

- una determinada acción o hipótesis de cargas tiene efecto desfavorable si contribuye a desestabilizar la estructura, o bien a incrementar un esfuerzo en una sección transversal, una reacción en un apoyo o una deformación o flecha
- en caso contrario, su efecto podrá ser beneficioso, haciendo que la estructura sea menos susceptible de violar un determinado Estado Límite, lo que se entiende por efecto favorable

Ello queda reflejado en el ejemplo de la Figura 15 en el que el peso del voladizo es claramente desestabilizador y, por tanto desfavorable, al contrario que el peso del vano que tiene efecto estabilizador; e igualmente queda reflejado en el ejemplo de la Figura 16, con una distribución uniforme de carga de naturaleza variable tanto por magnitud como por la posición.

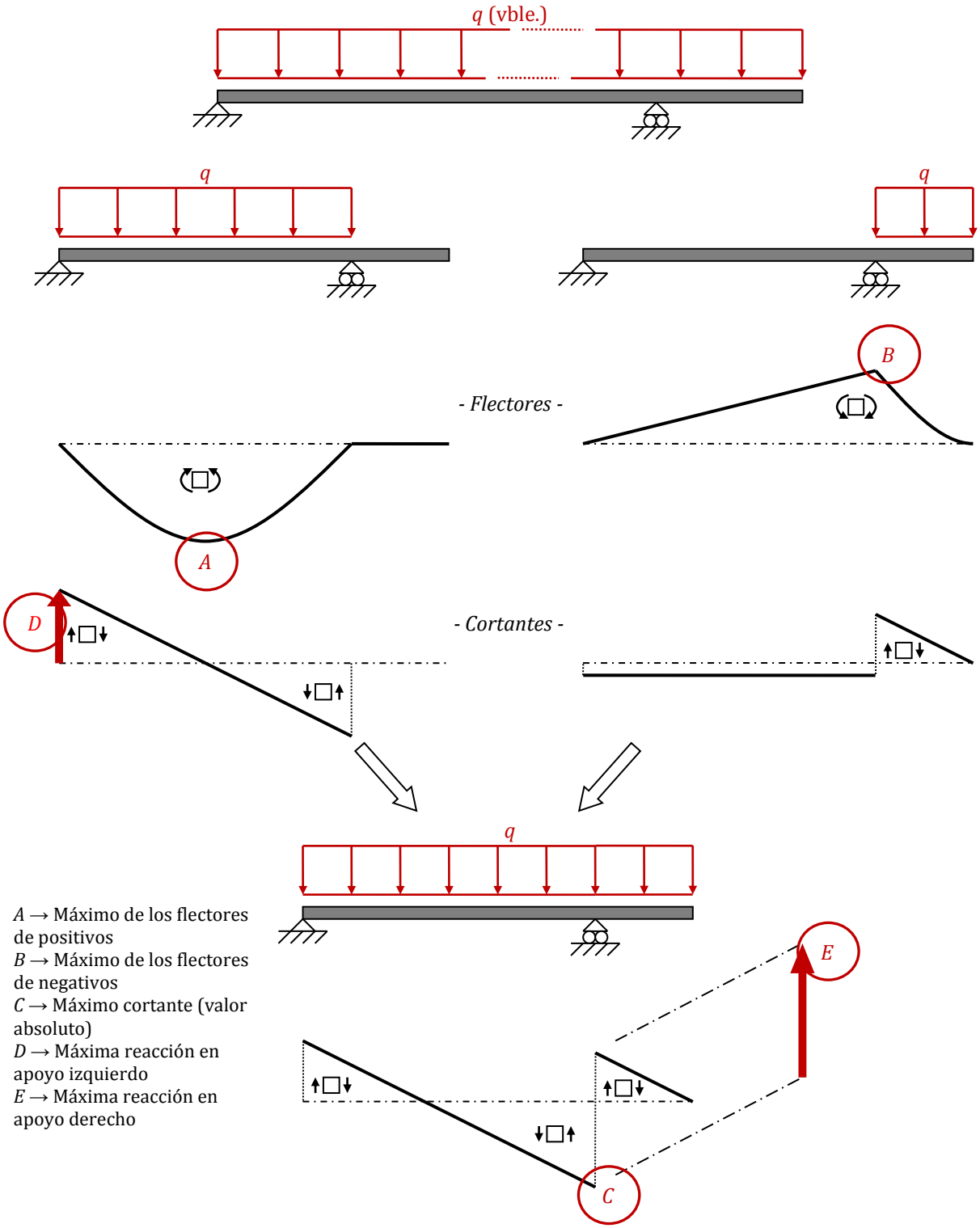



Figura 16. Distintas formas de tratar el efecto de una distribución uniforme de carga de naturaleza variable

Uno de los aspectos más importantes que se deben tener en cuente en la fase de proyecto a la hora de comprobar los diferentes Estados Límite es el de la combinación de las acciones aplicadas. Desde un punto de vista de la economía del proyecto no es razonable combinar todas las acciones que tienen efecto desfavorable con el 100% de su valor característico, ya que, estadísticamente hablando, es altamente improbable que se apliquen simultáneamente con la máxima intensidad. Por ello, para una determinada acción se definen una serie de coeficientes de combinación o de simultaneidad según la naturaleza de dicha acción:

- Coeficiente de valor de combinación $\Psi_{0,i}$ para la hipótesis de carga *i*
- Coeficiente de valor frecuente $\Psi_{1,i}$ para la hipótesis de carga *i*
- Coeficiente de valor cuasi-permanente $\Psi_{2,i}$ para la hipótesis de carga *i*

Los valores de los coeficientes de simultaneidad son establecidos por el Código Técnico de la Edificación (CTE) en la Tabla 4.2 de su Documento Básico de Seguridad Estructural (reproducida a continuación).

Tabla 4.2 del CTE-DB-SE-Seguridad estructural. Coeficientes de simultaneidad ($\Psi$)

| | $\Psi_0$ | $\Psi_1$ | $\Psi_2$ |
|---|---|---|---|
| Sobrecarga superficial de uso (Categorías según DB-SE-AE) | | | |
| • Zonas residenciales (Categoría A) | 0,7 | 0,5 | 0,3 |
| • Zonas administrativas (Categoría B) | 0,7 | 0,5 | 0,3 |
| • Zonas destinadas al público (Categoría C) | 0,7 | 0,7 | 0,6 |
| • Zonas comerciales (Categoría D) | 0,7 | 0,7 | 0,6 |
| • Zonas de tráfico y de aparcamiento de vehículos ligeros con un peso total inferior a 30 kN (Categoría E) | 0,7 | 0,7 | 0,6 |
| • Cubiertas transitables (Categoría F) | | (1) | |
| • Cubiertas accesibles únicamente para mantenimiento (Categoría G) | 0 | 0 | 0 |
| Nieve | | | |
| • para altitudes > 1000 m | 0,7 | 0,5 | 0,2 |
| • para altitudes ≤ 1000 m | 0,5 | 0,2 | 0 |
| Viento | 0,6 | 0,5 | 0 |
| Temperatura | 0,6 | 0,5 | 0 |
| Acciones variables del terreno | 0,7 | 0,7 | 0,7 |

(1) En las cubiertas transitables, se adoptarán los valores correspondientes al uso desde el que se accede.

Por otro lado, el Documento Básico de Acciones en la Edificación del CTE establece los valores de sobrecargas (cargas variables) propuestos para las categorías de uso de la Tabla 4.2, divididas en subcategorías.

Finalmente, el artículo 13º de la Instrucción EHE-08 define las diferentes combinaciones que deben contemplarse en la comprobación de los Estados Límite Últimos y de Servicio:

- Combinaciones para Estados Límite Últimos (ELU):

  a) Combinaciones para ***situaciones permanentes o transitorias***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_Q \cdot Q_{k,1} + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{0,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.2]$$

  $Q_{k,1}$ es el valor característico de la acción variable ***determinante*** o ***dominante***. Los valores de los coeficientes parciales de seguridad, serán los correspondientes a situaciones persistentes o transitorias. Por ejemplo, en el caso de acciones con efecto desfavorable y nivel de ejecución normal, $\gamma_G = \gamma_{G^*} = 1{,}35$ y $\gamma_Q = 1{,}5$.

  b) Combinaciones para ***situaciones accidentales***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_A \cdot A_k + \gamma_Q \cdot \Psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.3]$$

  Los valores de los coeficientes parciales de seguridad, serán los correspondientes a situaciones accidentales (ver Tabla 1.3.1.a). Por ejemplo, en el caso de acciones con efecto desfavorable, $\gamma_G = \gamma_{G^*} = \gamma_A = \gamma_Q = 1$.

  c) Combinación para ***situaciones sísmicas***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_A \cdot A_{E,k} + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.4]$$

  $A_{E,k}$ es el valor característico de la acción sísmica. Los valores de los coeficientes parciales de seguridad, serán los correspondientes a situaciones accidentales. En lo que respecta a los valores de los coeficientes de simultaneidad para el sumatorio de cargas variables, se recomienda consultar el apartado de "Masas que intervienen en el cálculo" en la ***Norma de Construcción Sismorresistente***, **NCSE-02**.

- Combinaciones para Estados Límite de Servicio (ELS):

  a) Combinaciones para ***situaciones poco probables***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_Q \cdot Q_{k,1} + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{0,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.5]$$

  Los valores de los coeficientes parciales de seguridad, serán los definidos en la Tabla 2.3 reproducida más arriba en estos apuntes.

  b) Combinaciones para ***situaciones frecuentes***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \gamma_Q \cdot \Psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.6]$$

  c) Combinación para ***situaciones cuasipermanentes***:

$$\sum \gamma_G \cdot G_k + \sum \gamma_{G^*} \cdot (G^*)_k + \gamma_P \cdot P_k + \sum \gamma_Q \cdot \Psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} \qquad [2.1.7]$$

## 2. LA DURABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

La durabilidad de una estructura es la capacidad para soportar, durante la vida útil para la que ha sido proyectada, las condiciones físicas y químicas a las que está expuesta, y que podrían llegar a provocar su degradación como consecuencia de efectos diferentes a las cargas y solicitaciones consideradas en el análisis estructural. Los procesos de degradación en las estructuras de hormigón armado son inevitables a lo largo del tiempo y es por ello necesario adoptar las medidas adecuadas en las diferentes fases del proceso constructivo (proyecto, ejecución, puesta en servicio, uso y mantenimiento). Los agentes que afectan negativamente a la durabilidad del hormigón son:

- ***de tipo mecánico***: acciones sobre la estructura (uso inadecuado, impactos, etc.)
- ***de tipo físico***: principalmente, las acciones térmicas

- ***de tipo biológico***: a cargo de bacterias, hongos, algas o musgos (plantas industriales, industria alimentaria, redes de alcantarillado, etc.)
- ***de tipo químico***: ácidos, sulfatos, álcalis, aguas de pH inferior a 5, líquidos con burbujas gaseosas, etc.

Además de los procesos que afectan a la "matriz" de hormigón (cemento, agua, áridos y aditivos), la durabilidad de los elementos de hormigón armado con armaduras activas o pasivas estará afectada también por la ***corrosión*** de las mismas. Con el tiempo, esta corrosión puede conllevar una pérdida significativa de capacidad mecánica, desencadenando un mecanismo de agotamiento no deseado. La alcalinidad del hormigón actúa de recubrimiento protector, pero la paulatina carbonatación por efecto del $CO_2$ del aire que penetra por los poros va reduciendo el nivel pH. Si este nivel cae por debajo de 9 en la zona de contacto con las armaduras, la capa alcalina de hidróxido cálcico desaparecerá. Otra forma de pérdida de la capa protectora es la acción de iones cloruro transportados por agua (aguas marinas, piscinas, etc.). Finalmente, el oxígeno del aire es, por definición, el otro gran responsable de la degradación del refuerzo de acero, en este caso por ***oxidación***: ésta puede hacer que se incremente hasta 6 veces el tamaño de una armadura, provocando grandes fisuras en el hormigón que se propagarían en dirección longitudinal (paralela a los refuerzos). El proceso de degradación puede dividirse en cuatro fases:

1. fase de *buen comportamiento*, que será tanto más dilatada cuanto mejor se haya proyectado la estructura
2. fase de *pre-corrosión*, en la que la carbonatación y los iones cloruro comienzan a llegar al nivel de la armadura de acero; puede intervenirse preventivamente aplicando recubrimientos superficiales adecuados
3. fase de *corrosión local activa*, en la que aparecen fisuras, manchas de óxido, etc. Son necesarios trabajos de reparación y mantenimiento
4. fase de *corrosión generalizada*, en la que las reparaciones necesarias son de gran envergadura

Según De Setter, un euro gastado eficazmente en proyectar y ejecutar correctamente la estructura es tan eficaz como 5 gastados en la fase 2, 25 gastados en la fase 3 ó 125 gastados en la fase 4. En otras palabras, ***la forma más económica de conseguir una prolongada vida útil es proyectar la estructura correctamente desde el principio y ejecutarla correctamente después***.

## 2.1 ESTRATEGIAS PARA ASEGURAR LA DURABILIDAD

Se describen a continuación las estrategias a adoptar para asegurar la durabilidad de los elementos de hormigón armado:

- identificar la clase o, en su caso, combinación de clases, que definen la ***agresividad del ambiente*** al que se encuentra sometido el elemento o grupo de elementos
- uno de los mayores enemigos de la durabilidad del hormigón es el agua, por lo que las formas y detalles estructurales deben prestar especial atención a su evacuación (*"no water, no problem"*); el diseño debe prever juntas impermeables y selladas, goterones, etc.
- proteger elementos expuestos a salpicaduras del tráfico, agua de lluvia, etc. mediante otros de fácil remplazo
- ***controlar la fisuración***, adoptando esquemas de armado que satisfagan dicho Estado Límite de Servicio (art. 49º) y prestando atención a los cambios bruscos de sección
- el diseño del edificio debe permitir el ***acceso a todos los elementos de la estructura*** para operaciones de mantenimiento durante la fase de servicio, lo cual es de especial relevancia en el contexto actual previsto en el Título 9º de la Instrucción, dedicado al Mantenimiento
- en lo que respecta a la elección del hormigón, su dosificación y su puesta en obra …

  - respetar los ***límites de la relación agua/cemento*** y el ***contenido de cemento*** (ver apartado 3 del Capítulo 1, "Introducción al hormigón armado")
  - prestar atención a los aspectos relativos al transporte, puesta en obra, compactación, curado, cimbras, encofrados, moldes, etc.
  - especificar, en su caso, cementos SR ó MR
  - en situaciones con importantes acciones de erosión, utilizar hormigones de resistencia característica superior a 30 MPa; emplear árido fino cuarcítico y árido grueso con coeficiente de desgaste, según ensayo Los Ángeles, inferior a 30; no superar una cantidad de cemento de 400 kg/m$^3$, 375 kg/m$^3$ ó 350 kg/m$^3$ para tamaños máximos de árido de 10, 20 ó 40 mm, respectivamente; se recomienda prolongar el curado un 50% más que en condiciones normales
  - en el caso de ambientes húmedos + áridos reactivos + alta alcalinidad del hormigón, se debe consultar con especialistas para tomar medidas contra la reacción árido álcali
- se deben dotar a las armaduras activas y pasivas de ***recubrimientos*** adecuados a las condiciones ambientales que se hayan identificado para cada elemento o grupo de elementos; estos recubrimientos se contemplarán en el cálculo durante la fase de proyecto y deberán asegurarse durante la fase de ejecución
- en el caso de ambientes muy agresivos puede ser necesario aplicar protecciones y tratamientos superficiales y consultar con especialistas sobre el empleo de resinas, lacas antiácidas, revestimientos bituminosos, revestimientos de gres o vidrido, revestimientos de chapas de resina sintética, etc.

La Figura 17 ilustra los efectos que tienen los medios agresivos más habituales en el deterioro de los elementos de hormigón y su pérdida de durabilidad. Las páginas siguientes recogen las tablas de la Instrucción EHE-08 que permiten la identificación del ambiente. A todo elemento estructural debe asignársele una única clase o subclase ***general*** de exposición. Por el contrario, un elemento podría estar sometido además a ninguna, a una sola o a varias clases ***específicas*** de exposición.

Figura 17. Ataque por agresividad del terreno (izda.), por carbonatación (centro) y por cloruros (dcha.)

Tabla 8.2.2 de la EHE-08. Clases generales de exposición relativas a la corrosión de las armaduras

| CLASE GENERAL DE EXPOSICIÓN | | | | DESCRIPCIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|---|---|---|
| Clase | Subclase | Designación | Tipo de proceso | | |
| No agresiva | | I | Ninguno | - interiores de edificios, no sometidos a condensaciones<br>- elementos de hormigón en masa | - elementos estructurales de edificios, incluido los forjados, que estén protegidos de la intemperie |
| Normal | Humedad alta | IIa | Corrosión de origen diferente de los cloruros | - interiores sometidos a humedades relativas medias altas (> 65%) o a condensaciones<br>- exteriores en ausencia de cloruros, y expuestos a lluvia en zonas con precipitación media anual superior a 600 mm<br>- elementos enterrados o sumergidos | - elementos estructurales en sótanos no ventilados<br>- cimentaciones<br>- estribos, pilas y tableros de puentes en zonas, sin impermeabilizar con precipitación media anual superior a 600 mm<br>- tableros de puentes impermeabilizados, en zonas con sales de deshielo y precipitación media anual superior a 600 mm<br>- elementos de hormigón, que se encuentren a la intemperie o en las cubiertas de edificios en zonas con precipitación media anual superior a 600mm<br>- forjados en cámara sanitaria, o en interiores en cocinas y baños, o en cubierta no protegida |
| | Humedad media | IIb | Corrosión de origen diferente de los cloruros | - exteriores en ausencia de cloruros, sometidos a la acción del agua de lluvia, en zonas con precipitación media anual inferior a 600 mm | - elementos estructurales en construcciones protegidas de la lluvia<br>- tableros y pilas de puentes, en zonas con precipitación media anual inferior a 600 mm |
| Marina | Aérea | IIIa | Corrosión por cloruros | - elementos de estructuras marinas, por encima del nivel de pleamar<br>- elementos exteriores de estructuras situadas en las proximidades de la línea costera (a menos de 5 km) | - elementos estructurales de edificaciones en las proximidades de la costa<br>- puentes en las proximidades de la costa<br>- zonas aéreas de diques, pantalanes y otras obras de defensa litoral<br>- instalaciones portuarias |
| | Sumergida | IIIb | Corrosión por cloruros | -elementos de estructuras marinas sumergidas permanentemente, por debajo del nivel mínimo de bajamar | - zonas sumergidas de diques, pantalanes y otras obras de defensa litoral<br>- cimentaciones y zonas sumergidas de pilas de puentes en el mar |
| | En zona de carrera de mareas y en zonas de salpicaduras | IIIc | Corrosión por cloruros | - elementos de estructuras marinas situadas en la zona de salpicaduras o en zona de carrera de mareas | - zonas situadas en el recorrido de marea de diques, pantalanes y otras obras de defensa litoral<br>- zonas de pilas de puentes sobre el mar, situadas en el recorrido de marea |
| Con cloruros de origen diferente del medio marino | | IV | Corrosión por cloruros | - instalaciones no impermeabilizadas en contacto con agua que presente un contenido elevado de cloruros, no relacionados con el ambiente marino<br>- superficies expuestas a sales de deshielo no impermeabilizadas. | - piscinas e interiores de los edificios que las albergan<br>- pilas de pasos superiores o pasarelas en zonas de nieve<br>- estaciones de tratamiento de agua |

Tabla 8.2.3.a de la EHE-08. Clases específicas de exposición relativas a otros procesos de deterioro distintos de la corrosión

| CLASE ESPECÍFICA DE EXPOSICIÓN | | | | DESCRIPCIÓN | EJEMPLO |
|---|---|---|---|---|---|
| Clase | Subclase | Designación | Tipo de proceso | | |
| Química agresiva | Débil | Qa | Ataque químico | - elementos situados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad lenta (ver Tabla 8.2.3.b) | - instalaciones industriales, con sustancias débilmente agresivas según Tabla 8.2.3.b<br>- construcciones en proximidades de áreas industriales, con agresividad débil según Tabla 8.2.3.b |
| | Media | Qb | Ataque químico | - elementos en contacto con agua de mar<br>- elementos situados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad media (ver Tabla 8.2.3.b) | - dolos, bloques y otros elementos para diques<br>- estructuras marinas, en general<br>- instalaciones industriales con sustancias de agresividad media según Tabla 8.2.3.b<br>- construcciones en proximidades de áreas industriales, con agresividad media según Tabla 8.2.3b<br>- instalaciones de conducción y tratamiento de aguas residuales con sustancias de agresividad media según Tabla 8.2.3.b |
| | Fuerte | Qc | Ataque químico | - elementos situados en ambientes con contenidos de sustancias químicas capaces de provocar la alteración del hormigón con velocidad rápida (ver Tabla 8.2.3.b) | - instalaciones industriales, con sustancias de agresividad alta de acuerdo con Tabla 8.2.3.b<br>- instalaciones de conducción y tratamiento de aguas residuales, con sustancias de agresividad alta de acuerdo con Tabla 8.2.3.b<br>- construcciones en proximidades de áreas industriales, con agresividad fuerte según Tabla 8.2.3b |
| Con heladas | Sin sales fundentes | H | Ataque hielo-deshielo | - elementos situados en contacto frecuente con agua, o zonas con humedad relativa media ambiental en invierno superior al 75%, y que tengan una probabilidad anual superior al 50% de alcanzar al menos una vez temperaturas por debajo de -5ºC | - construcciones en zonas de alta montaña<br>- estaciones invernales |
| | Con sales fundentes | F | Ataque por sales fundentes | - elementos destinados al tráfico de vehículos o peatones en zonas con más de 5 nevadas anuales o con valor medio de la temperatura mínima en los meses de invierno inferior a 0ºC | - tableros de puentes o pasarelas en zonas de alta montaña, en las que se utilizan sales fundentes |
| Erosión | | E | Abrasión, cavitación | - elementos sometidos a desgaste superficial<br>- elementos de estructuras hidráulicas en los que la cota piezométrica pueda descender por debajo de la presión de vapor del agua | - pilas de puente en cauces muy torrenciales<br>- elementos de diques, pantalanes y otras obras de defensa litoral que se encuentren sometidos a fuertes oleajes<br>- pavimentos de hormigón<br>- tuberías de alta presión |

Tabla 8.2.3.b de la EHE-08. Clasificación de la agresividad química

| TIPO DE MEDIO AGRESIVO | PARÁMETROS | TIPO DE EXPOSICIÓN | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Qa | Qb | Qc |
| | | ATAQUE DÉBIL | ATAQUE MEDIO | ATAQUE FUERTE |
| AGUA | VALOR DEL pH, según UNE 83.952 | 6,5 - 5,5 | 5,5 - 4,5 | < 4,5 |
| | $CO_2$ AGRESIVO (mg $CO_2$/ l), según UNE-EN 13.577 | 15 - 40 | 40 - 100 | > 100 |
| | IÓN AMONIO (mg $NH_4^+$ / l), según UNE 83.954 | 15 - 30 | 30 - 60 | > 60 |
| | IÓN MAGNESIO (mg $Mg^{2+}$ / l), según UNE 83.955 | 300 - 1000 | 1000 - 3000 | > 3000 |
| | IÓN SULFATO (mg $SO_4^{2-}$ / l), según UNE 83.956 | 200 - 600 | 600 - 3000 | > 3000 |
| | RESIDUO SECO (mg / l), según UNE 83.957 | 75 - 150 | 50 - 75 | < 50 |
| SUELO | GRADO DE ACIDEZ BAUMANN-GULLY (ml/kg), según UNE 83.962 | > 200 | (*) | (*) |
| | IÓN SULFATO (mg $SO_4^{2-}$ / kg de suelo seco), según UNE 83.963 | 2000 - 3000 | 3000 - 12000 | > 12000 |

(*) Estas condiciones no se dan en la práctica

Desde 1999, la Instrucción de Hormigón Estructural estableció una sencilla estrategia de aseguramiento de la durabilidad, basada en la elección de un ***recubrimiento mínimo*** ($r_{min}$) que depende de la agresividad ambiental tipificada en las clases generales y específicas. Este procedimiento se ha mantenido en la EHE-08 y ha sido sensiblemente mejorado, ya que, además del tipo de ambiente identificado para el elemento, el recubrimiento mínimo será también función de:

- el tipo de cemento que se emplee en la fabricación del hormigón
- y la duración nominal prevista para la estructura o ***vida útil nominal*** que, a su vez, será función de su importancia o relevancia

Tabla 5 de la EHE-08. Vida útil nominal de los diferentes tipos de estructura [1]

| TIPO DE ESTRUCTURA | VIDA ÚTIL NOMINAL |
|---|---|
| Estructuras de carácter temporal [2] | Entre 3 y 10 años |
| Elementos reemplazables que no forman parte de la estructura principal (por ejemplo, barandillas, apoyos de tuberías) | Entre 10 y 25 años |
| Edificios (o instalaciones) agrícolas o industriales y obras marítimas | Entre 15 y 50 años |
| Edificios de viviendas u oficinas y estructuras de ingeniería civil (excepto obras marítimas) de repercusión económica baja o media | 50 años |
| Edificios de carácter monumental o de importancia especial | 100 años |
| Puentes y otras estructuras de ingeniería civil de repercusión económica alta | 100 años |

[1] Cuando una estructura esté constituida por diferentes partes, podrá adoptarse para tales partes diferentes valores de vida útil, siempre en función del tipo y características de la construcción de las mismas

[2] En función del propósito de la estructura (exposición temporal, etc.). En ningún caso se considerarán como estructuras de carácter temporal aquellas estructuras de vida útil nominal superior a 10 años

La Tabla 5 de la Instrucción EHE-08 establece la vida útil nominal para diferentes tipos de estructuras y las tablas del Artículo 37º de la Instrucción, reproducidas a continuación, permiten elegir adecuadamente el recubrimiento mínimo para las armaduras en el elemento de hormigón.

Tabla 37.2.4.1.a de la EHE-08. Recubrimientos mínimos (mm) para las clases generales de exposición I y II

| Clase de exposición | Tipo de cemento | Resistencia característica del hormigón [N/mm²] | Vida útil de proyecto ($t_g$) (años) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 50 | 100 |
| I | Cualquiera | $f_{ck} \geq 25$ | 15 | 25 |
| II a | CEM I | $25 \leq f_{ck} < 40$ | 15 | 25 |
| | | $f_{ck} \geq 40$ | 10 | 20 |
| | Otros tipos de cementos o en el caso de empleo de adiciones al hormigón | $25 \leq f_{ck} < 40$ | 20 | 30 |
| | | $f_{ck} \geq 40$ | 15 | 25 |
| II b | CEM I | $25 \leq f_{ck} < 40$ | 20 | 30 |
| | | $f_{ck} \geq 40$ | 15 | 25 |
| | Otros tipos de cementos o en el caso de empleo de adiciones al hormigón | $25 \leq f_{ck} < 40$ | 25 | 35 |
| | | $f_{ck} \geq 40$ | 20 | 30 |

Tabla 37.2.4.1.b de la EHE-08. Recubrimientos mínimos (mm) para las clases generales de exposición III y IV

| Hormigón | Cemento | Vida útil de proyecto ($t_g$) (años) | Clase general de exposición | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | IIIa | IIIb | IIIc | IV |
| Armado | CEM III/A, CEM III/B, CEM IV, CEM II/B-S, B-P, B-V, A-D u hormigón con adición de microsílice superior al 6% o de cenizas volantes superior al 20% | 50 | 25 | 30 | 35 | 35 |
| | | 100 | 30 | 35 | 40 | 40 |
| | Resto de cementos utilizables | 50 | 45 | 40 | * | * |
| | | 100 | 65 | * | * | * |
| Pretensado | CEM II/A-D o bien con adición de humo de sílice superior al 6% | 50 | 30 | 35 | 40 | 40 |
| | | 100 | 35 | 40 | 45 | 45 |
| | Resto de cementos utilizables, según el Artículo 26º | 50 | 65 | 45 | * | * |
| | | 100 | * | * | * | * |

* Estas situaciones obligarían a unos recubrimientos excesivos, desaconsejables desde el punto de vista de la ejecución del elemento. En estos casos, se recomienda comprobar el Estado Límite de Durabilidad según lo indicado en el Anejo nº 9, a partir de las características del hormigón prescrito en el Pliego de prescripciones técnicas del proyecto

Tabla 37.2.4.1.c de la EHE-08. Recubrimientos mínimos (mm) para las clases específicas de exposición

| Clase de exposición | Tipo de cemento | Resistencia característica del hormigón [N/mm²] | Vida útil de proyecto ($t_g$) (años) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 50 | 100 |
| H | CEM III | $25 \le f_{ck} < 40$ | 25 | 50 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 15 | 25 |
| | Otros tipos de cemento | $25 \le f_{ck} < 40$ | 20 | 35 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 10 | 20 |
| F | CEM I I/A-D | $25 \le f_{ck} < 40$ | 25 | 50 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 15 | 35 |
| | CEM III | $25 \le f_{ck} < 40$ | 40 | 75 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 20 | 40 |
| | Otros tipos de cementos o en el caso de empleo de adiciones al hormigón | $25 \le f_{ck} < 40$ | 20 | 40 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 10 | 20 |
| E (1) | Cualquiera | $25 \le fck < 40$ | 40 | 80 |
| | | $f_{ck} \ge 40$ | 20 | 35 |
| Qa | CEM III, CEM IV, CEM II/B-S, B-P, B-V, A-D u hormigón con adición de microsílice superior al 6% o de cenizas volantes superior al 20% | - | 40 | 55 |
| | Resto de cementos utilizables | - | * | * |
| Qb, Qc | Cualquiera | - | (2) | (2) |

* Estas situaciones obligarían a unos recubrimientos excesivos

(1) Estos valores corresponden a condiciones moderadamente duras de abrasión. En el caso de que se prevea una fuerte abrasión, será necesario realizar un estudio detallado

(2) El Autor del proyecto deberá fijar estos valores de recubrimiento mínimo y, en su caso, medidas adicionales, al objeto de que se garantice adecuadamente la protección del hormigón y de las armaduras frente a la agresión química concreta de que se trate

El valor del recubrimiento mínimo no puede usarse directamente en el proyecto, puesto que se trata de un valor mínimo a asegurar. La Instrucción define además los siguientes recubrimientos:

- el recubrimiento nominal $r_{nom}$, que se obtiene a partir del $r_{min}$ añadiéndole el margen de recubrimiento $\Delta r$
- el margen $\Delta r$ vale 10 mm, a no ser que el nivel de control de ejecución sea intenso, en cuyo caso será de 5 mm para elementos hormigonados "in situ" o de 0 mm en el caso de elementos prefabricados
- el recubrimiento mecánico $d'$ (Figura 18) que es la distancia existente entre el centroide de la armadura longitudinal y la cara exterior del elemento de hormigón:

$$d' = r_{nom} + \emptyset_t + \frac{\emptyset}{2} \qquad [2.2.1]$$

siendo $\emptyset_t$ el diámetro nominal de la armadura transversal (cercos o estribos) y $\emptyset$ el diámetro nominal de la armadura longitudinal

- el recubrimiento *c* de la armadura longitudinal (Figura 18), que es la distancia existente entre la superficie de las barras de armado longitudinales y la cara exterior del elemento de hormigón; obviamente, en el caso de elementos que no lleven armado transversal ($Ø_t$ = 0 mm) el recubrimiento *c* coincide con el recubrimiento nominal

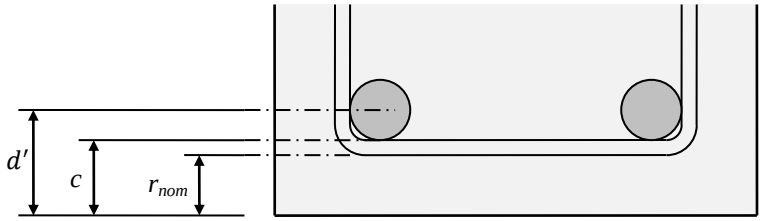



Figura 18. Recubrimiento nominal y mecánico

## 2.2 ESTIMACIÓN DE LA VIDA ÚTIL

Una de las principales novedades de la redacción de la EHE-08 es la incorporación de una filosofía de estimación de la vida útil. La verificación del Estado Límite de Durabilidad se satisface comprobando que la vida útil estimada se mantenga por encima de un valor "minorado" de la vida útil de proyecto al que se llamará vida útil de cálculo $t_d$:

$$t_d = \gamma_t \cdot t_g < t_L = t_i + t_p \qquad [2.2.2]$$

donde:

- $\gamma_t$ es el ***coeficiente de seguridad de vida útil***, para el que la EHE-08 adopta el valor 1,1
- $t_g$ es el período de vida útil de proyecto, definida por la Propiedad al inicio del proyecto; no podrán fijarse valores de vida útil inferiores a los de la Tabla 5 de la Instrucción
- $t_L$ es el valor estimado de vida útil
- $t_i$ es el ***tiempo de iniciación*** para el proceso corrosión de armaduras correspondiente; se estima como el tiempo que tarda la carbonatación o la difusión de iones cloruro, según corresponda, en penetrar hasta la profundidad a la que se sitúa la armadura
- $t_p$ es el ***período de propagación de la corrosión*** en la armadura hasta que se alcance una pérdida inadmisible de sección resistente o bien hasta que produzca una fisuración del recubrimiento

El recubrimiento de la armadura influye directamente en el tiempo de iniciación, el cual será tanto mayor cuanto más profunda esté la barra de acero corrugado. Hasta el momento la Instrucción EHE-08 ha incluido en su Anejo 9 dos modelos que permiten estimar este tiempo para las situaciones en las que la clase de exposición general de los elementos sea II ó III. Para el resto de clases generales y específicas sería preciso acudir a modelos recogidos en bibliografía especializada.

Para el proceso de degradación relacionado con la penetración de la carbonatación hasta el nivel de la armadura, el período de iniciación es:

$$t_i = \left(\frac{d}{K_C}\right)^2 \qquad [2.2.3]$$

donde:

- *d* es la profundidad de penetración respecto de la superficie del hormigón, en mm
- $K_C$ es el coeficiente de carbonatación, cuya expresión es la siguiente:

$$K_C = c_{env} \cdot c_{air} \cdot a \cdot (f_{cm})^b \qquad [2.2.4]$$

- $c_{env}$ es un coeficiente de ambiente, de valor 1 si el elemento está protegido de la lluvia, o bien 0,5 en caso contrario
- $c_{air}$ es un coeficiente de aireantes, de valor 1 si el contenido de aire ocluido es inferior al 4,5%, o bien 0,7 en caso contrario
- $f_{cm}$ es la resistencia a compresión media del hormigón, que puede obtenerse a partir de la característica $f_{ck}$ añadiéndole 8 N/mm$^2$
- y, finalmente, $a$ y $b$ son parámetros que dependen del tipo de conglomerante y pueden obtenerse de la Tabla A.9.3 del Anejo 9 de la Instrucción

Tabla A.9.3 de la EHE-08. Coeficientes *a* y *b*

| Conglomerante | Cementos de la Instrucción RC 03 | *a* | *b* |
|---|---|---|---|
| Cemento Portland | CEM I CEM II/A CEM II/B-S CEM II/B-L CEM II/B-LL CEM II/B-M CEM/V | 1800 | -1,7 |
| Cemento Portland + 28% cenizas volantes | CEM II/B-P CEM II/B-V CEM IV/A CEM IV/B | 360 | -1,2 |
| Cemento Portland + 9% humo de sílice | CEM II/A-D | 400 | -1,2 |
| Cemento Portland + 65 % escorias | CEM III/A CEM III/B | 360 | -1,2 |

Si, por el contario, el proceso de degradación está relacionado con la penetración de cloruros de origen marino, entonces el período de iniciación se calcula como:

$$t_i = \left( \frac{d}{\alpha \cdot \sqrt{12 \cdot D(t_0) \cdot (t_0)^n} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{C_{th} - C_b}{C_s - C_b}}\right)} \right)^{\frac{2}{1-n}} \qquad [2.2.5]$$

donde:

- $\alpha$ es un factor de conversión de unidades, de valor 56157
- $D(t)$ es el coeficiente de difusión efectivo de cloruros, para la edad $t$, expresado en cm$^2$/s, y de expresión:

$$D(t) = D(t_0) \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^n \qquad [2.2.6]$$

- $D(t_0)$ es el coeficiente de difusión efectivo de cloruros a la edad $t_0$ y $n$ es el factor de edad que, a falta de datos específicos, puede tomarse igual a 0,5; en ausencia de ensayos, puede tomarse el valor de $D(t_0)$ a la edad de 28 días ($t_0 = 0{,}0767$ años) de la Tabla A.9.4 del Anejo 9 de la Instrucción
- $C_{th}$ es la concentración crítica de cloruros, expresada en % del peso de cemento; aunque ésta debe ser establecida por el autor del Proyecto, en condiciones normales puede tomarse 0,6% (o bien 0,3% para armaduras activas pretesas)

Tabla A.9.4 de la EHE-08. Coeficientes $D(t_0)$ ($\times 10^{-12}$ m$^2$/s)

| Tipo de cemento | $a/c$ = 0,40 | $a/c$ = 0,45 | $a/c$ = 0,50 | $a/c$ = 0,55 | $a/c$ = 0,60 |
|---|---|---|---|---|---|
| CEM I | 8,9 | 10,0 | 15,8 | 19,7 | 25,0 |
| CEM II/A-V | 5,6 | 6,9 | 9,0 | 10,9 | 14,9 |
| CEM III | 1,4 | 1,9 | 2,8 | 3,0 | 3,4 |

- $C_s$ es la concentración de cloruros en la superficie de hormigón, expresada en % del peso de cemento; a falta de valores obtenidos a partir de ensayos en estructuras en las proximidades de la costa, podrán tomarse en Proyecto los valores recogidos en la Tabla A.9.4 del Anejo 9 de la Instrucción

Tabla A.9.4 de la EHE-08. Concentración de cloruros en la superficie de hormigón

| Clase general de exposición | IIIa | | IIIb | IIIc | IV |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia respecto a la costa | Hasta 500 m | 500m – 5000m | Cualquiera | | – |
| $C_s$ (% peso de hormigón) | 0,14 | 0,07 | 0,72 | 0,50 | 0,50 |

Como la tabla anterior expresa $C_s$ respecto del peso del hormigón, para expresarlo en % del peso de cemento se debe multiplicar por 2300 y dividir por el contenido de cemento en kg/m$^3$

- $C_b$ es el contenido de cloruros aportado por las materias primas (áridos, cemento, agua, etc.) en el momento de la fabricación del hormigón

Por último, una vez que el proceso de degradación ha penetrado hasta la armadura, el período de propagación de la corrosión $t_p$ se calcula como:

$$t_p = \frac{80 \cdot d}{\emptyset \cdot v_{corr}} \qquad [2.2.7]$$

donde $\emptyset$ es el diámetro de la armadura situada a la profundidad $d$ y $v_{corr}$ es la velocidad de corrosión. A falta de datos específicos, su valor puede tomarse de la Tabla A.9.5 de la Instrucción:

Tabla A.9.5 de la EHE-08. Velocidad de corrosión $v_{corr}$ según clase general de exposición

| Clase general de exposición | | | $v_{corr}$ (µm/año) |
|---|---|---|---|
| Normal | Humedad alta | IIa | 3 |
| | Humedad media | IIb | 2 |
| Marina | Aérea | IIIa | 20 |
| | Sumergida | IIIb | 4 |
| | En zona de mareas | IIIc | 50 |
| Con cloruros de origen diferente del medio marino | | IV | 20 |

# CAPÍTULO 3
# PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

## 1. PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HORMIGÓN

Las propiedades mecánicas del hormigón presentan grado de dispersión superior al de otros materiales, como el acero para las armaduras activas o pasivas o el acero estructural laminado. La resistencia a compresión del hormigón es el parámetro mecánico más importante, y se determina mediante el ensayo de rotura de probetas fabricadas y curadas según el ensayo UNE-EN 12350-2. Las probetas podrán ser:

- cilíndricas de 15 cm de diámetro y 30 cm de alto
- cúbicas de 15 cm de arista
- cúbicas de 10 cm de arista, en el caso de hormigones de resistencia igual o superior a 50 MPa y fabricados con árido de tamaño *D* sea inferior a 12 mm

Como todos los métodos de cálculo y las especificaciones de la Instrucción EHE-08 se refieren a características del hormigón endurecido obtenidas mediante ensayos sobre probetas cilíndricas, la resistencia resultante de los ensayos de probetas cúbicas ($f_{c\ cubica}$) deberá multiplicarse por un factor reductor de valor 0,9 en el caso si su valor es inferior a 60 MPa, o bien por 0,95 si está entre 60 y 80 MPa. Si es superior a 80 MPa, el factor será igual a 1.

La determinación de la resistencia a compresión se realizará mediante el ***ensayo de rotura de probetas a compresión***, según UNE-EN 12390-3. El hormigonado de las probetas cilíndricas en los moldes no puede asegurar la *planitud* ni el *paralelismo* de una de las caras circulares, más concretamente, la que no se encofra. Estos defectos se compensan mediante un pequeño recrecido con mortero de azufre. Por contra, las probetas cúbicas no presentan este problema, ya que el ensayo siempre puede hacerse por compresión según la dirección de dos caras opuestas y encofradas, por lo que no es necesario emplear mortero de azufre. Según datos del *Instituto Español del Cemento y sus Aplicaciones* (*IECA*), en España el volumen de la industria de la construcción en hormigón armado genera al año más de 80.000 t de residuos por rotura de probetas cilíndricas de hormigón, lo que lleva aparejado el correspondiente consumo de recursos (cemento, agua, áridos y aditivos) y más de 900 t de mortero de azufre, que es un residuo contaminante. Por ello, la Instrucción EHE-08 admite la sustitución de las probetas cilíndricas por las cúbicas, lo que permitiría reducir la cantidad de residuos de 80.000 a poco más de 50.000 t consiguiéndose, además, eliminar el residuo de azufre.

Por otro lado, las novedades en el control de calidad de la ejecución de las obras de hormigón, concretadas en la filosofía de la certificación de los suministradores, pretende llegar a reducir la cantidad de ensayos de rotura de probetas, de 15 a 20 veces menos. Por cierto, que ello no implica una disminución de la fiabilidad de las estructuras construidas en hormigón, cuyas patologías se deben a errores de proyecto y de ejecución en un 75% de los casos, mientras que las deficiencias relacionadas con la calidad de materiales supondrían alrededor de un 15% de las incidencias.

El alto grado de dispersión de las propiedades de los hormigones, hacen que a la hora de medir la resistencia mecánica, se definan los siguientes valores:

- ***resistencia característica de proyecto*** o ***resistencia característica especificada*** ($f_{ck}$), usualmente expresada en N/mm² (MPa), es el valor de resistencia que se adopta en el proyecto para la resistencia a compresión del hormigón a 28 días; se toma como base de los cálculos y corresponde con el *cuantil* correspondiente a una probabilidad de 0,05 (5%) (ver Figura 19)

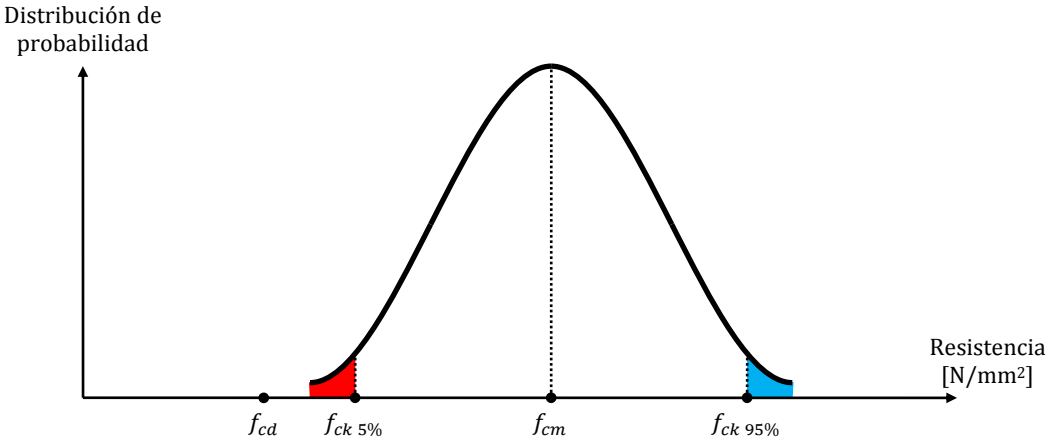



Figura 19. Distribución estadística de la resistencia a compresión del hormigón

La resistencia característica $f_{ck}$ es la que se usa para tipificar la clase resistente de los hormigones en la Instrucción EHE-08. Se recomienda usar la siguiente serie:

20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90 y 100 N/mm²

- ***resistencia característica real de obra*** ($f_{c\,real}$), es el valor que corresponde al percentil de 0,05 en la distribución de la resistencia a compresión del hormigón suministrado a la obra, supuesta una variable estadística.
- ***resistencia característica estimada*** ($f_{c\,est}$), es el valor que estima o cuantifica la resistencia característica real de obra a partir de un número finito de resultados de ensayos normalizados de resistencia a compresión, sobre probetas tomadas en obra.
- ***resistencia media a compresión*** ($f_{cm,j}$), es la resistencia media a compresión a *j* días de edad; en el caso de que no se conozca el valor real correspondiente al hormigón suministrado a la obra y si las condiciones de fabricación son buenas, se podrá estimar a partir de la *resistencia característica de proyecto* a *j* días de edad:

$$f_{cm,j} = f_{ck,j} + 8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \qquad [3.1.1]$$

- ***resistencia de cálculo del hormigón en compresión*** ($f_{cd}$), es la resistencia que se empleará en las comprobaciones de ELU de Agotamiento frente a solicitaciones normales, calculada a partir de la resistencia característica $f_{ck}$ mediante la siguiente expresión:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \qquad [3.1.2]$$

donde $\alpha_{cc}$ es el factor que tiene en cuenta el *cansancio* del hormigón cuando está sometido a *altos niveles de tensión* de compresión debido a *cargas de larga duración* y $\gamma_c$ es el coeficiente parcial de seguridad del hormigón.

El fenómeno de cansancio del hormigón se presenta cuando las tensiones debidas a cargas duraderas son próximas a su resistencia, por lo que raras veces se manifiesta en la práctica. Por ello, la Instrucción EHE-08, siguiendo la indicación del Eurocódigo 2 establece que el

parámetro $\alpha_{cc}$ podrá tomar valores entre 0,85 y 1 a decisión del autor del proyecto. No obstante, se recomienda $\alpha_{cc} = 1$.

Por otro lado, cuando se comprueben combinaciones persistentes o transitorias de ELU, el coeficiente de seguridad del hormigón será:

- $\gamma_c = 1{,}5$ con carácter general
- $\gamma_c = 1{,}4$ en el caso de estructuras construidas in situ con hormigón que disponga de un ***distintivo de calidad oficialmente reconocido*** (DCOR), con el nivel de garantía establecido en el Anejo 19 de la Instrucción, y que se ejecuten con un nivel de control intenso; para que el control de la ejecución pueda ser a nivel intenso, es necesario que el constructor esté en posesión de un sistema de gestión de calidad certificado conforme a la norma UNE-EN ISO 9001
- $\gamma_c = 1{,}35$ en el caso de elementos prefabricados que dispongan de un DCOR

En el caso de comprobaciones de ELU con combinaciones accidentales o con acción sísmica, el valor del coeficiente parcial de seguridad del hormigón será $\gamma_c = 1{,}3$.

- ***resistencia media a tración*** ($f_{ct,m}$), es el valor medio de la resistencia tracción a 28 días de edad y que, a falta de ensayos, podrá estimarse en la fase de Proyecto a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f_{ct,m} &= 0{,}30 \cdot {f_{ck}}^{2/3} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ct,m} &= 0{,}58 \cdot {f_{ck}}^{1/2} \quad \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \qquad [3.1.3]$$

Si no se dispone de ensayos, la resistencia característica inferior a tracción $f_{ct,k}$ (asociada al cuantil del 5%) podrá calcularse como:

$$f_{ct,k} = 0{,}70 \cdot f_{ct,m} \qquad [3.1.4]$$

- ***resistencia media a flexotracción*** ($f_{ct,m,fl}$) que es función del canto total $h$ del elemento y se determina mediante:

$$f_{ct,m,fl} = max\left\{\left(1{,}6 - \frac{h}{1000}\right) \cdot f_{ct,m} \;;\; f_{ct,m}\right\} \qquad [3.1.5]$$

con $h$ expresado en mm.

En lo que respecta al módulo de deformación longitudinal del hormigón es preciso tener en cuenta que es un material que no se comporta linealmente, es decir, que no hay una relación lineal entre tensiones ($\sigma$) y deformaciones ($\varepsilon$), tal y como muestra la Figura 20.

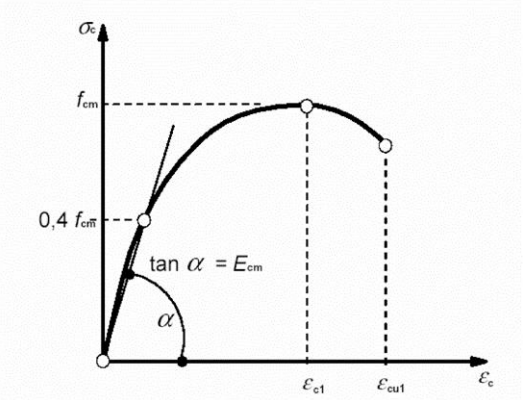



Figura 20. Diagrama tensión-deformación real de un hormigón

Para cargas duraderas, siempre que en el hormigón las tensiones no sobrepasen en servicio el 40% de la resistencia $f_{cm}$, se podrá emplear el ***módulo de deformación longitudinal secante***, calculable a partir de la siguiente expresión:

$$E_{cm} = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{cm}} \qquad [3.1.6]$$

Para cargas instantáneas o rápidamente variables, se empleará el ***módulo de deformación longitudinal inicial***, que correspondería a la pendiente de la tangente en el origen para un hormigón de 28 días de edad y calculable mediante:

$$E_c = \beta_E \cdot E_{cm} \qquad [3.1.7.\text{a}]$$

donde:

$$\beta_E = 1{,}3 - \frac{f_{ck}}{400} \leq 1{,}175 \qquad [3.1.7.\text{b}]$$

Además de la resistencia a compresión, otras características de un hormigón cuya conformidad debe verificarse durante su recepción en obra son:

- la ***docilidad***, medida a través de la consistencia, según el ensayo del ***cono de Abrams***, UNE-EN 12350-2, con la excepción de los hormigones autocompactantes, en cuyo caso se seguirá lo especificado en el Anejo 17 de la Instrucción
- la ***impermeabilidad***, medida a través del ensayo de ***penetración de agua bajo presión***, UNE-EN 12390-8; esta comprobación deberá realizarse cuando las clases generales de exposición sean III ó IV o si el ambiente presenta cualquier clase específica

# 2. ARMADURAS PASIVAS EN EL HORMIGÓN ARMADO

## 2.1 ACEROS PARA ARMADURAS PASIVAS

Las armaduras empleadas en hormigón armado, denominadas ***armaduras pasivas***, pueden ser:

- barras rectas o rollos de acero corrugado soldable, según UNE-EN 10080
- alambres de acero corrugado o grafilado soldable, según UNE-EN 10080
- alambres lisos de acero soldable, según UNE-EN 10080

Por efecto de la presencia de las corrugas, las secciones transversales no son estrictamente circulares ni tampoco son completamente constantes a lo largo de toda la barra. Así pues, se define el diámetro nominal de una barra o redondo corrugado como el de la sección transversal equivalente que corresponde al peso real de dicho redondo. Los diámetros nominales son los que se emplean para el cálculo durante el Proyecto. La serie de diámetros nominales de las ***barras rectas o rollos de acero corrugado soldable*** es la siguiente:

6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 20 - 25 - 32 - 40 mm

Salvo en el caso de *mallas electrosoldadas* o de *armaduras básicas electrosoldadas en celosía*, no se podrá emplear el diámetro 6 mm cuando se aplique cualquier proceso de soldadura, resistente o no resistente, en la elaboración o montaje de la armadura pasiva. La serie está construida de manera que cada sección equivale aproximadamente a la suma de las secciones de los diámetros anteriores (si se exceptúa el Ø14). La merma de sección no será superior al 4,5% del diámetro nominal. Se fabrican generalmente por uno de los tres procedimientos siguientes:

- laminación en caliente, sin tratamiento posterior
- laminación en caliente y tratamiento térmico mediante calor de laminación

- laminación en caliente y deformación posterior en frío

La Tabla 3.1 facilita las tareas de dimensionamiento al recoger la sección de cálculo de distintas combinaciones de barras de acero corrugado soldable. En el ámbito de la Instrucción EHE-08, se emplean los tipos de acero siguientes: B400S, B500S, B400SD y B500SD. Sus propiedades se dan en la Tabla 32.2.a de la Instrucción.

Tabla 3.1 Superficies nominales de redondos corrugados de acero soldable, en mm²

| | Número de redondos | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Ø6 | 28,3 | 56,5 | 84,8 | 113,1 | 141,4 | 169,6 | 197,9 | 226,2 | 254,5 | 282,7 |
| Ø8 | 50,3 | 100,5 | 150,8 | 201,1 | 251,3 | 301,6 | 351,9 | 402,1 | 452,4 | 502,7 |
| Ø10 | 78,5 | 157,1 | 235,6 | 314,2 | 392,7 | 471,2 | 549,8 | 628,3 | 706,9 | 785,4 |
| Ø12 | 113,1 | 226,2 | 339,3 | 452,4 | 565,5 | 678,6 | 791,7 | 904,8 | 1017,9 | 1131,0 |
| Ø14 | 153,9 | 307,9 | 461,8 | 615,8 | 769,7 | 923,6 | 1077,6 | 1231,5 | 1385,4 | 1539,4 |
| Ø16 | 201,1 | 402,1 | 603,2 | 804,2 | 1005,3 | 1206,4 | 1407,4 | 1608,5 | 1809,6 | 2010,6 |
| Ø20 | 314,2 | 628,3 | 942,5 | 1256,6 | 1570,8 | 1885,0 | 2199,1 | 2513,3 | 2827,4 | 3141,6 |
| Ø25 | 490,9 | 981,7 | 1472,6 | 1963,5 | 2454,4 | 2945,2 | 3436,1 | 3927,0 | 4417,9 | 4908,7 |
| Ø32 | 804,2 | 1608,5 | 2412,7 | 3217,0 | 4021,2 | 4825,5 | 5629,7 | 6434,0 | 7238,2 | 8042,5 |
| Ø40 | 1256,6 | 2513,3 | 3769,9 | 5026,5 | 6283,2 | 7539,8 | 8796,5 | 10053,1 | 11309,7 | 12566,4 |

Tabla 32.2.a de la EHE-08. Tipos de acero corrugado

| Tipo de acero | | Acero soldable | | Acero soldable con características especiales de ductilidad | |
|---|---|---|---|---|---|
| Designación | | B 400 S | B 500 S | B 400 SD | B 500 SD |
| Límite elástico, $f_y$ (N/mm²) (1) | | ≥ 400 | ≥ 500 | ≥ 400 | ≥ 500 |
| Carga unitaria de rotura, $f_s$ (N/mm²) (1) | | ≥ 440 | ≥ 550 | ≥ 480 | ≥ 575 |
| Alargamiento de rotura, $\varepsilon_{u,5}$ (%) | | ≥ 14 | ≥ 12 | ≥ 20 | ≥ 16 |
| Alargamiento total bajo carga máxima, $\varepsilon_{máx}$ (%) | acero suministrado en barra | ≥ 5,0 | ≥ 5,0 | ≥ 7,5 | ≥ 7,5 |
| | acero suministrado en rollo (3) | ≥ 7,5 | ≥ 7,5 | ≥ 10,0 | ≥ 10,0 |
| Relación $f_s/f_y$ (2) | | ≥ 1,05 | ≥ 1,05 | $1,20 \le f_s/f_y \le 1,35$ | $1,15 \le f_s/f_y \le 1,35$ |
| Relación $f_{y\,real}/f_{y\,nominal}$ | | -- | -- | ≤ 1,20 | ≤ 1,25 |

(1) Para el cálculo de los valores unitarios se utilizará la sección nominal

(2) Relación admisible entre la carga unitaria de rotura y el límite elástico obtenidos en cada ensayo

(3) En el caso de aceros corrugados procedentes de suministros en rollo, los resultados pueden verse afectados por el método de preparación de la muestra para su ensayo, que deberá hacerse conforme a lo indicado en el Anejo 23. Considerando la incertidumbre que puede conllevar dicho procedimiento, pueden

Se denominan ***armaduras normalizadas*** a las *mallas electrosoldadas* y a las *armaduras básicas electrosoldadas en celosía*, conformes con la UNE-EN 10080. Los ***alambres corrugados o grafilados*** y

los ***alambres lisos*** se emplean para la fabricación de estas armaduras normalizadas y sus diámetros se ajustan a la serie siguiente:

4 - 4,5 - 5 - 5,5 - 6 - 6,5 - 7 - 7,5 - 8 - 8,5 - 9 - 9,5 - 10 - 11 - 12 - 14 - 16 mm

Los alambres lisos sólo podrán emplearse como elementos de conexión de *armaduras básicas en celosía* (ver Figura 21). Los diámetros 4 y 4,5 mm sólo podrán aplicarse en las mallas de reparto de forjados unidireccionales o bien como elementos de conexión en las *armaduras básicas en celosía*. Las *mallas electrosoldadas* no se tendrán en cuenta en la comprobación de ELU y su función es únicamente la de reparto de cargas y control de la fisuración. Las mallas estándar suelen ser:

- 15×15 y 20×20 para las de retícula cuadrada (diámetros 5/5, 6/6, 8/8, 10/10 y 12/12)
- 15×30 para las de retícula rectangular (diámetros 5/5, 6/6, 8/8, 10/10 y 12/12)
- 20×30 para las de retícula rectangular (diámetros 5/5)

Además de la resistencia a tracción de los alambres, se debe comprobar que la resistencia al arrancamiento en los nudos sea igual o superior al 30% del límite elástico del alambre más grueso que confluye en el nudo. Los alambres, corrugados o lisos, se fabrican con acero B500T, cuyas características se recogen en la Tabla 32.3 de la EHE-08.

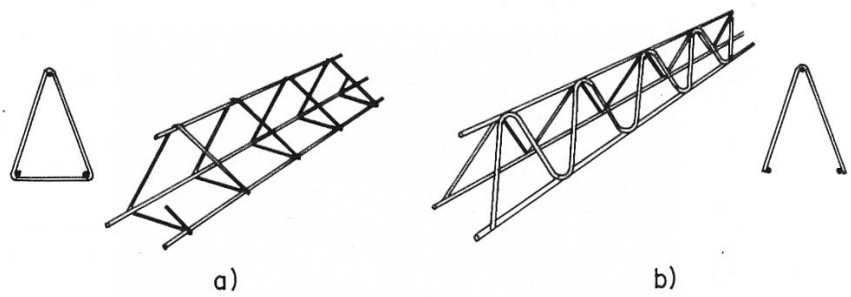



**Figura 8.12** Dos tipos de celosía: (*a*) rodeando a las armaduras; (*b*) soldada a las armaduras
*Fuente: Calavera et al., 1997*

Figura 21. Extraída de *"Hormigón armado"*, de Jiménez Montoya et al.

La utilización de la *armadura básica en celosía* está limitada casi exclusivamente a la prefabricación de viguetas o losas semirresistentes para la construcción de forjados, aunque también se emplean como "separadores" para la armadura superior de losas macizas de hormigón. Las barras longitudinales serán corrugadas y las armaduras de conexión pueden ser de acero liso.

Las propiedades mecánicas de los aceros corrugados soldables se determinan en el ***ensayo de tracción***, según UNE-EN ISO 15630-1, que permite obtener el ***diagrama tensión-deformación*** (ver Figura 22). La ***ductilidad del acero*** cobra una especial importancia en el hormigón armado puesto que el hormigón es un material de carácter más frágil, lo que convierte a las armaduras traccionadas en las principales responsables de que se "avise" de un colapso inminente. La ductilidad de un acero es proporcional al cociente $f_s/f_y$ y al alargamiento último de rotura. En zonas sísmicas deben usarse los aceros corrugados soldables con características especiales de ductilidad, B400SD y B500SD, que deberán cumplir los siguientes requisitos relativos al ***ensayo de fatiga*** según UNE-EN ISO 15630-1:

- 2 millones de ciclos sin romperse,
- con tensión máxima igual al 60% de la $f_{y\,nominal}$,
- amplitud de 150 N/mm$^2$
- y frecuencia comprendida entre 1 y 200 Hz

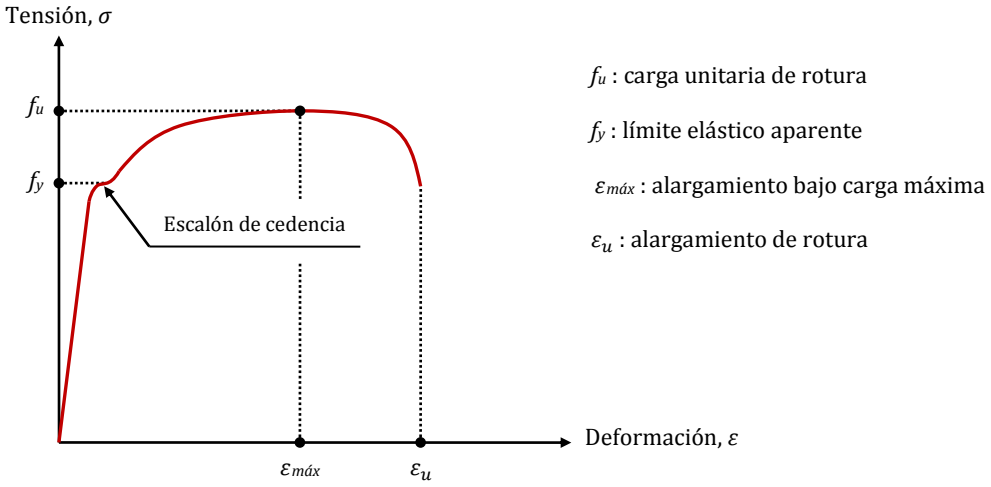



Figura 22. Diagrama tensión-deformación del acero obtenido en el ensayo de tracción

Asimismo, los aceros con característica adicional de ductilidad deberán cumplir lo recogido en la Tabla 32.2.e de la Instrucción, en relación al ***ensayo de deformación alternativa***, según UNE 36065 EX. En el ámbito del Eurocódigo 2, los requisitos que distinguen entre ductilidad normal y alta ductilidad son los siguientes:

- acero corrugado de ductilidad normal, si $f_{s,k}/f_{y,k} \geq 1{,}05$ y $\varepsilon_u \geq 2{,}5\%$
- acero de alta ductilidad, si $f_{s,k}/f_{y,k} \geq 1{,}08$ y $\varepsilon_u \geq 5\%$

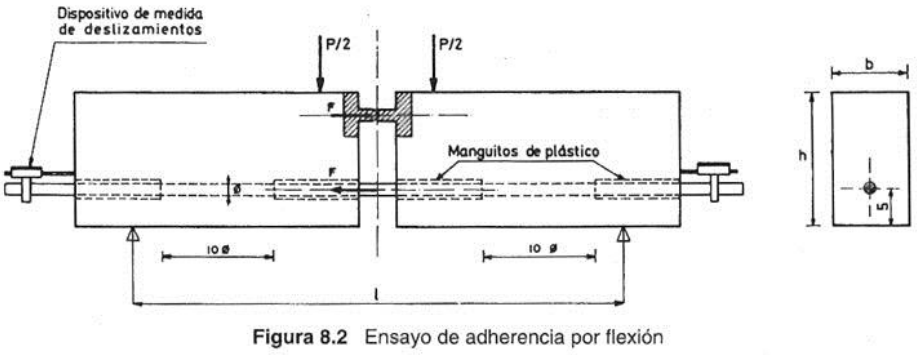



**Figura 8.2** Ensayo de adherencia por flexión

Figura 23. Extraída de *"Hormigón armado"*, de Jiménez Montoya et al.

Una de las características fundamentales de que depende el buen comportamiento del hormigón armado es la de la ***adherencia entre el acero y el hormigón***. Este problema ha sido y sigue siendo objeto de numerosos trabajos de investigación, lo que prueba en cierto modo que no se ha resuelto de manera completamente satisfactoria. Entre otras razones está el hecho de que en el fenómeno de la adherencia se moviliza la resistencia del hormigón a la tracción y al cizallamiento, por lo que es complicado encontrar expresiones compactas y simples. La EHE-08 permite comprobar la adherencia

mediante el ***ensayo beam-test*** (Figura 23), basado en el modelo de Baus et al. (Universidad de Lieja) y normalizado por el *CEB*. El ensayo está incorporado en el Anejo C de la UNE-EN 10080 y presenta las siguientes ventajas sobre otros procedimientos de ensayo de la adherencia:

- anula el efecto local de proximidades de apoyos
- el brazo mecánico es perfectamente conocido, por lo que también lo es la tensión absorbida por la armadura

Con este ensayo se obtienen los valores $\tau_{0,01} - \tau_{0,1} - \tau_1$ que corresponden a las tensiones de la armadura cuando los deslizamientos detectados sean 0,01 mm - 0,1 mm - 1 mm, respectivamente. Asimismo, también se determina la tensión de rotura de adherencia $\tau_{bu}$, correspondiente a la rotura o a un deslizamiento de 3 mm, lo que antes se produzca. La tensión media de adherencia $\tau_{bm}$ es la media de los tres primeros. La EHE-08 en su apartado 32.2 establece los límites inferiores siguientes:

- para barras de diámetros inferiores a 8 mm:

$$\tau_{bm} \geq 6{,}88 \text{ MPa} \qquad \tau_{bu} \geq 11{,}22 \text{ MPa}$$

- para diámetros entre 8 y 32 mm:

$$\tau_{bm} \geq 7{,}84 - 0{,}12\emptyset \ \ (\text{MPa}) \qquad \tau_{bu} \geq 12{,}74 - 0{,}19\emptyset \ \ (\text{MPa})$$

- para diámetros superiores a 32 mm:

$$\tau_{bm} \geq 4{,}00 \text{ MPa} \qquad \tau_{bu} \geq 6{,}66 \text{ MPa}$$

Alternativamente, las características de adherencia pueden medirse mediante la geometría de corrugas (apartado 7.4 de la UNE-EN 10080). En la Figura 24 se indican las características de las corrugas de las barras de acero corrugado soldable, las cuales no sólo codifican el tipo de acero, sino también el país y el fabricante. Los códigos son asignados en España por AENOR.

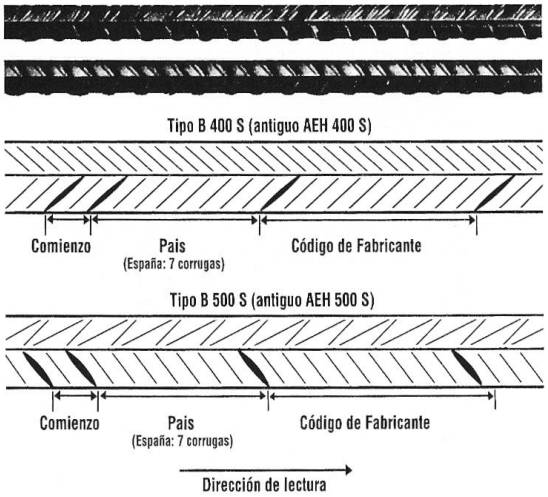



**Figura 8.3** Forma de corrugas y código de identificación de barras. *Fuente: Calidad Siderúrgica, 1998*

Figura 24. Extraída de *"Hormigón armado"*, de Jiménez Montoya

El ***ensayo de doblado-desdoblado*** tiene por objeto asegurar que la barra corrugada posee una plasticidad adecuada para prevenir roturas frágiles: por ejemplo, las que podrían presentarse con

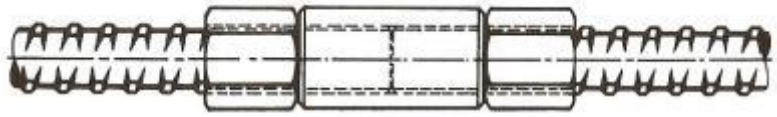
piezas con gancho o patilla que reciben impactos por una manipulación imprudente en condiciones meteorológicas de baja temperatura. El ensayo se efectúa a temperatura ambiente sobre un mandril cuyo diámetro depende del tipo de acero y del diámetro de la barra. Se dobla la barra bajo la acción de una fuerza constante y uniforme hasta un ángulo de 90°. A continuación se somete a un calentamiento a 100°C durante 30 minutos y se enfría al aire, desdoblándola 20°. El ensayo es satisfactorio si no se producen agrietamientos o pelos en la zona curva de la probeta, apreciables a simple vista.

Cada fabricante suministrará el diagrama tensión-deformación de su producto, el cual depende del proceso de fabricación; los parámetros, incluso para el mismo fabricante, pueden variar de unas coladas a otras. A partir de este diagrama se obtiene el característico, que tiene un nivel de confianza del 95% con respecto del los ensayos.

Finalmente, la ***aptitud al soldeo*** depende principalmente de la composición química del acero y es una característica a tener en cuenta en los empalmes de barras por soldadura, debiendo indicar el propio fabricante el método adecuado a su producto:

- a tope por resistencia eléctrica (con preparación de bordes y sin aportación)
- a tope por arco eléctrico (con preparación, material de aportación y necesidad de volteo)
- por solapo (con aportación y sin necesidad de volteo)
- en cruz (adecuado para anclar barras sin espacio para movilizar la adherencia)

Como recomendaciones generales, las uniones soldadas deben ir siempre indicadas en los planos, deben estar convenientemente alejadas de zonas de grandes tensiones, no deben ejecutarse en codos, ángulos o zonas de trazado curvo y deben ir acompañadas de estribos que absorban tensiones tangenciales. Quizá la recomendación más importante pueda ser la de evitarlas en lo posible y emplear en su lugar manguitos de empalme roscados (ver Figura 25).



Empalme mediante manguito roscado
de las barras de acero Gewi
**Figura 9.17** Empalme mediante manguito roscado

Figura 25. Extraída de *"Hormigón armado"*, de Jiménez Montoya et al.

## 2.2 LÍMITE ELÁSTICO CARACTERÍSTICO Y DE CÁLCULO DE UN ACERO

Análogamente al caso del hormigón, se define como ***límite elástico característico*** $f_{yk}$ de un acero al valor correspondiente al cuantil del 5%. En el contexto de la Instrucción, este parámetro tomará los siguientes valores:

- $f_{yk} = 400$ MPa, en el caso de los aceros B400S y B400SD
- $f_{yk} = 500$ MPa, en el caso de los aceros B500S, B500SD y B500T

El valor a emplear en las comprobaciones de ELU será el ***límite elástico de cálculo*** $f_{yd}$, obtenido a través de la siguiente expresión:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \qquad [3.2.1]$$

donde $\gamma_s$ es el coeficiente parcial de seguridad para el acero que, en el caso de comprobaciones de ELU con combinaciones persistentes o transitorias, puede tomar los valores siguientes:

- $\gamma_s = 1{,}15$ con carácter general
- $\gamma_s = 1{,}1$ si se cumplen, al menos, dos de las condiciones siguientes:
  - que el nivel de control de la ejecución de la estructura sea intenso
  - que las armaduras dispongan de un DCOR o bien formen parte de un elemento prefabricado de hormigón armado que ostente un DCOR
  - que el acero para las armaduras pasivas esté en posesión de un DCOR

En el caso de comprobaciones de ELU con combinaciones accidentales o que incluyan la acción sísmica, el valor del coeficiente de seguridad del acero será $\gamma_s = 1$.

Con carácter general, se adoptará como ***módulo de deformación del acero*** para armaduras pasivas el valor $E_s = 200000\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} = 200$ GPa.

## 2.3 PROCESOS DE ELABORACIÓN, ARMADO Y MONTAJE DE LAS ARMADURAS PASIVAS

Se define como ***ferralla*** al conjunto de los procesos de transformación del acero corrugado, suministrado en barras o rollos, según el caso, que tienen por finalidad la elaboración de armaduras pasivas y que, por lo tanto, incluyen las operaciones de corte, doblado, soldadura, enderezado, etc.

Se define como ***armado*** al proceso por el que se proporciona la disposición geométrica definitiva a la ferralla, a partir de armaduras elaboradas o de mallas electrosoldadas. El producto resultante se denomina ***ferralla armada***.

Y se define como ***montaje*** al proceso de colocación de la ferralla armada en el encofrado, conformando la ***armadura pasiva***, para lo que deberá prestarse especial atención a la disposición de separadores y cumplimiento de las exigencias de recubrimientos del proyecto, así como lo establecido al efecto en esta instrucción.

Durante la ejecución de las estructuras de hormigón armado, la conformidad en la recepción de los productos de acero que dispongan de ***marcado CE*** se realizará por ***control documental***. Alternativamente, podría demostrarse la conformidad mediante el control de que posean un DCOR. En caso contrario, deberán realizarse ensayos de comprobación de conformidad en la recepción. Cuando entre en vigor el marcado CE, la conformidad de cada partida se comprobará documentalmente, de acuerdo con lo contemplado para la misma en la correspondiente versión de la norma UNE-EN 10080.

La elaboración de armaduras mediante procesos de ferralla requiere disponer de unas instalaciones que permitan desarrollar, al menos, las siguientes actividades:

- almacenamiento de los productos de acero empleados,
- proceso de enderezado, en el caso de emplearse acero corrugado suministrado en rollo
- y procesos de corte, doblado, soldadura y armado, según el caso

Al objeto de garantizar la ***trazabilidad*** de los productos de acero empleados en las instalaciones industriales de ferralla ajenas a la obra, la Dirección Facultativa podrá recabar evidencias sobre la misma. Además, la instalación de ferralla deberá tener implantado un sistema de control de la producción que incluya ensayos e inspecciones sobre las armaduras elaboradas y ferralla armada, de acuerdo con el apartado 69.2.4 de la Instrucción, para lo que deberá disponer de un laboratorio de autocontrol, propio o contratado. Por lo tanto, la ***gestión de los acopios*** deberá garantizar dicha trazabilidad hasta el fabricante del acero empleado, preferentemente a través de un sistema informatizado.

En el caso de instalaciones de ferralla en obra, la recepción de los productos de acero será responsabilidad de la Dirección Facultativa y los ensayos correspondientes se efectuarán por el laboratorio de control de la obra.

En el caso de acero corrugado suministrado en rollo, el ***enderezado*** se efectuará con máquinas específicamente fabricadas para ello, y que permitan el desarrollo de procedimientos de enderezado que no se alteren las características mecánicas y geométricas del material hasta provocar el incumplimiento de las exigencias establecidas por esta Instrucción. No podrán emplearse máquinas dobladoras para efectuar el enderezado. Con el fin de mantener las características de ***ductilidad*** y ***adherencia*** del producto de acero, la maquinaria empleada en esta operación deberá lograr que la máxima variación de la deformación del acero bajo carga máxima tras el enderezado sea inferior al 2,5% y que la variación de altura de corruga sea inferior a 0,05 mm.

Las ***operaciones de corte*** podrán realizarse mediante cizallas manuales o máquinas automáticas de corte. En este último caso, debe ser posible la programación de la máquina para adaptarse a las dimensiones establecidas en el correspondiente proyecto. No podrán utilizarse otros equipos que puedan provocar alteración relevante de las propiedades físico-metalúrgicas del material como por ejemplo, el corte con sopletes.

El ***doblado*** se efectuará mediante máquinas dobladoras manuales o automatizadas, que tengan la suficiente versatilidad para emplear los mandriles que permitan cumplir los radios de doblado que establece esta Instrucción en función del diámetro de la armadura.

La ***soldadura*** se efectuará con cualquier equipo que permita la realización de la misma por arco manual, por arco con gas de protección o mediante soldadura eléctrica por puntos, de acuerdo con UNE 36832.

También se podrán emplear otras máquinas auxiliares para la elaboración de las armaduras como, por ejemplo, para la disposición automática de estribos.

# CAPÍTULO 4
# AGOTAMIENTO POR SOLICITACIONES NORMALES

## 1. FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A SOLICITACIONES NORMALES

### 1.1 HIPÓTESIS DE CÁLCULO Y DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN

El agotamiento por solicitaciones normales es un Estado Límite Último que debe comprobarse en aquellas secciones de hormigón armado que trabajan en tracción simple o compuesta, compresión simple o compuesta, o los distintos tipos de flexión: pura, simple, compuesta, esviada y flexo-compuesta esviada. El procedimiento clásico de la Resistencia de Materiales, fundamenta el dimensionamiento y las comprobaciones en la ***limitación de las tensiones*** a unos valores admisibles o bien a unos valores minorados de unas tensiones características; esta metodología es la que se sigue en los reglamentos para estructuras metálicas. En el caso de las estructuras de hormigón, la caracterización de las situaciones de agotamiento por solicitaciones normales se basa en el estudio de ***planos de deformación***, puesto que debe tenerse en cuenta que en un elemento estructural de hormigón armado existen, de hecho, dos materiales resistentes:

- el hormigón, que se comporta razonablemente bien cuando absorbe compresiones y cuya resistencia a tracción suele despreciarse
- y el acero, que se supone equirresistente, por lo que colabora tanto para absorber tracciones como compresiones

No es fácil determinar a priori cuál de los dos materiales se agotará antes que el otro y, por tanto, controlará el fallo. En función de cuál sea el "fusible" que desencadena el agotamiento y el mecanismo de equilibrio correspondiente, la metodología propuesta por la Instrucción EHE-08 define hasta cinco ***dominios de deformación***, que van desde la tracción simple (dominio 1) hasta la compresión simple (dominio 5). Las hipótesis de trabajo que van a seguirse en todo momento son las siguientes:

- Rango de validez según ***Bernouilli***, por el cual quedan excluidas de esta metodología las denominadas regiones de discontinuidad o regiones *D*, en las cuales no se verificaría la condición de esbeltez $2 \cdot h < \ell_0$ (Figura 26) y que se estudiarán en temas posteriores
- ***Hipótesis de Navier*** o de las secciones planas; esta hipótesis permite plantear la ecuación de compatibilidad de las deformaciones unitarias de las fibras de la sección (Figura 27):

$$\chi_u = \frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x-d} = \frac{\varepsilon(y)}{x-y} \qquad [4.1.1]$$

  en la que $\chi_u$ designa la ***curvatura*** de agotamiento de la sección y *x* es la ***profundidad de la fibra neutra***, medida desde la fibra más comprimida, a la que corresponde una deformación unitaria $\varepsilon_c$. La deformación de la armadura traccionada será $\varepsilon_{s1}$ y *d* es el ***canto útil*** o profundidad de dicha armadura desde la fibra más comprimida. El criterio de signos asigna valores positivos a las compresiones y negativos a las tracciones.
- ***Equilibrio*** entre las acciones exteriores aplicadas sobre la sección y sus esfuerzos internos

- ***Adherencia perfecta entre el hormigón y las armaduras***, por lo que la deformación de las armaduras de acero será la misma que la del hormigón que las recubre

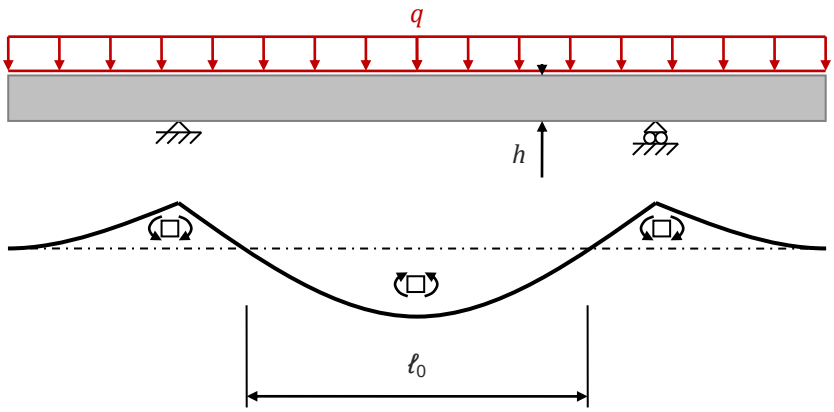



Figura 26. Rango de validez según Bernouilli

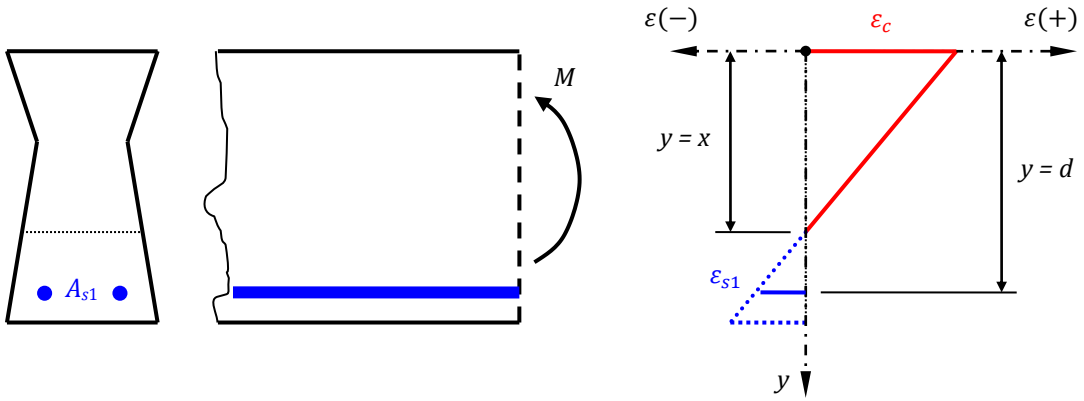



Figura 27. Hipótesis de Navier: deformaciones de la sección

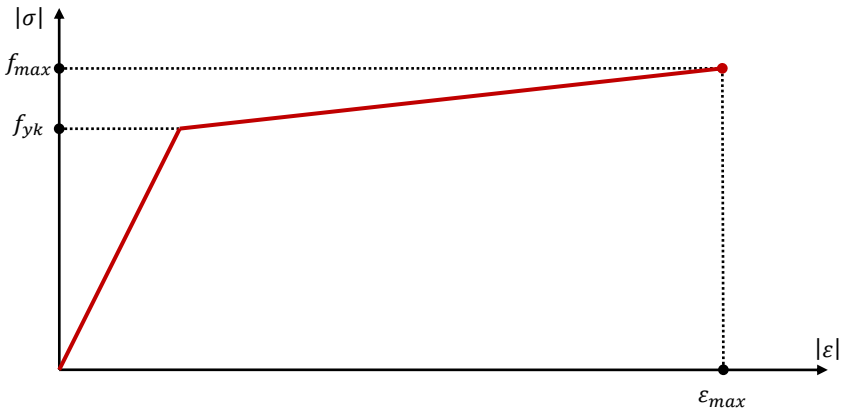



Figura 28. Diagrama tensión-deformación característico de las armaduras pasivas

Para las armaduras pasivas se define el diagrama tensión-deformación característico indicado en la Figura 28, el cual está asociado al cuantil del 5%. El diagrama es el mismo tanto si el acero trabaja en tracción como en compresión.

El diagrama de tensión-deformación de cálculo (Figura 29) para las armaduras pasivas se obtiene mediante una afinidad oblicua de razón $1/\gamma_s$ paralela a la ***recta de Hooke***, de manera que el ***régimen elástico*** alcanza hasta una tensión igual al ***límite elástico de cálculo*** $\boldsymbol{f_{yd}}$, al que corresponde una deformación unitaria igual a $\boldsymbol{\varepsilon_{yd}}$. Alternativamente, se permite que la segunda de las ramas (la correspondiente al ***rango plástico***) se trace horizontal, con lo que la máxima tensión que podrían absorber las armaduras sería, precisamente, el límite elástico de cálculo $f_{yd}$.

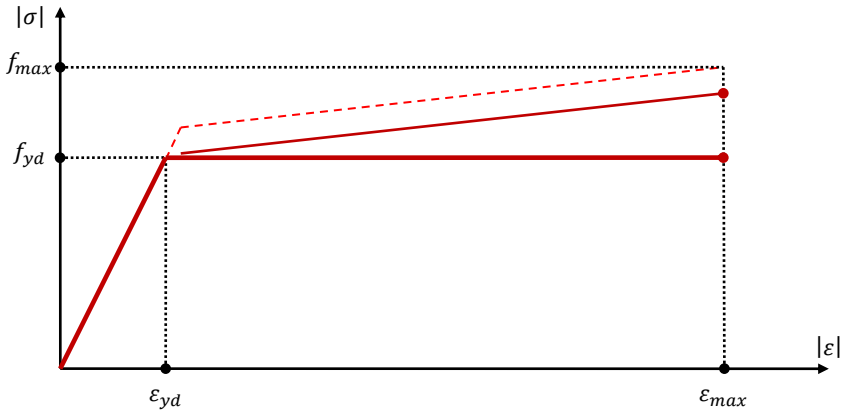



Figura 29. Diagrama tensión-deformación de cálculo de las armaduras pasivas

La sección nominal de la armadura principal más traccionada (o menos comprimida) se designa $A_{s1}$ y la sección nominal de la armadura más comprimida se designa $A_{s2}$. Las fuerzas resultantes de estos sistemas de armaduras se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} N_{s1,d} &= A_{s1} \cdot \sigma_{s1,d} = A_{s1} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s1} \geq -U_{s1} \\ N_{s2,d} &= A_{s2} \cdot \sigma_{s2,d} = A_{s2} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s2} \leq U_{s2} \end{aligned} \qquad [4.1.2]$$

en las que se adopta el trazado horizontal de la rama elástica, siendo $U_{s1}$ y $U_{s2}$ las ***capacidades mecánicas de las armaduras principales*** de la sección, las cuales se calculan como:

$$\begin{aligned} U_{s1} &= A_{s1} \cdot f_{yd} \\ U_{s2} &= A_{s2} \cdot f_{yd} \end{aligned} \qquad [4.1.3]$$

En las ecuaciones [4.1.2] se debe tener en cuenta que los esfuerzos de tracción son negativos y los de compresión son positivos. Los criterios de agotamiento de las armaduras $A_{s1}$ y $A_{s2}$ son los siguientes:

- se admite la plastificación del acero de la armadura principal traccionada $A_{s1}$, pero se establece la condición de su agotamiento por ***exceso de plastificación*** cuando alcance una deformación unitaria de tracción $\varepsilon_{s1}$ igual a $-0{,}010$ (un alargamiento del 10‰)
- en el caso de la armadura principal comprimida, su deformación unitaria $\varepsilon_{s2}$ podrá adoptar valores superiores a su límite elástico $\varepsilon_{yd}$ pero, debido a la compatibilidad de deformaciones con el hormigón que recubre dicha armadura, no será posible que se agote por exceso de plastificación

En cuanto al diagrama tensión-deformación de cálculo para el hormigón, la Instrucción EHE-08 en su apartado 39.5 permite el empleo de uno de los diagramas siguientes:

- diagrama parábola-rectángulo

- diagrama simplificado del bloque rectangular
- cualquier otro diagrama de cálculo (birrectilíneo, trapezoidal, etc.) siempre que sus resultados concuerden, da manera satisfactoria con el parábola-rectángulo o queden del lado de la seguridad

El ***diagrama parábola-rectángulo*** está formado por una parábola de grado *n* y un segmento rectilíneo conforme se indica en la Figura 30. El vértice de la parábola se alcanza con una deformación unitaria en el hormigón de valor $\boldsymbol{\varepsilon_{c0}}$ que corresponde a la deformación de rotura del hormigón a compresión simple. La máxima deformación del hormigón $\boldsymbol{\varepsilon_{cu}}$ es la de rotura en flexión y se alcanza al final del tramo rectilíneo. La máxima tensión que es capaz de absorber el hormigón es su resistencia a compresión de cálculo $\boldsymbol{f_{cd}}$. Por otro lado, en la comprobación de los ELU ***no se tendrá en cuenta contribución alguna por parte de las fibras de hormigón en tracción***.

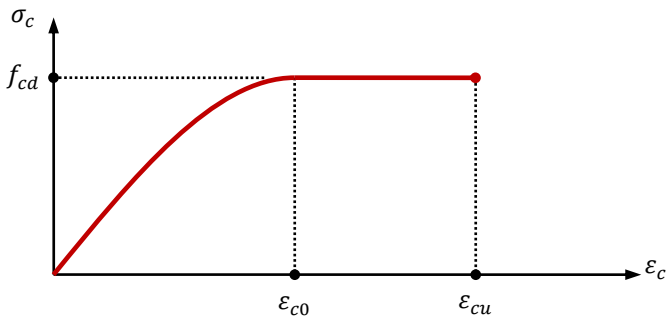



Figura 30. Diagrama parábola-rectángulo del hormigón

La ecuación del tramo parabólico es:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}}\right)^n\right] && \text{si } 0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{c0} \\ \sigma_c &= f_{cd} && \text{si } \varepsilon_{c0} < \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} \end{aligned} \qquad [4.1.4]$$

La deformación de rotura a compresión simple se estima a partir de:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c0} &= 0{,}002 && \text{si } f_{ck} \le 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \\ \varepsilon_{c0} &= 0{,}002 + 8{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{f_{ck} - 50} && \text{si } f_{ck} > 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \end{aligned} \qquad [4.1.5]$$

La deformación última de rotura en flexión se estima a partir de:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cu} &= 0{,}0035 && \text{si } f_{ck} \le 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \\ \varepsilon_{cu} &= 0{,}0026 + 0{,}0144 \cdot \left(\frac{100 - f_{ck}}{100}\right)^4 && \text{si } f_{ck} > 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \end{aligned} \qquad [4.1.6]$$

Y el grado *n* de la parábola se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} n &= 2 && \text{si } f_{ck} \le 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \\ n &= 1{,}4 + 9{,}6 \cdot \left(\frac{100 - f_{ck}}{100}\right)^4 && \text{si } f_{ck} > 50\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} \end{aligned} \qquad [4.1.7]$$

La Tabla 4.1 recoge el valor de los parámetros que definen el diagrama parábola-rectángulo en función de la clase resistente de los hormigones:

Tabla 4.1 Parámetros del diagrama parábola-rectángulo del hormigón

| $f_{ck}$ | **≤ 50** | 55 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | **2** | 1,794 | 1,646 | 1,478 | 1,415 | 1,401 | 1,4 |
| $\varepsilon_{c0}$ | **0,002** | 0,00219 | 0,00227 | 0,00238 | 0,00247 | 0,00254 | 0,0026 |
| $\varepsilon_{cu}$ | **0,0035** | 0,00319 | 0,00297 | 0,00272 | 0,00262 | 0,00260 | 0,0026 |

En la Figura 31 se representan los diagramas parábola-rectángulo para situaciones de cálculo con hormigones de resistencias iguales o superiores a 50 MPa. Como puede apreciarse, las fórmulas convencionales para la obtención de sus parámetros (vértices y grados de la parábola) vienen a reflejar el hecho de que los hormigones conocidos como de alta resistencia son tanto más rígidos cuanto mayor sea su resistencia y, a la vez, menos dúctiles o más frágiles.

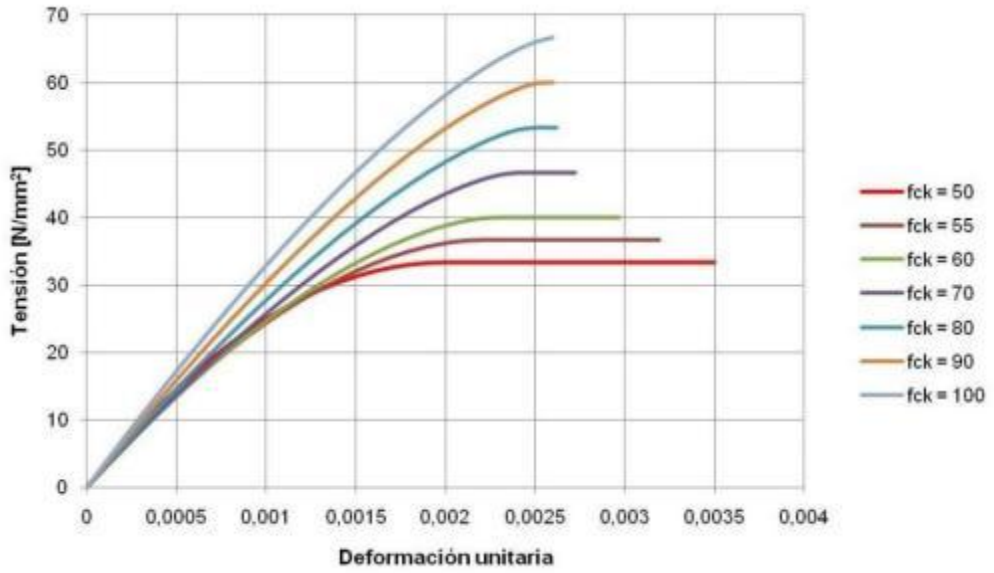



Figura 31. Diagramas parábola-rectángulo para el hormigón de $f_{ck}$ = 50 MPa y hormigones de alta resistencia

El ***diagrama del bloque rectangular*** (Figura 32) es una simplificación del diagrama parábola-rectángulo que permite abordar el cálculo de la resultante del bloque de compresiones con expresiones más compactas y sencillas que las que se deducirían del planteamiento de la integral del diagrama parábola-rectángulo. El bloque rectangular de compresiones se define mediante:

- su profundidad medida desde la cara más comprimida, estimada por $\lambda(x) \cdot h$, siendo $h$ el canto total de la sección
- y su altura, que corresponde a una tensión uniforme de valor $\eta(x) \cdot f_{cd}$

Las expresiones para el cálculo de $\lambda(x)$ y de $\eta(x)$ cuando se emplean ***hormigones convencionales***, de resistencias características $f_{ck}$ no superiores a 50 MPa, son las siguientes:

$$\eta(x) = 1 \qquad [4.1.8.\text{a}]$$

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 0{,}8 \cdot \frac{x}{h} && \text{si } 0 < x \leq h \\ \lambda(x) &= 1 - 0{,}2 \cdot \frac{h}{x} && \text{si } h \leq x < \infty \end{aligned} \qquad [4.1.8.\text{b}]$$

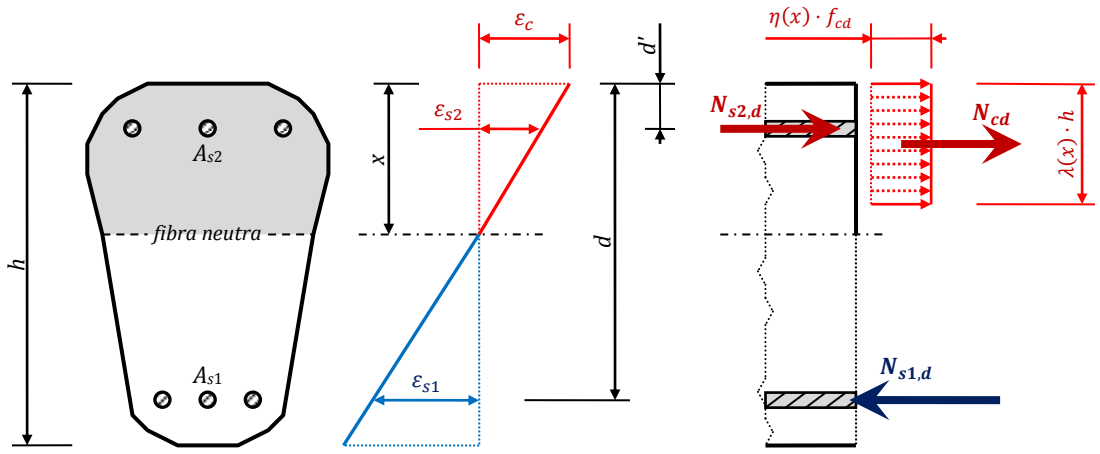



Figura 32. Plano de deformación y diagrama del bloque rectangular

Obsérvese que ***cuando la profundidad x tiende a infinito*** el plano de deformación reflejaría una sección en la que ***todas sus fibras estarían uniformemente comprimidas***, por lo que el valor de $\lambda(x)$ tendería a la unidad.

En el caso de los ***hormigones de alta resistencia***, $\lambda(x)$ y $\eta(x)$ se calculan como:

$$\begin{aligned} &\eta(x) = \eta && \text{si } 0 < x \leq h \\ &\eta(x) = 1 - (1-\eta) \cdot \frac{h}{x} && \text{si } h \leq x < \infty \end{aligned} \qquad [4.1.9.\text{a}]$$

$$\begin{aligned} &\lambda(x) = \lambda \cdot \frac{x}{h} && \text{si } 0 < x \leq h \\ &\lambda(x) = 1 - (1-\lambda) \cdot \frac{h}{x} && \text{si } h \leq x < \infty \end{aligned} \qquad [4.1.9.\text{b}]$$

Los valores de $\eta$ y $\lambda$ dependen de la clase resistente del hormigón y se recogen en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Parámetros del diagrama del bloque rectangular

| $f_{ck}$ | **≤ 50** | 55 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta$ | **1** | 0,975 | 0,95 | 0,90 | 0,85 | 0,80 | 0,75 |
| $\lambda$ | **0,8** | 0,788 | 0,775 | 0,750 | 0,725 | 0,700 | 0,675 |

## 1.2 DOMINIOS DE DEFORMACIÓN

El apartado 42.1.3 de la Instrucción EHE-08 fundamenta el estudio del agotamiento de las secciones de hormigón armado sometidas a solicitaciones normales en el ***diagrama de pivotes*** o de los ***dominios de deformación*** (Figura 33). Esta metodología clasifica los posibles planos de deformación en rotura de una sección de hormigón armado sometida a solicitaciones normales, en cinco regiones o dominios. En cada uno de dichos dominios, todos los posibles planos de agotamiento poseen un punto en común, denominado pivote. El diagrama contiene en total los tres pivotes siguientes:

- ***pivote A***, que corresponde al agotamiento por exceso de plastificación de la armadura $A_{s1}$

- ***pivote B***, que corresponde al agotamiento del hormigón cuando alcanza la deformación $\varepsilon_{cu}$ en la fibra más comprimida (rotura de la sección en flexión)
- ***pivote C***, que corresponde al agotamiento del hormigón cuando alcanza la deformación $\varepsilon_{c0}$ (rotura de la sección en compresión simple)

Vuelve a incidirse en la idea de que el agotamiento de una sección de hormigón armado lo define el nivel de deformación de sus materiales resistentes: el hormigón en compresión y el acero, tanto en compresión como en tracción. A continuación se explican brevemente las características de los planos de deformación que integran cada uno de los cinco dominios.

- ***Dominio 1***: $(-\infty < x < 0)$ todos los planos de deformación de este dominio tienen pivote en el punto *A*; corresponden a secciones que se agotan en ***tracción simple o compuesta*** y su fallo se produce por excesiva plastificación de la armadura $A_{s1}$.
- ***Dominio 2***: $\left(0 < x < \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+0{,}01} \cdot d\right)$ en este dominio el pivote de los planos de deformación es el punto *A*; las secciones llegan a la rotura trabajando en ***flexión simple*** o ***flexión compuesta*** y el fallo se produce por excesiva plastificación en la armadura $A_{s1}$ sin que el hormigón llegue a agotarse.

  El plano de deformación que coincide con la frontera de los dominios 2 y 3 refleja el fallo de una sección en la que se agotan simultáneamente la armadura $A_{s1}$ por excesiva plastificación $(\varepsilon_{s1} = -0{,}010)$ y el hormigón por aplastamiento $(\varepsilon_c = \varepsilon_{cu})$.
- ***Dominio 3***: $\left(\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+0{,}01} \cdot d < x < x_{lim}\right)$ el pivote de los planos de deformación se traslada al punto *B* y refleja situaciones de agotamiento de secciones sometidas a ***flexión simple*** o ***flexión compuesta***; la rotura se produce por aplastamiento del hormigón en la fibra más comprimida $(\varepsilon_c = \varepsilon_{cu})$, pero como la armadura $A_{s1}$ alcanza deformaciones del rango plástico, aún se trata de un agotamiento con ***carácter dúctil***, es decir, que tiene capacidad de "aviso".

  La profundidad de la fibra neutra correspondiente a la frontera entre los dominios 3 y 4 se denomina profundidad límite y su cálculo es el siguiente:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x-d} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon_{cu}}{x_{lim}} = \frac{-\varepsilon_{yd}}{x_{lim}-d} \quad \rightarrow \quad x_{lim} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{yd}} \cdot d \qquad [4.1.10]$$

  Cuando se estudian combinaciones no accidentales y el acero no reúne los requisitos de calidad mencionados en el apartado 2.2 del Capítulo 3, "Propiedades mecánicas de los materiales", el coeficiente parcial de seguridad del acero toma el valor $\gamma_s = 1{,}15$ y, por lo tanto:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \begin{cases} 0{,}00174 & \text{con aceros B400S ó SD} \\ 0{,}00217 & \text{con aceros B500S ó SD} \end{cases} \qquad [4.1.11]$$

- ***Dominio 4***: $(x_{lim} < x < d)$ se trata de un dominio análogo al dominio 3, salvo por el hecho de que la armadura $A_{s1}$ no desarrolla deformaciones plásticas; la ***reducida capacidad de aviso*** de este tipo de rotura hace que este dominio deba evitarse en el dimensionamiento de elementos de hormigón que trabajen predominantemente a flexión pura o simple, como es el caso de las vigas y los dinteles de entramados.

  La frontera entre este dominio y el dominio 4a es un plano de agotamiento en el cual la armadura $A_{s1}$ no trabaja ni en tracción ni en compresión, por lo que los únicos esfuerzos internos de la sección son resultantes de compresión (en el hormigón y en la armadura $A_{s2}$).
- ***Dominio 4a***: $(d < x < h)$ el pivote de los planos de deformación que componen este dominio es el punto *B* y las secciones se agotan en ***compresión compuesta***, ya que todas las armaduras están comprimidas y no hay resultantes internas de tracción; el fallo se produce por aplastamiento del hormigón en la fibra más comprimida.

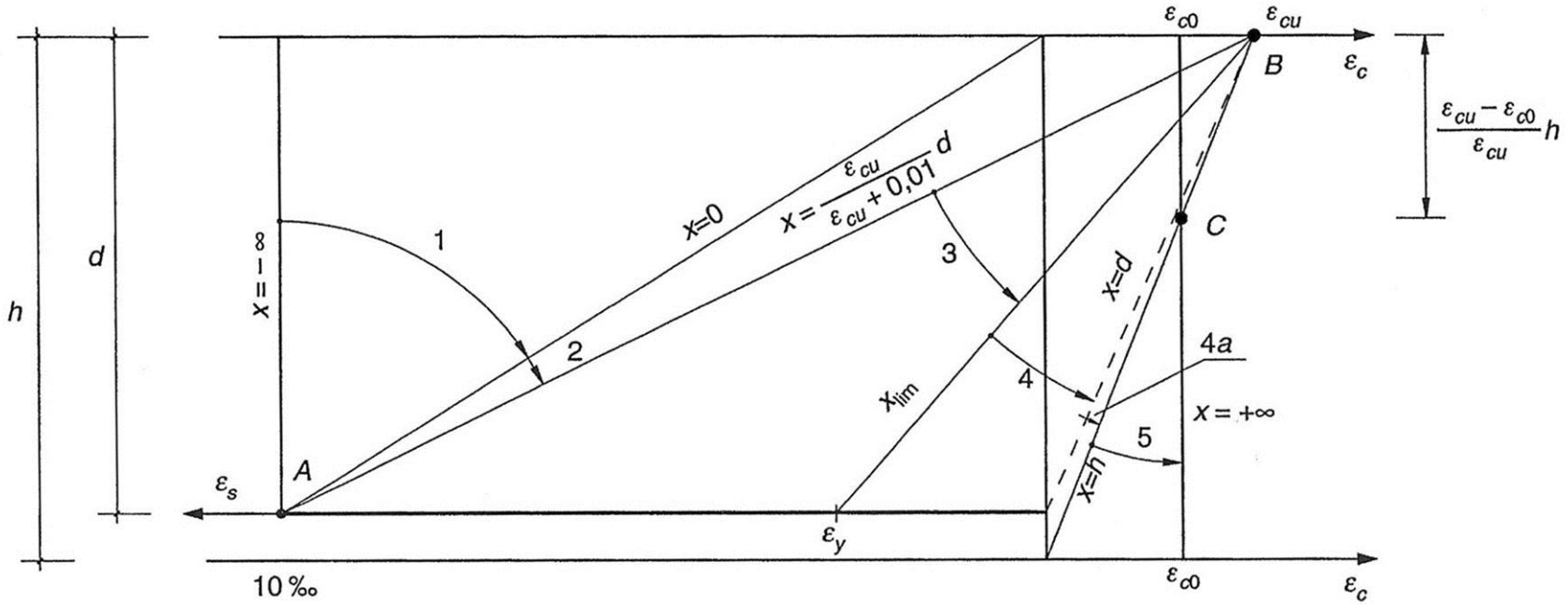



Figura 33. Diagrama de pivotes o de los dominios de deformación (extraído de la EHE-08)

Tabla 4.3 Cotas del diagrama de pivotes que dependen de la clase resistente del hormigón

| $f_{ck}$ | | **≤ 50** | 55 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Profundidad *x* frontera entre *D2* y *D3* | | $\mathbf{0,259 \cdot d}$ | $0{,}242 \cdot d$ | $0{,}229 \cdot d$ | $0{,}214 \cdot d$ | $0{,}208 \cdot d$ | $0{,}206 \cdot d$ | $0{,}206 \cdot d$ |
| Profundidad límite $x_{lím}$ [(1)] (frontera entre *D3* y *D4*) | B400S ó B400SD | $\mathbf{0,668 \cdot d}$ | $0{,}647 \cdot d$ | $0{,}631 \cdot d$ | $0{,}610 \cdot d$ | $0{,}601 \cdot d$ | $0{,}599 \cdot d$ | $0{,}599 \cdot d$ |
| | B500S ó B500SD | $\mathbf{0,617 \cdot d}$ | $0{,}595 \cdot d$ | $0{,}578 \cdot d$ | $0{,}556 \cdot d$ | $0{,}547 \cdot d$ | $0{,}545 \cdot d$ | $0{,}545 \cdot d$ |
| Profundidad del pivote *C* | | $\mathbf{3/7 \cdot h}$ | $0{,}313 \cdot h$ | $0{,}236 \cdot h$ | $1/8 \cdot h$ | $0{,}057 \cdot h$ | $0{,}023 \cdot h$ | 0 |

[(1)] Esta profundidad depende del límite elástico de cálculo del acero, para cuyo cálculo se ha tomado $\gamma_s = 1{,}15$

- ***Dominio 5***: $(h < x < +\infty)$ el pivote de los planos de deformación se traslada al punto $C$ y todas las fibras de la sección están comprimidas; este dominio es característico de secciones se agotan en ***compresión compuesta*** o ***excéntrica***; la compresión simple es un caso límite $(x = +\infty)$ en el que la deformación de todas las fibras es igual a $\varepsilon_{c0}$

La Tabla 4.4 resume las características de cada uno de los dominios de deformación.

Tabla 4.4 Cuadro resumen de los dominios de deformación

| | Pivote | Forma de trabajo | Fallo | Observaciones |
|---|---|---|---|---|
| Dominio 1 | *A* | Tracc. simple o compuesta | Exceso de plastificación de $A_{s1}$ | |
| Dominio 2 | *A* | Flexión simple o compuesta | Exceso de plastificación de $A_{s1}$ | No se aprovecha el hormigón en flexión |
| Dominio 3 | *B* | Flexión simple o compuesta | Aplastamiento del hormigón | $A_{s1}$ alcanza plastificación |
| Dominio 4 | *B* | Flexión simple o compuesta | Aplastamiento del hormigón | Reducida capacidad de aviso |
| Dominio 4a | *B* | Compresión compuesta | Aplastamiento del hormigón | $A_{s1}$ trabaja a compresión |
| Dominio 5 | *C* | Compresión simple o compuesta | Aplastamiento del hormigón | |

## 1.3 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y EQUILIBRIO EN UN CASO GENERAL

Las ecuaciones de compatibilidad y el método del diagrama de pivotes permiten predecir el fallo de una manera ***cualitativa***, es decir, previendo cómo será la rotura para una profundidad $x$ de fibra neutra determinada. La Tabla 4.3, que figura en páginas anteriores, facilita esta tarea puesto que recoge las *profundidades-frontera* entre dominios que dependen de la clase resistente de los hormigones. Para acotar el agotamiento de una manera ***cuantitativa*** es preciso conocer los valores de los esfuerzos que lo producirán, lo cual implica plantear y resolver las ecuaciones de equilibrio.

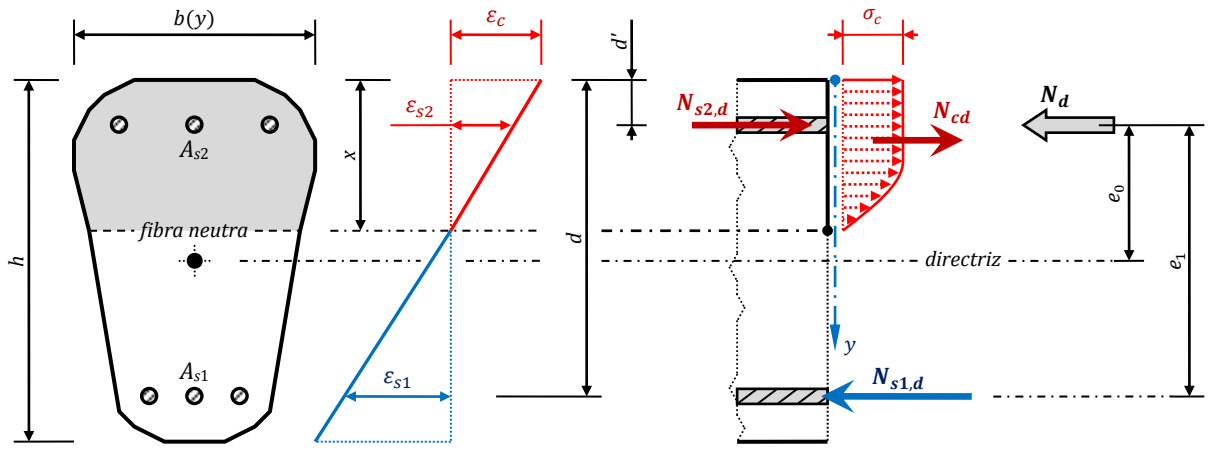



Figura 34. Planteamiento del equilibrio en una sección de forma genérica (compresión con excentricidad)

La Figura 34 representa el equilibrio de las fuerzas internas resultantes en el hormigón y en las armaduras principales con los esfuerzos externos de cálculo (mayorados). Más concretamente, la

situación reflejada es la de una sección sometida a una compresión compuesta o excéntrica, caracterizada por el esfuerzo axil $N_d$ y su excentricidad $e_0$ referida a una directriz. Habitualmente, los resultados del análisis estructural sitúan la recta directriz en el lugar geométrico de los centroides (baricentros) de las secciones transversales del elemento. Es posible definir también la excentricidad mediante un esfuerzo flector de valor $M_d = N_d \cdot e_0$ (Figura 35).

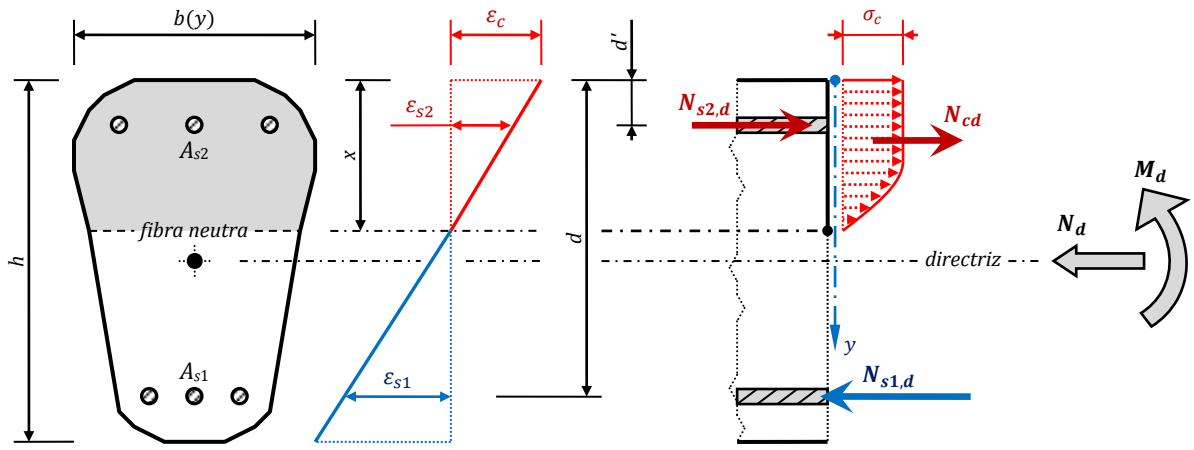



Figura 35. Planteamiento del equilibrio en una sección de forma genérica (axil de compresión más esfuerzo flector)

Si se emplea el diagrama parábola rectángulo y/o si la anchura $b$ de las fibras de la sección es variable (la función $b(y)$ indicada en las figuras) entones la resultante $N_{cd}$ del bloque de compresiones del hormigón deberá obtenerse por integración:

$$N_{cd} = \int_0^x \sigma_c\big(\varepsilon(y)\big) \cdot b(y) \cdot dy \qquad [4.1.12.\text{a}]$$

y, de igual manera, el momento de dicha resultante respecto de la armadura principal $A_{s1}$ se deberá obtener también por integración:

$$M_{cd} = \int_0^x \sigma_c(\varepsilon(y)) \cdot b(y) \cdot (d - y) \cdot dy \qquad [4.1.12.\text{b}]$$

Para valores de la profundidad $y$ superiores a $x$, la sección transversal está traccionada y las fibras de hormigón no contribuyen al equilibrio; por esta razón la integral sólo se extiende entre 0 y $x$. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos son las siguientes:

$$\begin{aligned} N_{cd} + N_{s1,d} + N_{s2,d} &= N_d \\ M_{cd} + N_{s2,d} \cdot (d - d') &= N_d \cdot e_1 \end{aligned} \qquad [4.1.13]$$

La ecuación de equilibrio de momentos del sistema anterior está planteada respecto del nivel de profundidad de la armadura $A_{s1}$.

Si la sección trabaja en ***flexión pura*** o ***flexión simple***, las ecuaciones quedan como:

$$\begin{aligned} N_{cd} + N_{s1,d} + N_{s2,d} &= 0 \\ M_{cd} + N_{s2,d} \cdot (d - d') &= M_d \end{aligned} \qquad [4.1.14]$$

Y si la sección trabaja en ***tracción compuesta***, las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} N_{s1,d} + N_{s2,d} &= N_d \quad (< 0) \\ N_{s2,d} \cdot (d - d') &= N_d \cdot e_1 \end{aligned} \qquad [4.1.15]$$

## 2. CÁLCULO CON EL DIAGRAMA DEL BLOQUE RECTANGULAR EN SECCIONES RECTANGULARES

Las ecuaciones genéricas de equilibrio obtenidas en el apartado anterior admiten una forma compacta cuando se particularizan para secciones de forma rectangular y si se adopta el diagrama del bloque rectangular como diagrama de cálculo del hormigón. La resultante de las compresiones y el momento que produce respecto de la armadura $A_{s1}$ podrán escribirse, sin necesidad de recurrir a la integración:

$$N_{cd} = \eta(x) \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \lambda(x) \cdot h \qquad [4.2.1]$$

$$M_{cd} = N_{cd} \cdot \left[d - \lambda(x) \cdot \frac{h}{2}\right] \qquad [4.2.2]$$

En general, aunque el empleo del diagrama del bloque rectangular es menos preciso que la integración del parábola-rectángulo, las desviaciones a que da lugar son pequeñas (inferiores al 1,5%) y, lo que es más importante, quedan del lado de la seguridad. No obstante, algunos autores avisan de que sí podrían surgir desviaciones importantes fuera del lado de la seguridad con cuantías de armado grandes.

### 2.1 FLEXIÓN PURA

Como se ha visto en el apartado anterior, el agotamiento en flexión simple sólo puede producirse en los dominios 2, 3 ó 4. Por lo tanto, puede afirmarse que la profundidad de la fibra neutra $x$ estará limitada dentro del rango $0 \leq x \leq d$. Como consecuencia, las expresiones de los parámetros que definen el bloque rectangular de tensiones del hormigón serán:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta \\ \lambda(x) &= \lambda \cdot \frac{x}{h} \end{aligned} \qquad [4.2.3]$$

Donde el valor de los parámetros $\eta$ y $\lambda$ se toman de la Tabla 4.2 recogida en el apartado anterior. Por lo tanto, las expresiones de la resultante de compresiones del hormigón y su momento respecto de $A_{s1}$ serán:

$$N_{cd} = \eta \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \lambda \cdot x \qquad [4.2.4]$$

$$M_{cd} = N_{cd} \cdot \left[d - \frac{\lambda}{2} \cdot x\right] \qquad [4.2.5]$$

No es habitual emplear hormigones de resistencias superiores a 50 MPa para fabricar elementos estructurales de hormigón armado que trabajen predominantemente a flexión. Entre otras razones ello se debe a que, si bien alcanzan tensiones de rotura superiores, su agotamiento se produce con menores niveles de deformación y es, por tanto, menos dúctil que el de los hormigones convencionales. Los hormigones de alta resistencia son más adecuados para proyectar soportes que deban soportar cargas elevadas (p. ej. en el caso de las plantas inferiores de edificios de gran altura, etc.) y elementos de hormigón pretensado de gran singularidad.

Por ejemplo, para el caso de un hormigón convencional los parámetros del bloque rectangular son $\eta = 1$ y $\lambda = 0{,}8$ (ver Figura 36) y las expresiones anteriores quedan de la siguiente manera:

$$N_{cd} = 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \qquad [4.2.6]$$

$$M_{cd} = N_{cd} \cdot [d - 0{,}4 \cdot x] \qquad [4.2.7]$$

Las ecuaciones de equilibrio de la flexión pura son las siguientes:

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x + N_{s1,d} + N_{s2,d} = 0 \\ 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) + N_{s2,d} \cdot (d - d') = M_d \end{cases} \qquad [4.2.8]$$

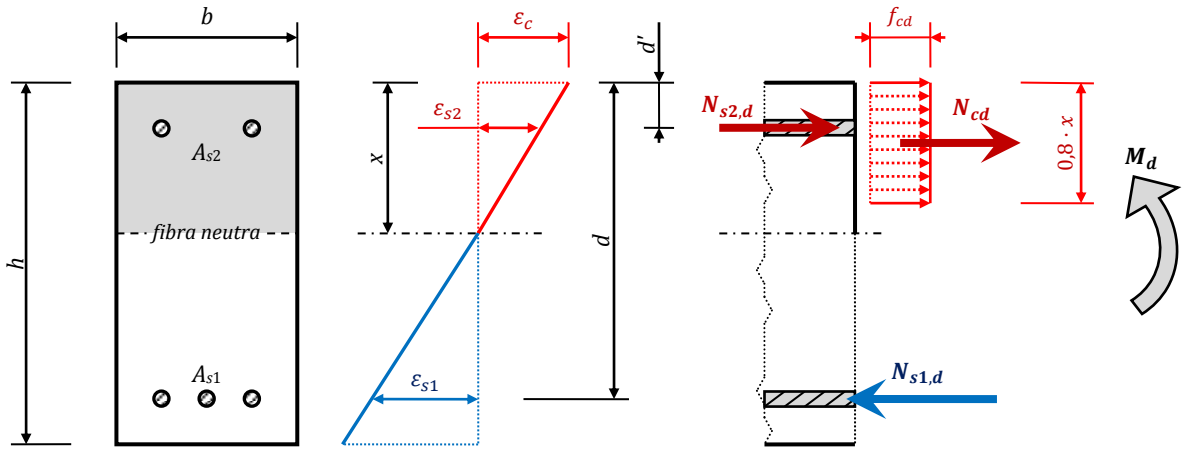



Figura 36. Esquema del bloque rectangular en flexión pura, con hormigones de $f_{ck}$ no superior a 50 MPa

Tal y como se ha visto en el apartado anterior, el diseño de los elementos de hormigón armado que trabajen a flexión simple deberá evitar el dominio 4. Por lo tanto, los dominios adecuados serán el 2 y el 3, en los que se cumple que la armadura $A_{s1}$ está plastificada y $N_{s1,d} = -U_{s1}$. En cuanto a la contribución de la armadura de compresión $A_{s2}$ al equilibrio, debe contemplarse la posibilidad de que no esté plastificada si la rotura se produce en el dominio 2. En cualquier caso, las ecuaciones de equilibrio se simplifican aún más:

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x = U_{s1} - \dfrac{U_{s2}}{\kappa} \\ 0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) + U_{s2} \cdot (d - d') = M_d \end{cases} \qquad [4.2.9]$$

donde:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{s2}} \nless 1 \qquad [4.2.10]$$

Por último, la transformación de estas expresiones en ***ecuaciones adimensionales*** permite construir expresiones compactas y diagramas de dimensionamiento universales. Para ello se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\xi = \frac{x}{d} \qquad \omega = \frac{U_{s1}}{U_0} \qquad \omega' = \frac{U_{s2}}{U_0}$$
$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} \qquad \delta' = \frac{d'}{d} \qquad \text{(siendo } U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d) \qquad [4.2.11]$$

donde:

- $\xi$ es la profundidad adimensional de la fibra neutra
- $\omega$ es la cuantía mecánica adimensional correspondiente a la armadura principal $A_{s1}$
- $\omega'$ es la cuantía mecánica adimensional correspondiente a la armadura principal $A_{s2}$
- $\mu_d$ es el momento flector adimensional de cálculo
- $\delta'$ es el recubrimiento mecánico adimensional, supuesto idéntico para ambas armaduras principales

Estos parámetros permiten rescribir las ecuaciones de equilibrio en la siguiente forma:

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot \xi = \omega - \dfrac{\omega'}{\kappa} \\ 0{,}8 \cdot \xi \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi) + \dfrac{\omega'}{\kappa}(1 - \delta') = \mu_d \end{cases} \qquad [4.2.12]$$

Salvo en los casos que se verán más adelante, habitualmente se despreciará la contribución al equilibrio de la armadura de compresión $A_{s2}$, por lo que las ecuaciones adimensionales quedan así:

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot \xi = \omega \\ 0{,}8 \cdot \xi \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi) = \mu_d \end{cases} \qquad [4.2.13]$$

### 2.1.1 Dimensionamiento en flexión pura en elementos isostáticos

Los problemas de dimensionamiento son aquellos en los que se conoce el esfuerzo flector de cálculo aplicado en la sección, de la que falta por definir alguna de sus dimensiones:

- o bien el canto *h* de la sección, que puede obtenerse definiendo el canto útil *d*
- o bien el armado principal $A_{s1}$ del elemento, del que sí que se conocen el ancho *b* y el canto *h*

Para la segunda de estas situaciones, la fórmula compacta de dimensionamiento se obtiene despejando la profundidad de fibra neutra adimensional $\xi$ en la ecuación de momentos y sustituyéndola en la ecuación de fuerzas, lo que da como resultado:

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d} \qquad [4.2.14]$$

Esta ecuación de dimensionamiento será válida sólo si la armadura de tracción $A_{s1}$ está plastificada, es decir, siempre que la rotura no se produzca en el dominio 4. Como se ha visto en el apartado anterios, la profundidad límite es la que marca la frontera entre los dominios 3 y 4 y que adopta los siguientes valores (ver la Tabla 4.3)

- $x_{lim} = 0{,}668 \cdot d$ ($\xi_{lim} = 0{,}668$) cuando se utiliza un acero B400S ó B400SD
- $x_{lim} = 0{,}617 \cdot d$ ($\xi_{lim} = 0{,}617$) cuando se utiliza un acero B500S ó B500SD

La Instrucción EHE-08 propone en su Anejo 7 un valor intermedio de la profundidad límite adimensional y la sitúa en $\xi_{lim} = 0{,}625$. Este valor permite definir el ***momento límite adimensional***, sustituyendo $\xi_{lim}$ en la ecuación de momentos de [4.2.13]:

$$\mu_{lim} = 0{,}8 \cdot \xi_{lim} \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi_{lim}) = 0{,}375 \qquad [4.2.15]$$

Por consiguiente, para esfuerzos flectores de cálculo superiores a este momento límite, la rotura se produciría en el dominio 4 y ello se podría evitar dimensionando la armadura de compresión y manteniendo la profundidad de la fibra neutra en $\xi = \xi_{lim}$:

$$\begin{cases} 0{,}8 \cdot \xi_{lim} = \omega - \dfrac{\omega'}{\kappa} \\ 0{,}8 \cdot \xi_{lim} \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi_{lim}) + \dfrac{\omega'}{\kappa}(1 - \delta') = \mu_d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5 = \omega - \dfrac{\omega'}{\kappa} \\ 0{,}375 + \dfrac{\omega'}{\kappa}(1 - \delta') = \mu_d \end{cases} \qquad [4.2.16]$$

Finalmente, debe tenerse en cuenta que el agotamiento se produce por aplastamiento de la fibra más comprimida del hormigón, que alcanza una deformación $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ y es lógico suponer que, aunque la deformación de la armadura de compresión $A_{s2}$ sea ligeramente inferior, superará su límite elástico, en torno a 0,002. Por ello, puede asumirse que $\kappa = 1$ y, por lo tanto:

$$\omega = 0{,}5 + \omega'$$
$$\omega' = \frac{\mu_d - 0{,}375}{1 - \delta'} \qquad [4.2.17]$$

A modo de resumen, las ecuaciones adimensionales de dimensionamiento son:

$$\text{si } \mu_d \leq 0{,}375 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d}$$

$$\text{si } \mu_d > 0{,}375 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0{,}5 + \omega' \\ \omega' = \dfrac{\mu_d - 0{,}375}{1 - \delta'} \end{cases} \qquad [4.2.18.\text{a}]$$

Deshaciendo el cambio a parámetros adimensionales, se obtiene:

$$\text{si } M_d \leq 0{,}375 \cdot U_0 \cdot d \quad \rightarrow \quad U_{s1} = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_d}{U_0 \cdot d}}\right)$$

$$\text{si } M_d > 0{,}375 \cdot U_0 \cdot d \quad \rightarrow \quad \begin{cases} U_{s1} = 0{,}5 \cdot U_0 + U_{s2} \\ U_{s2} = \dfrac{M_d - 0{,}375 \cdot U_0 \cdot d}{d - d'} \end{cases} \qquad [4.2.18.\text{b}]$$

**<u>Ejemplo 1</u>: Una viga simplemente apoyada de hormigón armado HA-30 y redondos corrugados B400S tiene las siguientes dimensiones: ancho $b = 25$ cm y canto $h = 45$ cm. Se estima el recubrimiento mecánico de las armaduras principales en 45 mm. Dimensionar el armado si debe soportar un esfuerzo flector de cálculo de 230 mkN.**

Se trata de un problema de dimensionamiento y, en primer lugar, debe determinarse si el esfuerzo flector aplicado supera el *momento límite* correspondiente a elementos isostáticos, ya que se trata de una viga simplemente apoyada.

$$b = 250 \text{ mm} \qquad d = h - d' = 450 - 45 = 405 \text{ mm}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{30}{1{,}5} = 20 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$$

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 20 \cdot 250 \cdot 405 = 2{,}025 \cdot 10^6 \text{ N} = 2025 \text{ kN}$$

$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} = \frac{230 \text{ mkN}}{2025 \text{ kN} \cdot 0{,}405 \text{ m}} = 0{,}280$$

Puesto que este valor es inferior al momento adimensional límite $\mu_{lim} = 0{,}375$, entonces no será preciso dimensionar para el cálculo la armadura de compresión $A_{s2}$. La armadura principal de tracción $A_{s1}$ será:

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d} = 0{,}337$$

y, por lo tanto:

$$U_{s1} = \omega \cdot U_0 = 0{,}337 \cdot 2025 \text{ kN} = 682{,}5 \text{ kN} = 682500 \text{ N}$$

Se trata de acero de límite elástico característico $f_{yk} = 400 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$ por lo que su límite elástico de cálculo es:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{400 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}}{1{,}15} = 348 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$$

y la sección nominal de armadura de tracción necesaria será:

$$A_{s1} \geq \frac{U_{s1}}{f_{yd}} = \frac{682500 \text{ N}}{348 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}} = \mathbf{1961{,}2 \text{ mm}^2}$$

Finalmente, en la Tabla 3.1 de estos apuntes se puede obtener directamente qué combinación de redondos tienen una sección nominal de, por lo menos, 1961,2 mm²:

3Ø32 ($A_{s1}$ = 2412,7 mm²) 4Ø25 ($A_{s1}$ = 1963,5 mm²) 7Ø20 ($A_{s1}$ = 2199,1 mm²)

### 2.1.2 Dimensionamiento en flexión pura en elementos hiperestáticos

Aunque no tiene carácter de obligado cumplimiento en nuestro país, es preciso tener en cuenta el contenido del Código Modelo de 1990 en lo referente a la obtención de los esfuerzos para comprobaciones de ELU en elementos hiperestáticos, en los que la compatibilidad de deformaciones juega un papel esencial. Según este documento, en este tipo de elementos sólo podrá emplearse un análisis lineal para el cálculo de esfuerzos si las secciones críticas cumplen unos determinados ***criterios de ductilidad***. De acuerdo con ellos, las secciones deberán ser capaces de *"rotar"* suficientemente antes del agotamiento y dicha rotación depende en gran medida de la deformación plástica de la armadura principal $A_{s1}$. Es decir, no basta con que la deformación $\varepsilon_{s1}$ alcance el límite elástico $\varepsilon_{yd}$, sino que el dimensionamiento de las armaduras tiene que garantizar que se pueda superar *ampliamente* dicha deformación.

La Instrucción EHE-08 admite la aplicación del análisis estructural lineal para el cálculo de esfuerzos de ELU pero avisa de que ello ***"implica aceptar que las secciones críticas tienen una cierta ductilidad que permite la distribución de esfuerzos supuesta sin que se produzca la rotura local"***. El grado de ductilidad está definido en los comentarios de la *CPH* al Artículo 21º de la Instrucción, dedicado a las estructuras reticulares planas:

- vigas continuas
- entramados de pilares y dinteles
- forjados y placas unidireccionales

Según se desprende de dichos comentarios, basados en el Código Modelo de 1990 y en el Eurocódigo 2, cuando se emplee el análisis lineal para calcular los esfuerzos en estructuras reticulares planas hiperestáticas, será preciso que la fibra neutra en rotura en las secciones críticas se sitúe a una profundidad no mayor de:

$$x \leq 0{,}45 \cdot d \quad (\xi \leq 0{,}45) \qquad [4.2.19]$$

A este nuevo valor de profundidad "límite" de diseño, le corresponde un nuevo valor de momento límite, al que podría denominarse *momento frontera*:

$$\mu_f = 0{,}8 \cdot \xi_f \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi_f)$$

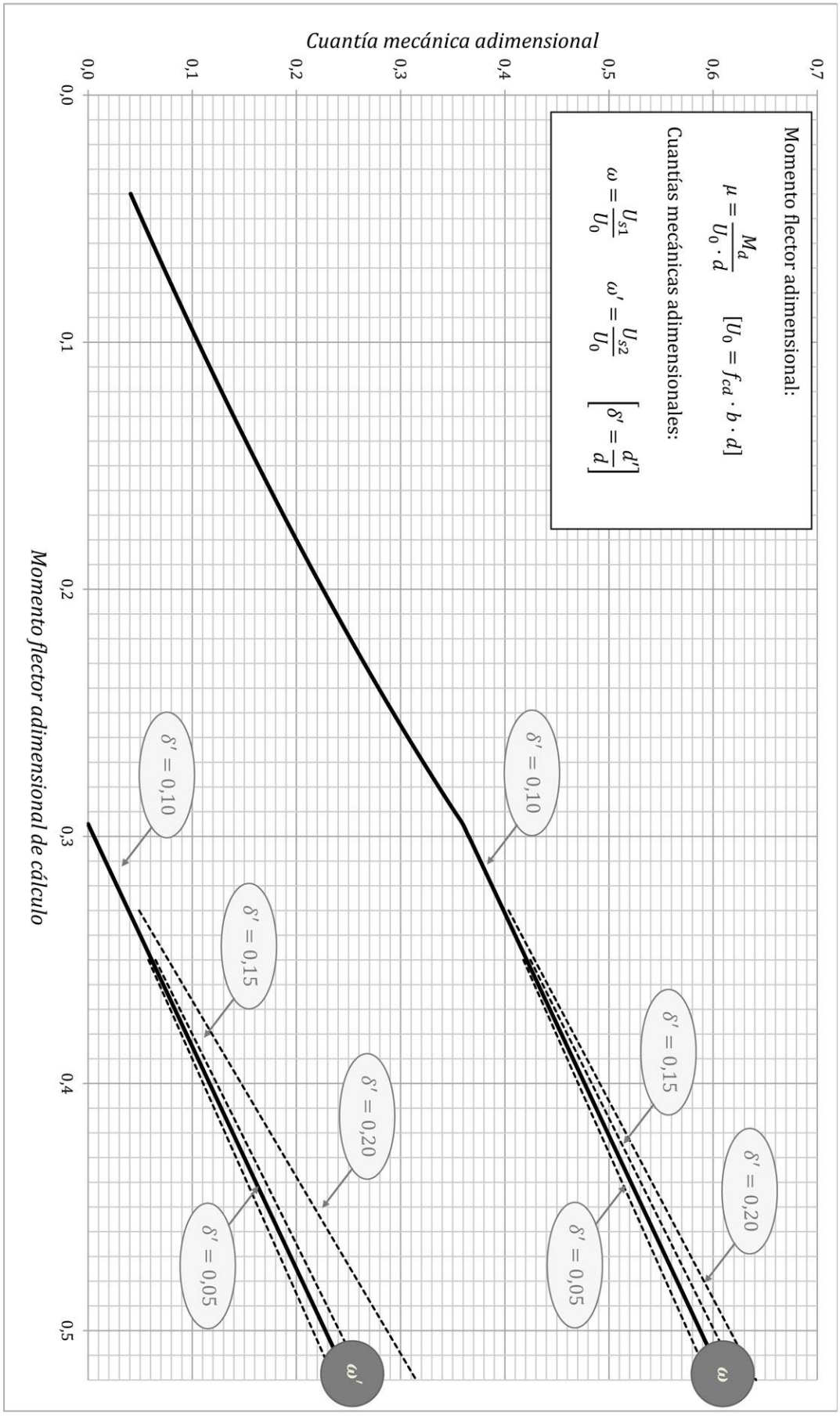
$$\mu_f = 0{,}8 \cdot 0{,}45 \cdot (1 - 0{,}4 \cdot 0{,}45) = 0{,}295 \qquad [4.2.20]$$

A continuación basta proceder de idéntica manera a la descrita en el apartado anterior, obteniéndose las siguientes expresiones de dimensionamiento para las secciones críticas de elementos hiperestáticos:

$$\text{si } \mu_d \leq 0{,}295 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d}$$

$$\text{si } \mu_d > 0{,}295 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0{,}36 + \omega' \\ \omega' = \dfrac{\mu_d - 0{,}295}{1 - \delta'} \end{cases} \qquad [4.2.21.\text{a}]$$

**ÁBACO GENERAL DE FLEXIÓN PURA** Sección rectangular / B500S ó B500SD / $f_{ck} \leq 50$ MPa / Sin redistribución, $x \leq 0{,}45 \cdot d$



Al igual que en el apartado anterior, si se deshace el cambio a parámetros adimensionales, se obtienen las siguientes expresiones de dimensionamiento de secciones de elementos hiperestáticos:

$$\begin{array}{ll} \text{si } M_d \le 0{,}295 \cdot U_0 \cdot d \quad \rightarrow & U_{s1} = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2 \cdot M_d}{U_0 \cdot d}}\right) \\ \text{si } M_d > 0{,}295 \cdot U_0 \cdot d \quad \rightarrow & \begin{cases} U_{s1} = 0{,}36 \cdot U_0 + U_{s2} \\ U_{s2} = \dfrac{M_d - 0{,}295 \cdot U_0 \cdot d}{d - d'} \end{cases} \end{array} \qquad [4.2.21.\text{b}]$$

En las ecuaciones anteriores se ha supuesto que la armadura de compresión $A_{s2}$ llega a plastificar, lo cual es válido para los valores habituales del recubrimiento mecánico $d'$. La figura recogida en la página anterior es una representación gráfica de las ecuaciones [4.2.21.a] y se conoce por el nombre de **"Ábaco general de flexión pura para una sección rectangular"**, el cual constituye una interesante herramienta para resolver gráficamente no sólo los problemas de dimensionamiento, sino también los de comprobación.

**<u>Ejemplo 2</u>: Una viga continua de dos vanos soporta en la sección situada sobre el apoyo central un esfuerzo flector de cálculo de 500 mkN. Está fabricada con un hormigón HA-40 y redondos corrugados de acero B500S y sus dimensiones son: ancho $b = 30$ cm y canto $h = 50$ cm. Se estima el recubrimiento mecánico de las armaduras principales en 45 mm. Dimensionar su armado.**

Como en el caso del ejemplo anterior, se trata de un problema de dimensionamiento y debe determinarse si el esfuerzo flector aplicado supera el *momento límite* correspondiente a elementos hiperestáticos ($\mu_{lim} = 0{,}295$) ya que se trata de una viga continua.

$$b = 300 \text{ mm} \qquad d = h - d' = 500 - 45 = 455 \text{ mm}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{40}{1{,}5} = 26{,}7 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$$

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 26{,}7 \cdot 300 \cdot 455 = 3{,}645 \cdot 10^6 \text{ N} = 3645 \text{ kN}$$

$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} = \frac{500 \text{ mkN}}{3645 \text{ kN} \cdot 0{,}455 \text{ m}} = 0{,}3015$$

Puesto que este valor es superior al momento adimensional límite definido para elementos hiperestáticos, es preciso dimensionar ambas armaduras principales, conforme a las ecuaciones presentadas:

$$\begin{cases} \omega = 0{,}36 + \omega' \\ \omega' = \dfrac{\mu_d - 0{,}295}{1 - \delta'} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0{,}36 + \omega' = 0{,}36 + 0{,}00719 = 0{,}3672 \\ \omega' = \dfrac{0{,}3015 - 0{,}295}{1 - \dfrac{45}{455}} = 0{,}00719 \end{cases}$$

y, por lo tanto:

$$U_{s1} = \omega \cdot U_0 = 0{,}3672 \cdot 3645 \text{ kN} = 1338{,}4 \text{ kN} = 1{,}338 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$U_{s2} = \omega' \cdot U_0 = 0{,}00719 \cdot 3645 \text{ kN} = 26{,}22 \text{ kN} = 26220 \text{ N}$$

Se trata de acero de límite elástico característico $f_{yk} = 500 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$ y su valor de cálculo es:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}}{1{,}15} = 435 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$$

por lo que la sección nominal de armadura de tracción necesaria será:

$$A_{s1} \ge \frac{1{,}338 \cdot 10^6 \text{ N}}{435 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}} = 3077{,}4 \text{ mm}^2 \qquad \text{(p. ej. 7Ø25, armadura superior)}$$

Es una recomendación habitual de muchos autores el que la tensión de las armaduras en compresión no se tome mayor que 400 N/mm², por lo que la sección nominal de $A_{s2}$ será:

$$A_{s2} \geq \frac{26220 \text{ N}}{400 \text{ }^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}} = 65{,}55 \text{ mm}^2$$

La Instrucción establece que si existen armaduras comprimidas que se tengan en cuenta en el cálculo, deberán ser de diámetros iguales o superiores a Ø12. En este caso, bastaría una sola barra de Ø12 (113, mm²) pero, por otro lado, ***siempre deberán disponerse al menos dos barras*** (una en cada esquina).

### 2.1.3 Cantos mínimos recomendados en flexión pura

Si el problema de dimensionamiento implica no sólo el cálculo del armado sino también la definición del canto del elemento, entonces puede seguirse el criterio de diseñar el elemento con un canto suficiente para que no se necesite dimensionar la armadura de compresión. Por ejemplo, en el caso de una viga de hormigón armado, ésta dispondrá de una armadura principal en la cara comprimida pero por mera necesidad de montaje y control de la retracción, sin que sea necesaria su contribución a la resistencia a flexión. Puesto que la definición del momento adimensional es:

$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} = \frac{M_d}{f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \qquad [4.2.22]$$

cuando se trate del canto de un elemento isostático (cuyo momento límite es $\mu_{lim} = 0{,}375$) se tendrá:

$$\mu_d = \frac{M_d}{f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \leq \mu_{lim} = 0{,}375 = \rightarrow \quad d \geq d_{min} = 1{,}63 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}} \qquad [4.2.23]$$

Mientras que si se trata de un elemento hiperestático ($\mu_{lim} = 0{,}295$ ), entonces:

$$\mu_d = \frac{M_d}{f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \leq \mu_{lim} = 0{,}295 = \rightarrow \quad d \geq d_{min} = 1{,}84 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}} \qquad [4.2.24]$$

### 2.1.4 Comprobación en elementos isostáticos en flexión pura

El problema de comprobación es el inverso del de dimensionamiento: se conocen de antemano las características de la sección de hormigón armado, su anchura, su canto y los esquemas de las armaduras pasivas principales. La incógnita a determinar es entonces la resistencia a flexión $M_u$ ó $M_{Rd}$. La expresión de la resistencia puede obtenerse de la ecuación de dimensionamiento [4.2.14], que sólo tenía en cuenta la contribución de la armadura $A_{s1}$:

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d} \quad \rightarrow \quad \mu_u = \omega \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \qquad [4.2.25]$$

siendo $\mu_u$ el momento flector adimensional último o de agotamiento. Esta ecuación es válida siempre que se compruebe que $\mu_u$ sea inferior al momento límite $\mu_{lim} = 0{,}375$. Esta condición se puede expresar de una forma más cómoda si se pone en términos de la cuantía de armado. Si se observa la ecuación [4.2.18] se concluye que para que $\mu_u \leq \mu_{lim}$ debe cumplirse que:

$$\omega - \omega' \leq 0{,}5 \qquad [4.2.26]$$

Por consiguiente, si se desprecia la contribución de $A_{s2}$, entonces $\omega' = 0$ y la ecuación de comprobación queda de la siguiente manera:

$$\mu_u = \omega \cdot \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad \text{siempre que } \omega \not> 0{,}5 \qquad [4.2.27]$$

Finalmente, si se deshace el cambio a parámetros adimensionales, la ecuación anterior queda como:

$$M_u = U_{s1} \cdot \left(1 - \frac{U_{s1}}{2 \cdot U_0}\right) \cdot d \qquad \text{siempre que } U_{s1} \not> 0{,}5 \cdot U_0 \qquad [4.2.28]$$

Si se desprecia la contribución de la armadura principal comprimida, la comprobación se queda del lado de la seguridad. El Anejo 7 de la Instrucción EHE-08 propone expresiones más completas que tiene en cuenta la contribución de dicha armadura.

### 2.1.5 Comprobación de elementos hiperestáticos en flexión pura

La expresión de la resistencia a flexión es idéntica a la de los elementos isostáticos pero debe tenerse en cuenta que el rango de validez es más limitado, puesto que el momento adimensional límite de las secciones críticas de estos elementos es más reducido ($\mu_{lim} = 0{,}295$). En términos de las cuantías de armado, la condición que deben cumplir las armaduras principales será el siguiente:

$$\omega - \omega' \leq 0{,}36 \qquad [4.2.29]$$

Por lo tanto, la expresión del momento de agotamiento en elementos hiperestáticos (vigas continuas, entramados, forjados y placas unidireccionales) es la siguiente:

$$M_u = U_{s1} \cdot \left(1 - \frac{U_{s1}}{2 \cdot U_0}\right) \cdot d \qquad \text{siempre que } U_{s1} \not> 0{,}36 \cdot U_0 \qquad [4.2.30]$$

**<u>Ejemplo 3</u>: Una viga continua "plana" de dos vanos posee una sección rectangular de 70 cm de ancho y 30 cm de canto. La sección situada sobre el apoyo central tiene un *<u>armado superior</u>* consistente en 7 redondos Ø20 de acero B500S, cuyo recubrimiento mecánico es 40 mm. Obtener la resistencia a flexión de dicha sección si se trata de un hormigón HA-25.**

Se trata de un problema de comprobación y debe comenzarse por comparar la capacidad mecánica de la armadura de tracción principal $U_{s1}$ con la capacidad $U_0$ de la sección de hormigón.

$$b = 700 \text{ mm} \qquad d = h - d' = 300 - 40 = 260 \text{ mm}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}7 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}$$

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 16{,}7 \cdot 700 \cdot 260 = 3{,}039 \cdot 10^6 \text{ N} = 3039 \text{ kN}$$

$$U_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yd} = \langle 7\text{Ø}20 \rangle = 2199{,}1 \text{ mm}^2 \cdot 435 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2} = 956{,}6 \text{ kN} \cong 0{,}31 \cdot U_0$$

Esta capacidad mecánica está dentro del rango de validez indicado en [4.2.30], por lo que la resistencia a flexión de la sección es:

$$M_u = U_{s1} \cdot \left(1 - \frac{U_{s1}}{2 \cdot U_0}\right) \cdot d = 956{,}6 \text{ kN} \cdot \left(1 - \frac{956{,}6}{2 \cdot 3039}\right) \cdot 0{,}26 \text{ m} = \mathbf{209{,}6 \text{ mkN}}$$

## 2.2 FLEXIÓN COMPUESTA

### 2.2.1 Flexión compuesta con grandes excentricidades. Teorema de Ehlers

La Figura 37 muestra una sección rectangular sometida a flexión compuesta o flexo-compresión, con esfuerzos de cálculo $N_d$ y $M_d$ referidos a su directriz.

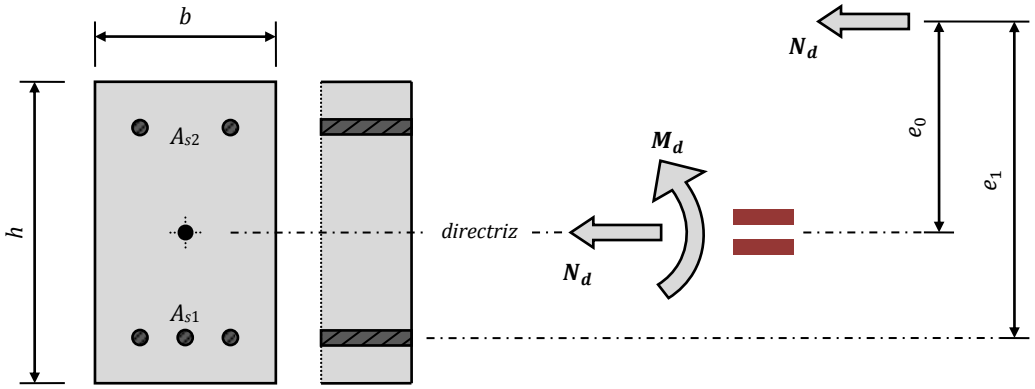



Figura 37. Esquema de la flexión compuesta en una sección rectangular

La directriz suele colocarse a la altura del centro de gravedad de la sección, por lo que en la sección rectangular estará a media altura. Ello quiere decir que:

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} \qquad [4.2.31]$$

$$e_1 = e_0 + \left(d - \frac{h}{2}\right) = \frac{M_d}{N_d} + \left(d - \frac{h}{2}\right) \qquad [4.2.32]$$

Las secciones sometidas a flexo-compresión con grandes excentricidades son aquellas en las que se cumple que la excentricidad $e_1$ es mayor que el canto útil $d$ de la sección. Si el esquema de armado de estas secciones no es simétrico, su dimensionamiento puede abordarse por aplicación del teorema de Ehlers: *todo problema de flexión compuesta puede reducirse a uno de flexión simple, sin más que tomar como momento, el que produce el esfuerzo normal respecto a la armadura de tracción ($N_d \cdot e_1$). La capacidad mecánica de la armadura de tracción necesaria en flexión compuesta se obtendrá como:*

$$U_{s1} = U_{s1,simple} - N_d \qquad [4.2.33]$$

*siendo $U_{s1,simple}$ la capacidad correspondiente a flexión simple con momento $N_d \cdot e_1$.*

Este procedimiento no es muy útil para el diseño de soportes, puesto que éstos suelen disponer de un esquema de armaduras longitudinales repartido simétricamente. Pero sí que es adecuado para vigas que deban soportar pequeños esfuerzos axiles, sean de tracción o de compresión, siempre que el esfuerzo predominante sea el flector y se cumpla la condición de gran excentricidad.

Si se define el esfuerzo axil adimensional:

$$\nu_d = \frac{N_d}{U_0} \qquad [4.2.34]$$

y el esfuerzo flector adimensional del problema reducido:

$$\mu_d = \frac{N_d \cdot e_1}{U_0 \cdot d} \qquad [4.2.35]$$

entonces las expresiones de diseño para $\xi \leq 0{,}625$ (elementos isostáticos) son las siguientes:

$$\text{si } \mu_d \leq 0{,}375 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d} - \nu_d$$

$$\text{si } \mu_d > 0{,}375 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0{,}5 + \omega' - \nu_d \\ \omega' = \dfrac{\mu_d - 0{,}375}{1 - \delta'} \end{cases} \qquad [4.2.36]$$

En el caso de $\xi \leq 0{,}45$ (elementos hiperestáticos) entonces las expresiones de diseño serán:

$$\text{si } \mu_d \leq 0{,}295 \quad \rightarrow \quad \omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d} - \nu_d$$

$$\text{si } \mu_d > 0{,}295 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0{,}36 + \omega' - \nu_d \\ \omega' = \dfrac{\mu_d - 0{,}295}{1 - \delta'} \end{cases} \qquad [4.2.37]$$

### 2.2.2 Compresión con débiles excentricidades. Construcción de diagramas de interacción

La compresión con débiles excentricidades suele presentarse en los ***soportes de edificación***, armados habitualmente con una ***disposición simétricamente repartida de redondos longitudinales***. No obstante, es también posible que estén sometidos a axiles con gran excentricidad. En estos casos de armado simétrico, en los que pueden existir redondos que ocupen las caras paralelas al plano de flexión, debe plantearse el estudio detallado de las deformaciones de la sección y del equilibrio de esfuerzos. Si se trata de soportes de las estructuras de edificios de gran altura, las herramientas de dimensionamiento y de comprobación deben contemplar además el empleo de hormigones de alta resistencia y, como consecuencia, las ecuaciones de equilibrio no tendrán una forma tan compacta como las recogidas en los apartados anteriores.

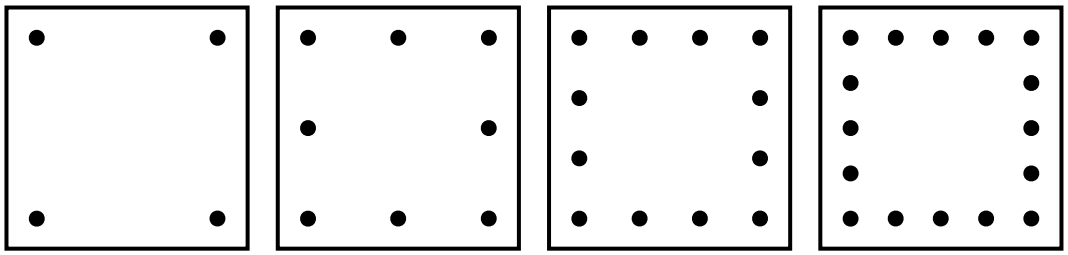



Figura 38. Distintas disposiciones de armado simétricas en soportes de hormigón

Los dos ejemplos que se desarrollan a continuación pretenden mostrar la base de un procedimiento que, con la ayuda de un *software* de tratamiento de *hojas de cálculo*, permite crear potentes herramientas gráficas válidas para la comprobación y el dimensionamiento de soportes rectangulares con disposiciones simétricas de armaduras.

**<u>Ejemplo 4</u>: Sea un soporte cuadrado de sección 0,35×0,35 m construido con hormigón HA-35 y armado simétricamente con 8 redondos Ø20 de acero B500S. El recubrimiento mecánico para todas las armaduras vale $d' = 45$ mm. Determinar el valor de los esfuerzos de agotamiento correspondientes a una profundidad de fibra neutra de valor x = 260 mm.**

El primer paso es determinar en qué dominio se produce el agotamiento de la sección cuando la fibra neutra se sitúa a una profundidad de 260 mm. Para ello:

$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{x}{h - d'} = \frac{260\ \text{mm}}{350\ \text{mm} - 45\ \text{mm}} = \frac{260\ \text{mm}}{305\ \text{mm}} = 0{,}852$$

Con ayuda del diagrama de dominios de deformación de la EHE-08 y de los datos recogidos en la Tabla 4.3 de estos apuntes, se puede concluir que el agotamiento se producirá en ***dominio 4***:

- la profundidad $x$ de la fibra neutra es superior a la *profundidad límite* correspondiente a un acero B500S ($x_{lim} = 0{,}617 \cdot d$)
- y la profundidad $x$ no supera al canto útil $d$ de la sección, luego todavía hay una armadura principal en tracción

Una vez determinado el dominio, ya se conocen al menos dos de las deformaciones de la sección:

- por un lado, a profundidad de 260 mm la deformación unitaria es 0
- por otro lado, como en el dominio 4 el pivote es el punto $B$, la deformación de la fibra más comprimida es la de agotamiento del hormigón en flexo-compresión, por lo que $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu} = 0{,}0035$

A continuación se obtienen el resto de deformaciones y se traza el plano de agotamiento (Figura 39):

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{x - d} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - d}{x} = 0{,}0035 \cdot \frac{260 - 305}{260} = -6{,}058 \cdot 10^{-4} \quad \text{(tracción)}$$

$$\frac{\varepsilon_{sm}}{x - h/2} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{sm} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - h/2}{x} = 0{,}0035 \cdot \frac{260 - 175}{260} = 0{,}001144 \quad \text{(compresión)}$$

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{s2} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - d'}{x} = 0{,}0035 \cdot \frac{260 - 45}{260} = 0{,}002894 \quad \text{(compresión)}$$

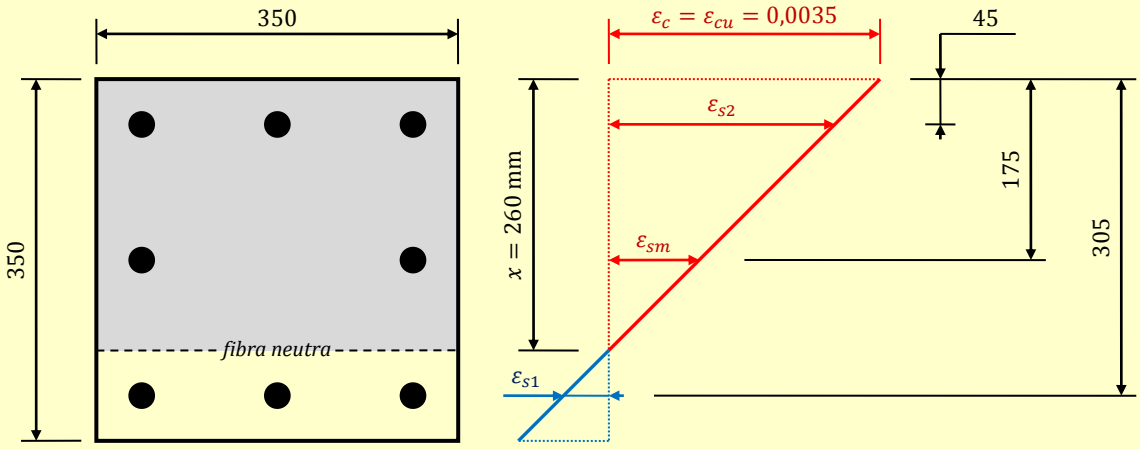



Figura 39. Plano de agotamiento del soporte del ejemplo 4

Como consecuencia de estas deformaciones, las armaduras principales y el hormigón responden con las fuerzas resultantes que se representan en la Figura 40.

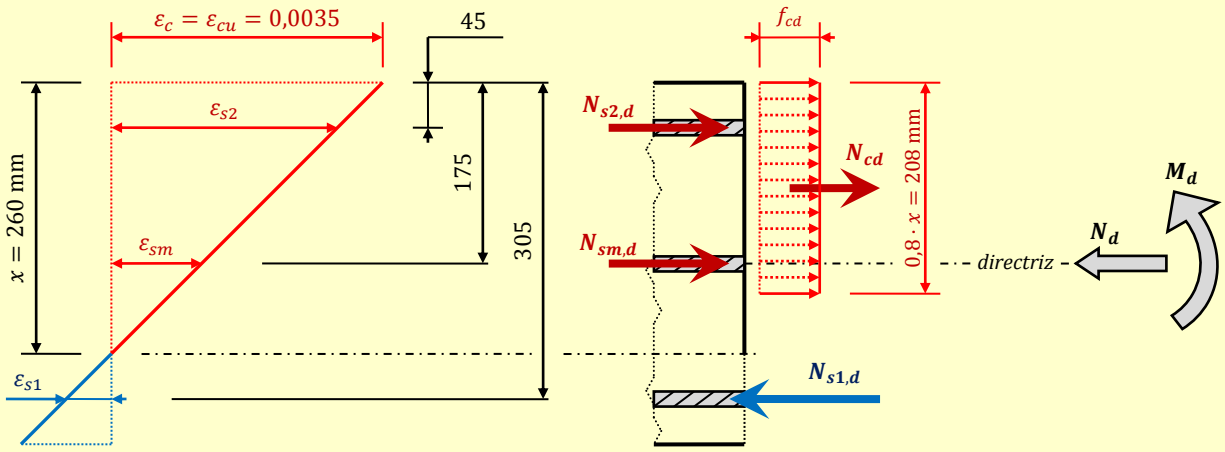



Figura 40. Representación de los esfuerzos y del bloque rectangular

Como la deformación del límite elástico de cálculo del acero empleado es $\varepsilon_{yd} = 0{,}00217$, las únicas armaduras que plastifican en la sección son las de la cara más comprimida ($A_{s2}$) y su esfuerzo resultante será:

$$N_{s2,d} = A_{s2} \cdot f_{yd} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot \frac{500 \text{ N/mm}^2}{1{,}15} = 942{,}5 \text{ mm}^2 \cdot 435 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{409988 \text{ N}}$$

Por otro lado, en los dos redondos situados a media profundidad, el esfuerzo será:

$$N_{sm,d} = A_{sm} \cdot \sigma_{sm,d} = A_{sm} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{sm} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot 200000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0{,}001144 =$$

$$= 628{,}3 \text{ mm}^2 \cdot 228{,}8 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{143755 \text{ N}}$$

Y, finalmente, el esfuerzo resultante en las armaduras de tracción $A_{s1}$ será:

$$N_{s1,d} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1,d} = A_{s1} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s1} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot 200000 \text{ N/mm}^2 \cdot (-6{,}058 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= 942{,}5 \text{ mm}^2 \cdot \left(-121{,}2 \text{ N/mm}^2\right) = \mathbf{-114193 \text{ N}}$$

La resultante de compresiones en el hormigón es:

$$N_{cd} = f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8 \cdot x = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b \cdot 0{,}8 \cdot x = \frac{35 \text{ N/mm}^2}{1{,}5} \cdot 350 \text{ mm} \cdot 0{,}8 \cdot 260 \text{ mm} = \mathbf{1698667 \text{ N}}$$

Por último, la pareja de esfuerzos de agotamiento $N_d$ y $M_d$ se calculan a través de las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} N_{s1,d} + N_{sm,d} + N_{s2,d} + N_{cd} = \boldsymbol{N_d} \\ N_{s2,d} \cdot (d - d') + N_{sm,d} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + N_{cd} \cdot (d - 0{,}4 \cdot x) = \boldsymbol{M_d} + N_d \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) \end{cases} \quad [4.2.38]$$

$$\begin{cases} -114193 + 143755 + 409988 + 1698667 = \boldsymbol{N_d} \\ 409988 \cdot (305 - 45) + 143755 \cdot \left(305 - \frac{350}{2}\right) + 1698667 \cdot (305 - 0{,}4 \cdot 260) = \boldsymbol{M_d} + N_d \cdot \left(305 - \frac{350}{2}\right) \end{cases}$$

De donde resulta $\boldsymbol{N_d = 2138{,}2 \text{ kN}}$ y $\boldsymbol{M_d = 188{,}7 \text{ mkN}}$.

**<u>Ejemplo 5</u>: Para el mismo soporte del ejemplo 4, determinar el valor de los esfuerzos de agotamiento correspondientes a una profundidad de fibra neutra de valor x = 450 mm.**

Esta profundidad de fibra neutra en rotura corresponde al dominio 5, porque $x > h$. Una vez determinado el dominio, ya se conocen al menos dos de las deformaciones de la sección:

- por un lado, a la profundidad de 450 mm la deformación unitaria es 0
- por otro lado, como en el dominio 5 el pivote es el punto $C$, la deformación de la fibra situada a una profundidad igual a $^3/_7$ de $h$ es la de agotamiento del hormigón en compresión simple, $\varepsilon_{c0} = 0{,}002$

A continuación se obtienen el resto de deformaciones y se traza el plano de agotamiento (Figura 40):

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{c0}}{x - {}^3/_7 \cdot h} \rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_{c0} \cdot \frac{x}{x - {}^3/_7 \cdot h} = 0{,}002 \cdot \frac{450}{450 - {}^3/_7 \cdot 350} = 0{,}0030 \quad \text{(compresión)}$$

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{x - d} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{s1} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - d}{x} = 0{,}0030 \cdot \frac{450 - 305}{450} = 0{,}000967 \quad \text{(compresión)}$$

$$\frac{\varepsilon_{sm}}{x - {}^h/_2} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{sm} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - {}^h/_2}{x} = 0{,}0030 \cdot \frac{450 - 175}{450} = 0{,}001833 \quad \text{(compresión)}$$

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_c}{x} \rightarrow \varepsilon_{s2} = \varepsilon_c \cdot \frac{x - d'}{x} = 0{,}0030 \cdot \frac{450 - 45}{450} = 0{,}0027 \quad \text{(compresión)}$$

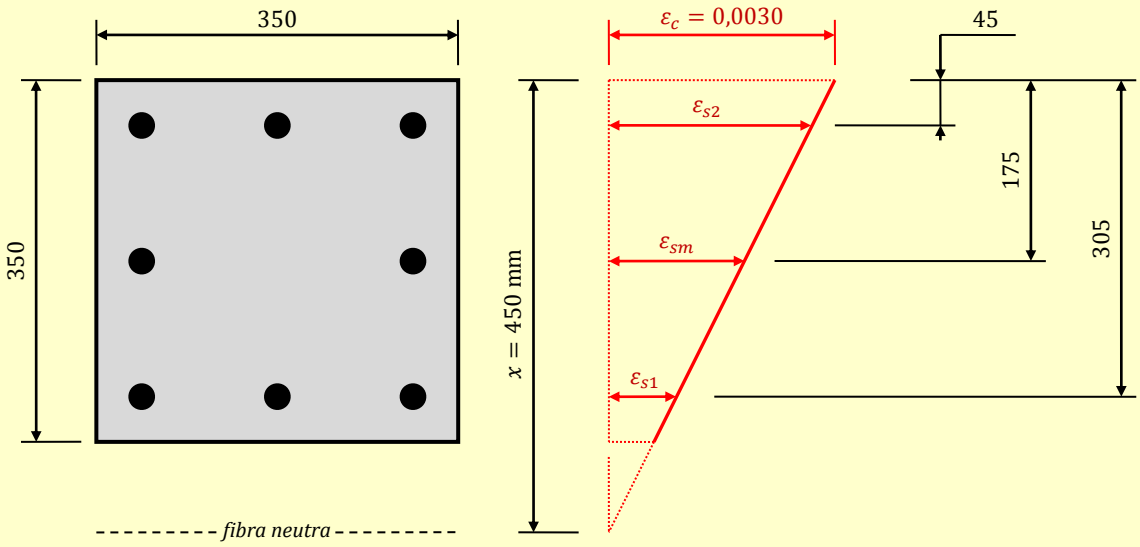



Figura 41. Plano de agotamiento del soporte del ejemplo 5

Como la deformación del límite elástico de cálculo del acero empleado es $\varepsilon_{yd} = 0{,}00217$, las únicas armaduras que plastifican en la sección son las de la cara más comprimida ($A_{s2}$) y su esfuerzo resultante será:

$$N_{s2,d} = A_{s2} \cdot f_{yd} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot \frac{500 \text{ N/mm}^2}{1{,}15} = 942{,}5 \text{ mm}^2 \cdot 435 \text{ N/mm}^2 = \mathbf{409988\ N}$$

Por otro lado, en los dos redondos situados a media profundidad, el esfuerzo será:

$$N_{sm,d} = A_{sm} \cdot \sigma_{sm,d} = A_{sm} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{sm} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot 200000 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2} \cdot 0{,}001833 =$$

$$= 628{,}3 \text{ mm}^2 \cdot 366{,}6 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2} = \mathbf{230335 \text{ N}}$$

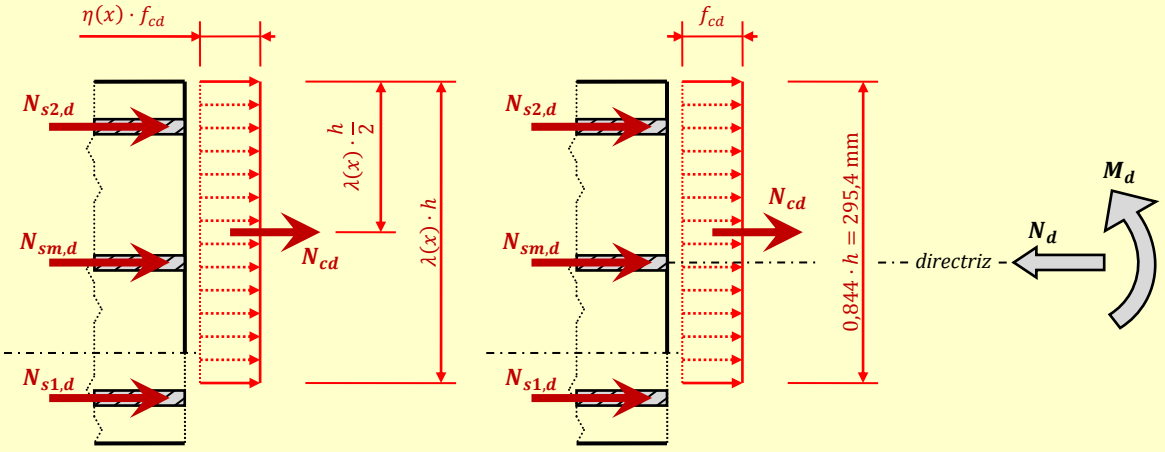



Figura 42. Representación de los esfuerzos y del bloque rectangular

Y, finalmente, el esfuerzo resultante en las armaduras de tracción $A_{s1}$ será:

$$N_{s1,d} = A_{s1} \cdot \sigma_{s1,d} = A_{s1} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s1} = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2 \text{ mm}^2 \cdot 200000 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2} \cdot 0{,}000967 = \mathbf{182280 \text{ N}}$$

A diferencia del ejemplo anterior, como la profundidad $x$ supera el canto $h$ de la sección, los parámetros del bloque rectangular habrá que calcularlos en función de $x$. Se reproducen nuevamente a continuación las ecuaciones del bloque rectangular de compresiones para dicha situación de la fibra neutra:

$$\eta(x) = 1 - (1 - \eta) \cdot \frac{h}{x} \qquad si \ h \leq x < \infty$$

$$\lambda(x) = 1 - (1 - \lambda) \cdot \frac{h}{x} \qquad si \ h \leq x < \infty$$

Para este hormigón convencional ($\eta = 1$ ; $\lambda = 0{,}8$) y tal que $x > h$, se tiene que:

$$\eta(x) = 1 - (1 - \eta) \cdot \frac{h}{x} = 1 - (1 - 1) \cdot \frac{350}{450} = 1$$

$$\lambda(x) = 1 - (1 - \lambda) \cdot \frac{h}{x} = 1 - (1 - 0{,}8) \cdot \frac{350}{450} = 0{,}844$$

La resultante de compresiones en el hormigón es:

$$N_{cd} = f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}844 \cdot h = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot b \cdot 0{,}844 \cdot h = \frac{35 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}}{1{,}5} \cdot 350 \text{ mm} \cdot 0{,}844 \cdot 350 \text{ mm} = \mathbf{2412433 \text{ N}}$$

Por último, la pareja de esfuerzos de agotamiento $N_d$ y $M_d$ se calculan a través de las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} N_{s1,d} + N_{sm,d} + N_{s2,d} + N_{cd} = \boldsymbol{N_d} \\ N_{s2,d} \cdot (d - d') + N_{sm,d} \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) + N_{cd} \cdot \left(d - 0{,}844 \cdot \frac{h}{2}\right) = \boldsymbol{M_d} + N_d \cdot \left(d - \frac{h}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 182280 + 230335 + 409988 + 2412433 = \boldsymbol{N_d} \\ 409988 \cdot (305 - 45) + 230335 \cdot \left(305 - \frac{350}{2}\right) + 2412433 \cdot \left(305 - 0{,}844 \cdot \frac{350}{2}\right) = \boldsymbol{M_d} + N_d \cdot \left(305 - \frac{350}{2}\right) \end{cases}$$

De donde resulta $\boldsymbol{N_d = 3235{,}0 \text{ kN}}$ y $\boldsymbol{M_d = 95{,}46 \text{ mkN}}$.

La utilidad de estos dos ejemplos ha sido:

- por un lado, ilustrar lo complejo del problema de la flexión-compuesta o compresión excéntrica cuando se trabaja con armaduras simétricas, sin que se desprecie la contribución de ninguno de los redondos
- y, por otro lado, presentar una sistematización fácilmente programable en un software de confección de *hojas de cálculo*, gracias a la cual podrían obtenerse los esfuerzos de agotamiento para una serie de valores de la profundidad $x$ en un soporte de dimensiones conocidas y con armado perfectamente determinado; si se representan gráficamente los esfuerzos obtenidos en un sistema de ejes $N_d - M_d$ se obtiene un ***diagrama de interacción***

La Figura 43 corresponde al diagrama de interacción del soporte de los ejemplos 4 y 5 cuando el armado lo forman 8 redondos de diferentes diámetros nominales: Ø12 a Ø25.

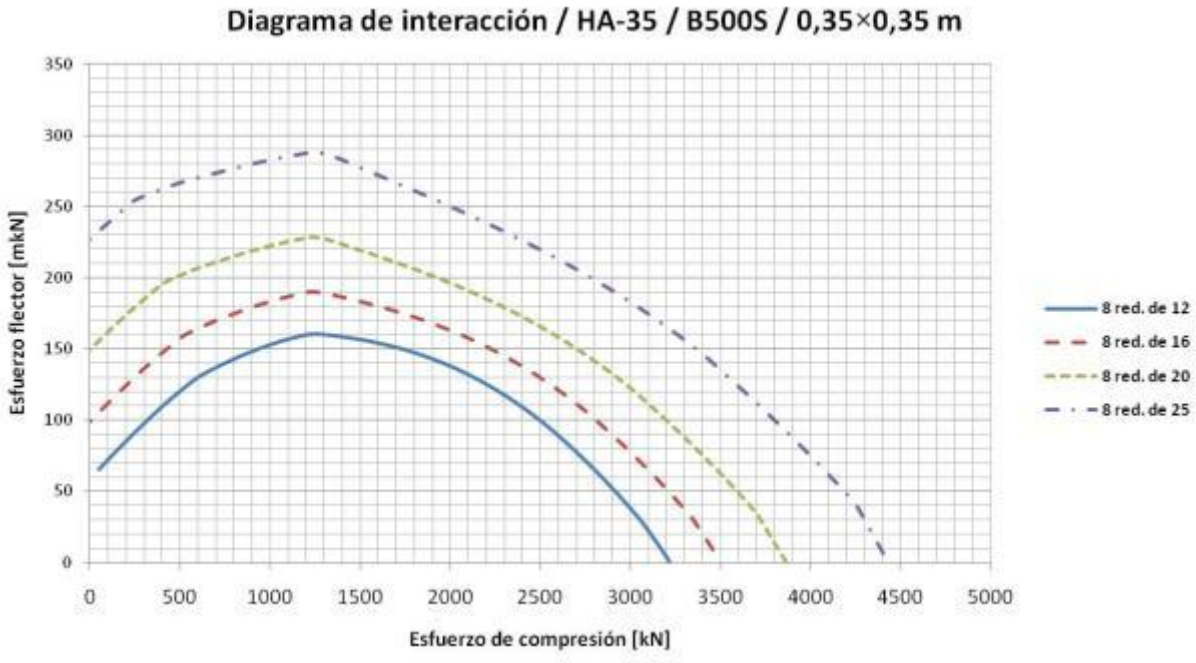



Figura 43. Ejemplo de diagrama de interacción para el soporte de los ejemplos 4 y 5

### 2.2.3 Flexión compuesta en secciones con $U_{s1} = U_{s2}$

El Anejo 7 de la Instrucción EHE-08 incluye un apartado para poder abordar el dimensionamiento y la comprobación de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a flexo-compresión y que cumplan las siguientes condiciones:

- las armaduras se disponen de forma simétrica en las caras perpendiculares al plano de flexión (ver Figura 44)
- la resistencia característica del hormigón no supera 50 N/mm$^2$

Las expresiones que recoge el Anejo 7 corresponden a un método simplificado. A continuación se incluyen las correspondientes al problema de dimensionamiento de las capacidades mecánicas de las armaduras principales de la sección en función de los esfuerzos de cálculo $N_d$ y $M_d$:

- Caso 1º: si $N_d < 0$ (sección traccionada, dominio 1)

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{M_d}{d - d'} - \frac{N_d}{2} \qquad [4.2.39.\text{a}]$$

- Caso 2º: si $0 \leq N_d \leq 0{,}5 \cdot U_0$

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{M_d}{d - d'} + \frac{N_d}{2} - \frac{N_d \cdot d}{d - d'} \cdot \left(1 - \frac{N_d}{2 \cdot U_0}\right) \qquad [4.2.39.\text{b}]$$

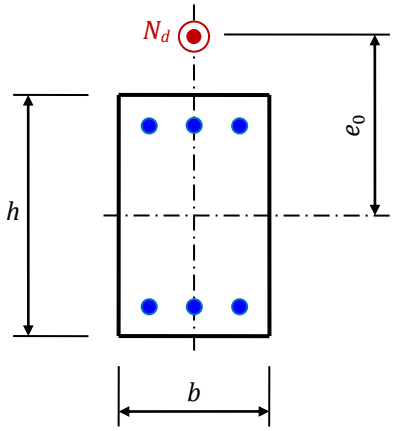



Figura 44. Sección sometida a flexión compuesta con $U_{s1} = U_{s2}$

- Caso 3º: si $N_d > 0{,}5 \cdot U_0$

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{M_d}{d - d'} + \frac{N_d}{2} - \alpha \cdot \frac{U_0 \cdot d}{d - d'} \qquad [4.2.39.\text{c}]$$

con:

$$\alpha = \frac{0{,}48 \cdot m_1 - 0{,}375 \cdot m_2}{m_1 - m_2} \leq 0{,}5 \cdot \left[1 - \left(\frac{d'}{d}\right)^2\right] \qquad [4.2.39.\text{c1}]$$

$$m_1 = (N_d - 0{,}5 \cdot U_0) \cdot (d - d') \qquad [4.2.39.\text{c2}]$$

$$m_2 = 0{,}5 \cdot N_d \cdot (d - d') - M_d - 0{,}32 \cdot U_0 \cdot (d - 2{,}5 \cdot d') \qquad [4.2.39.\text{c3}]$$

Un inconveniente de este procedimiento es que como no se calcula el plano de agotamiento, no se conocen las deformaciones unitarias en las armaduras de la sección. Si el agotamiento está muy próximo a una situación de compresión simple, el acero B500S no llega a plastificar y no puede aprovecharse su $f_{yd}$. Por esta razón, algunos autores proponen, del lado de la seguridad, limitar a 400 N/mm² la tensión de agotamiento de las armaduras de B500S que trabajen en compresión.

**Ejemplo 6: Sea un soporte cuadrado de sección 0,35×0,35 m construido con hormigón HA-35 y armado únicamente en las caras perpendiculares al plano de flexión. Se emplean redondos corrugados de acero B500S y con un recubrimiento mecánico $d' = 45$ mm. Está sometido a los siguientes esfuerzos:**

$$N_d = 2138{,}2 \text{ kN} \qquad M_d = 188{,}7 \text{ mKN}$$

**Dimensionar las armaduras de la sección si se disponen de manera simétrica.**

La capacidad $U_0$ de la sección vale:

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = \frac{35}{1{,}5} \cdot 350 \cdot (350 - 45) = \frac{35}{1{,}5} \cdot 350 \cdot 305 = 2490833 \text{ N} = 2490{,}8 \text{ kN}$$

Por lo tanto, el esfuerzo axil de cálculo $N_d$ supera la mitad de $U_0$ y se está en el tercero de los casos contemplados por las expresiones de dimensionamiento [4.2.39.c]. Los cálculos son los siguientes:

$$m_1 = (N_d - 0{,}5 \cdot U_0) \cdot (d - d') = 232{,}2 \text{ mkN}$$

$$m_2 = 0{,}5 \cdot N_d \cdot (d - d') - M_d - 0{,}32 \cdot U_0 \cdot (d - 2{,}5 \cdot d') = -64{,}2 \text{ mkN}$$

$$\alpha = \frac{0{,}48 \cdot m_1 - 0{,}375 \cdot m_2}{m_1 - m_2} = 0{,}4573 \leq 0{,}5 \cdot \left[1 - \left(\frac{d'}{d}\right)^2\right] = 0{,}4891 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0{,}4573$$

luego:

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{M_d}{d - d'} + \frac{N_d}{2} - \alpha \cdot \frac{U_0 \cdot d}{d - d'} = 458{,}7 \text{ kN}$$

Como $U_{s2}$ corresponde a una armadura principal en compresión (con $f_{yd} \not> 400$ N/mm²), su sección es:

$$A_{s2} \geq \frac{U_{s2}}{f_{yd}} = \frac{458700 \text{ N}}{400 \text{ N/mm}^2} = 1146{,}8 \text{ mm}^2$$

Finalmente, el armado a disponer en cada cara se elegirá de entre las siguientes alternativas:

- 6Ø16 (1206,4 mm²)
- 4Ø20 (1256,6 mm²)
- 3Ø25 (1472,6 mm²)
- 2Ø32 (1608,5 mm²)

Como puede concluirse, se obtienen el mismo número de redondos Ø20 (8 en total), pero con el inconveniente de que quedan peor repartidos en la sección y no es un esquema simétrico en todas las caras.

## 2.3 FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA EN SECCIÓN RECTANGULAR

Las secciones rectangulares en las que el plano de flexión no coincide con un plano de simetría están sometidas a ***flexión esviada***, lo que implica que no sólo se desconoce la posición de su fibra neutra sino que la orientación de la misma es también una incógnita (ver Figura 45). Este apartado trata del cálculo de aquellas secciones rectangulares armadas de manera simétrica y que además puedan estar sometidas a un esfuerzo de compresión. Esta situación puede presentarse en:

- vigas cargadas lateralmente además de por cargas gravitatorias (flexión esviada)
- la mayoría de los pilares o soportes, aún en los casos de que pertenezcan a pórticos planos (flexión compuesta esviada o flexo-compresión esviada)

En secciones con formas poligonales genéricas o con esquemas de armado no simétricos, la resolución del problema de flexión esviada hace necesario recurrir a un software. Pero si se trata de secciones rectangulares armadas simétricamente, se cuenta con varias alternativas, destacando las siguientes:

- los ***ábacos adimensionales*** en roseta,
- el ***método de Jiménez Montoya*** o de reducción a flexión recta (simple o compuesta),
- o bien el ***método de las hiperelipses***

Otros métodos destacables son el de ***superposición*** (desaconsejable por quedar habitualmente del lado de la inseguridad) y el ***método de Bresler*** recogido en la Instrucción rusa.

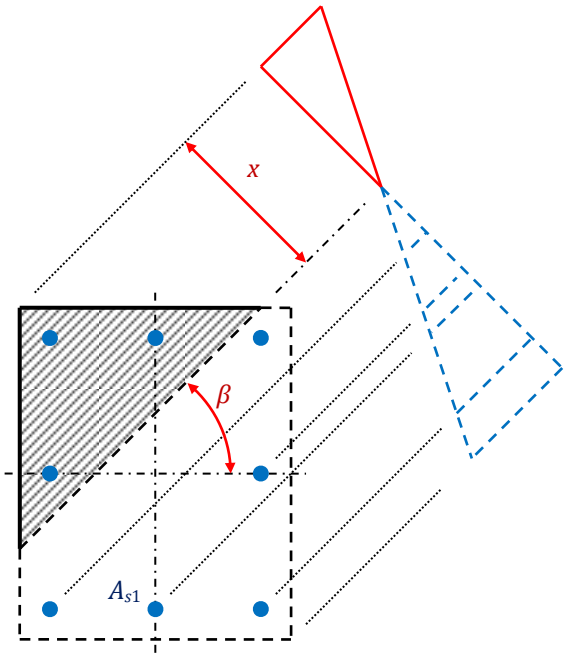



Figura 45. Sección rectangular sometida a flexión esviada

### 2.3.1 Ábacos adimensionales en roseta

Los ábacos en roseta son una extensión de los diagramas de interacción, manejando tres variables ($N_d$, $M_{xd}$ y $M_{yd}$) en lugar de dos ($N_d$ y $M_d$).

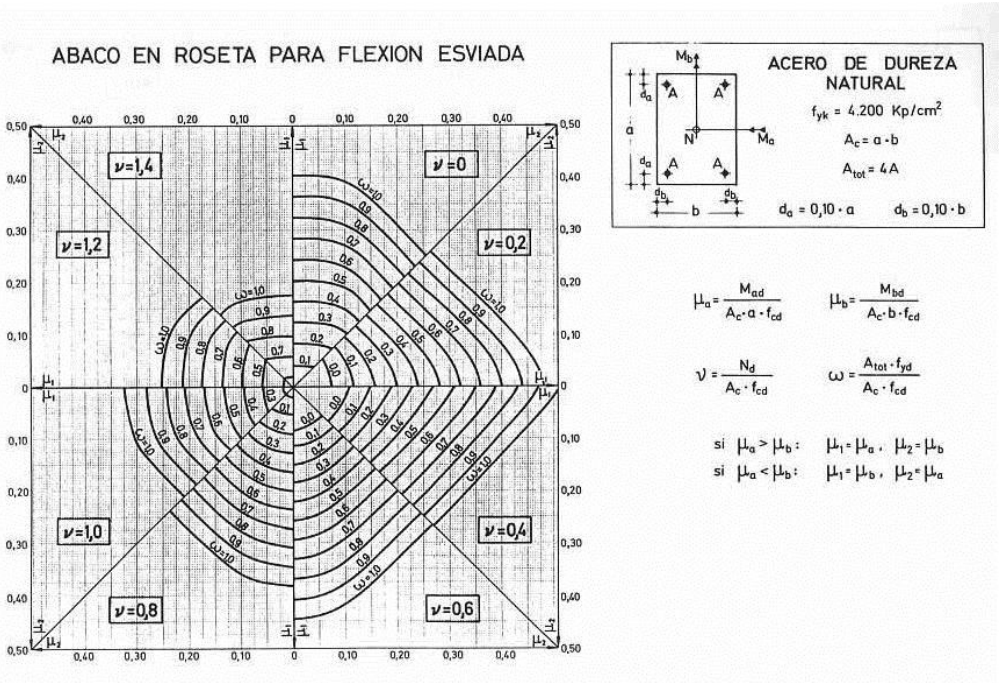



Figura 46. Ejemplo de ábaco en roseta, extraído de “Hormigón armado” de Jiménez Montoya et al.

La idea original de los ábacos en roseta se debe a Graser y Linse quienes diseñaron un formato gráfico de gran utilidad (Figura 46):

- los ejes de abscisas y ordenadas corresponden a las flexiones según $x$ e $y$
- el esfuerzo axial aparece en forma planos que cortan las curvas de interacción de flexiones
- cada ábaco está dividido en 8 partes, cada una de las cuales corresponde a un plano de corte diferente, es decir, diferentes valores del axil de compresión

Empleando variables adimensionales, en el mismo ábaco se representan varios "niveles" del esfuerzo de compresión: $\nu = 0$ ; $\nu = 0{,}2$ ; $\nu = 0{,}4$ … hasta $\nu = 1{,}4$. Cada ábaco se diseña para un esquema de armado concreto (4 redondos en cada esquina, 8 redondos en total, etc).

### 2.3.2 Método de Jiménez Montoya

Este método se debe a **Pedro Jiménez Montoya** (1.917-2.006) y figura en el *"Manual de Flexión-Compresión"* del CEB y en el Anejo 7 de la Instrucción EHE-08. Es aplicable a secciones armadas con el mismo número de barras en cada cara (4 redondos, 8, 12, 16, etc.) y ***consiste en la reducción del problema de flexión esviada a uno de flexión recta*** (Figura 47). Sea una sección rectangular de dimensiones $h \times b$ sometida a un esfuerzo de compresión $N_d$ y a flexiones $M_{xd}$ y $M_{yd}$:

$$e_x = \frac{M_{yd}}{N_d} \qquad e_y = \frac{M_{xd}}{N_d} \qquad [4.2.40]$$

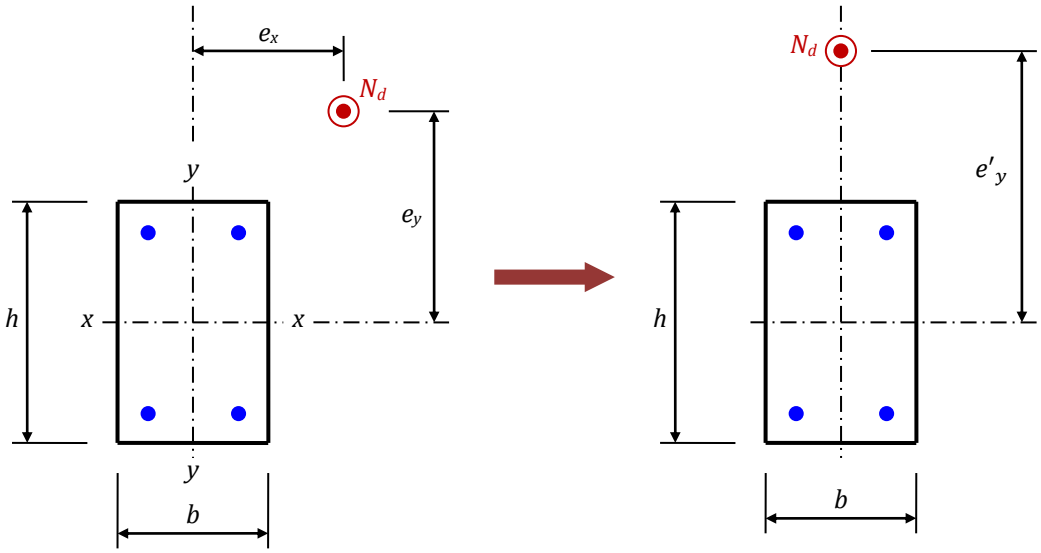



Figura 47. Reducción de la flexión esviada a flexión recta

Si se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\nu = \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b \cdot h} \qquad [4.2.41.\text{a}]$$

$$\mu_x = \frac{N_d \cdot e_y}{f_{cd} \cdot b \cdot h^2} \qquad [4.2.41.\text{b}]$$

$$\mu_y = \frac{N_d \cdot e_x}{f_{cd} \cdot b^2 \cdot h} \qquad [4.2.41.\text{c}]$$

entonces el ***momento flector adimensional reducido de flexión recta*** vale:

$$\mu = \mu_1 + \beta \cdot \mu_2 \qquad [4.2.42]$$

donde:

- $\mu_1$ es el mayor de los momentos $\mu_x$ y $\mu_y$
- $\mu_2$ es el menor de los momentos $\mu_x$ y $\mu_y$
- $\beta$ es un parámetro cuyo valor se recoge en la Tabla A.7.1 del Anejo 7 de la Instrucción.

Tabla A.7.1 de la Instrucción EHE-08

| $\nu$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | ≥0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 |

Por lo tanto, el flector $M_d$ concomitante con el axil $N_d$ en el problema reducido valdrá:

$$\begin{aligned} M_d &= \mu \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2 \qquad \text{si } \mu_1 = \mu_x \\ M_d &= \mu \cdot f_{cd} \cdot b^2 \cdot h \qquad \text{si } \mu_1 = \mu_y \end{aligned} \qquad [4.2.43]$$

Deben respetarse las siguientes observaciones:

- si la resolución del problema de flexión recta condujera a una capacidad adimensional $\omega$ superior a 0,6 habría que repetir los cálculos con un valor de $\beta$ aumentado en 0,1
- si la resolución condujera a un $\omega$ inferior a 0,2 el valor de $\beta$ se disminuiría en 0,1

Este procedimiento proporciona unos errores medios del orden del 6% del lado de la seguridad en términos de esfuerzos últimos de compresión.

### 2.3.3 Método de las hiperelipses

El método de las hiperelipses proporciona una mejor aproximación del momento adimensional reducido $\mu$ de flexión recta, por medio de la siguiente expresión:

$$\mu = \left({\mu_x}^{\alpha} + {\mu_y}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \qquad [4.2.44]$$

donde el exponente $\alpha$ se obtiene de:

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log(1+\beta)} \qquad [4.2.45]$$

siendo $\beta$ el coeficiente definido en el apartado anterior. La aplicación de esta corrección permite reducir los errores al 1%.

**<u>Ejemplo 7</u>: Una sección rectangular de 300×400 de hormigón HA-30 con armaduras B500S y proyectada con un recubrimiento mecánico de 50 mm está sometida a los esfuerzos siguientes: $N_d$ = 920 kN, $M_{xd}$ = 90 mkN y $M_{yd}$ = 55 mkN. Calcular la armadura necesaria si se desea armar dicha sección con 4 redondos. El esfuerzo $M_{xd}$ es de flexión alrededor del eje $x$-$x$ perpendicular a las caras de 400 mm.**

La resistencia de cálculo del hormigón es $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{30}{1{,}5} = 20\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$ y los esfuerzos adimensionales son:

$$\nu = \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b \cdot h} = \frac{920 \cdot 10^3}{20 \cdot 300 \cdot 400} = 0{,}383 \quad \rightarrow \quad \beta \approx 0{,}883 \quad \text{(Tabla A. 7.1)}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{f_{cd} \cdot b \cdot h^2} = \frac{90 \cdot 10^6}{20 \cdot 300 \cdot 400^2} = 0{,}0938 \qquad \mu_y = \frac{M_{yd}}{f_{cd} \cdot b^2 \cdot h} = \frac{55 \cdot 10^6}{20 \cdot 300^2 \cdot 400} = 0{,}0764$$

La flexión compuesta esviada puede reducirse a una flexo-compresión recta alrededor del eje $x$-$x$ (porque $\mu_x$ es el mayor de los flectores adimensionales):

$$\mu = \mu_1 + \beta \cdot \mu_2 = 0{,}0938 + 0{,}883 \cdot 0{,}0764 = 0{,}161$$

El problema original de flexo-compresión esviada se reduce a otro de flexión compuesta recta con esfuerzo axil $\boldsymbol{N_d = 920\ \mathbf{kN}}$ y esfuerzo flector calculado según [4.2.43]:

$$\boldsymbol{M_d} = \mu \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2 = 0{,}161 \cdot 20 \cdot 300 \cdot 400^2 = 154{,}6 \cdot 10^6\ \text{mmN} = \mathbf{154{,}6\ mkN} \quad (\text{porque } \mu_1 = \mu_x)$$

El dimensionamiento de las armaduras simétricamente dispuestas en flexión compuesta se puede hacer conforme al apartado 2.2.3 del presente tema. El canto útil es $d = 400 - d' = 350$ mm. Así pues:

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 20 \cdot 300 \cdot 350 = 2{,}1 \cdot 10^6\ \text{N} = 2100\ \text{kN}$$

Como el axil $N_d < 0{,}5 \cdot U_0$, este problema corresponde al caso 2º y se resuelve según la ecuación [4.2.39.b]:

$$\boldsymbol{U_{s1} = U_{s2}} = \frac{M_d}{d - d'} + \frac{N_d}{2} - \frac{N_d \cdot d}{d - d'} \cdot \left(1 - \frac{N_d}{2 \cdot U_0}\right) =$$

$$= \frac{154{,}6}{0{,}35 - 0{,}05} + \frac{920}{2} - \frac{920 \cdot 0{,}35}{0{,}35 - 0{,}05} \cdot \left(1 - \frac{920}{2 \cdot 2100}\right) = \mathbf{137{,}1\ kN}$$

De las dos armaduras principales, $A_{s2}$ es la armadura comprimida y su capacidad $U_{s2}$ se calcula con la tensión limitada por $f_{yd} \not> 400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$:

$$A_{s2} = \frac{U_{s2}}{f_{yd}} = \frac{137100\ \text{N}}{400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}} = 342{,}8\ \text{mm}^2 \quad \rightarrow \quad 2\ \text{redondos de Ø16} \ \ (402{,}1\ \text{mm}^2)$$

La armadura del soporte estaría entonces compuesta por 4Ø16, que tienen una capacidad mecánica de 321,7 kN (con $f_{yd} = 400$ N/mm²) y una capacidad adimensional respecto de la sección bruta de valor:

$$\omega = \frac{U_{s,total}}{A_c \cdot f_{cd}} = 0{,}134$$

Como el dimensionamiento ha conducido a un valor $\omega < 0{,}2$, entonces debe volver a resolverse el problema reducido de flexo-compresión recta, restando 0,1 al valor inicial de $\beta$. Por lo tanto:

$$\beta = 0{,}883 - 0{,}1 = 0{,}783 \quad \rightarrow \quad \mu = \mu_1 + \beta \cdot \mu_2 = 0{,}0938 + 0{,}783 \cdot 0{,}0764 = 0{,}154$$

$$N_d = 920\ \text{kN} \qquad M_d = \mu \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h^2 = 147{,}8 \cdot 10^6\ \text{mmN} = 147{,}8\ \text{mkN}$$

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{147{,}8}{0{,}35 - 0{,}05} + \frac{920}{2} - \frac{920 \cdot 0{,}35}{0{,}35 - 0{,}05} \cdot \left(1 - \frac{920}{2 \cdot 2100}\right) = 114{,}4\ \text{kN} \quad \rightarrow \quad A_{s1} = A_{s2} = 286{,}0\ \text{mm}^2$$

Esta revisión de los cálculos vuelve a conducir a una armadura de 2Ø16 en cada cara y 4Ø16 en total.

## 3. DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES EN T

En este apartado van a estudiarse las secciones en T sometidas a flexión simple y orientadas de manera que la zona de máximas compresiones es la cabeza correspondiente al ala de la T. No obstante, se parte del caso general de una sección en doble T (Figura 48) trabajando en flexión pura y en la que una de las alas trabaja en compresión y la otra en tracción.

### 3.1 EL ARRASTRE POR CORTANTE Y EL ANCHO EFICAZ DEL ALA

Un primer aspecto que debe estudiarse en este tipo de geometrías es el del ***ancho eficaz*** de las alas y ello se debe al efecto conocido como ***arrastre por cortante***. El origen de este fenómeno es la forma de transmisión de las tensiones normales $\sigma$ desde el ***alma*** o ***nervio*** hasta el ala cuando la sección trabaja a flexión; dicha transmisión se produce necesariamente por rasante a través de la interfaz ala-alma y como consecuencia, ***la distribución real de tensiones normales σ en cada fibra del ala no será uniforme***: en cada una de las fibras la tensión normal disminuirá desde el eje de la pieza hacia los bordes laterales.

Aunque existen modelos propuestos para determinar la variación de la tensión normal $\sigma$ a lo largo de una fibra de la sección, en la práctica habitual es posible abordar el cálculo de una manera simple: si la anchura $b$ del ala es excesiva, ***se tomará en los cálculos un valor reducido llamado ancho eficaz*** $\boldsymbol{b_e}$ en el cual sí ***se podrá suponer que las tensiones normales σ serán uniformes*** a todo lo largo de una misma fibra. El valor de la anchura eficaz depende de muchos factores, entre los que cabe destacar los siguientes:

- las condiciones de sustentación de la viga (apoyada o continua)
- el tipo de carga (repartida o concentrada)
- la relación entre el espesor de las alas y el canto de la pieza
- la longitud de la viga entre puntos de flector nulo

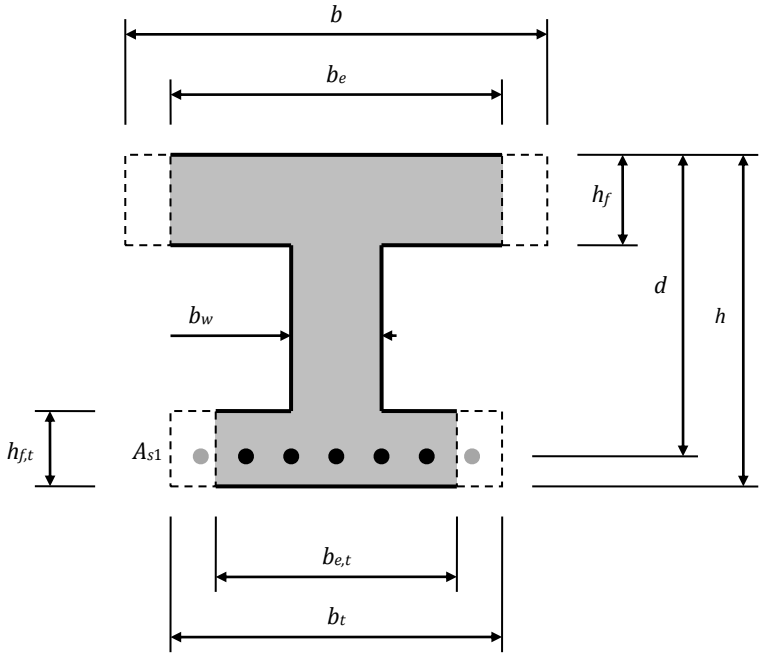



Figura 48. Sección en doble T. Anchura eficaz de las alas

Los comentarios del apartado 18.2.1 de la Instrucción EHE-08 recogen el siguiente procedimiento aproximado:

- ancho eficaz del ala comprimida en vigas en T:

$$b_e = b_w + \frac{\ell_0}{5} \leq b \qquad [4.3.1]$$

- ancho eficaz del ala comprimida en vigas en L:

$$b_e = b_w + \frac{\ell_0}{10} \leq b \qquad [4.3.2]$$

- ancho eficaz del ala traccionada en vigas en T:

$$b_{e,t} = b_w + 8 \cdot h_{f,t} \leq b_t \qquad [4.3.3]$$

- ancho eficaz del ala traccionada en vigas en L:

$$b_{e,t} = b_w + 4 \cdot h_{f,t} \leq b_t \qquad [4.3.4]$$

- en las proximidades de un apoyo libre, en una sección situada a una distancia $a$ de dicho apoyo, el vuelo eficaz de un ala no será superior al valor de $a$

El significado de los parámetros empleados en las expresiones anteriores es el siguiente:

- $b_e$ es el ancho eficaz del ala comprimida
- $b_w$ es la anchura del alma o nervio de la sección
- $b$ es el ancho del ala comprimida
- $b_{e,t}$ es el ancho eficaz del ala traccionada
- $h_{f,t}$ es el espesor del ala traccionada
- $b_t$ es el ancho del ala traccionada
- $\ell_0$ es la distancia entre puntos de esfuerzo flector nulo, los cuales pueden suponerse fijos para todas las combinaciones de cargas; la Instrucción EHE-08 sugiere situar los puntos de flector nulo a partir de las leyes de flexión producidas por las cargas permanentes; no obstante, para los casos de vigas continuas o pertenecientes a entramados podrán tomarse los valores definidos en el Eurocódigo 2 y que se recogen en la Figura 49:

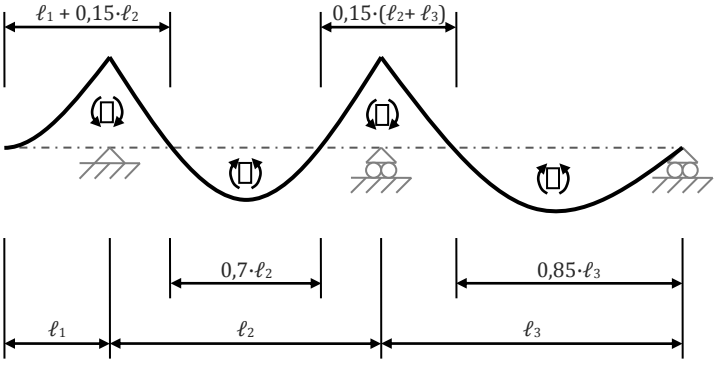



Figura 49. Longitudes aproximadas entre puntos de flector nulo en vigas continuas

## 3.2 FLEXIÓN PURA EN SECCIONES EN T CON EL ALA COMPRIMIDA

Las expresiones que se presentan en este apartado son aplicables a secciones en T sometidas a flexión pura, de forma que la zona de compresiones comprenda el ala de la T; además son aplicables a hormigones convencionales ($f_{ck} \leq 50$ MPa) por lo que la tensión del bloque rectangular será $f_{cd}$ y su canto valdrá $\lambda(x) \cdot h = 0{,}8 \cdot x$. A la hora de formular las ecuaciones de equilibrio en una sección en T, cabe distinguir dos situaciones:

$$\begin{aligned} &\text{si } M_d \leq f_{cd} \cdot b \cdot h_f \cdot \left(d - 0{,}5 \cdot h_f\right) \quad \rightarrow \quad \text{Caso 1º} \\ &\text{si } M_d > f_{cd} \cdot b \cdot h_f \cdot \left(d - 0{,}5 \cdot h_f\right) \quad \rightarrow \quad \text{Caso 2º} \end{aligned} \qquad [4.3.5]$$

- **Caso 1º:** el canto del bloque rectangular no es superior al espesor del ala ($0{,}8 \cdot x \leq h_f$)

  Como se desprende de la Figura 50, este caso equivale exactamente al de una sección rectangular de ancho igual a $b_e$ y, por lo tanto, ***las expresiones de dimensionamiento son las mismas que las que se aplican a secciones rectangulares de hormigón armado***, empleando como ancho de la sección el ancho de la cabeza comprimida (el eficaz, cuando proceda).

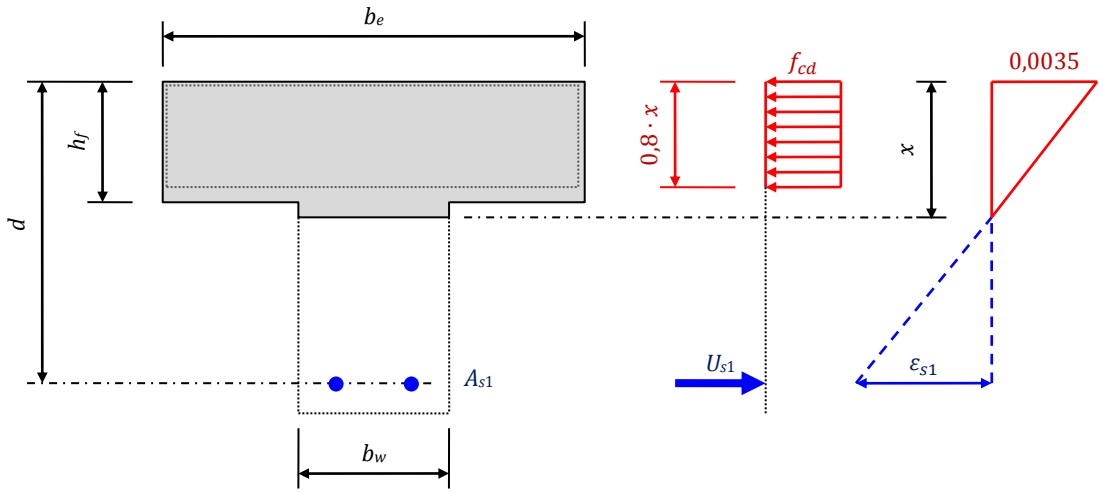



Figura 50. Viga en T con ala comprimida, caso 1º: bloque rectangular de canto inferior al espesor del ala

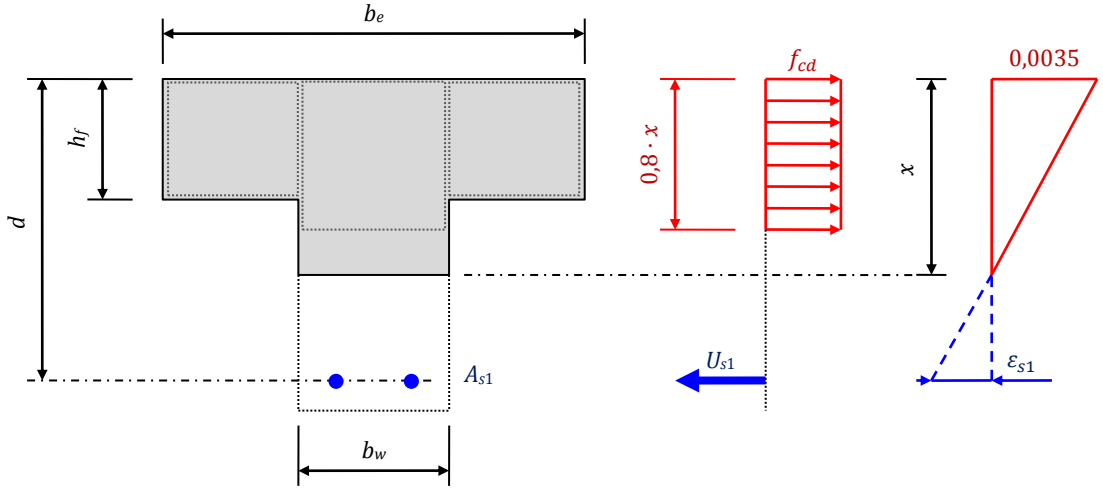



Figura 51. Viga en T con ala comprimida, caso 2º: bloque rectangular de canto superior al espesor del ala

- **Caso 2º:** el canto del bloque rectangular es superior al espesor del ala ($0{,}8 \cdot x > h_f$)

  En este segundo caso, la resultante del bloque comprimido de tensiones se obtiene integrando dos regiones rectangulares (ver Figura 51):

  - una con anchura $b_w$ y canto $0{,}8 \cdot x$
  - la otra con anchura $(b - b_w)$ y canto $h_f$

  Las expresiones de dimensionamiento y comprobación para este caso se recogen en el Anejo 7 de la Instrucción EHE-08.

**<u>Ejemplo 8</u>: Calcular el armado de la sección más solicitada a flexión en la siguiente viga de HA-30 con acero B500S y recubrimiento $d' = 45\ mm$. El valor de la carga permanente $g_k$ incluye el peso propio.**

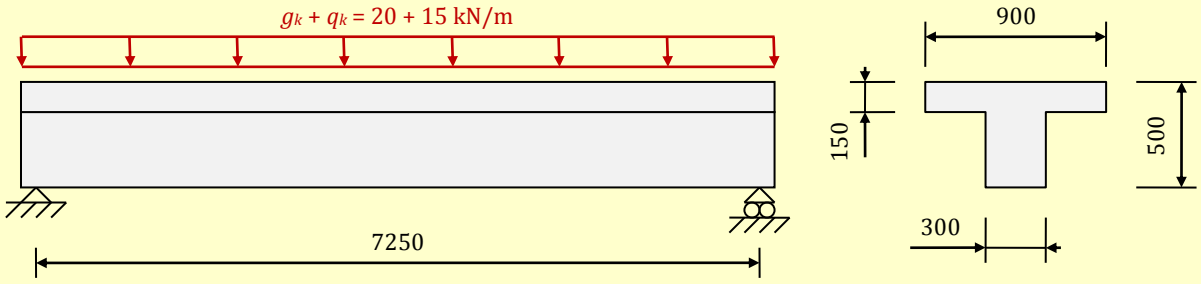



Figura 52.a Viga en T de 7,25 m de vano

Puesto que se está comprobando un ELU, la situación no es accidental y ambas acciones poseen efecto desfavorable, los coeficientes de mayoración de acciones son $\gamma_G = 1{,}35$ y $\gamma_Q = 1{,}5$. El esfuerzo flector máximo de cálculo debido a las cargas distribuidas se produce en el centro de vano:

$$M_{d,max} = \gamma_G \cdot \frac{g_k \cdot L^2}{8} + \gamma_Q \cdot \frac{q_k \cdot L^2}{8} = 1{,}35 \cdot \frac{20 \cdot 7{,}25^2}{8} + 1{,}5 \cdot \frac{15 \cdot 7{,}25^2}{8} = 325{,}2 \text{ mkN}$$

La distancia entre puntos de momento flector nulo es la luz entre apoyos ($\ell_0$ = 7250 mm); el ancho eficaz de la viga podría llegar a valer:

$$b_e = b_w + \frac{\ell_0}{5} = 300 + \frac{7250}{5} = 1750 \text{ mm}$$

por lo que se comprueba que es posible contar con el ancho íntegro del ala ($b$ = 900 mm). La resistencia a compresión de cálculo del hormigón y el valor del canto útil son los siguientes:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{30}{1{,}5} = 20\ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2} \qquad d = h - d' = 500 - 45 = 455 \text{ mm}$$

Para saber si la viga en T puede dimensionarse como una sección rectangular de ancho 900 mm, se determina a continuación el valor del momento flector $M_{d,T}$ según la ecuación [4.3.5]:

$$M_{d,t} = f_{cd} \cdot b \cdot h_f \cdot \left(d - 0{,}5 \cdot h_f\right) = 20 \cdot 900 \cdot 150 \cdot (455 - 0{,}5 \cdot 150) = 1026 \cdot 10^6 \text{ mmN} = 1026 \text{ mkN}$$

Por consiguiente, como el momento flector máximo de cálculo, que vale 325,2 mkN es inferior a 1026 mkN, la sección en T se puede dimensionar exactamente igual que una sección rectangular cuya anchura sea igual a la del ala comprimida de la T:

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 20 \cdot 900 \cdot 455 = 8190 \cdot 10^3 \text{ N} = 8190 \text{ kN}$$

$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} = \frac{325{,}2 \text{ mkN}}{8190 \text{ kN} \cdot 0{,}455 \text{ m}} = 0{,}0873 \ \ (< 0{,}375)$$

El momento flector máximo de cálculo aplicado es inferior al momento límite para una viga isostática y no es necesario tener en cuenta la armadura de compresión en el agotamiento, por lo que la armadura de tracción se dimensiona como sigue:

$$U_{s1} = U_0 \cdot \omega = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d}\right) =$$

$$= U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_d}{U_0 \cdot d}}\right) = 8190 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}0873}\right) = 749{,}0 \text{ kN}$$

$$A_{s1} = \frac{U_{s1}}{f_{yd}} = \frac{749000 \text{ N}}{435 \ {}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}} = 1722{,}7 \text{ mm}^2$$

El armado principal de tracción pueden formarlo entonces 6 redondos Ø20 (1885 mm²) o bien 4 redondos Ø25 (1963,5 mm²). La Figura 52.b representa un detalle del armado principal del nervio de la T con la segunda de las dos soluciones consideradas, en el cual se indican las distancias libres entre los redondos.

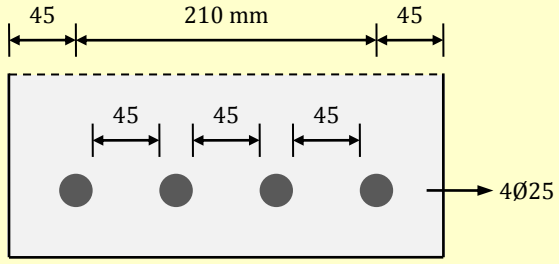



Figura 52.b Detalle de la armadura a disponer en el nervio de la T

# CAPÍTULO 5
# EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES

## 1. ANÁLISIS DE REGIONES D

Los procedimientos de análisis de situaciones de agotamiento frente a solicitaciones normales que se han descrito hasta el momento son sólo aplicables cuando se pueda asumir la hipótesis de Navier-Bernouilli ($2h < \ell_0$), reflejada en la Figura 27 que se recoge en el tema anterior.

Al conjunto de secciones de un elemento de hormigón que entren dentro de este rango de validez, se les denomina ***regiones B*** (de Bernouilli) y son zonas en las que existe una perfecta continuidad geométrica y mecánica. En este tipo de secciones es admisible la hipótesis de Navier, por la que las secciones originalmente planas permanecerán planas tras la deformación. Por el contrario, aquellas regiones en las que no exista tal continuidad se denominan ***regiones D***. A modo de ejemplo, obsérvese la siguiente figura.

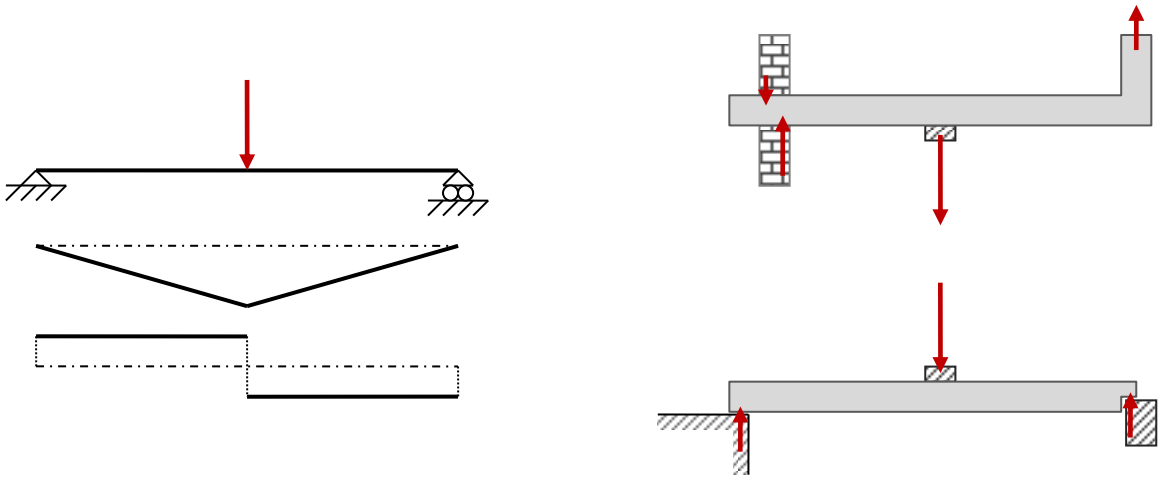


Figura 53. Influencia de los efectos locales en distintos detalles de apoyo en viga isostática

El esquema estructural representado en la izquierda, con sus diagramas de flectores y cortantes es una idealización de una situación real como cualquiera de las dos representadas en la derecha. Sin embargo, esos diagramas no explicarían los "inesperados" esfuerzos flectores de negativos que pueden producirse al apoyar un tabique sobre la viga en su extremo izquierdo (a la derecha, arriba), como tampoco son suficientes para dimensionar el armado del apoyo derecho *"a media madera"* (a la izquierda, abajo). En resumen, los diagramas de flectores y cortantes de un modelo ideal no serán suficientes para evaluar cómo los efectos locales de carga puedan llegar a comprometer la integridad de la pieza (*"no es lo mismo apoyar una carga que colgarla"*). Por ello, es necesario acotar en qué partes de la viga serán válidos los diagramas de esfuerzos clásicos.

En el caso del hormigón, al no comportarse de manera equirresistente, es necesario prestar una especial y cuidadosa atención no sólo al cálculo de las armaduras sino a su correcta disposición. Muchos fallos estructurales no provienen de errores del análisis estructural o del cálculo, sino de malas concepciones del armado de las piezas. En palabras del profesor Eduardo Torroja, ***"las estructuras de hormigón armado no trabajan como se las calcula sino como se las arma"***. Por consiguiente, para diseñar correctamente las armaduras deben distinguirse las zonas de discontinuidad en el modelo estructural.

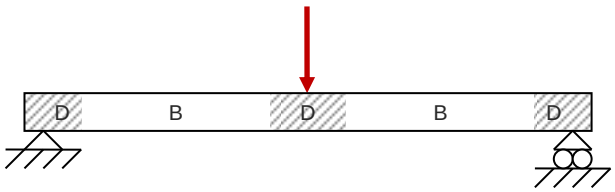



Figura 54. Regiones B y D en una viga apoyada

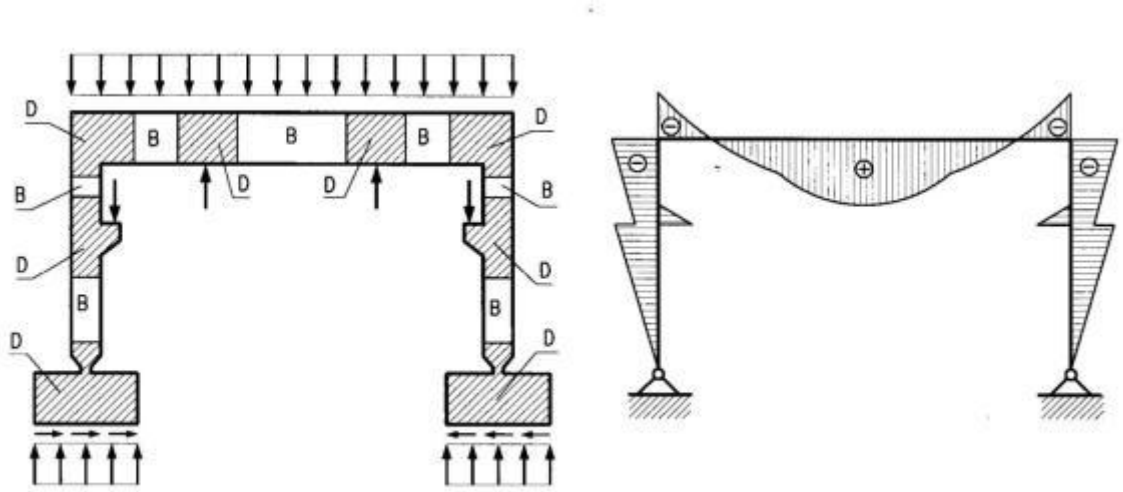



Figura 55. Regiones B y D en un pórtico

Las discontinuidades pueden ser de ***carácter mecánico*** (cargas concentradas, reacciones de apoyo, etc.) o de ***carácter geométrico*** (variación brusca del canto, nudos de pórticos, quiebros de trazado en losas, etc.). En ocasiones, es la estructura en su totalidad la que puede constituir íntegramente una región D; éste es el caso de las vigas pared y las ménsulas cortas. La filosofía del estudio de las regiones D podría resumirse en lo siguiente:

- visualizar el flujo de tensiones que discurre por el interior de la pieza
- disponer armaduras de acuerdo con el flujo de las tensiones de tracción
- comprobar que el hormigón puede absorber el flujo de compresiones

A nivel de cálculo, el estudio puede abordarse mediante un análisis lineal en el campo elástico, del que se obtendría el campo de tensiones principales (de tracción y compresión) y deformaciones. Este procedimiento necesitará casi con toda seguridad de un software de análisis estructural basado en la Teoría de la Elasticidad y el Método de Elementos Finitos. Sin embargo, existe un procedimiento alternativo denominado ***método de las bielas y los tirantes*** (***"strut and tie method"***).

## 2. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LAS BIELAS Y LOS TIRANTES

Los antecedentes del método de bielas y tirantes aparecen a finales del siglo XIX, es decir, casi al mismo tiempo que comenzaron a redactarse las primeras obras referenciales sobre la tecnología del hormigón. El ejemplo clásico es el de la analogía de la celosía que se emplea para el estudio del esfuerzo cortante en vigas de hormigón armado y que apareció por primera vez en el artículo *"Die Bauweise Hennebique"* escrito por **Wilhelm Ritter** en 1.899 y en la obra *"Der Eisenbetonbau"* de **Emil Mörsch** en 1.902. Sin embargo, la estructura conceptual con la que se estudia actualmente aparece por primera vez en 1.987 en el artículo *"Toward a Consistent Design of Structural Concrete"* escrito por **J. Schlaich**, **K. Schäfer** y **M. Jennewein**. El método ha sido adoptado por el CEB-FIB en el Código Modelo de 1.990 y en la edición del Eurocódigo 2 de 2.004. La *Comisión Permanente del Hormigón* española introdujo este método en la Instrucción en 1.998.

El método consiste en modelizar cada región D de una estructura remplazándola por una celosía de barras articuladas isostáticas que representa el comportamiento de dicha región D. Las barras que absorben compresiones se denominan **bielas** y representan los campos de tensiones canalizables por el hormigón; las barras que absorben tracciones se denominan **tirantes** y representan la disposición aproximada de las armaduras de acero. Cuando la región D se ha "extraído" de una estructura más grande, el modelo de bielas y tirantes debe equilibrar las solicitaciones exteriores existentes en el contorno de dicha región. Si se trata de una región D que modeliza una estructura completa, el modelo estará en equilibrio con las acciones y reacciones externas. La Figura 56 da una idea de la aplicación al caso de una viga de gran canto.

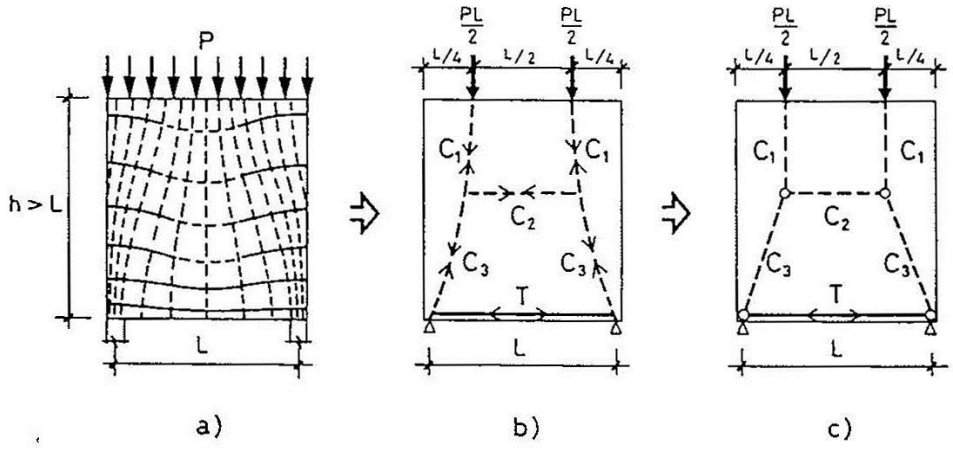



Figura 56. Aplicación del modelo de bielas y tirantes a una viga de gran canto

La Figura 56.a representa la red de isostáticas de tensión (tracciones con trazo continuo y compresiones con trazo discontinuo); la Figura 56.b muestra cómo puede simplificarse el flujo de tensiones si se remplaza la carga uniformemente repartida por dos puntuales aplicadas a un cuarto de la luz; la Figura 56.c corresponde al modelo de bielas y tirantes que se adopta para el análisis. Para aplicar correctamente el método de bielas y tirantes, deben tenerse en cuenta las siguientes observaciones:

- a la hora de establecer el modelo, las bielas (representadas habitualmente como líneas discontinuas) deben orientarse según las tensiones principales de compresión mientras que los tirantes deben orientarse siguiendo las orientaciones de las tensiones principales de tracción, adaptándose a las ubicaciones previstas del sistema de armado

- ello requiere conocer de antemano los campos de tensiones principales
- estrictamente, ello implica el haber realizado previamente un análisis lineal mediante la teoría de la elasticidad; sin embargo, existe una amplia bibliografía con colecciones que recopilan los modelos de bielas y tirantes más adecuados para los casos prácticos más frecuentes
- es recomendable que el modelo de bielas y tirantes sea isostático, a fin de que pueda resolverse simplemente al plantear el equilibrio, sin necesidad de acudir a la compatibilidad de deformaciones (suele recurrirse a modelos de celosía isostática, como en al caso del comportamiento de las vigas frente a esfuerzo cortante)
- a su vez, de entre todos los modelos isostáticos posibles, los más adecuados serán aquellos en los que los tirantes sean más cortos (cuanto menor sea su longitud, menores deformaciones se estarán exigiendo de la estructura)

En la Figura 57, los modelos a) y b) representan sendas alternativas que no serían apropiadas por uno o por otro motivo: en el caso de a), el brazo mecánico del tirante-biela no corresponde con la realidad; en el caso de b), los tirantes son demasiado largos.

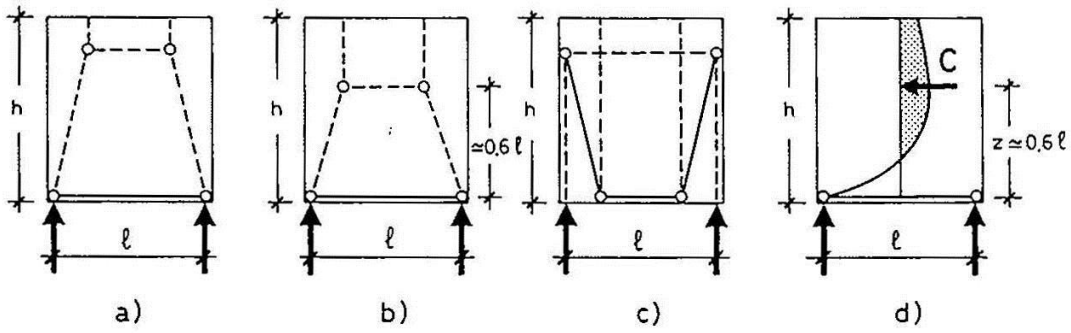



Figura 57. Distintas alternativas de celosía para aplicación del método de bielas y tirantes

En resumen, el proceso de aplicación práctica podría dividirse en los siguientes pasos:

1. Determinación de las fuerzas aplicadas en la región D (acciones exteriores, reacciones y/o esfuerzos de continuidad en el contorno)
2. Determinación de la distribución de tensiones, bien mediante un análisis lineal o bien mediante consulta de bibliografía especializada
3. Establecimiento de un modelo de barras articuladas que, adaptándose a las isostáticas, esté en equilibrio con las fuerzas aplicadas
4. Cálculo de los esfuerzos que actúan sobre las barras del modelo
5. Comprobación de bielas de hormigón, de los tirantes y de los nudos

Por último, es necesario puntualizar que el método de bielas y tirantes es adecuado para la comprobación de Estados Límite Últimos, pero no para los de Servicio. No obstante, el Estado Límite de Fisuración puede suponerse satisfecho si se respetan las limitaciones que se indican a continuación:

a) en el caso de no realizar una comprobación expresa de la compatibilidad de deformaciones, debe limitarse la deformación de los tirantes-armaduras al 2‰, es decir, que ***la tensión de las armaduras de acero no superará*** **400 N/mm²**

b) la capacidad de las bielas de hormigón se limitará a un valor reducido $f_{1cd}$ de la resistencia a compresión de cálculo del hormigón $f_{cd}$, definido en el apartado 40.3 de la Instrucción EHE-08 y que se resume en la tabla siguiente, para casos de compresión uniaxial:

Tabla 5.1 Capacidad de las bielas de hormigón

| Caso | $f_{1cd}$ |
|---|---|
| Biela sometida a compresión uniaxial<br>(p. ej. el cordón comprimido de una viga, macizo sometido a carga concentrada) | $f_{cd}$ |
| Biela acompañada de fisuras paralelas, cosidas por armadura transversal suficientemente anclada | $0{,}70 \cdot f_{cd}$ |
| Biela que transmite compresión a través de fisuras con abertura controlada por refuerzo<br>(p. ej. las bielas con compresión oblicua frente a $V_d$) | $0{,}60 \cdot f_{cd}$ |
| Biela acompañada de fisuras de gran abertura<br>(p. ej. en la unión alma-ala traccionada) | $0{,}40 \cdot f_{cd}$ |
| Biela con compresión oblicua debida a punzonamiento | $0{,}30 \cdot f_{cd}$ |

c) la capacidad de los nudos se recoge en la siguiente tabla:

Tabla 5.2 Capacidad de los nudos de hormigón

| Caso | |
|---|---|
| Nudo que conecta únicamente bielas comprimidas y con estado de tensiones biaxial | $f_{cd}$ |
| Nudo que conecta únicamente bielas comprimidas y con estado de tensiones triaxial<br>(p. ej. nudo bajo una carga concentrada) | $3{,}30 \cdot f_{cd}$ |
| Nudo con tirante anclado<br>(p. ej. apoyo de viga de gran canto, zona de aplicación de carga en una ménsula corta) | $0{,}70 \cdot f_{cd}$ |

A la hora de evaluar la capacidad de la biela, puede surgir la cuestión de si se puede tomar íntegramente el ancho $b$ del elemento de hormigón para el cálculo, sin que sea necesario descontar el espacio ocupado por las vainas de armaduras activas. Únicamente en el caso de que la suma de los diámetros de las vainas supere $^1/_6$ del ancho total $b$ deberá reducirse éste conforme a lo indicado en el apartado 40.3.5 de la Instrucción EHE-08:

$$b_0 = b - \eta \cdot \sum \emptyset \qquad [5.2.1]$$

donde $\sum \emptyset$ es la suma de los diámetros de las vainas y el parámetro $\eta$ vale 0,5 en el caso de armaduras activas adheridas y tendones inyectados o bien 1,0 en el caso de armadura activa no adherente.

# 3. MODELOS DE BIELAS Y TIRANTES

## 3.1 CASO DE CARGAS CONCENTRADAS SOBRE MACIZOS

Este tipo de elementos se tratan en el artículo 61º de la Instrucción EHE-08. Sea un macizo de hormigón, como el representado en la Figura 58 y cuya sección transversal es rectangular de sección $A_c$ y dimensiones $a \times b$ y que recibe una carga concentrada transmitida a través de una placa de superficie $A_{c1}$ de dimensiones $a_1 \times b_1$.

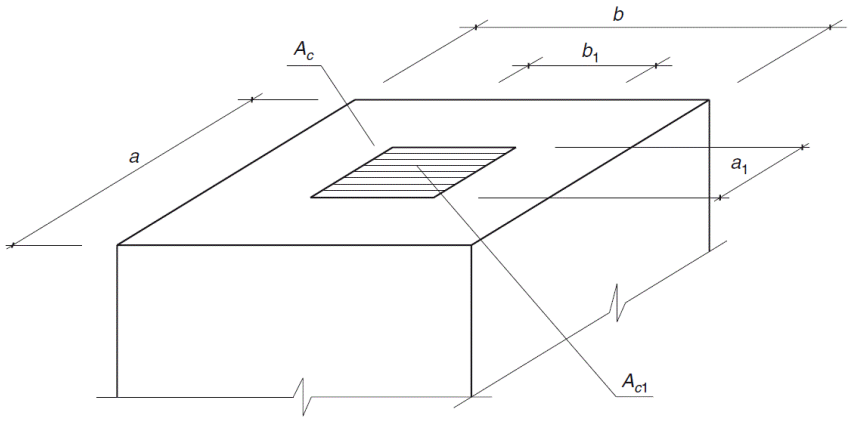



Figura 58. Caso de macizo que recibe una carga concentrada

Tal y como muestra la Figura 59, la carga concentrada necesita una profundidad aproximadamente igual a la anchura del macizo para convertirse en una distribución uniforme de tensiones extendida a toda la sección del macizo. Debido a este efecto de difusión de tensiones, se genera un campo de tensiones de tracción orientado de manera transversal. De no disponer una armadura de acero que sea capaz de absorber dicho campo de tracciones podría generarse una fisuración en forma de grietas paralelas a la dirección de la carga concentrada o incluso podría llegarse a la rotura del macizo.

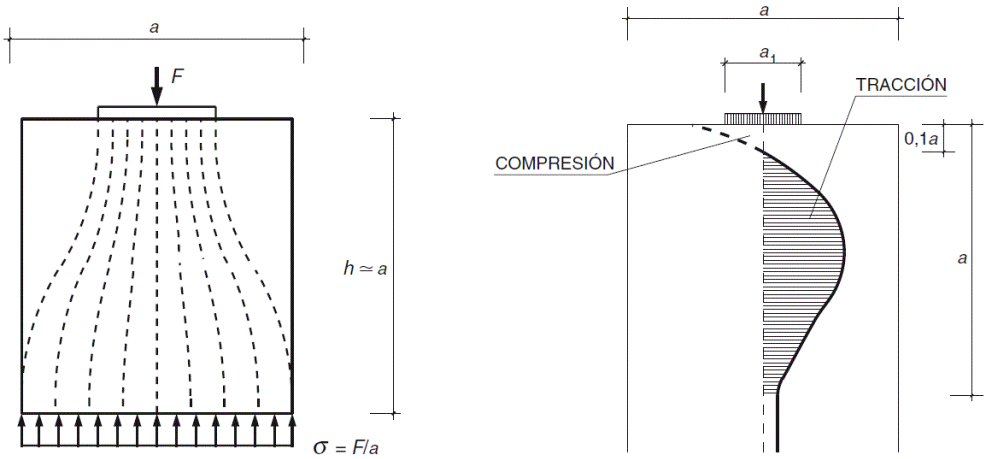



Figura 59. Difusión de tensiones con cargas concentradas sobre macizos

La fuerza máxima de compresión $N_d$ que puede actuar en ELU sobre una superficie de área $A_{c1}$, situada concéntrica y homotéticamente sobre otra área $A_c$ es la siguiente:

$$N_d \leq A_{c1} \cdot f_{3cd} \qquad [5.3.1]$$

Puesto que el hormigón situado bajo la placa que transmite la carga concentrada constituye un nudo sometido a un estado triaxial de tensiones (ver Tabla 5.2), su resistencia será:

$$f_{3cd} = \sqrt{\frac{A_c}{A_{c1}}} \cdot f_{cd} \leq 3{,}3 \cdot f_{cd} \qquad [5.3.2]$$

Para que este planteamiento sea válido debe cumplirse además que:

- el macizo de hormigón no posea huecos internos,
- y su espesor $h$ (ver Figura 59) sea superior a:

$$h \geq \frac{2 \cdot A_c}{u} \qquad [5.3.3.\text{a}]$$

o, más concretamente, en el caso de que se trate de un macizo rectangular de sección $a \times b$, entonces:

$$h \geq \frac{2 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a+b)} = \frac{a \cdot b}{a+b} \qquad [5.3.3.\text{b}]$$

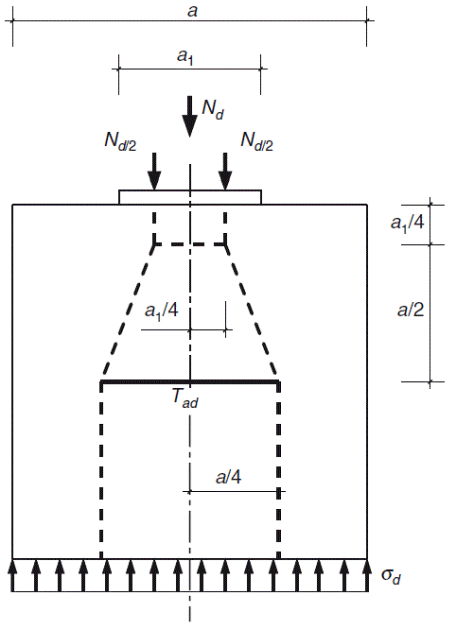



Figura 60. Modelo de bielas y tirantes para carga concentrada sobre macizo

Debido a la proximidad a una carga concentrada, no es posible despreciar los efectos locales y no es en absoluto asumible la hipótesis de deformaciones planas. Se trata, por lo tanto, de una región D y el modelo de bielas y tirantes propuesto por la EHE-08 es el que se recoge en la Figura 60.

La fuerza absorbida por el tirante paralelo al lado de dimensión $a$ del macizo será:

$$T_{ad} = \frac{N_d \cdot (a - a_1)}{4 \cdot a} \leq U_{s,a} = A_{s,a} \cdot f_{yd} \qquad [5.3.4.\text{a}]$$

Y la fuerza absorbida por el tirante paralelo al lado de dimensión $b$ será:

$$T_{bd} = \frac{N_d \cdot (b - b_1)}{4 \cdot b} \leq U_{s,b} = A_{s,b} \cdot f_{yd} \qquad [5.3.4.\text{b}]$$

La Instrucción EHE-08 especifica que, de no hacerse un estudio detallado de las deformaciones en el modelo de bielas y tirantes, la deformación de los elementos deberá limitarse al 2‰, razón por la que ***la tensión $f_{yd}$ de las armaduras se limita superiormente a* 400 N/mm²**. Las armaduras correspondientes deberán disponerse entre las profundidades $0{,}1 \cdot a$ hasta $a$ y $0{,}1 \cdot b$ hasta $b$, respectivamente. Es recomendable que para ello se empleen cercos transversales para mejorar el efecto de confinamiento del hormigón.

## 3.2 LAS VIGAS DE GRAN CANTO

De acuerdo con el artículo 63º de la Instrucción EHE-08, las ***vigas de gran canto*** son, generalmente, vigas rectas de sección constante y cuya relación entre luz y canto total ($L/h$) sea:

- inferior a 2 en vigas simplemente apoyadas (Figura 61),
- o bien inferior a 2,5 si se trata de vigas continuas.

Como luz de cálculo se tomará el menor de los siguientes valores:

- la distancia entre ejes de apoyos

- 1,15 veces la luz libre entre apoyos

El modelo propuesto en la Instrucción EHE-08 para las vigas de gran canto ***simplemente apoyadas*** es el recogido en la Figura 61. El parámetro $z$ que se indica en dicha figura es el brazo mecánico, para el cual se tomará el más pequeño de los siguientes valores:

- 0,6 veces la luz de cálculo $L$
- $^2/_3$ del canto $h$ de la viga

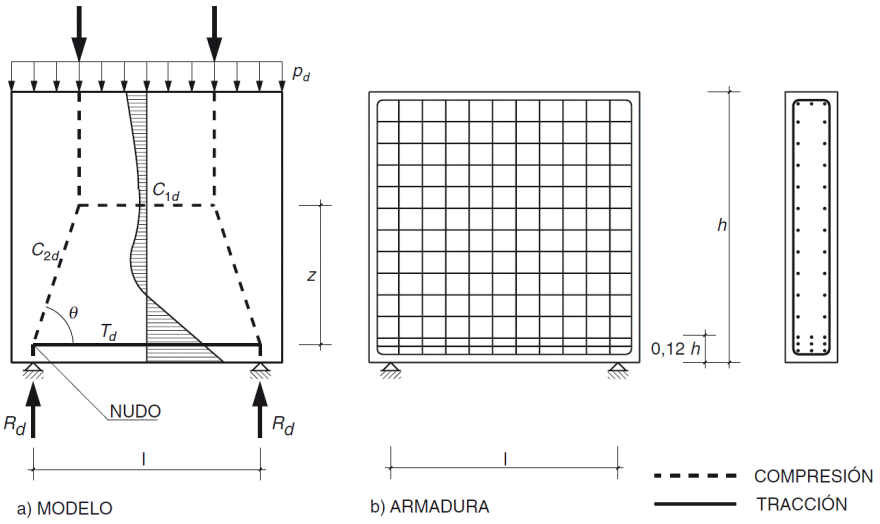



Figura 61. Viga de gran canto y modelo de bielas y tirantes

La anchura mínima de la viga (o espesor de "pared") vendrá determinada por la capacidad a compresión de los nudos y bielas y deberá ser adecuada para evitar problemas de pandeo lateral fuera del plano de la viga. Una expresión útil para el diseñar del espesor $e$ de la pared es la siguiente:

$$e \geq \frac{L}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{p_d}{f_{cd} \cdot h}} \qquad [5.3.5]$$

Para el dimensionamiento del tirante se sustituye la carga distribuida $p_d$ aplicada sobre la viga por dos resultantes puntuales aplicadas a $^1/_4$ de la luz $L$ desde cada apoyo (Figura 61). Entonces, el ángulo $\theta$ formado por la biela y el tirante y la fuerza $T_d$ absorbida por el mismo se calculan como:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{L/4}\right) \qquad [5.3.6] \qquad\qquad T_d = \frac{R_d}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{R_d \cdot L}{4 \cdot z} \qquad [5.3.7]$$

A partir de la ecuación [5.3.7] se deducen las siguientes expresiones para el cálculo de la armadura:

- si $h \geq 0{,}9 \cdot L$ entonces el brazo mecánico es $z = 0{,}6 \cdot L$ y la capacidad $U_s$ del tirante es:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq T_d \approx 0{,}4 \cdot R_d \qquad \left(f_{yd} \leq 400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}\right) \qquad [5.3.8.\,\mathrm{a}]$$

- si $h < 0{,}9 \cdot L$ entonces el brazo mecánico es $z = {}^2/_3 \cdot h$ y la capacidad $U_s$ del tirante es:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq T_d \approx 0{,}375 \cdot R_d \cdot \frac{L}{h} \qquad \left(f_{yd} \leq 400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}\right) \qquad [5.3.8.\,\mathrm{b}]$$

Para la comprobación del nudo, que es más desfavorable que la biela, se analiza la sección del apoyo (Figura 62), materializado a través de una placa de dimensiones $a \times b$. Por lo tanto, deberá comprobarse:

$$\frac{R_d}{a \cdot b} \leq f_{1cd} = 0{,}70 \cdot f_{cd} \qquad [5.3.9]$$

La capacidad del nudo se ha obtenido de la Tabla 5.2, teniendo en cuenta que se trata de un nudo comprimido y que constituye también la zona de anclaje del tirante.

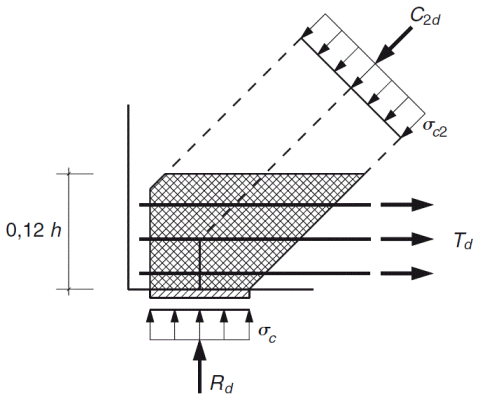



Figura 62. Nudo de apoyo de viga de gran canto

La armadura principal del tirante debe disponerse en una altura igual al 12% de $h$ y debe anclarse a partir del eje del apoyo. Además debe disponerse una armadura secundaria de cuantía geométrica superior al 0,1% en cada cara y en cada dirección (emparrillado de barras verticales y horizontales). Por otro lado, debe tenerse en cuenta que si la carga aplicada $p_d$ estuviera colgada en lugar de apoyada (Figura 63) sería necesario disponer una armadura "de cuelgue" con una capacidad $U_{s0} = p_d \cdot l$ que trasladase las cargas aplicadas hasta la cabeza comprimida.

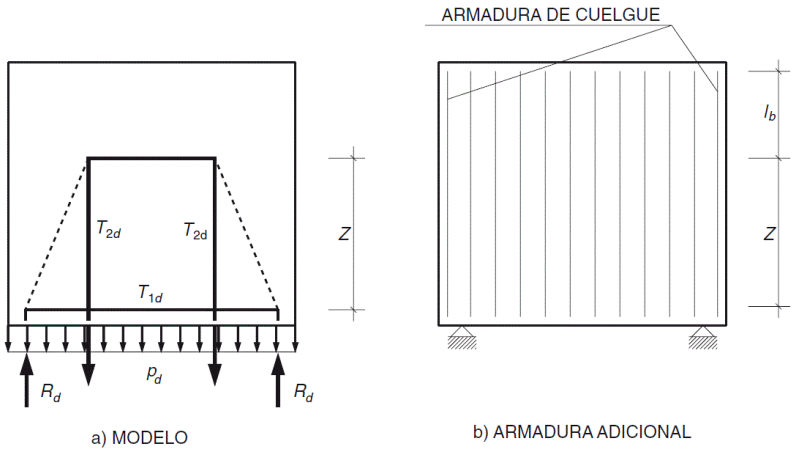



Figura 63. Viga de gran canto con carga colgada

El modelo propuesto en la Instrucción EHE-08 para ***vigas continuas de gran canto*** es el indicado en la Figura 64. El propio articulado incluye las expresiones para el cálculo de las capacidades de los distintos tirantes, deducidas de los modelos anteriores:

- Armadura sobre apoyos intermedios:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq 0{,}20 \cdot p_d \cdot L \qquad [5.3.10]$$

- Armadura inferior en vano intermedios:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq 0{,}09 \cdot p_d \cdot L \qquad [5.3.11]$$

- Armadura inferior en vano extremo:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq 0{,}16 \cdot p_d \cdot L \qquad [5.3.12]$$

Por tratarse de cálculos de armado basados en modelos de bielas y tirantes en los que no se ha estudiado la compatibilidad de deformaciones, la tensión del acero debe limitarse a 400 N/mm².

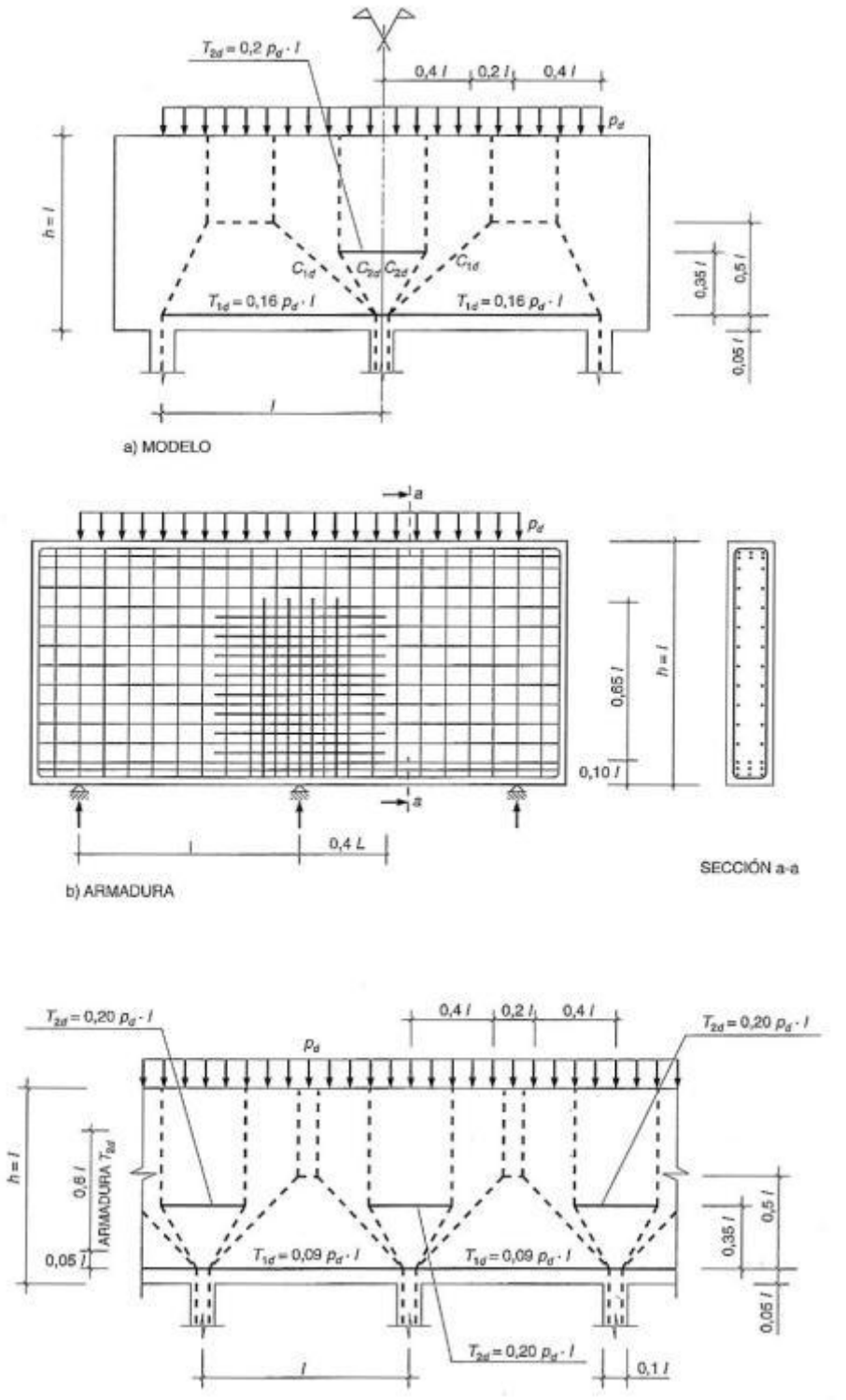



Figura 64. Modelos para vigas de gran canto continuas

Los detalles de disposiciones de armado se muestran en la Figura 64. Al igual que en el caso de la viga de gran canto simplemente apoyada, la comprobación de los nudos (Figura 65) es más desfavorable que la de las bielas y se puede efectuar de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\frac{R_{ed}}{a_e \cdot b_e} \leq f_{1cd} = 0{,}70 \cdot f_{cd} \qquad [5.3.13.\text{a}]$$

$$\frac{R_{id}}{a_i \cdot b_i} \leq f_{1cd} = 0{,}70 \cdot f_{cd} \qquad [5.3.13.\,b]$$

donde $a_e$ y $b_e$ son las dimensiones de los apoyos extremos, $a_i$ y $b_i$ son las dimensiones de los apoyos intermedios y $R_{ed}$ y $R_{id}$ son las reacciones en apoyos extremos e intermedios, respectivamente.

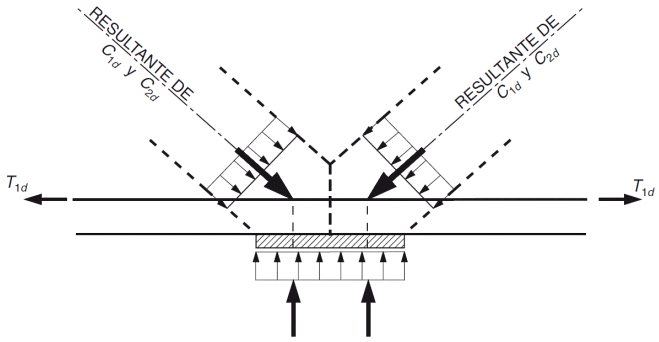



Figura 65. Nudo de apoyo intermedio en viga continua de gran canto

Por último, es importante resaltar que en los modelos de vigas de gran canto que se han presentado, la Instrucción no contempla la existencia de grandes huecos. En casos de "vigas pared" en las que se desee abrir huecos para ventanas o puertas de acceso, será necesario plantear otros modelos de celosías alternativos, basados en el análisis lineal según la Teoría de la Elasticidad mediante modelos numéricos apropiados.

## 3.3 LAS MÉNSULAS CORTAS

El artículo 64º de la Instrucción EHE-08 define las ***ménsulas cortas*** como aquellas en las que la distancia *a*, medida entre la línea de aplicación de la carga vertical principal y el paramento adyacente al soporte, es menor o igual que al canto útil *d* en dicha sección (Figura 66). Además, el canto útil $d_1$ medido bajo el extremo de aplicación de la carga no debe ser inferior a la mitad de *d*. El empleo del método de bielas y tirantes se justifica por tratarse de discontinuidades de tipo geométrico (canto variable) y de tipo mecánico (carga concentrada).

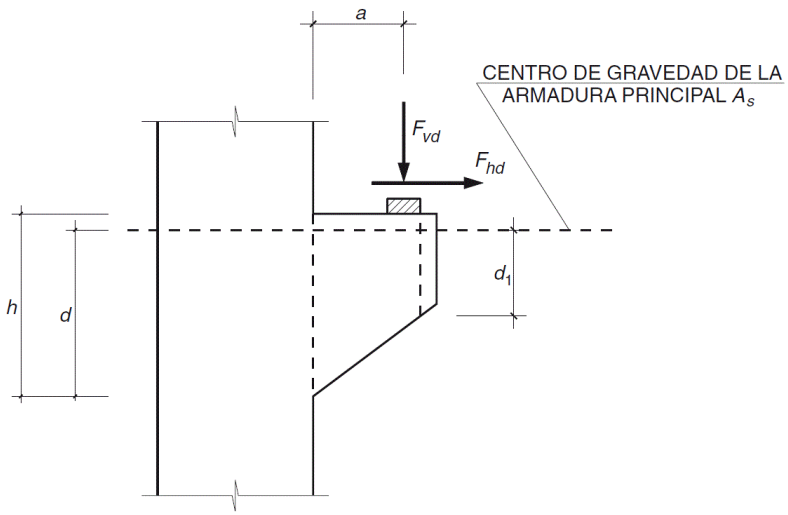



Figura 66. Dimensiones características de una ménsula corta

La siguiente figura, extraída del libro de Jiménez Montoya, muestra los diferentes mecanismos de fallo que pueden desarrollarse en una ménsula corta.

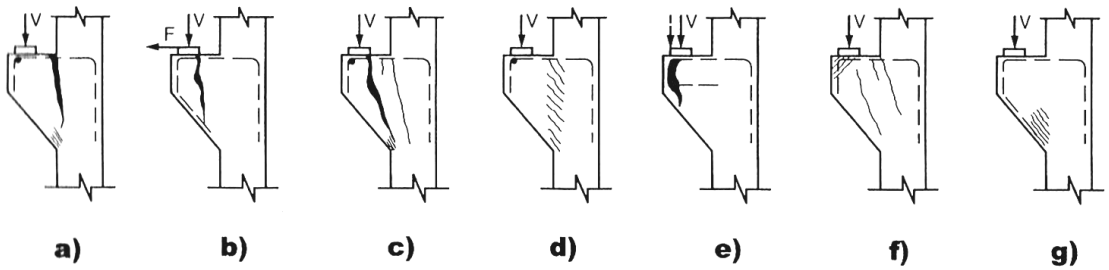



**Figura 22.32** Mecanismos de fallo en ménsulas: (*a*) Por flexión. (*b*) Por tracción horizontal. (*c*) Por cortante. (*d*) Por rasante. (*e*) Por fallo de anclaje. (*f*) Por aplastamiento local. (*g*) Por aplastamiento de la biela comprimida

Figura 67. Extraída de *"Hormigón armado"*, de Jiménez Montoya et al.

Para poder plantear el estudio de este tipo de elementos mediante un modelo de bielas y tirantes es preciso conocer de manera aproximada el flujo de las tensiones de compresión y de tracción. Las isostáticas de tensiones en las ménsulas fueron identificadas en su día mediante los estudios foto-elásticos de **Franz** y **Niedenhoff**. La Figura 68 muestra la distribución de isostáticas, el modelo de bielas y tirantes que las representa y el esquema de armado propuesto en la Instrucción EHE-08. Como ángulo de inclinación de las bielas, el articulado propone los siguientes valores:

- $\cot\theta = 1{,}4$ si la ménsula se hormigona monolíticamente junto con el pilar ($\theta = 35{,}53°$)
- $\cot\theta = 1{,}0$ si la ménsula se hormigona sobre el pilar ya endurecido ($\theta = 45°$)
- $\cot\theta = 0{,}6$ en el caso de rugosidad débil en la superficie de hormigón endurecido ($\theta = 59°$)

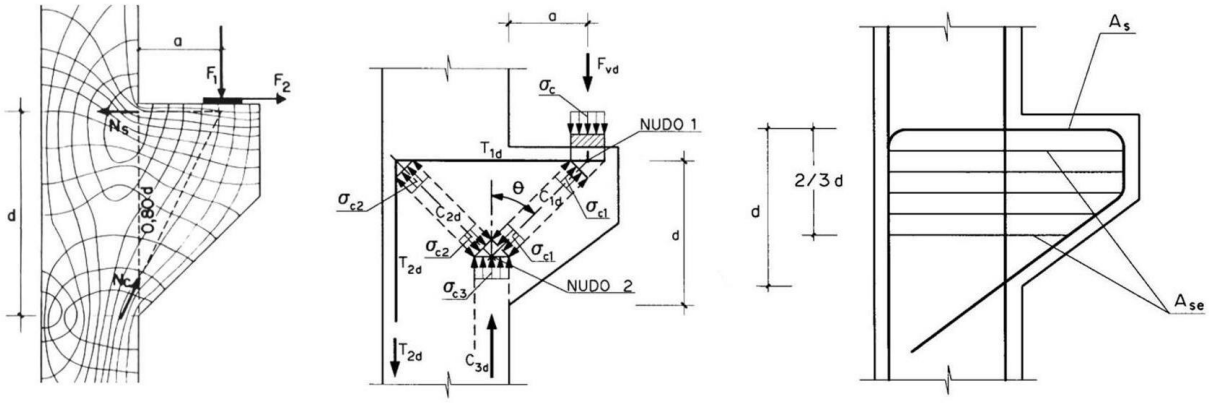



Figura 68. Isostáticas de tensión en la ménsula corta, modelo de bielas y tirantes y disposición de armaduras

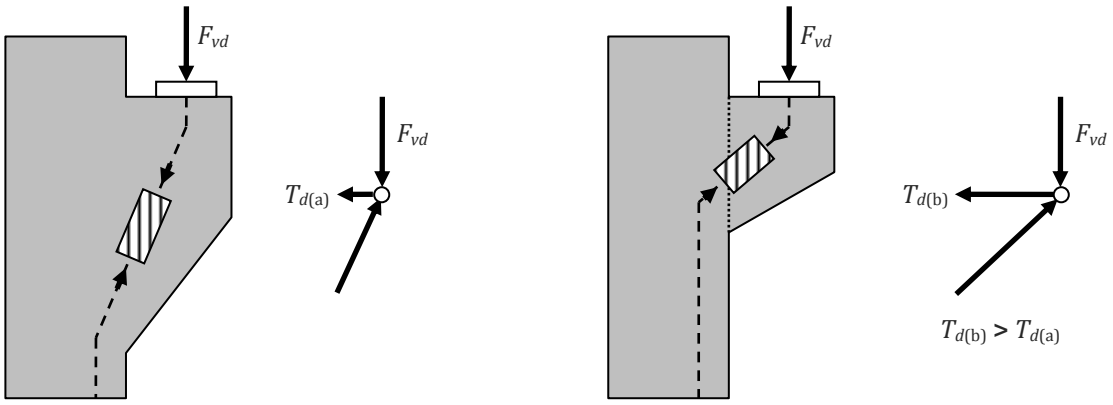
La ménsula debe dimensionarse de manera que el canto útil $d$ (a nivel del paramento vertical adyacente) cumpla la condición:

$$d \geq \frac{a}{0{,}85} \cdot \cot\theta \qquad [5.3.14]$$

y la capacidad mecánica de la armadura principal $A_s$ se determina a partir de:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq F_{vd} \cdot \operatorname{tg}\theta + F_{hd} \quad \left(f_{yd} \leq 400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}\right) \qquad [5.3.15]$$

Aparentemente parece un contrasentido que cuanto "peor" sea la ejecución, el canto útil pueda ser cada vez más reducido. Pero si se examina la Figura 69 se puede ver como no es así; ocurre que cuanto más "deslizable" es la ménsula respecto del soporte, la inclinación de la biela debe tender a ser más ortogonal con el eje del soporte. Como consecuencia, la fuerza que debe absorber el tirante es mayor (en dicha figura se recogen gráficamente los equilibrios de fuerzas).




a) Ménsula monolítica b) Ménsula con rugosidad débil

Figura 69. Comparación del funcionamiento de ménsulas de diferente proceso constructivo

La armadura principal no sólo debe estar anclada por el lado del pilar, sino también en el extremo de la ménsula. Un detalle habitual (representado en la Figura 68) es continuar la armadura del tirante recorriendo la cara inclinada de la ménsula hasta alcanzar la longitud de anclaje en prolongación recta. Además, cuando existan fuerzas horizontales, la placa de apoyo deberá ir soldada a la armadura principal. La armadura secundaria $A_{se}$ estará constituida por un conjunto de cercos horizontales distribuidos hasta una profundidad igual a $^2/_3$ del canto útil y capaz de absorber:

$$U_{se} = A_{se} \cdot f_{yd} \geq 0{,}20 \cdot F_{vd} \quad \left(f_{yd} \leq 400\ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}\right) \qquad [5.3.16]$$

Habitualmente, a la hora de comprobar bielas y nudos, la zona más desfavorable será la de aplicación de la carga, por lo que deberá comprobarse el nudo situado bajo la placa, que constituye una zona de anclaje de tirante, por lo que la tensión de compresión está limitada de acuerdo con la Tabla 5.2:

$$\frac{F_{vd}}{a \cdot b} \leq f_{1cd} = 0{,}70 \cdot f_{cd} \qquad [5.3.17]$$

donde $a$ y $b$ serán las dimensiones de la placa de apoyo. Las expresiones anteriores serán válidas siempre que la fuerza horizontal no supere el 15% de la fuerza vertical aplicada.

Por último, en la Figura 70 se representa el caso de una ménsula corta que soporta una viga embrochalada. En este caso, se tiene que prever el hecho de la carga vertical $F_{vd}$ está parcialmente apoyada y parcialmente colgada. Como consecuencia, es necesario disponer una armadura adicional inclinada como la representada en dicha figura. Se puede estimar que la armadura principal $A_s$ ($A_1$ en la figura) se corresponderá con el tirante que absorbe la mitad de la carga vertical transmitida por el brochal,

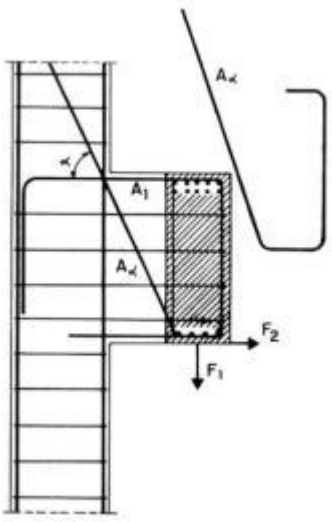



Figura 70. Ménsula corta con carga parcialmente colgada

más la horizontal si la hubiere. La armadura inclinada $A_\alpha$ se dimensiona para el 60% de la carga vertical. Así pues:

$$U_s = A_s \cdot f_{yd} \geq 0{,}5 \cdot F_{vd} \cdot \operatorname{tg}\theta + F_{hd} \qquad [5.3.18.\,a]$$

$$U_\alpha = A_\alpha \cdot f_{yd} \geq \frac{0{,}6 \cdot F_{vd}}{\operatorname{sen}\theta} \qquad [5.3.18.\,b]$$

Al igual que en las expresiones anteriores, la tensión de los tirantes estará limitada a 400 N/mm².

**<u>Ejemplo</u>: Las cargas que recibe la jácena de la nave representada en la Figura 71.a son $g$ = 15 kN/m y $q$ = 10 kN/m. Las ménsulas sobre las que apoya la jácena se hormigonan a la vez que los pilares y los datos de materiales y sus dimensiones se indican en la Figura 71.b. Comprobar y dimensionar dichas ménsulas.**

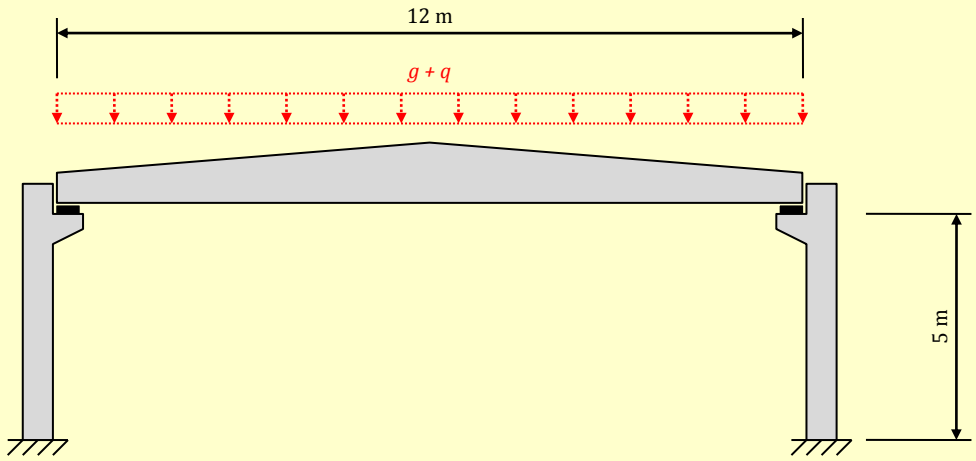
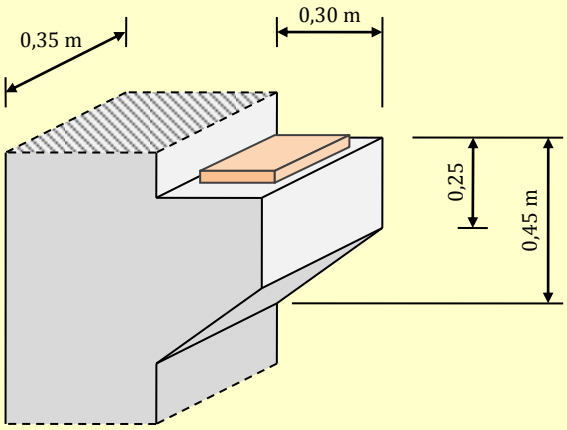



Figura 71.a Pórtico de nave con jácena simplemente apoyada sobre ménsulas cortas




Materiales:

- Hormigón HA-30
- Acero B500S, redondos Ø6 y Ø12
- Recubrimiento mecánico de 40 mm

Placas de apoyo de 0,20×0,25 m

Figura 71.b Dimensiones de las ménsulas de apoyo

El canto útil de la ménsula en el encuentro con el soporte será:

$$d = h - d' = 450 - 40 = 410 \text{ mm}$$

Por otro lado, como la resultante de fuerzas en la placa de apoyo se aplica en el centro, la distancia $a$ desde su punto de aplicación al paramento vertical del soporte será 150 mm. Como la ménsula se hormigona monolíticamente con el soporte, se adopta una inclinación de biela tal que $\cot\theta = 1{,}4$. Por lo tanto:

$$d \geq \frac{a}{0{,}85} \cdot \cot\theta = \frac{150\ \text{mm}}{0{,}85} \cdot 1{,}4 = 247\ \text{mm}$$

A la vista del resultado anterior, el canto útil de la ménsula es más que suficiente. La fuerza vertical de la ménsula es la reacción del apoyo de la jácena de 12 m:

$$F_{vd} = \gamma_G \cdot \left(\frac{g \cdot l}{2}\right) + \gamma_Q \cdot \left(\frac{q \cdot l}{2}\right) = 1{,}35 \cdot \left(\frac{15\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 12}{2}\right) + 1{,}5 \cdot \left(\frac{10\ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 12}{2}\right) = 211{,}5\ \text{kN}$$

La capacidad mecánica del tirante será:

$$\boldsymbol{U_s} = A_s \cdot f_{yd} \geq F_{vd} \cdot \tan\theta + F_{hd} = 211{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}4} + 0 = \mathbf{151{,}1\ kN}$$

y la sección de la armadura principal será:

$$A_s \geq \frac{151100\ \text{N}}{400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 377{,}8\ \text{mm}^2$$

que corresponde a **4Ø12** (452,4 mm²).

Por otro lado, la armadura secundaria se dimensiona para el 20% de la carga vertical (ecuación [5.3.16]):

$$A_{se} \cdot f_{yd} \geq 0{,}20 \cdot F_{vd} = 0{,}20 \cdot 211{,}5\ \text{kN} = 42300\ \text{N} \quad \rightarrow \quad A_{se} \geq \frac{42300\ \text{N}}{400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 105{,}8\ \text{mm}^2$$

resultando en, por lo menos 4Ø6 que irán distribuidos en una longitud de $^2/_3 \cdot 410 = 273$ mm. Sin embargo, por razones constructivas se dispondrán en total 6 redondos Ø6, 3 en cada cara de la ménsula. Finalmente, se comprueba el nudo de acuerdo con [5.3.17]:

$$\frac{F_{vd}}{a \cdot b} \leq 0{,}70 \cdot f_{cd} \quad \rightarrow \quad \frac{211500\ \text{N}}{200 \cdot 250\ \text{mm}^2} = 4{,}23\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \leq 0{,}70 \cdot \frac{30\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1{,}5} = 14\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

# CAPÍTULO 6
# AGOTAMIENTO POR SOLICITACIONES TANGENCIALES

## 1. SECCIONES SOMETIDAS A ESFUERZO CORTANTE

### 1.1 INTRODUCCIÓN: ANALOGÍA DE LA CELOSÍA

El problema del estudio del agotamiento de piezas lineales de hormigón armado por esfuerzos cortantes es uno de los más discutidos dentro de la Teoría del Hormigón Armado y aún no ha sido satisfactoriamente resuelto. Prueba de ello es la gran discrepancia que puede observarse en el tratamiento de esta forma de agotamiento entre las distintas normas internacionales. Parece haber consenso en que el agotamiento por esfuerzo cortante moviliza los tres fenómenos siguientes:

- el ***efecto "arco"*** representado en la Figura 72.a, por el cual el esfuerzo normal de compresión en el hormigón, creciente hacia los apoyos, compensa los efectos del cortante que también crecen hacia los apoyos; la movilización de este efecto dependerá en gran medida del aseguramiento de las condiciones de anclaje del tirante en dichos apoyos

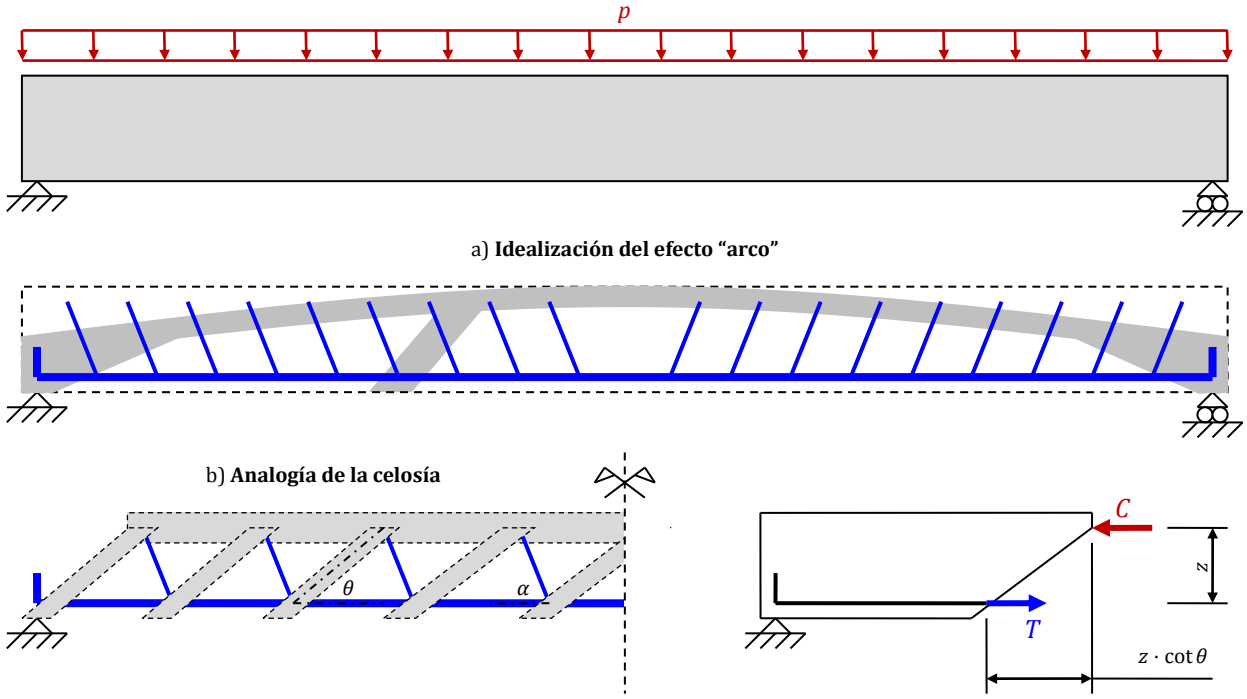



Figura 72. Modelos para describir el agotamiento por esfuerzo cortante en elementos lineales de hormigón armado

- comportamiento de los elementos sometidos a flexión de acuerdo con la ***analogía de la celosía*** (Figura 72.b), que permite cuantificar la contribución del armado transversal para resistir el cortante; este modelo fue propuesto por **Ritter** y **Mörsch** en 1.899

- otro efecto importante es el ***"aggregate interlock"***, denominado en castellano como efecto de engranamiento del árido; este efecto permite atribuir parte de la resistencia a cortante del hormigón al rozamiento a lo largo de las superficies en fricción a lo largo de las fisuras que se abren (la interfaz entre dos bielas adyacentes)

El modelo propuesto por Ritter y Mörsch consistía en una celosía "Prat" (montantes verticales y barras diagonales inclinadas) y permite abordar el estudio del cortante mediante el método de las bielas y tirantes, generalizando la celosía al tipo "Warren" (Figura 72.b):

- las barras diagonales en compresión forman un ángulo $\theta$ con los cordones y reflejan el comportamiento y contribución de las ***bielas comprimidas***
- las diagonales en tracción o ***tirantes*** forman un ángulo $\alpha$ con los cordones y corresponden a la contribución de la armadura transversal

El artículo 44º de la Instrucción EHE-08 especifica que ***"para el análisis de la capacidad resistente de las estructuras de hormigón frente a esfuerzos cortantes, se establece como método general de cálculo el de bielas y tirantes"***. La Figura 73 representa esquemáticamente la discretización de una viga según este modelo.

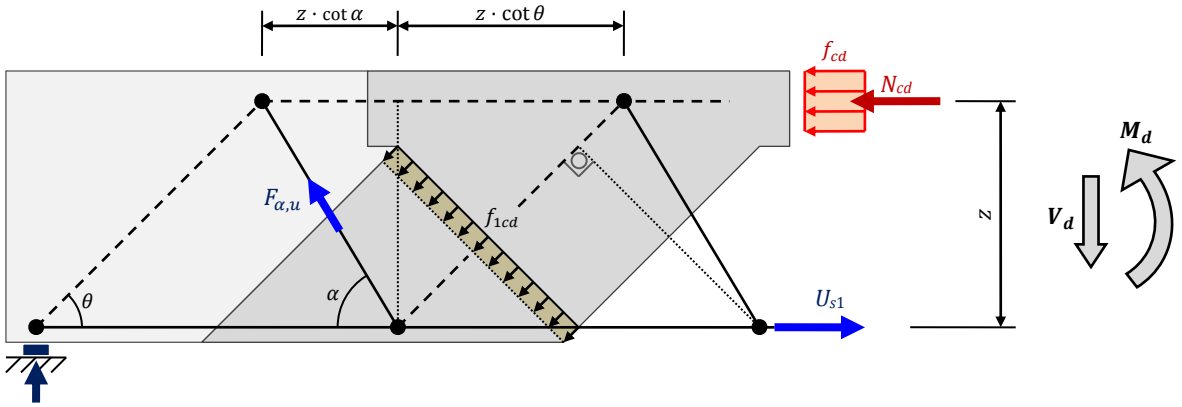



Figura 73. Modelo de bielas y tirantes para esfuerzos cortantes

Como se indica en la figura anterior, la tensión máxima que puede absorber la biela es $f_{1cd}$ y, de acuerdo con la Tabla 5.1, su capacidad será:

$$f_{1cd} = 0{,}60 \cdot f_{cd} \qquad [6.1.1]$$

ya que se trata de un caso en el que la biela transmite compresiones a través de fisuras cuya abertura está controlada por el refuerzo transversal. El ancho de la biela es el mismo que el de la viga ($b$) y su capacidad última $F_{\theta,u}$ (en kN) se calcula como la resultante de tensiones (paralela a su propio eje):

$$F_{\theta,u} = 0{,}60 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad [6.1.2]$$

Por otro lado, la sección de armadura transversal por unidad de longitud de la viga se designa como $A_\alpha$. Como cada tirante absorbe la contribución de un fragmento de viga de longitud $z \cdot (\cot\theta + \cot\theta)$, el valor de la fuerza $F_{\alpha,u}$ se calculará como:

$$F_{\alpha,u} = A_\alpha \cdot z \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot f_{y\alpha,d} \qquad [6.1.3]$$

Puesto que este modelo es, en realidad, uno de bielas y tirantes, se mantiene la limitación de 400 N/mm² para la tensión de los tirantes, a fin de controlar las deformaciones y poder asegurar efectos como el del engranamiento del árido.

Planteando el equilibrio en uno cualquiera de los nudos (Figura 74) se obtienen las siguientes ecuaciones:

- para el agotamiento de la biela:

$$V_d \leq F_{\theta,u} \cdot \operatorname{sen}\theta = 0{,}60 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \operatorname{sen}^2\theta$$

$$V_d \leq 0{,}60 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z \cdot \frac{\cot\theta + \cot\alpha}{1 + \cot^2\theta} \qquad [6.1.4]$$

- y para el agotamiento del tirante:

$$V_d \leq F_{\alpha,u} \cdot \operatorname{sen}\alpha = A_\alpha \cdot z \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot f_{y\alpha,d} \qquad [6.1.5]$$

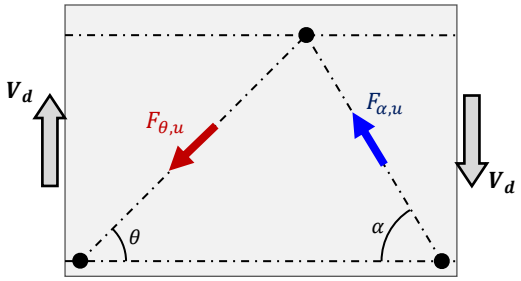



Figura 74. Equilibrio del modelo de bielas y tirantes

## 1.2 DIMENSIONAMIENTO PRÁCTICO DE LAS ARMADURAS DE CORTANTE EN ELEMENTOS LINEALES

De acuerdo con la Instrucción EHE-08, en las comprobaciones correspondientes al Estado Límite Último de Agotamiento por esfuerzo cortante se tomará como ***esfuerzo cortante efectivo*** $\boldsymbol{V_{rd}}$ la suma de los siguientes términos:

$$V_{rd} = V_d + V_{pd} + V_{cd} \qquad [6.1.6]$$

donde:

- $V_d$ es el valor de cálculo de esfuerzo cortante producido por las acciones exteriores
- $V_{pd}$ es el valor de la componente del esfuerzo de pretensado que es paralela a la sección transversal objeto de estudio
- $V_{cd}$ es, en las piezas de sección variable, el valor de cálculo de la componente paralela a la sección de la resultante de las tensiones normales sobre las fibras longitudinales de hormigón

### 1.2.1 Agotamiento por compresión oblicua

La primera comprobación es la del agotamiento de las bielas de hormigón por compresión oblicua. En el caso de hormigones convencionales ($f_{ck} \leq 50$ N/mm$^2$) la expresión que propone la EHE-08 en el artículo 44.2.3.1 es muy similar a [6.1.4]:

$$V_{rd,1} \leq V_{u1} = 0{,}60 \cdot K \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot\theta + \cot\alpha}{1 + \cot^2\theta} \qquad [6.1.7]$$

donde:

- $V_{rd,1}$ es el esfuerzo cortante efectivo medido ***en el borde del apoyo*** (Figura 76)
- $b_0$ es el ancho mínimo de la sección, obtenido tal y como se indica en la Figura 75

- $K$ es un coeficiente obtenido experimentalmente y que depende del esfuerzo axil; en elementos sin pretensado o sin esfuerzo axil de compresión, se tomará $K = 1$; en caso contrario:

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{\sigma_{cd}{}'}{f_{cd}} && \text{si } 0 < \sigma'_{cd} \leq 0{,}25 \cdot f_{cd} \\ K &= 1{,}25 && \text{si } 0{,}25 \cdot f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 0{,}50 \cdot f_{cd} \\ K &= 2{,}5 \cdot \left(1 - \frac{\sigma_{cd}{}'}{f_{cd}}\right) && \text{si } 0{,}50 \cdot f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq f_{cd} \end{aligned} \qquad [6.1.8]$$

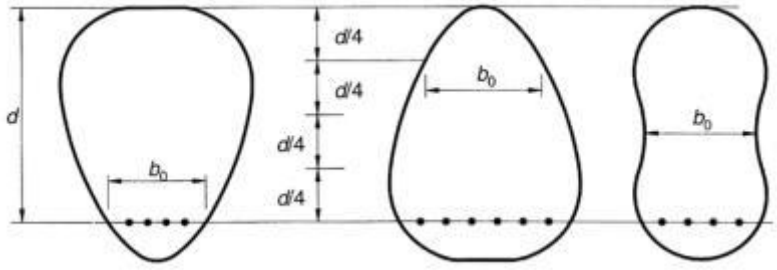



Figura 75. Ancho mínimo de la sección en el ELU de Cortante

- $\sigma_{cd}{}'$ es la tensión axil efectiva del hormigón, tomada positiva si es de compresión; en el caso de pilares se obtendrá descontando al axil de cálculo $N_d$ el esfuerzo de compresión que absorban las armaduras longitudinales comprimidas
- $\alpha$ es el ángulo de inclinación de los tirantes con el eje de la pieza
- $\theta$ es el ángulo de inclinación de las bielas con el eje de la pieza; la Instrucción EHE-08 limita los valores de $\theta$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0{,}5 \leq \cot\theta \leq 2 \\ 26{,}6° \leq \theta \leq 63{,}4° \end{aligned} \qquad [6.1.9]$$

En los casos habituales de vigas con armaduras pasivas, en ausencia de esfuerzos axiles y con armadura transversal en forma de estribos verticales ($\alpha = 90°$), si se suponen las bielas orientadas con $\theta = 45°$, la expresión [6.1.7] se simplifica de la siguiente manera:

$$\boxed{V_{u1} = 0{,}30 \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d} \qquad [6.1.10]$$

### 1.2.2 Agotamiento por tracción en el alma en piezas sin armadura transversal

La Instrucción EHE-08 prescribe en el artículo 44.2.3.2.1.1 una comprobación específica para piezas no provistas de armadura de cortante y que no presentan fisuración a flexión. Este el caso de piezas pretensadas como, por ejemplo, vigas de hormigón pretensado, losas alveolares pretensadas, etc.

Para el caso de elementos no provistos de armado transversal y que sí presentan fisuración, debe seguirse lo recogido en el artículo 44.2.3.2.1.2, donde se define la comprobación de agotamiento por tracción del alma mediante la siguiente expresión:

$$V_{rd,2} \leq V_{u2} = \left[\frac{0{,}18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}15 \cdot \sigma_{cd}{}'\right] \cdot b_0 \cdot d \geq V_{u2,mín} \qquad [6.1.11]$$

donde:

- $V_{rd,2}$ es el esfuerzo cortante efectivo medido ***en una sección situada a un canto útil d del borde del apoyo*** (Figura 76)

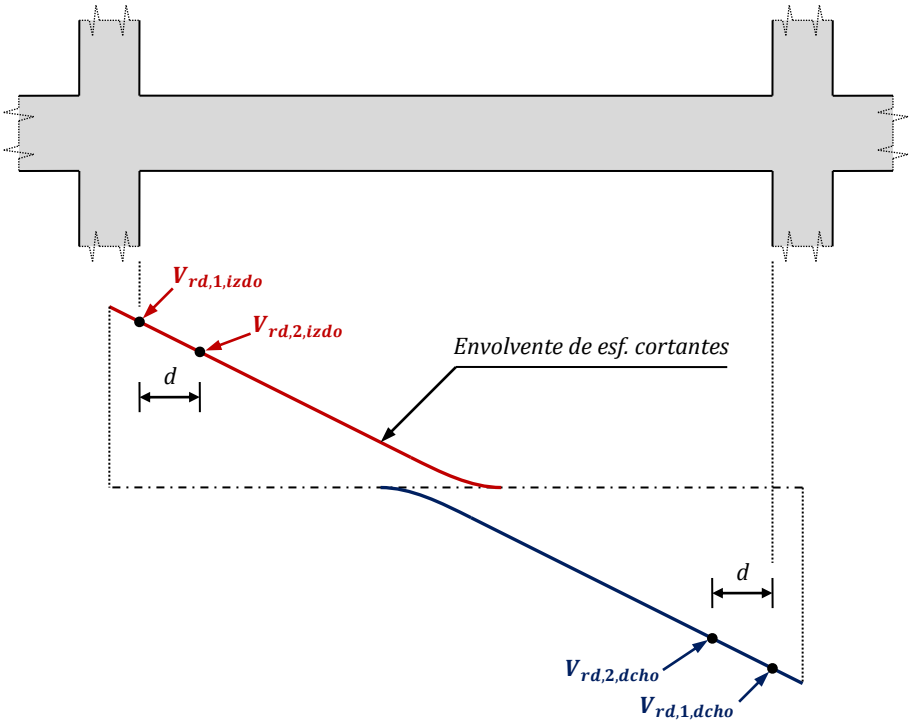



Figura 76. Secciones de comprobación del agotamiento por cortante

- $V_{u2,mín}$ es el valor mínimo de la resistencia al agotamiento por tracción del alma:

$$V_{u2,mín} = \left[\frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{cv}} + 0{,}15 \cdot \sigma_{cd}{}'\right] \cdot b_0 \cdot d \qquad [6.1.12]$$

- $\gamma_c$ es el coeficiente parcial de seguridad del hormigón, que vale 1,5 en situaciones persistentes o transitorias y 1,3 en situaciones accidentales
- $\xi$ es un parámetro cuya expresión es:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2 \qquad \text{(con } d \text{ expresado en mm)} \qquad [6.1.13]$$

- $f_{cv}$ es la resistencia efectiva del hormigón a cortante expresada en N/mm² y que se tomará, en general, igual a $f_{ck}$ y nunca mayor de 60 N/mm²; si el control del hormigón es indirecto, entonces $f_{cv}$ no se tomará mayor que 15 N/mm²
- el ratio $\rho_l$ corresponde a la cuantía geométrica de la armadura longitudinal traccionada, incluyendo tanto la pasiva como la activa adherente y que esté correctamente anclada a una distancia igual o mayor que $d$ a partir de la sección de estudio:

$$\rho_l = \frac{A_{s1} + A_p}{b_0 \cdot d} \leq 0{,}02 \qquad [6.1.14]$$

### 1.2.3 Agotamiento por tracción en el alma en piezas con armadura transversal

La Instrucción EHE-08, en el artículo 44.2.3.2.2 establece que para los elementos lineales de hormigón armado que dispongan de un sistema de armaduras transversales la comprobación del agotamiento por tracción en el alma se hará como:

$$V_{rd,2} \leq V_{u2} = V_{cu} + V_{su} \qquad [6.1.15]$$

donde:

- $V_{cu}$ es la contribución del hormigón, que se determina a través de la siguiente expresión:

$$V_{cu} = \left[\frac{0{,}15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}15 \cdot {\sigma_{cd}}'\right] \cdot \beta \cdot b_0 \cdot d \geq V_{u2,mín} \qquad [6.1.16]$$

en la que el parámetro $\beta$ se calcula como:

$$\beta = \frac{\cot\theta - 2}{\cot\theta_e - 2} \quad \text{si } 26{,}6° \leq \theta \leq \theta_e \qquad [6.1.17.\text{a}]$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \cot\theta - 1}{2 \cdot \cot\theta_e - 1} \quad \text{si } \theta_e < \theta \leq 63{,}4° \qquad [6.1.17.\text{b}]$$

siendo $\theta_e$ el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, que puede obtenerse como:

$$\theta_e = 29 + 7 \cdot \varepsilon_x \quad \text{(en grados sexagesimales)} \qquad [6.1.18]$$

$$\varepsilon_x \approx \frac{\frac{M_d}{z} + V_{rd} - \frac{N_d}{2}}{2 \cdot E_s \cdot A_s} \cdot 1000 \geq 0 \qquad [6.1.19]$$

- la resistencia $f_{cv}$ se tomará en este caso igual a $f_{ck}$, pudiendo tomar cualquier valor que no sea superior a 100 N/mm$^2$; sin embargo, en el caso de que el control de la resistencia del hormigón sea indirecto, $f_{cv}$ no se tomará superior a 15 N/mm$^2$.
- $V_{su}$ es la contribución de la armadura transversal:

$$V_{su} = z \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (\cot\theta + \cot\alpha) \cdot \sum A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d} \qquad [6.1.20]$$

siendo $A_\alpha$ el área de los redondos de la armadura transversal por unidad de longitud de la viga

En el caso de vigas de hormigón armado sometidas a flexión simple (sin esfuerzos axiles) se van a hacer las siguientes simplificaciones y suposiciones:

- $\beta$ podrá suponerse igual a 1
- con la disposición habitual de armaduras transversales en forma de estribos perpendiculares al eje de la pieza, el ángulo $\alpha$ valdrá 90°
- se adoptará un ángulo $\theta$ de inclinación bielas de 45°
- y se supondrá un brazo mecánico $z \approx 0{,}9 \cdot d$

Con todo ello, las expresiones para el cálculo de las contribuciones del hormigón y de los estribos a la resistencia a cortante frente a agotamiento por tracción del alma son:

$$\begin{aligned} &V_{cu} = max\left\{\frac{0{,}15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck}} \;\; ; \;\; \frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{ck}}\right\} \cdot b_0 \cdot d \\ &V_{su} = 0{,}9 \cdot d \cdot A_{90} \cdot f_{y90,d} \end{aligned} \qquad [6.1.21]$$

Debido a que se parte de un modelo de bielas y tirantes, la tensión de las armaduras de los estribos no será superior a 400 N/mm$^2$. En el caso de secciones circulares, la contribución de los estribos circulares se estimará como:

$$V_{su,circ.} = 0{,}61 \cdot h \cdot A_{90} \cdot f_{y90,d} \qquad [6.1.22]$$

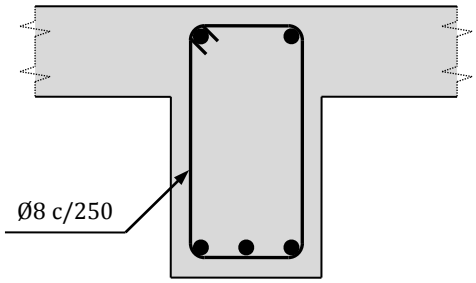



Figura 77. Viga con estribos Ø8 cada 250 mm

Como ejemplo de la obtención de la armadura transversal por unidad de longitud, supóngase una viga de sección rectangular con estribos de Ø8 separados 250 mm (Figura 77); el valor de $A_{90}$ será:

$$A_{90} = \frac{n \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot \emptyset_t{}^2\right)}{s_t} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 8^2\right)}{250} = 0{,}402 \ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

El Eurocódigo 2 no permite contar con la contribución del hormigón a la resistencia al agotamiento por tracción en el alma (i. e. $V_{cu} = 0$) en aquellas secciones en las que valor del cortante $V_{rd,2}$ haga necesario disponer armado transversal. En otras palabras:

- o bien la sección verifica la expresión [6.1.7], de casos sin armadura transversal
- o bien se debe dimensionar el esquema de estribos para que se cumpla [6.1.15] con $V_{cu} = 0$.

En estos casos se puede proceder adoptando otro valor del ángulo de inclinación de las bielas que incremente la contribución $V_{su}$ de los estribos. Concretamente, si se elige un ángulo de bielas de 26,6°, la cotangente de $\theta$ toma el valor de 2, que es el máximo permitido por la EHE-08. Las nuevas expresiones para las resistencias a cortante $V_{u1}$ y $V_{u2}$ se obtienen sustituyendo este nuevo valor de $\theta$ en [6.1.7] y en [6.1.20]:

$$\begin{aligned} V_{u1} &= 0{,}24 \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d \\ V_{u2} &= V_{su} = 1{,}8 \cdot d \cdot A_{90} \cdot f_{y90,d} \end{aligned} \qquad [6.1.23]$$

Las disposiciones de la Instrucción EHE-08 relativas a las armaduras transversales y a su cuantía mínima están recogidas en el Capítulo 8, "Diseño y disposiciones en vigas y soportes".

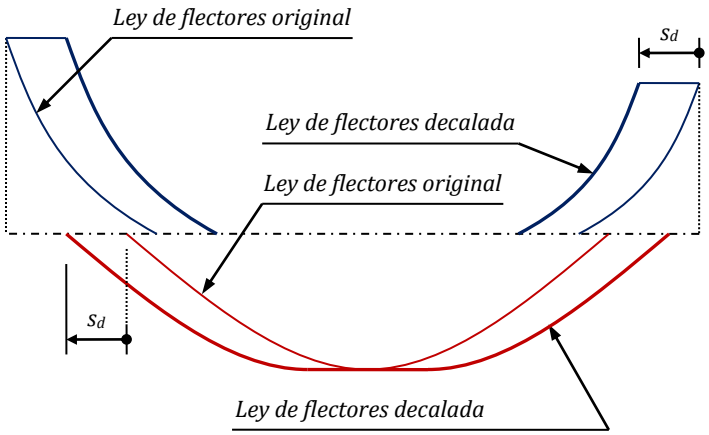



Figura 78. Decalaje de la ley de flectores

## 1.3 INTERACCIÓN DE CORTANTE-FLECTOR

Como puede observarse en las Figuras 72 y 73, los esfuerzos de tracción en la armadura $A_{s1}$ en la posición correspondiente a una sección transversal determinada son los correspondientes al par que equilibra el flector $M_d$ aplicado en otra sección transversal, trasladada o ***decalada*** según el gradiente positivo de la ley de valores absolutos de esfuerzos flectores.

Por esta razón, para dimensionar adecuadamente los elementos solicitados con ***flexión-simple*** se debe trasladar o decalar la ley de flectores a la hora de calcular correctamente la capacidad mecánica necesaria $U_{s1}$ en las secciones transversales a lo largo del vano, tal y como se representa en la Figura 78. El valor del decalaje, de acuerdo con el apartado 44.2.3.4.2 de la Instrucción EHE-08 es el siguiente:

$$s_d = z \cdot \left[\cot\theta - \frac{V_{su}}{2 \cdot V_{rd}} \cdot (\cot\theta + \cot\alpha)\right] \qquad [6.1.24]$$

pudiendo tomarse, del lado de la seguridad, $s_d \approx d$ para una inclinación de las bielas a 45°.

**<u>Ejemplo 1</u>: Una viga hormigón HA-30, armada con acero B400S, de 30 cm de ancho y perteneciente al entramado de un edificio está sometida a los cortantes indicados en la Figura 79. Efectuar las comprobaciones de agotamiento correspondientes en el extremo izquierdo del vano, sabiendo que el armado longitudinal de la cara traccionada tiene una cuantía geométrica del 10‰.**

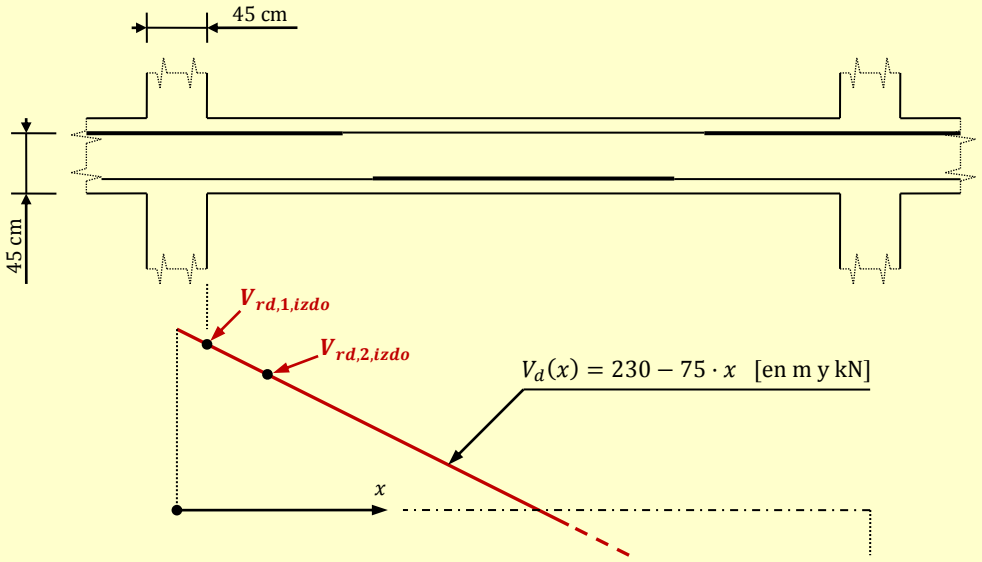



Figura 79. Viga de entramado sometida a esfuerzo cortante

Puesto que no hay armaduras activas y la sección de la viga en los apoyos es constante, el cortante efectivo coincidirá con el esfuerzo cortante de cálculo. Deben obtenerse los valores del esfuerzo cortante de cálculo en las secciones de comprobación:

$$V_{rd,1,izdo} = V_d(x = 0{,}225\ \text{m}) = 213{,}1\ \text{kN}$$

$$V_{rd,2,izdo} = V_d(x = 0{,}225 + 0{,}45\ \text{m}) = 179{,}4\ \text{kN}$$

*1. Comprobación de agotamiento por compresión oblicua:*

De acuerdo con [6.1.10]:

$$\boldsymbol{V_{u1}} = 0{,}30 \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d = 0{,}30 \cdot \frac{30\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1{,}5} \cdot 300\ \text{mm} \cdot 450\ \text{mm} = 810000\ \text{N} = \boldsymbol{810\ \text{kN}}$$

luego:

$$V_{rd,1,izdo} = 213{,}1\ \text{kN} < V_{u1} \quad \rightarrow \quad \text{comprobación correcta}$$

*2. Comprobación de agotamiento por tracción en el alma:*

De acuerdo con [6.1.16], con las simplificaciones apropiadas:

$$V_{cu} = \frac{0{,}15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} \cdot b_0 \cdot d$$

$$V_{cu} = \frac{0{,}15}{1{,}5} \cdot 1{,}67 \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}01 \cdot 30} \cdot 300\ \text{mm} \cdot 450\ \text{mm}$$

$$V_{cu} = 0{,}519\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 300\ \text{mm} \cdot 450\ \text{mm} = 70053\ \text{N} = 70{,}1\ \text{kN}$$

con:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{450\ \text{mm}}} = 1{,}67 \quad (\not> 2) \qquad\qquad f_{cv} = f_{ck} = 30\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

El valor mínimo de $V_{cu}$ es:

$$V_{cu,mín} = \frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{cv}} \cdot b_0 \cdot d$$

$$V_{cu,mín} = \frac{0{,}075}{1{,}5} \cdot \sqrt{1{,}67^3 \cdot 30} \cdot 300\ \text{mm} \cdot 450\ \text{mm}$$

$$V_{cu,mín} = 0{,}591\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 300\ \text{mm} \cdot 450\ \text{mm} = 79788\ \text{N} = 79{,}8\ \text{kN}$$

Por lo tanto, la contribución del hormigón es $\boldsymbol{V_{cu} = 79{,}8\ \text{kN}}$ y hasta $V_{rd,2,izdo} = 179{,}4$ kN faltan 99,6 kN. Esta contribución la tiene que aportar el armado transversal:

$$\boldsymbol{V_{su} \geq 99600\ \text{N}}$$

La sección de armado transversal por unidad de longitud de la viga se obtiene de [6.1.21]:

$$V_{su} = 0{,}9 \cdot d \cdot A_{90} \cdot f_{y90,d} \geq 99600\ \text{N}$$

$$A_{90} \geq \frac{V_{su}}{0{,}9 \cdot d \cdot f_{y90,d}} = \frac{99600\ \text{N}}{0{,}9 \cdot 450\ \text{mm} \cdot \frac{400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1{,}15}} = 0{,}71\ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}$$

Si se disponen estribos simples de diámetro Ø8, la separación $s_t$ se obtiene de:

$$A_{90} = \frac{n \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot \phi_t{}^2\right)}{s_t} \geq 0{,}71\ \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} \quad \rightarrow \quad s_t \leq \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 8^2\right)}{0{,}71} = 141{,}6\ \text{mm}$$

Tal y como se verá en el Capítulo 8, "Diseño y disposiciones en vigas y soportes", lo habitual es modular la separación de estribos a múltiplos de 5 cm, por lo que en este caso, el más cercano del lado de la seguridad es $s_t = 100$ mm. Además habría de comprobarse si este diseño cumple las cuantías mínimas que se expondrán en dicho tema.

## 1.4 RASANTE ALAS-ALMA EN VIGAS EN T

En el caso de las secciones en T, debido a la geometría de la sección, más concretamente por la variación del ancho de la sección, los esfuerzos cortantes producen un esfuerzo rasante en la superficie ideal de contacto entre cada ala y el nervio o alma (ver Figura 80). Se puede demostrar que:

$$\frac{\tau_w \cdot b_w}{b} = \frac{\tau_f \cdot h_f}{b_1} \qquad [6.1.25]$$

siendo $b$ el ancho de la cabeza comprimida, $b_1$ el vuelo de cada ala, $h_f$ el espesor de la cabeza comprimida, $b_w$ el espesor del nervio y $\tau_w$ y $\tau_f$ las tensiones tangenciales en el nervio y en el ala, respectivamente. Admitiendo las siguientes relaciones:

$$V_{rd} \approx \frac{\tau_w \cdot b_w}{z} \qquad V_{fd} \approx \frac{\tau_f \cdot h_f}{z} \qquad [6.1.26]$$

éstas permiten obtener el valor de un esfuerzo cortante virtual $V_{fd}$ que cuantificaría dicho rasante y permitiría dimensionar las armaduras para el control del rasante entre alas y alma y evitar así el colapso de la viga debido a este fenómeno. Si se combinan, se deduce la siguiente ecuación:

$$V_{fd} = V_{rd} \cdot \frac{b_1}{b} \qquad [6.1.27]$$

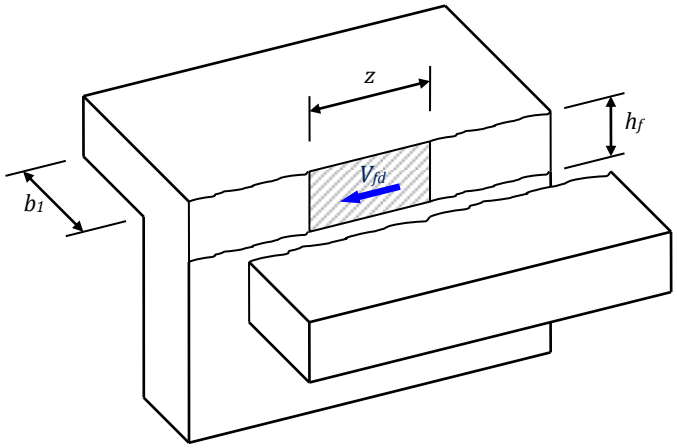



Figura 80. Fenómeno del rasante entre alas y alma en vigas en T

El procedimiento propuesto por la Instrucción EHE-08 se basa en el cálculo de la armadura necesaria para resistir un esfuerzo rasante de cálculo $S_d$ que equivale a una fuerza por unidad de longitud y que se obtiene como el cociente entre la variación de la fuerza de compresión (o tracción) en el ala de la sección $\Delta F_d$ entre dos posiciones distantes una longitud $a_f$ y dicha distancia de separación. Dentro de dicha longitud, la variación de la ley de momentos debe ser monótona y no debe presentar cambios de signo. La comprobación de la Instrucción establece que el rasante $S_d$ no debe producir agotamiento por compresión oblicua:

$$S_d \leq 0{,}3 \cdot f_{cd} \cdot h_f \qquad [6.1.28]$$

y tampoco debe agotar la armadura de rasante:

$$S_d \leq A_p \cdot f_{yd} \qquad [6.1.29]$$

siendo $A_p$ el área de la armadura perpendicular a la sección de estudio, por unidad de longitud. Se recuerda que $f_{yd}$ no puede tomarse superior a 400 N/mm². En alas sometidas a tracción, la ecuación [6.1.28] debe sustituirse por esta otra:

$$S_d \leq 0{,}2 \cdot f_{cd} \cdot h_f \qquad [6.1.30]$$

A partir de [6.1.27] se puede obtener una expresión del rasante en función del cortante de referencia:

$$S_d = \frac{V_{fd}}{z} \approx \frac{V_{rd}}{0{,}9 \cdot d} \cdot \frac{b_1}{b} \qquad [6.1.31]$$

la cual es válida para alas comprimidas. En el caso de alas traccionadas debe emplearse esta otra:

$$S_d \approx \frac{V_{rd}}{0{,}9 \cdot d} \cdot \frac{A_{ala}}{A_{total}} \qquad [6.1.32]$$

Además, según la Instrucción debe añadirse a esta armadura la correspondiente a la flexión "transversal" del ala en voladizo, pero podrá disminuirse la de rasante teniendo en cuenta la compresión debida al momento flector transversal. Por ello, algunos autores y versiones anteriores de la Instrucción proponen simplemente disponer la mayor de las dos.

Finalmente, la Figura 81 muestra distintas opciones de disponer las armaduras de cortante en las vigas de sección en T.

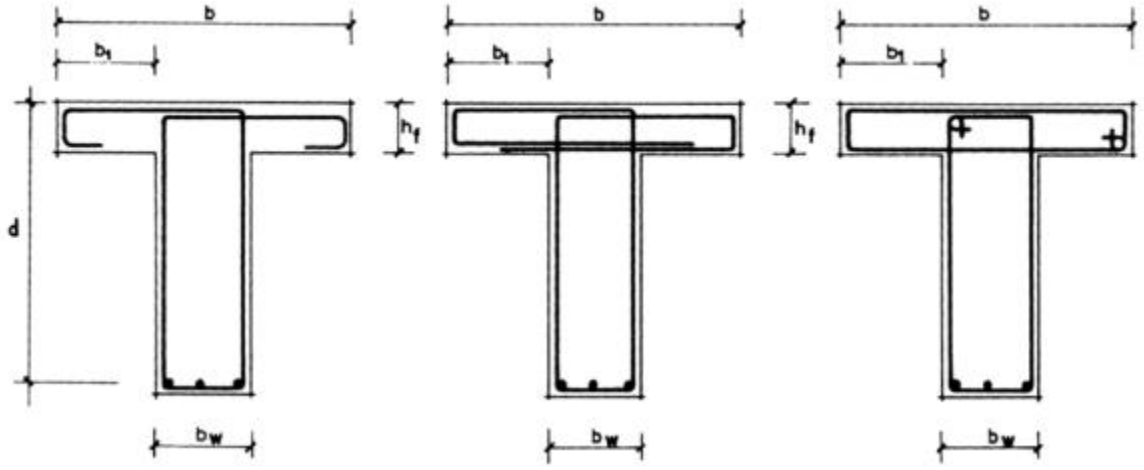



Figura 81. Posibles disposiciones de armadura transversal en vigas en T

## 2. TENSIONES TANGENCIALES: LA TORSIÓN

De forma similar a como se estudia el esfuerzo cortante en piezas lineales de hormigón armado, para el caso de elementos lineales sometidos a torsión se plantea su analogía con una celosía que posibilita la aplicación del método de bielas y tirantes (Figura 82).

Los elementos lineales sometidos a torsión (pura o combinada con otros esfuerzos) deberán ser dimensionados y comprobados de acuerdo con el artículo 45º de la Instrucción EHE-08, ***siempre que el equilibrio estático de una estructura dependa de la resistencia a torsión de uno o varios elementos de la misma***. Si no es ése el caso, sólo se comprobarán aquellos elementos lineales cuya rigidez a torsión haya sido considerada en el cálculo de esfuerzos. En el estudio del efecto del esfuerzo torsor, las secciones macizas se sustituyen por otras equivalentes de pared delgada (Figura 83). El espesor $h_e$ de la pared se calcula como:

$$h_e \leq \frac{A}{u} \quad (\leq h_0 \,;\, \geq 2 \cdot c) \qquad [6.2.1]$$

donde $A$ es el área de la sección transversal, incluyendo las áreas huecas interiores, $u$ es el perímetro exterior que encierra el área $A$, $h_0$ es el espesor real de pared en el caso de secciones huecas y $c$ es el recubrimiento de las armaduras longitudinales.

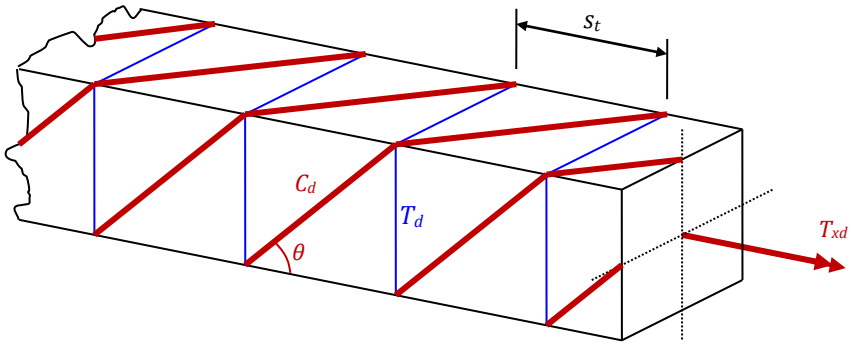



Figura 82. Analogía de la celosía para un elemento sometido a torsión

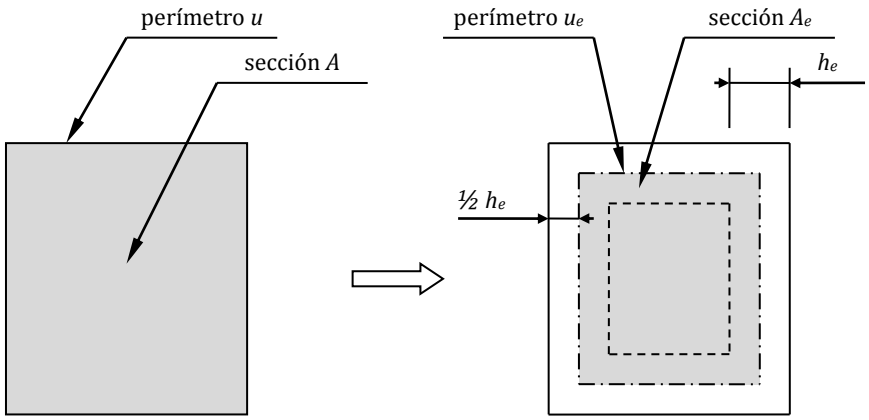



Figura 83. Sección equivalente de pared delgada para el estudio de la torsión

Las comprobaciones que hay que realizar son las siguientes:

- comprobación de las bielas comprimidas de hormigón:

$$T_{xd} \leq T_{u1} \qquad [6.2.2]$$

- comprobación de los tirantes de la armadura transversal:

$$T_{xd} \leq T_{u2} \qquad [6.2.3]$$

- comprobación de los tirantes de la armadura longitudinal:

$$T_{xd} \leq T_{u3} \qquad [6.2.4]$$

Los valores de las resistencias $T_{u1}$, $T_{u2}$ y $T_{u3}$ son los siguientes:

$$T_{u1} = 2 \cdot K \cdot \alpha \cdot f_{1cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \frac{\cot\theta}{1 + \cot^2\theta} \qquad [6.2.5]$$

$$T_{u2} = \frac{2 \cdot A_e \cdot A_t}{s_t} \cdot f_{yt,d} \cdot \cot\theta \qquad [6.2.6]$$

$$T_{u3} = \frac{2 \cdot A_e \cdot A_l}{u_e} \cdot f_{yl,d} \cdot \tan\theta \qquad [6.2.7]$$

donde:

- $A_e$ es el área encerrada por la línea media de la sección hueca eficaz de cálculo
- $u_e$ es el perímetro de la línea media de la sección hueca eficaz de cálculo
- $K = 1$ en ausencia de esfuerzo axil; en caso contrario, se calculará de acuerdo con [6.1.8]
- $\alpha$ es un parámetro que vale habitualmente 0,60 si se colocan estribos únicamente a lo largo del perímetro exterior, aunque adoptaría el valor 0,75 en el caso de colocar otra capa de estribos en la cara interior de la sección hueca, equivalente o real
- $f_{1cd}$ es la capacidad de la biela de hormigón:

$$\begin{cases} 0{,}60 \cdot f_{cd} & \text{si } f_{ck} \leq 60 \text{ N/mm}^2 \\ \left(0{,}9 - \dfrac{f_{ck}}{200}\right) \cdot f_{cd} \geq 0{,}5 \cdot f_{cd} & \text{si } f_{ck} > 60 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \qquad [6.2.8]$$

- $\theta$ es el ángulo que forman las bielas comprimidas con el eje de la pieza, el cual debe cumplir la limitación $0{,}5 \leq \cot\theta \leq 2$
- $A_t$ es el área del redondo empleado como cerco o armadura transversal
- $A_l$ es el área de las todas armaduras longitudinales
- $f_{yt,d}$ y $f_{yl,d}$ son los límites elásticos de cálculo correspondientes, respectivamente, a la armadura transversal y longitudinal, no debiendo tomarse valores superiores a 400 MPa

La separación longitudinal $s_t$ entre los cercos para torsión no excederá de $^1/_8$ del perímetro $u_e$, debiendo cumplir además los requisitos definidos en el apartado 45.2.3 de la Instrucción EHE-08 para asegurar un adecuado confinamiento del hormigón sometido a compresión oblicua. Por otro lado, la interacción del cortante con otros esfuerzos se estudiará conforme al apartado 45.3 de la Instrucción EHE-08.

## 3. TENSIONES TANGENCIALES: EL PUNZONAMIENTO

Tal y como se describe en el libro *"Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón armado"* de José Calavera, "***el estado límite último de punzonamiento es un estado que se alcanza por agotamiento de la pieza bajo tracciones debidas a tensiones tangenciales, motivadas por una carga o reacción localizadas en una superficie pequeña de un elemento bidireccional de hormigón armado o pretensado***". Este estado límite puede afectar a forjados sin vigas (placas sobre apoyos aislados), algunos tipos de zapatas y losas de cimentación. La rotura se produce teóricamente a través de la superficie lateral de un tronco de pirámide si la carga concentrada se ajusta a un área rectangular o bien la superficie lateral de un tronco de cono, cuando la carga se concentra en un área aproximadamente circular. El dimensionamiento y la comprobación se realizarán de acuerdo con el artículo 46º de la Instrucción EHE-08, la cual se basa en parte en el Código Modelo y en parte en el Eurocódigo 2. El procedimiento es empírico y consiste en la ***limitación de la tensión tangencial que se transmite en una superficie crítica, concéntrica a la zona cargada*** y que se representa esquemáticamente en la Figura 84 para el caso de un pilar interior de sección rectangular.

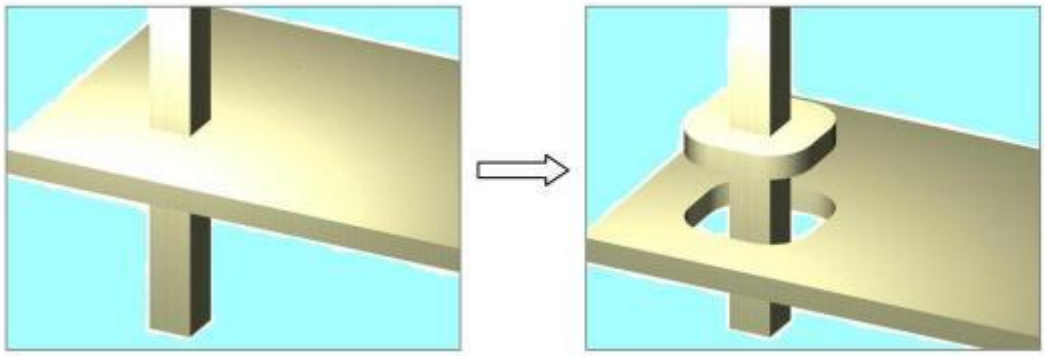


Figura 84. Descripción del fallo por punzonamiento

## 3.1 ELEMENTOS ESTRUCTURALES SIN ARMADURA DE PUNZONAMIENTO

No será necesario disponer armadura para punzonamiento cuando se verifique la condición:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd} \qquad [6.3.1]$$

La solicitación $\tau_{sd}$ es la ***tensión tangencial nominal de cálculo*** aplicada en el perímetro crítico y se calcula a través de:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd,ef}}{u_1 \cdot d} \qquad [6.3.2]$$

donde:

- $F_{sd,ef}$ es el esfuerzo efectivo de punzonamiento de cálculo, teniendo en cuenta el efecto del momento transferido entre losa y soporte:

$$F_{sd,ef} = \beta \cdot F_{sd} \qquad [6.3.3]$$

- $F_{sd}$ es el esfuerzo de punzonamiento de cálculo, el cual se calcula como la reacción del soporte, pudiendo descontarse las cargas exteriores aplicadas que actúan dentro del perímetro situado a una distancia $h/2$ de la sección del soporte o área cargada
- $\beta$ es un parámetro que, de forma simplificada, tiene en cuenta los efectos de la excentricidad de la carga y que podrá tomar los siguientes valores:
  - $\beta = 1$ … en ausencia de momentos
  - $\beta = 1{,}15$ … en soportes interiores
  - $\beta = 1{,}40$ … en soportes de borde
  - $\beta = 1{,}50$ … en soportes de esquina
- $d$ es el canto útil de la losa; dado que el armado suele disponerse en dos direcciones ortogonales con distinto recubrimiento mecánico, puesto que unas barras quedan más hacia el interior, se adoptará la semisuma de cantos útiles
- $u_1$ es el perímetro crítico definido en las Figuras 46.2.a-e de la Instrucción EHE-08, reproducidas a continuación en la Figura 85

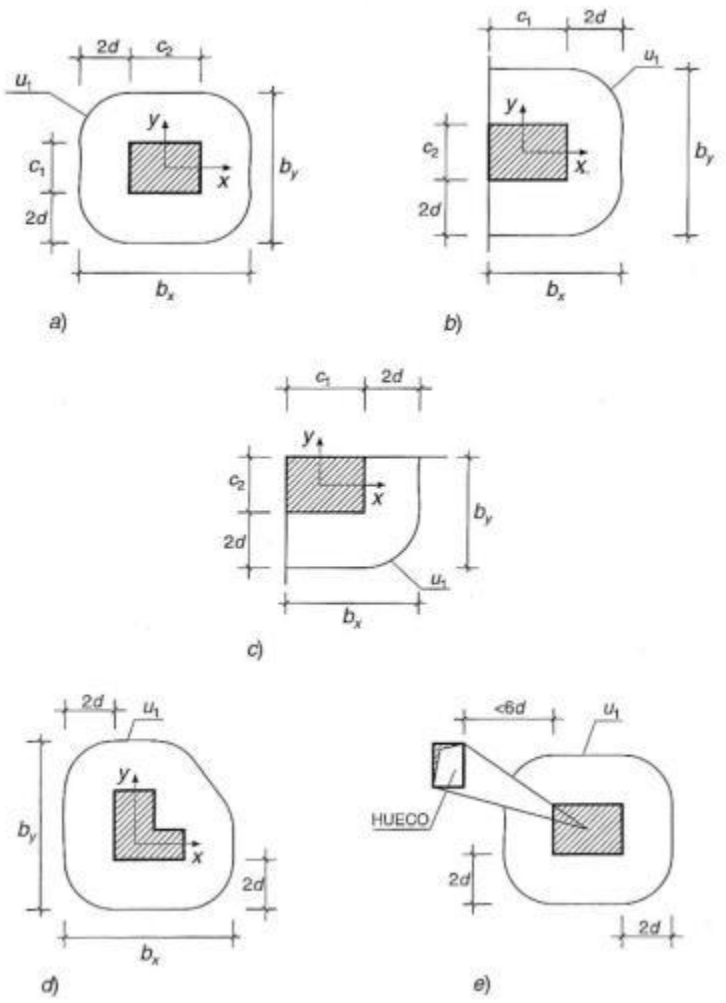



Figura 85. Reproducción de las Figuras 46.2.a-e de la Instrucción EHE-08

Por otro lado, la tensión $\tau_{rd}$ que aparece en [6.3.1] es la ***resistencia a rasante en el perímetro crítico*** $u_1$, la cual se calcula como sigue:

$$\tau_{rd} = \frac{0{,}18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}1 \cdot \sigma'_{cd} \quad \text{(expresada en N/mm}^2\text{)} \quad [6.3.4]$$

con un valor mínimo de:

$$\tau_{rd} \geq \tau_{rd,mín} = \frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{cv}} + 0{,}1 \cdot \sigma'_{cd} \quad \text{(expresada en N/mm}^2\text{)} \quad [6.3.5]$$

donde:

- $f_{cv}$ es la resistencia a cortante efectiva del hormigón, que podrá tomarse igual a $f_{ck}$ pero nunca por encima de 60 N/mm²; en el caso de estructuras en las que el control de la resistencia del hormigón sea indirecto, $f_{cv}$ no se tomará superior a 15 N/mm²
- $\rho_l$ es la cuantía geométrica de la armadura longitudinal de la losa calculada a partir de las cuantías correspondientes a las dos direcciones ortogonales:

$$\rho_L = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \quad [6.3.6]$$

- $\sigma'_{cd}$ es la media de las tensiones axiales en el perímetro crítico, calculada como la semisuma de las tensiones axiales en dos direcciones ortogonales $\sigma'_{cdx}$ y $\sigma'_{cdy}$; no se podrá tomar superior a $0{,}30 \cdot f_{cd}$ ni mayor que 12 N/mm²

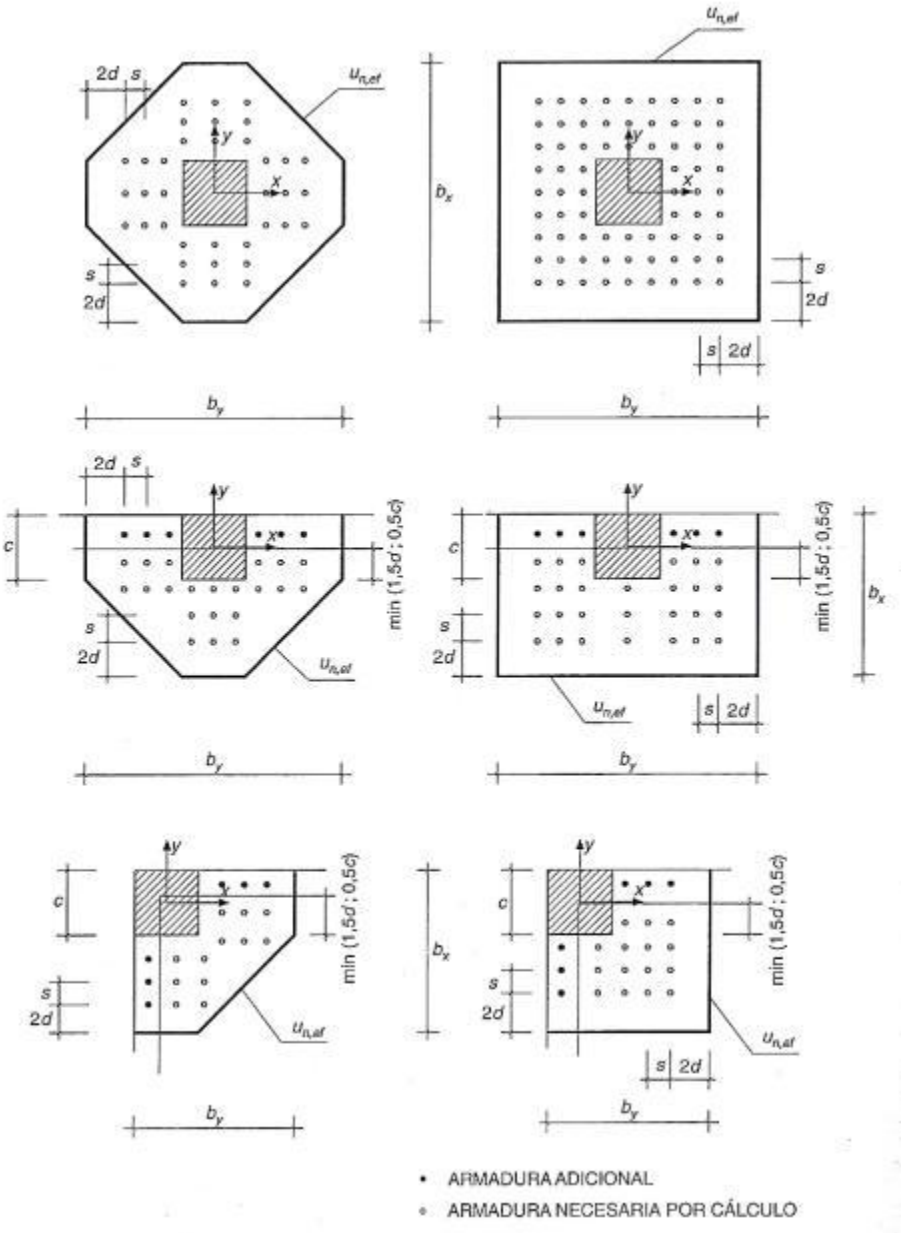



Figura 86. Reproducción de la Figura 46.5.a de la Instrucción EHE-08

Cuando no se verifique satisfactoriamente la condición [6.3.1] entonces deberá actuarse de acuerdo con las alternativas indicadas a continuación:

- o bien se aumenta el canto de la losa,
- o se disponen capiteles,
- o se aumentan las cuantías $\rho_x$ y $\rho_y$
- o bien se dispone armadura transversal de punzonamiento

## 3.2 ELEMENTOS ESTRUCTURALES CON ARMADURA DE PUNZONAMIENTO

La Figura 46.5.a de la Instrucción EHE-08 (reproducida en la Figura 86) representa distintos diseños en planta para esquemas de armadura de punzonamiento. El perímetro $u_{n,ef}$ separa la región con armadura de punzonamiento de una zona "exterior" de elemento exenta de dicha armadura. En este tipo de elementos deben efectuarse las tres comprobaciones siguientes.

### 3.2.1 Comprobación en la zona adyacente al perímetro del soporte o carga

Debe verificarse que:

$$\frac{F_{sd,ef}}{u_0 \cdot d} \leq 0{,}5 \cdot f_{1cd} \qquad [6.3.7]$$

donde:

- $f_{1cd}$ es la resistencia de la biela de hormigón, que se obtiene con la expresión [6.2.8]
- $u_0$ es el perímetro de comprobación, que se obtiene de acuerdo con la descripción gráfica de la Figura 46.4.3 de la Instrucción EHE-08

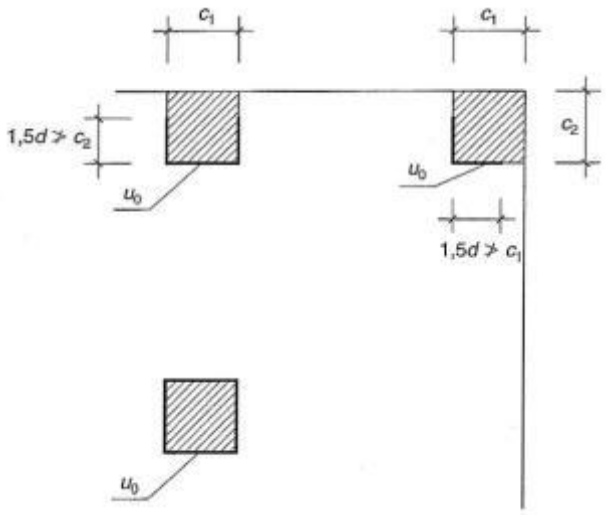



Figura 87. Reproducción de la Figura 46.4.3 de la Instrucción EHE-08

### 3.2.2 Comprobación en la zona con armadura de punzonamiento

La armadura de punzonamiento consistirá en una "retícula" de armaduras verticales o inclinadas un ángulo $\alpha$ y con un espaciamiento $s$ (ver Figura 86), las cuales deberán verificar la siguiente expresión de comprobación:

$$\tau_{sd} \leq 0{,}75 \cdot \tau_{rd} + 1{,}5 \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{s \cdot u_1} \qquad [6.3.8]$$

siendo:

- $A_{sw}$ el área total de la armadura de punzonamiento (ver Figura 86)
- $f_{y\alpha,d}$ es el límite elástico de cálculo del acero de la armadura de punzonamiento, no pudiendo tomarse valores por encima de 400 N/mm$^2$

### 3.2.3 Comprobación en la zona exterior a la armadura de punzonamiento

Deberá verificarse que la resistencia $\tau_{rd}$ rasante del hormigón calculada según [6.3.4] no sea superada a lo largo del perímetro $u_{n,ef}$ definido en la Figura 86. Por lo tanto:

$$\frac{F_{sd,ef}}{u_{n,ef} \cdot d} \leq \frac{0{,}18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}1 \cdot \sigma'_{cd} \qquad [6.3.9]$$

**<u>Ejemplo 2</u>: Un forjado de un edificio de viviendas consistente en una placa maciza de hormigón armado HA-25/P/12/I de 25 cm de espesor apoya sobre soportes aislados. Se va a estudiar la zona de placa que apoya sobre un pilar interior de 250×250 mm se sección, al que transmite un esfuerzo normal de cálculo $N_d = 750$ kN. La cuantía del armado longitudinal de la losa en la zona próxima a dicho soporte es de 0,5% en las dos direcciones principales de armado. Se pide:**

**a) Determinar si es necesario disponer armadura de punzonamiento en la placa**

**b) Calcular en su caso dicha armadura y hacer un esquema de disposición de la misma.**

*Apartado a):*

En primer lugar, de acuerdo con la Tabla 37.2.4.1.a de la EHE-08, el recubrimiento para las armaduras de la losa es 15 mm (para una vida útil de proyecto de 50 años). Con un margen de recubrimiento de 10 mm (supuesto nivel de control de ejecución normal) el recubrimiento nominal será de 25 mm. Aunque no se dan datos, se asumirá que los redondos longitudinales de la placa son Ø12, por lo que el recubrimiento mecánico será $d' = 25 + {}^{12}/_{2} = 31$ mm en una dirección y $d' = 25 + 12 + {}^{12}/_{2} = 43$ mm en la otra dirección de armado. La semisuma de recubrimientos es ½·(31 + 43) = 37 mm y, por lo tanto, el canto útil de la placa es $d = h - d' = 250 - 37 = 213$ mm. De acuerdo con la Figura 46.2.a de la EHE-08, el perímetro crítico $u_1$ se obtiene de:

$$c_1 = c_2 = 250 \text{ mm} \quad \text{(lado del soporte)}$$

$$u_1 = 2 \cdot (c_1 + c_2) + 2\pi \cdot 2 \cdot d = 2 \cdot (250 + 250) + 2\pi \cdot 2 \cdot 213 = 3677 \text{ mm}$$

Para determinar si la armadura necesita o no armadura de punzonamiento debe comprobarse si se verifica la comprobación [6.3.1]:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$$

La tensión tangencial resistente $\tau_{rd}$ se calcula a través de las siguientes operaciones:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \not> 2 \quad \rightarrow \quad \xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{213}} = 1{,}97 \quad ; \quad \rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = 0{,}005$$

$$f_{cv} = f_{ck} = 25 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad ; \quad \sigma'_{cd} = 0$$

$$\tau_{rd} = \frac{0{,}18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}1 \cdot \sigma'_{cd} = 0{,}549 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

no pudiendo adoptar valores inferiores a:

$$\tau_{rd,mín} = \frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{cv}} + 0{,}1 \cdot \sigma'_{cd} = 0{,}691 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Por lo tanto, la tensión rasante $\tau_{rd}$ adopta este valor mínimo de 0,691 N/mm². Sin embargo, la tensión tangencial solicitante $\tau_{sd}$ es:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd,ef}}{u_1 \cdot d} = \frac{\beta \cdot F_{sd}}{u_1 \cdot d} = \frac{1{,}15 \cdot 750000 \text{ N}}{3677 \text{ mm} \cdot 213 \text{ mm}} = 1{,}10 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Como consecuencia, es necesario dimensionar una armadura de punzonamiento.

*Apartado b):*

En primer lugar debe definirse el tamaño de la región donde se dispondrá la armadura de punzonamiento, despejando $u_{n,ef}$ de la expresión [6.3.9]:

$$\frac{F_{sd,ef}}{u_{n,ef}\cdot d} \le \frac{0{,}18}{\gamma_c}\cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100\cdot \rho_l \cdot f_{cv}} + 0{,}1\cdot \sigma'_{cd} = 0{,}549\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$u_{n,ef} \ge \frac{1{,}15\cdot 750000\ \text{N}}{0{,}549\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\cdot 213\ \text{mm}} = 7376\ \text{mm}$$

La configuración elegida para disponer la armadura de punzonamiento es la que se muestra en la Figura 88.

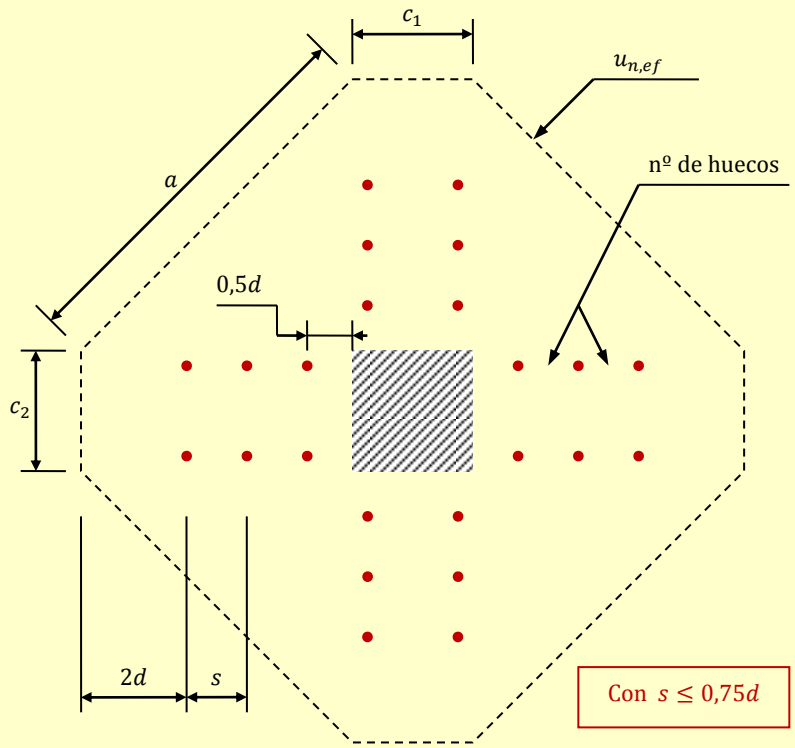



Figura 88. Disposición de armadura de punzonamiento en el ejemplo 2

El valor de la diagonal $a$ se obtiene de:

$$u_{n,ef} = 2\cdot(c_1 + c_2) + 4\cdot a \quad \rightarrow \quad a = \frac{u_{n,ef} - 2\cdot(c_1+c_2)}{4} = 1594\ \text{mm}$$

La separación entre estribos será:

$$s \le 0{,}75d = 0{,}75\cdot 213\ \text{mm} = 159{,}8\ \text{mm} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{s = 150\ mm}$$

Conocida la separación entre estribos se puede determinar cuántos deberán disponerse en cada uno de los brazos de la cruz, como el número de huecos $n$ más una unidad.

$$a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2d + n\cdot s + 0{,}5d \quad \rightarrow \quad n = 3{,}96\ldots \text{ es decir, } \textbf{4 huecos} \text{ y } \textbf{5 estribos}$$

Por lo tanto, la armadura de punzonamiento consistirá en 4 brazos de 5 estribos o, lo que es lo mismo, 40 redondos.

El dimensionamiento de los redondos se plantea a través de la expresión [6.3.8]

$$\tau_{sd} \leq 0{,}75 \cdot \tau_{rd} + 1{,}5 \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{s \cdot u_1} \quad \rightarrow \quad A_{sw} \cdot f_{y\alpha,d} \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{\tau_{sd} - 0{,}75 \cdot \tau_{rd}}{1{,}5} \cdot s \cdot u_1$$

Empleando estribos verticales se tiene que:

$$A_{sw} \cdot f_{y90,d} = \frac{1{,}10\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} - 0{,}75 \cdot 0{,}691\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1{,}5} \cdot 150\ \text{mm} \cdot 3677\ \text{mm} = 213909\ \text{N}$$

Aunque se va a emplear acero B500S, la tensión de los estribos está limitada a 400 MPa y, por lo tanto:

$$A_{sw} \geq \frac{213909\ \text{N}}{400\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 534{,}8\ \text{mm}^2$$

Como hay 32 redondos, el área de cada uno de ellos deberá ser:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \emptyset_t{}^2 \geq \frac{534{,}8\ \text{mm}^2}{40\ \text{redondos}} = 13{,}4\ \text{mm}^2 \quad \rightarrow \quad \emptyset_t \geq 4{,}1\ \text{mm}$$

Es decir, valdría con un diámetro de 5 mm, pero como el diámetro nominal más fino para producto de acero B500S es 6 mm, se eligen estribos de 6 mm.

Queda una última comprobación, en la zona adyacente al soporte de 250×250 mm de lado, según [6.3.7], que correspondería al agotamiento por compresión excesiva del hormigón:

$$\frac{F_{sd,ef}}{u_0 \cdot d} \leq 0{,}5 \cdot f_{1cd} = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot f_{cd} = 0{,}3 \cdot f_{cd} \qquad \text{con } u_0 = 2 \cdot (c_1 + c_2)$$

$$F_{sd,ef} \leq 0{,}6 \cdot f_{cd} \cdot (c_1 + c_2) \cdot d = 0{,}6 \cdot 20\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot (250 + 250\ \text{mm}) \cdot 213\ \text{mm} = 1278\ \text{kN}$$

Al ser $F_{sd,ef} = 1{,}15 \cdot 750\ \text{kN} = 862{,}5\ \text{kN}$, esta comprobación se cumple satisfactoriamente.

# CAPÍTULO 7
# ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE INESTABILIDAD

## 1. CONCEPTOS PREVIOS SOBRE EL FENÓMENO DE INESTABILIDAD

De una manera muy intuitiva, el concepto de ***inestabilidad*** se describe de una manera accesible a través del problema de una columna muy esbelta que esté sometida a un esfuerzo axial simple de compresión excéntrico respecto del eje del soporte (Figura 89). Si no se tienen en cuenta las deformaciones de flexión del soporte, cuando se plantee el cálculo de los esfuerzos a lo largo del mismo éstos estarán obtenidos de acuerdo con un ***análisis de primer orden***. Si el soporte no es excesivamente deformable, este procedimiento de análisis podrá asumirse como válido.

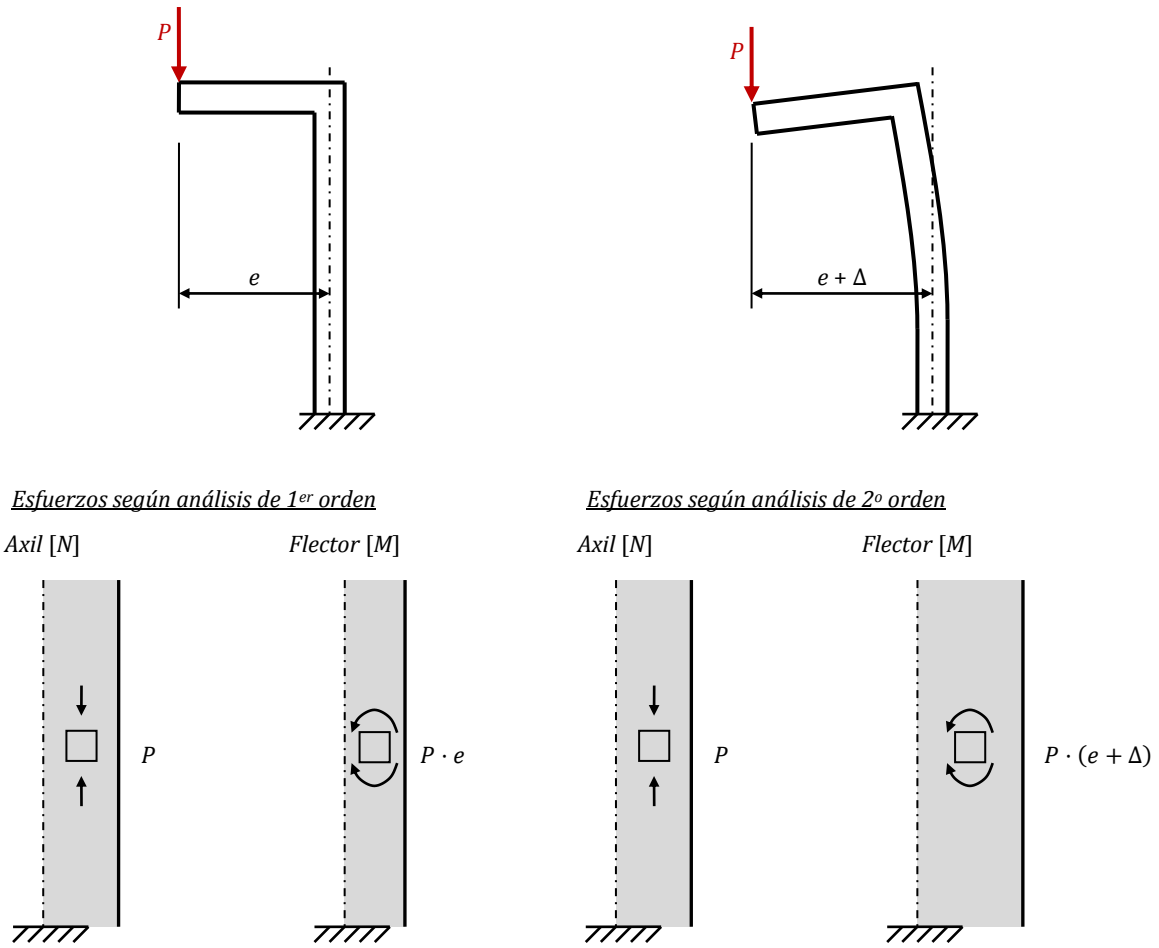



Figura 89. Concepto y representación de los efectos de segundo orden en un soporte

Sin embargo, si el soporte tuviera un cierto grado de esbeltez tal que su deformabilidad no pudiera despreciarse, entonces debería procederse con un ***análisis de segundo orden*** o de ***tipo P-Δ***. Este tipo de análisis estructural es de carácter iterativo y aplica la carga $P$ por intervalos; por ejemplo:

- podría comenzarse aplicando $^1/_{10}$ de $P$ y obtenerse los correspondientes esfuerzos y las deformaciones del soporte
- a continuación se incrementaría la carga hasta $^2/_{10}$ de $P$ pero aplicándola sobre la estructura deformada del paso anterior; se obtendrían nuevos esfuerzos y nuevas deformaciones
- en una tercera iteración la carga se incrementaría hasta $^3/_{10}$ de $P$ y sería aplicada sobre la estructura deformada según los valores obtenidos en la iteración anterior; de nuevo se calcularían los esfuerzos y las deformaciones
- y así hasta llegar a aplicar la totalidad de la carga $P$

Si, a lo largo de las sucesivas iteraciones, cada incremento de la carga aplicada va acompañado de un incremento "controlado" de las deformaciones de flexión, los resultados no diferirán en gran medida de los que se obtendrían con un análisis de primer orden. Sin embargo, si los incrementos de deformaciones en cada iteración son cada vez mayores, la estructura será sensible a los efectos de segundo orden para ese nivel de carga. Si la carga $P$ es suficientemente elevada, un pequeño incremento de la misma podrá producir una variación incontrolada de las deformaciones y se dice que se ha producido un colapso por ***inestabilidad*** o ***pandeo***.

Para el soporte de hormigón armado de la Figura 89 en situación de servicio, supuestas las deformaciones pequeñas y despreciando el peso propio del soporte, los esfuerzos que solicitan la base del soporte serán $P_k$ (esfuerzo normal de compresión) y $P_k{\cdot}e$ (esfuerzo flector del plano). La Figura 90 representa un hipotético *diagrama de interacción* para el soporte de la Figura 89 armado con una determinada cuantía mecánica adimensional $\omega$. Si se incrementase la carga hasta llegar al agotamiento, asumiendo la validez de la teoría de primer orden, ***el colapso se produciría por fallo de resistencia*** cuando la recta de carga intersectase a la curva de la capacidad mecánica adimensional $\omega$ del soporte, obteniéndose una carga de colapso de valor $P_{u,1}$.

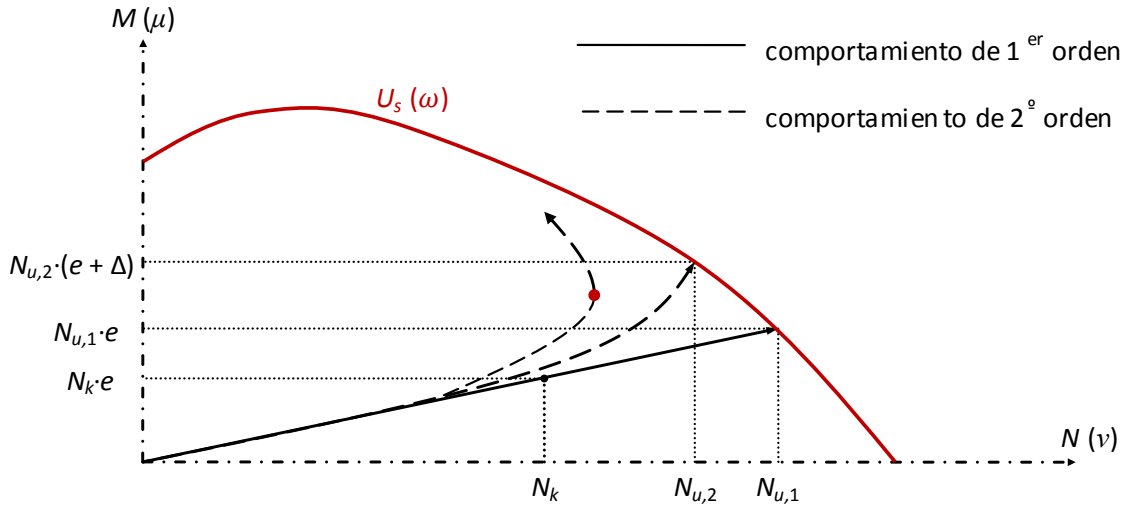



Figura 90. Representación de los cálculos de primer y segundo orden en un diagrama de interacción

Si, debido a la esbeltez y a la deformabilidad del soporte, no fuera aceptable un análisis de primer orden, la relación entre flectores y axiles ya no sería lineal y el agotamiento se produciría cuando la

"curva de carga" intersectara con la curva de $\omega$. La carga de colapso sería entonces $P_{u,2}$ inferior al valor de primer orden $P_{u,1}$, que quedaría del lado de la inseguridad.

En resumen, si la esbeltez del soporte no es excesiva, la diferencia entre $P_{u,1}$ y $P_{u,2}$ será inapreciable y será admisible un análisis estructural de primer orden. En caso contrario, el valor de la deformación puede crecer muy rápidamente hasta valores que agoten la pieza con un esfuerzo normal muy por debajo del $P_{u,1}$. El análisis de primer orden no sería adecuado y el fallo se produciría por inestabilidad de forma de la pieza.

Además de todo lo anterior, en el caso de estructuras de hormigón armado, el crecimiento incontrolado de Δ puede verse agravado debido a otros tres factores:

- como se recordará, el diagrama tensión-deformación del hormigón no es lineal, por lo que las rectas de carga *N-M* no son del todo "lineales"
- a medida que se incrementa el esfuerzo flector por efecto de Δ, se incrementa también la fisuración de la pieza, reduciéndose el valor de la rigidez $E{\cdot}I$ y contribuyendo a que Δ sea aún mayor
- los efectos reológicos del hormigón y, más concretamente, el proceso de fluencia frente a cargas de acción duradera, produce un incremento de la deformación Δ

Por lo tanto, en el caso de estructuras de hormigón, el procedimiento de análisis estructural debe ser capaz de aplicar la teoría de segundo orden a un material no lineal, que se fisura y que cambia sus propiedades y su estado de deformaciones con el tiempo.

## 1.1 EL CONCEPTO DE ESBELTEZ

En todo lo anterior se ha visto cómo la esbeltez de una pieza o de una estructura juega un papel esencial a la hora de decidir lo apropiado de un tipo de análisis estructural frente a otro o a la hora de predecir la carga de colapso de un soporte. La esbeltez de un elemento lineal pretende ser una medida de la relación entre la longitud de un elemento frente a las dimensiones de su sección transversal. Cuando el concepto de esbeltez va asociado a fenómenos de inestabilidad por pandeo, suele hablarse de dos tipos de esbeltez:

- ***esbeltez geométrica***:

$$\lambda_g = \frac{\ell_0}{h} \qquad [7.1.1]$$

- ***esbeltez mecánica***:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i_c} = \frac{\ell_0}{\sqrt{I_b / A_c}} \qquad [7.1.2]$$

donde:

- $\ell_0$ es la longitud de pandeo de la pieza
- $h$ es el canto de la pieza o dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión
- $i_c$ es el radio de giro de la pieza
- $I_b$ es la inercia de la sección bruta en el plano de flexión
- $A_c$ es la sección bruta de la pieza

En secciones rectangulares de canto $h$, el radio de giro equivale a:

$$i_c = h / \sqrt{12} \qquad [7.1.3.\text{a}]$$

y la relación entre la esbeltez geométrica y la mecánica es:

$$\lambda_g = 0{,}29 \cdot \lambda \qquad [7.1.3.\text{b}]$$

En secciones circulares de radio *R*, el radio de giro es:

$$i_c = {}^{R}/_{2} \qquad [7.1.4.\text{a}]$$

y la esbeltez geométrica es:

$$\lambda_g = 0{,}25 \cdot \lambda \qquad [7.1.4.\text{b}]$$

## 1.2 EL CONCEPTO DE TRASLACIONALIDAD E INTRASLACIONALIDAD DE LAS ESTRUCTURAS

A los efectos del estudio de pandeo de soportes, caracterizar correctamente la estructura como ***traslacional*** o ***intraslacional*** tiene una enorme importancia. Se entiende por entramado intraslacional aquel en el que el desplazamiento relativo Δ entre plantas consecutivas pueda ser considerado como inapreciable.

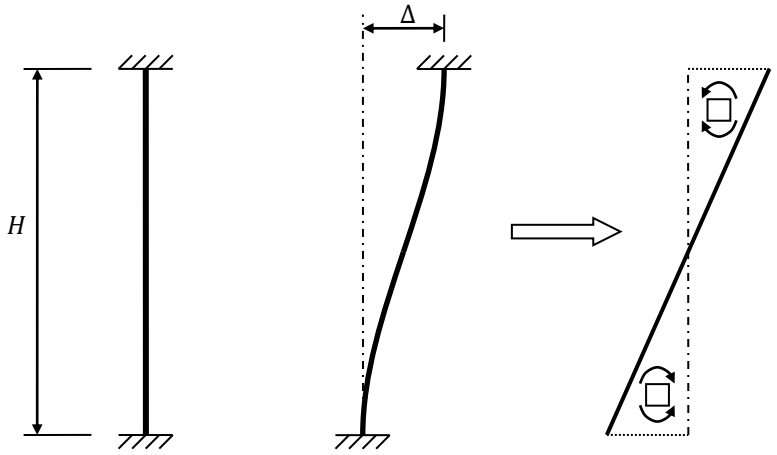



Figura 91. Influencia de la traslacionalidad en un soporte

Como puede observarse (Figura 91), este desplazamiento Δ, muy sensible a los efectos de segundo orden, puede incrementar los esfuerzos flectores en base y cabeza de soportes. Si la tipología estructural controla la traslación relativa entre alturas consecutivas, puede hablarse de una ***estructura intraslacional***, en la cual la estabilidad de los soportes no se verá tan comprometida como en un ***entramado traslacional***. Estrictamente, todos los entramados son traslacionales, por lo que su consideración como intraslacionales obliga a definir un umbral de desplazamientos laterales por debajo del cual esta hipótesis pueda ser considerada como válida. Tal y como comenta José Calavera, es tradicional considerar que:

- las tipologías habituales de los entramados de edificaciones industriales deben ser consideradas como traslacionales (p. ej. los pórticos tradicionales “a dos aguas”)
- los entramados de varios pisos y vanos, habituales en edificios de viviendas y oficinas, podrían ser considerados intraslacionales en las direcciones en las que su altura no supere el doble de su longitud, siempre que exista una determinada “densidad” de tabiquería”, en torno a 0,4 m lineales de tabique de ladrillo cerámico por cada m² de planta

En el caso de que estos últimos estén emplazados en zonas de acción sísmica, deberán ser considerados traslacionales, a no ser dispongan de elementos de rigidización como pantallas y núcleos adecuadamente dispuestos.

En el ámbito de la Instrucción EHE-08 una estructura provista de muros o núcleos contraviento dispuestos de manera que aseguren su rigidez torsional podrá considerarse como intraslacional en una dirección determinada si:

$$N_d \leq k_1 \cdot \frac{n}{n+1{,}6} \cdot \frac{\sum E \cdot I}{h^2} \qquad [7.1.5]$$

donde:

- $N_d$ es la carga vertical de cálculo que llega a la cimentación con la estructura totalmente cargada
- $n$ es el número total de plantas de la estructura
- $h$ es la altura total de la estructura, medida desde la cara superior de los cimientos
- $\sum E \cdot I$ es la suma de las rigideces a flexión de los elementos a contraviento en la dirección considerada, tomando como $I$ la inercia bruta de las secciones
- $k_1$ es una constante de valor 0,62 pero que, en el caso de que los elementos de arriostramiento puedan fisurar en Estado Límite Último, será reducida a 0,31

Establecer correctamente si la estructura es intraslacional o no, es fundamental a la hora de plantear el tipo de análisis. Tal y como establece la Instrucción EHE-08 en su artículo 43º:

- en estructuras intraslacionales, los esfuerzos en los elementos del modelo estructural pueden obtenerse directamente de un análisis de primer orden
- sin embargo, en estructuras traslacionales, es necesario obtener los esfuerzos mediante análisis no lineal en teoría de segundo orden, pudiendo ser necesario incluso introducir los efectos reológicos del hormigón cuando sean significativos

No obstante, el apartado 43.4 de la Instrucción EHE-08 admite que aún cuando las estructuras de edificación resulten traslacionales, podrán obtenerse los esfuerzos en teoría de primer orden siempre y cuando:

- no superen las 15 plantas,
- y el desplazamiento en cabeza, calculado con teoría de primer orden y con las rigideces correspondientes a las secciones brutas, no supere $1/750$ de la altura total

En dichas circunstancias, la comprobación de los soportes a pandeo podrá hacerse de manera aislada pero tomando su longitud equivalente como la de un soporte perteneciente a un entramado traslacional.

## 1.3 LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO EN LAS PIEZAS COMPRIMIDAS

En el caso de una pieza esbelta sometida a compresión con posibilidad de pandeo, se define como ***longitud de pandeo*** $\boldsymbol{\ell_0}$ a la distancia entre los puntos de inflexión de la deformada. Se determina habitualmente multiplicando la longitud real $L$ de la pieza por un factor $\alpha$:

$$\ell_0 = \alpha \cdot L \qquad [7.1.6]$$

En el caso de soportes aislados, los casos "canónicos" son los que recoge la Figura 92. Sin embargo, en el caso de soportes de hormigón que pertenecen a entramados, las condiciones de vinculación en los extremos no serán ni articulaciones perfectas ni tampoco empotramientos perfectos, sino que dependerán de la rigidez al giro de las piezas que confluyan en el nudo. La Instrucción EHE-08 adopta la formulación de **Jackson** y **Moreland**, de acuerdo con la cual, para un soporte que pertenece a un

entramado de vigas y pilares y que vincula los nudos $A$ (inferior) y $B$ (superior) se definen dos coeficientes $\psi_A$ y $\psi_B$. Estos coeficientes se calculan como:

$$\psi_A = \frac{\sum \frac{E \cdot I_i}{L_i}}{\sum \frac{E \cdot I_j}{L_j}} \qquad [7.1.7]$$

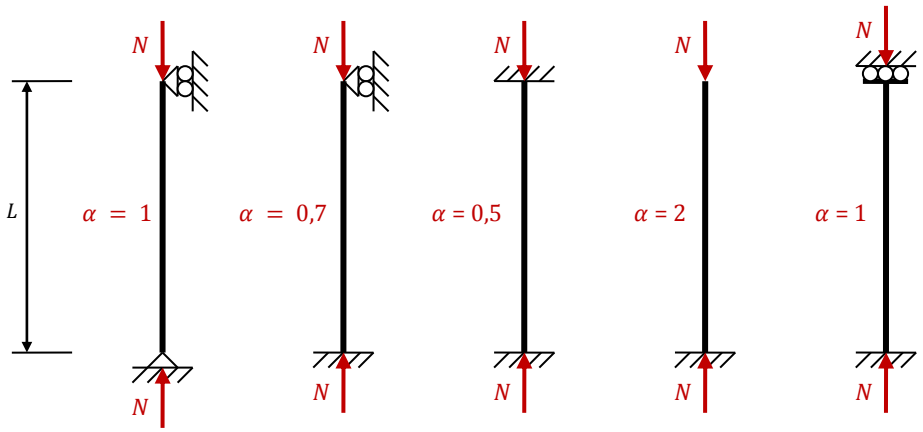



Figura 92. La longitud de pandeo en los casos canónicos

En la expresión [7.1.7] el sumatorio asociado al subíndice *i* se refiere a las rigideces al giro de los dos pilares que concurren en *A* y el sumatorio asociado al subíndice *j* se refiere a las rigideces al giro de las vigas que concurren en *A*; en ambos casos se entiende que las inercias se refieren al plano de flexión-pandeo considerado. La expresión para $\psi_B$ es análoga a [7.1.7]. Se ha supuesto el caso habitual de que las vigas que parten del nudo están empotradas en sus dos nudos extremos (si una de ellas es un voladizo, su rigidez no debe tenerse en cuenta al operar el sumatorio). Una vez determinados $\psi_A$ y $\psi_B$ el valor del coeficiente $\alpha$ se obtiene de los ***Nomogramas*** recogidos por la *CPH* en la Instrucción EHE-08, reproducidos en la Figura 93.

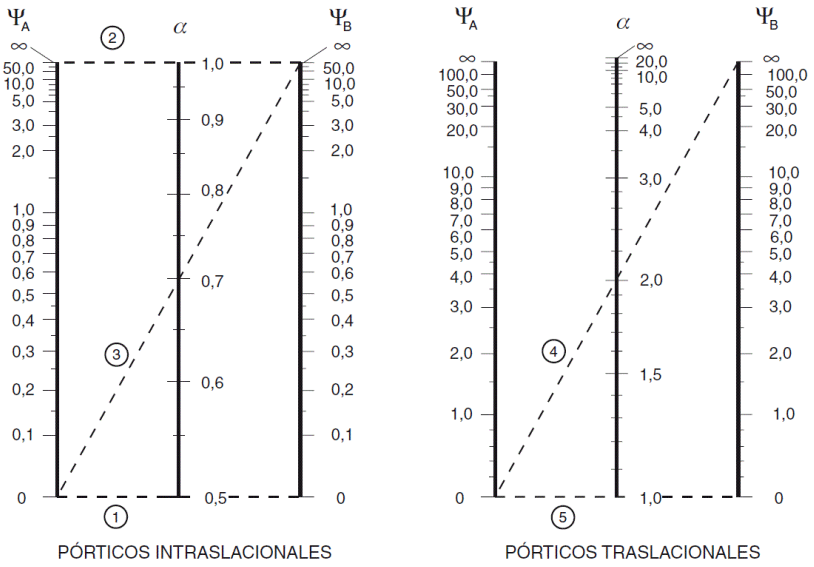



Figura 93. Nomogramas para determinar la longitud de pandeo

Alternativamente, se puede obtener numéricamente el valor del coeficiente $\alpha$ mediante:

$$\alpha = \frac{0{,}64 + 1{,}4 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 3 \cdot \psi_A \cdot \psi_B}{1{,}28 + 2 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 3 \cdot \psi_A \cdot \psi_B} \quad \text{en pórticos intraslacionales} \qquad [7.1.8.\text{a}]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{7{,}5 + 4 \cdot (\psi_A + \psi_B) + 1{,}6 \cdot \psi_A \cdot \psi_B}{7{,}5 + \psi_A + \psi_B}} \quad \text{en pórticos traslacionales} \qquad [7.1.8.\text{b}]$$

## 2. COMPROBACIÓN DE INESTABILIDAD EN LA EHE-08

Este apartado hace referencia a la comprobación de inestabilidad en soportes aislados que:

- o bien pertenecen a estructuras intraslacionales,
- o bien pertenecen a estructuras traslacionales, de altura no superior a 15 plantas y en las que el desplazamiento de su azotea no supere $1/750$ de la altura total

En ambos casos, se supone que se han calculado los esfuerzos axil ($N_d$) y flector ($M_d$) de cálculo mediante un análisis lineal de primer orden.

### 2.1 CASOS EN LOS QUE PUEDE OMITIRSE LA COMPROBACIÓN DE INESTABILIDAD

Los efectos de segundo orden pueden despreciarse cuando se comprueben soportes aislados cuya esbeltez mecánica no supere un ***valor límite inferior*** $\boldsymbol{\lambda_{inf}}$ asociado a una pérdida de capacidad portante del 10% respecto de un soporte no esbelto. De acuerdo con el artículo 43.1.2 de la Instrucción EHE-08, esta esbeltez límite inferior puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$\lambda_{inf} = 35 \cdot \sqrt{\frac{C}{\nu} \cdot \left[1 + \frac{0{,}24}{e_2/h} + 3{,}4 \cdot \left(\frac{e_1}{e_2} - 1\right)^2\right]} \leq 100 \qquad [7.2.1]$$

donde:

- $\nu$ es el esfuerzo axil adimensional de cálculo:

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \qquad [7.2.2]$$

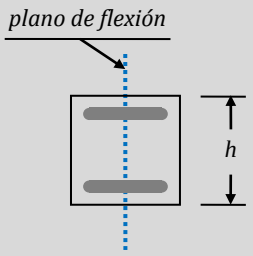
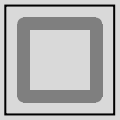
- $h$ es el canto de la sección del soporte en el plano de flexión considerado
- $C$ es un coeficiente que depende de la disposición de las armaduras longitudinales en el soporte y cuyos valores se obtienen en la Tabla 7.1
- $e_2$ es la excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con mayor momento, considerada positiva
- $e_1$ es la excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con menor momento, tomada con signo positivo si tiene el mismo sentido que $e_2$

Las excentricidades $e_2$ y $e_1$ no podrán tomar valores inferiores a la excentricidad mínima definida por la Instrucción en el artículo 42.2.1:

$$e_2\,, e_1 \geq e_{mín} = \frac{h}{20} \not< 20 \text{ mm} \qquad [7.2.3]$$

En el caso de estructuras traslacionales, el cociente $e_1/e_2$ se tomará igual a 1.

Tabla 7.1 Valores del coeficiente $C$

| Esquema de armado | Valor de $C$ |
|---|---|
|  | 0,24 |
|  | 0,20 |
| | 0,16 |

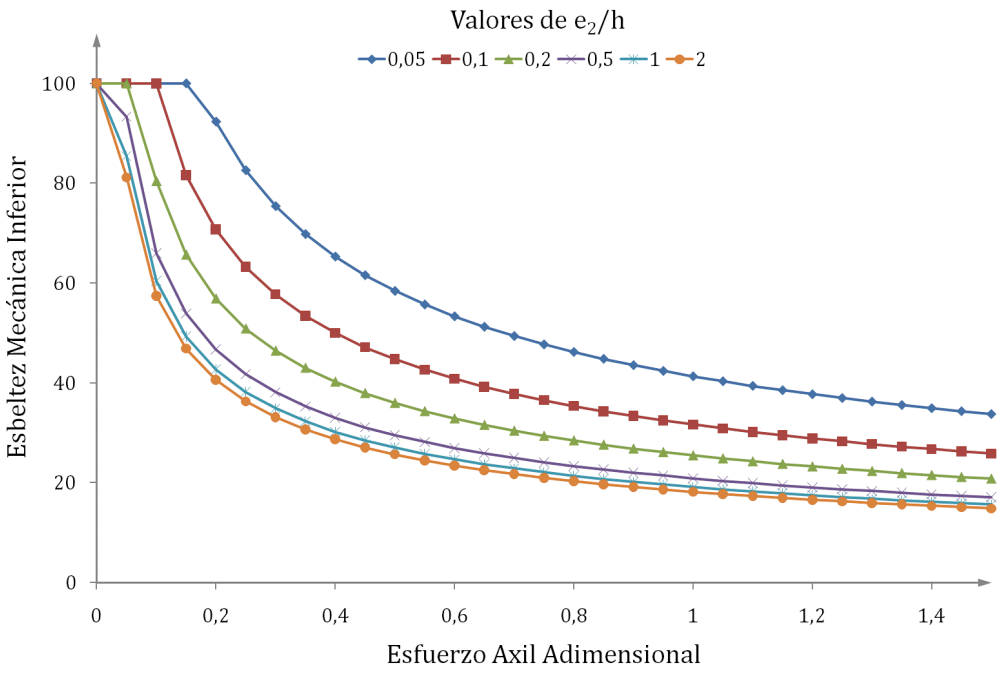



Figura 94. Variación de la esbeltez mecánica inferior en función del axil adimensional

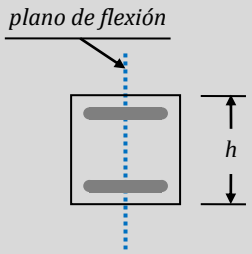
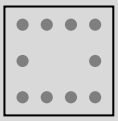
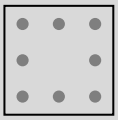
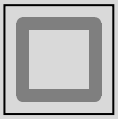
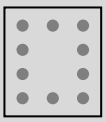
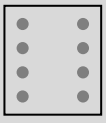
La Figura 94 muestra gráficamente cómo varía la esbeltez inferior en función del esfuerzo axil adimensional de compresión aplicado. En concreto la gráfica se ha construido para un valor $C = 0{,}24$ y suponiendo $e_2 = e_1$.

## 2.2 CASO DE SOPORTES DE ESBELTEZ COMPRENDIDA ENTRE $\lambda_{inf}$ Y 100

En la comprobación de soportes aislados con esbeltez mecánica comprendida entre el valor límite inferior $\lambda_{inf}$ y 100 no podrán despreciarse los efectos de segundo orden. No obstante, no será necesario recurrir al método general de comprobación (análisis *P*-Δ, considerando los efectos resológicos y la no linealidad del material), ya que podrá aplicarse en su lugar el ***método aproximado*** expuesto en el apartado 43.5.1 de la Instrucción EHE-08. Los efectos de segundo orden se tienen en cuenta a través de una excentricidad adicional $e_a$ que se añade a las excentricidades obtenidas en el cálculo de primer orden. Como consecuencia, el soporte deberá dimensionarse para una excentricidad total igual a:

$$e_{tot} = e_e + e_a \qquad [7.2.4]$$

Tabla 7.2 Valores del coeficiente $\beta$

| Esquema | $\beta$ |
|---|---|
|  | 1,00 |
|  | 1,20 |
|  | 1,33 |
|  | 1,50 |
|  | 1,55 |
|  | 1,80 |
| | 2,00 |
| | 3,00 |

Se designa como $e_e$ a la ***excentricidad equivalente de primer orden***, calculada como:

$$e_e = 0{,}6 \cdot e_2 + 0{,}4 \cdot e_1 \geq 0{,}4 \cdot e_2 \quad \text{(recuadros intraslacionales)} \qquad [7.2.5.\text{a}]$$

$$e_e = e_2 \quad \text{(recuadros traslacionales)} \qquad [7.2.5.\text{b}]$$

Las excentricidades $e_1$ y $e_2$ tienen el mismo significado que el expuesto para el cálculo de $\lambda_{inf}$.

El otro sumando de [7.2.4] es la ***excentricidad adicional de segundo orden*** $e_a$ y se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$e_a = (1 + 0{,}12 \cdot \beta) \cdot (\varepsilon_{yd} + 0{,}0035) \cdot \frac{h + 20 \cdot e_e}{h + 10 \cdot e_e} \cdot \frac{(\ell_0)^2}{50 \cdot i_c} \qquad [7.2.6]$$

donde:

- $\beta$ es el factor de armado del soporte y depende del esquema de armaduras longitudinales que se adopte, de acuerdo con los valore propuestos en la Tabla 7.2
- $\varepsilon_{yd}$ es la deformación de fluencia del acero, asociada al límite elástico de cálculo $f_{yd}$
- $h$ es la dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión-pandeo
- $\ell_0$ es la longitud efectiva de pandeo del soporte
- $i_c$ es el radio de giro de la sección transversal, según el plano de flexión-pandeo

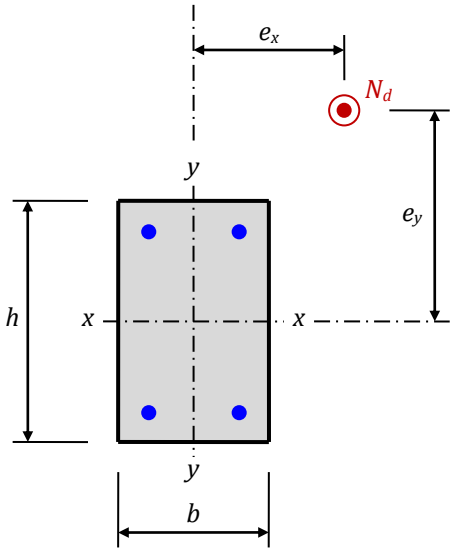



Figura 95. Soporte sometido a flexo-compresión esviada

En el caso de soportes de sección rectangular sometidos a ***flexo-compresión esviada*** con excentricidades de primer orden $e_x$ y $e_y$ (ver Figura 95) y con armadura constante en toda su longitud, puede realizarse una comprobación por separado según cada uno de los dos planos de simetría, cuando las excentricidades del esfuerzo de compresión cumplan:

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} \leq 1/4 \quad \text{ó bien} \quad \frac{\eta_y}{\eta_x} \leq 1/4 \qquad [7.2.7]$$

siendo $\eta_x$ y $\eta_y$ las excentricidades adimensionales de $N_d$ respecto de los ejes de simetría, tal y como quedan definidas en la Figura 95:

$$\eta_x = \frac{e_x}{b} = \frac{M_{yd}}{N_d \cdot b} \qquad [7.2.8.\text{a}] \qquad\qquad \eta_y = \frac{e_y}{h} = \frac{M_{xd}}{N_d \cdot h} \qquad [7.2.8.\text{b}]$$

Si no se cumple la condición anterior, entonces puede comprobarse el soporte frente al Estado Límite Último de inestabilidad de acuerdo con esta otra condición:

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1 \qquad [7.2.9]$$

donde:

- $M_{xd}$ es el momento de cálculo alrededor del eje *x-x* en la sección crítica y, a diferencia del procedimiento anterior, incluyendo los efectos de segundo orden
- $M_{yd}$ es el momento de cálculo alrededor del eje *y-y* en la sección crítica e incluyendo los efectos de segundo orden
- $M_{xu}$ es el flector máximo alrededor del eje *x-x* resistido por la sección, para un axil $N_d$.
- $M_{yu}$ es el flector máximo alrededor del eje *y-y* resistido por la sección, para un axil $N_d$.

## 2.3 CASO DE SOPORTES CON ESBELTEZ SUPERIOR A 100

La comprobación de soportes aislados con esbeltez mecánica comprendida entre 100 y 200 deberá realizarse mediante la aplicación del procedimiento general descrito en los apartados 43.2 y 19.2 de la Instrucción EHE-08. El análisis deberá tener en cuenta las no-linealidades geométrica y mecánica del modelo y de los materiales, así como las incertidumbres asociadas a la predicción de los efectos de segundo orden y, en particular, los errores de dimensión e incertidumbres en la posición y línea de acción de las cargas axiles. La Instrucción EHE-08 no cubre aquellos casos en los que la esbeltez mecánica de los soportes aislados sea superior a 200.

**Ejemplo: El pilar central del entramado traslacional representado en la Figura 96, construido con HA-25, está solicitado con un esfuerzo axil de cálculo $N_d = 600$ kN y trabaja en compresión centrada de acuerdo con un cálculo de 1er orden. El canto del dintel del entramado es 0,45 m. La armadura longitudinal del pilar está simétricamente distribuida entre sus cuatro caras. Se pide determinar si se pueden despreciar los efectos de 2º orden y obtener, en caso contrario, los esfuerzos para dimensionar el pilar. Supóngase que el pandeo en el plano perpendicular al entramado está impedido.**

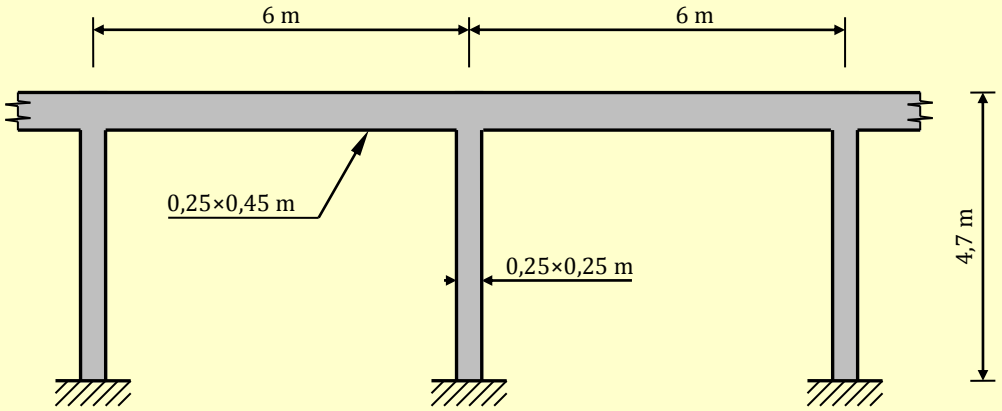



Figura 96. Entramado traslacional de una planta

En primer lugar, debe obtenerse la longitud de pandeo para dicho soporte. Si se designan *A* y *B* a los nudos inferior y superior del pilar, respectivamente, entonces:

$$\psi_A = 0 \quad \text{(empotr.)} \qquad \psi_B = \frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}25^4}{4{,}7} \Big/ \left(\frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}25\cdot 0{,}45^3}{6} + \frac{\frac{1}{12}\cdot 0{,}25\cdot 0{,}45^3}{6}\right) = 0{,}109$$

y, de acuerdo con [7.1.8.b]:

$$\alpha = \sqrt{\frac{7{,}5 + 4\cdot(\psi_A + \psi_B) + 1{,}6\cdot\psi_A\cdot\psi_B}{7{,}5 + \psi_A + \psi_B}} = \sqrt{\frac{7{,}5 + 4\cdot(0 + 0{,}109) + 0}{7{,}5 + 0 + 0{,}109}} = 1{,}021$$

por lo que:

$$\ell_0 = \alpha \cdot L = 1{,}021 \cdot 4{,}7 \text{ m} = 4{,}8 \text{ m}$$

y la esbeltez mecánica del pilar resulta:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{h/\sqrt{12}} = \frac{4{,}8\cdot\sqrt{12}}{0{,}25} = 66{,}5$$

La esbeltez límite inferior se obtiene de [7.2.1]:

$$\lambda_{inf} = 35 \cdot \sqrt{\frac{C}{\nu}\cdot\left[1 + \frac{0{,}24}{e_2/h} + 3{,}4\cdot\left(\frac{e_1}{e_2} - 1\right)^2\right]} \leq 100$$

con:

$$\nu = \frac{N_d}{f_{cd}\cdot b\cdot h} = \frac{600000 \text{ N}}{\frac{25 \text{ N/mm}^2}{1{,}5}\cdot 250 \text{ mm}\cdot 250 \text{ mm}} = 0{,}576 \quad ; \quad C = 0{,}20 \text{ (armadura simétrica)}$$

Aunque el enunciado dice que el pilar trabaja en compresión centrada ($e_2 = e_1 = 0$), no se pueden emplear valores de excentricidad inferiores a la mínima definida en [7.2.3], por lo que:

$$e_2 = e_1 = \frac{h}{20} = \frac{250}{20} = 12{,}5 \text{ mm} \prec \mathbf{20\ mm}$$

Así pues:

$$\lambda_{inf} = 35 \cdot \sqrt{\frac{C}{\nu}\cdot\left[1 + \frac{0{,}24}{e_2/h} + 3{,}4\cdot\left(\frac{e_1}{e_2} - 1\right)^2\right]} = 41{,}2$$

y, como consecuencia, no se pueden despreciar los efectos de 2º orden a la hora de dimensionar el soporte. En cualquier caso, como la esbeltez del pilar es inferior a 100, es posible aplicar el método simplificado para obtener la excentricidad adicional para tener en cuenta los efectos de 2º orden, de acuerdo con [7.2.6]:

$$e_a = (1 + 0{,}12\cdot\beta)\cdot(\varepsilon_{yd} + 0{,}0035)\cdot\frac{h + 20\cdot e_e}{h + 10\cdot e_e}\cdot\frac{(\ell_0)^2}{50\cdot i_c}$$

siendo:

$$e_e = e_2 = 20 \text{ mm} \quad \text{(por ser entramado traslacional)}$$

$$\beta = 1{,}5 \quad \text{(armado simétrico)} \quad ; \quad i_c = \frac{h}{\sqrt{12}} = 72{,}2 \text{ mm}$$

por lo que:

$$e_a = (1 + 0{,}12\cdot 1{,}5)\cdot(0{,}002 + 0{,}0035)\cdot\frac{250 + 20\cdot 20}{250 + 10\cdot 20}\cdot\frac{4800^2}{50\cdot 72{,}2} = 59{,}8 \text{ mm}$$

Finalmente, la excentricidad total de cálculo es:

$$e_{tot} = e_e + e_a = 20 + 59{,}8 = 79{,}8 \text{ mm}$$

y los esfuerzos de cálculo son:

$$\boldsymbol{N_d = 600 \text{ kN}}$$

$$\boldsymbol{M_d} = N_d \cdot e_{tot} = 600 \cdot 0{,}0798 = \boldsymbol{47{,}9 \text{ mkN}}$$

# CAPÍTULO 8
# DISEÑO Y DISPOSICIONES EN VIGAS Y SOPORTES

## 1. ANÁLISIS LINEAL CON REDISTRIBUCIÓN LIMITADA DE MOMENTOS

### 1.1 INTRODUCCIÓN Y DEFINICIÓN

Tal y como se expuso en el Capítulo 2, "Bases de cálculo y durabilidad", la Instrucción EHE-08 admite cuatro tipos de análisis en estructuras de hormigón: análisis lineal, análisis no lineal, análisis lineal con redistribución limitada de momentos y análisis plástico.

Para aquellas estructuras de hormigón en las que los esfuerzos se hayan calculado mediante un análisis lineal, las ecuaciones de dimensionamiento recogidas en el Capítulo 4, "Agotamiento por solicitaciones normales", distinguen entre secciones que pertenezcan a elementos isostáticos y aquellas que pertenezcan a elementos hiperestáticos. Recuérdese que, en el caso de estos últimos, se exige que las secciones críticas del elemento deben tener suficiente ductilidad para permitir que se produzca una redistribución de esfuerzos sin que se produzca una rotura local prematura. Por ello, si se da por válido el análisis lineal de un elemento hiperestático (el tipo de análisis en que se basan la mayoría de prontuarios de Resistencia de Materiales), el dimensionamiento del armado longitudinal deberá garantizar que la profundidad $x$ de la fibra neutra en rotura no sea mayor que $0{,}45 \cdot d$.

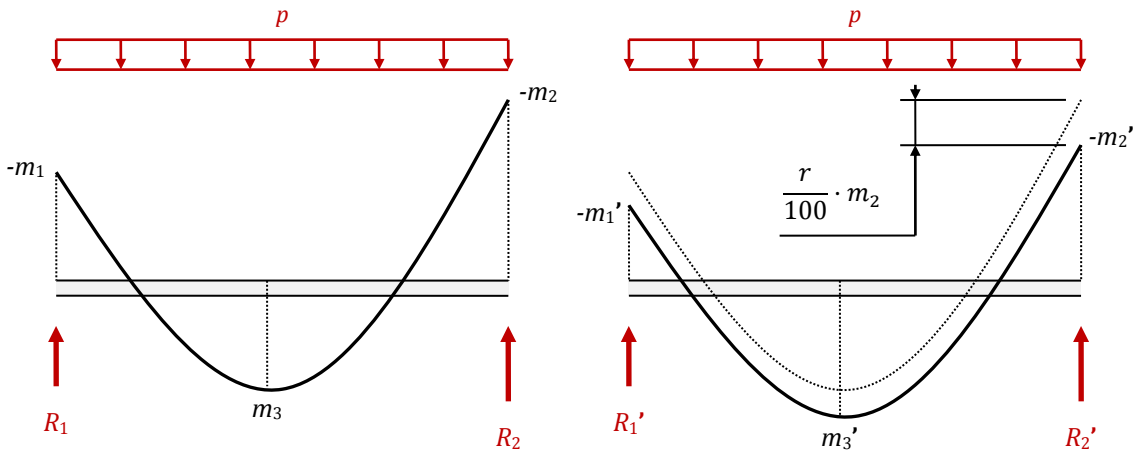



Figura 97. Representación esquemática de la redistribución limitada de momentos

El análisis ***lineal seguido de una redistribución limitada de los momentos***, representado en la Figura 97, es un procedimiento que permite retocar las leyes de momentos, reduciendo los valores de los momentos de unas secciones a costa de incrementar los de otras para que se siga verificando el equilibrio con los esfuerzos exteriores. El factor $r$ corresponde al porcentaje de redistribución del máximo momento negativo en dinteles de estructuras sensiblemente intraslacionales. Como los momentos negativos suelen ser mayores que los positivos (en valor absoluto), se consigue compensar de esta manera las leyes de flectores y pueden obtenerse armados más económicos. Cuando se aplica

una redistribución de momentos en un elemento lineal, deben reformularse adecuadamente las leyes de momentos flectores y cortantes. La Figura 98 ilustra esquemáticamente la manera en que pueden obtenerse a partir de las acciones aplicadas y de los valores de los flectores en las secciones extremas, por simple aplicación del principio de superposición.

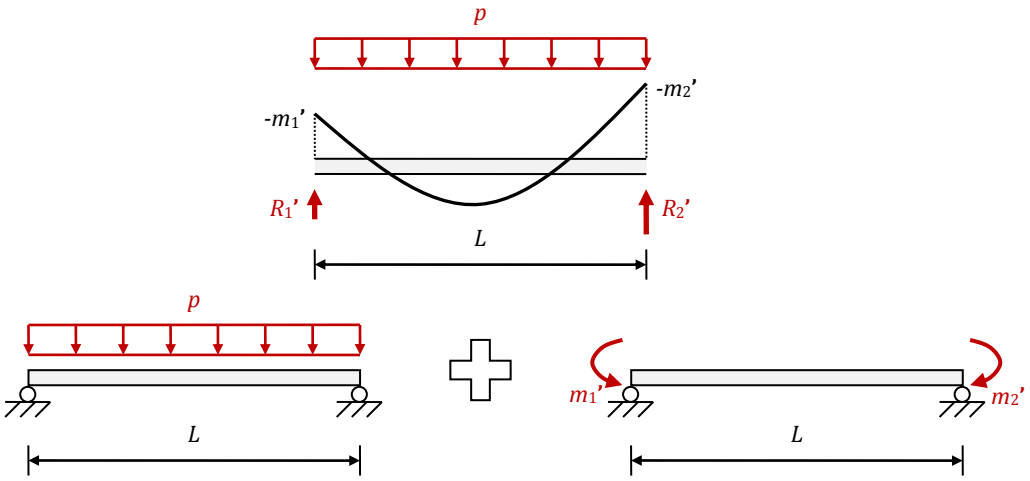



Figura 98. Aplicación del principio de superposición al análisis con redistribución

De lo recogido en la figura anterior se deducen los valores de las reacciones $R_1'$ y $R_2'$ que permiten obtener los valores de los cortantes en las secciones extremas tras la redistribución:

$$V_{izdo,r} = R_1' = \frac{p \cdot L}{2} + \frac{m_1' - m_2'}{L} \qquad [8.1.1.\text{a}]$$

$$V_{dcho,r} = -R_2' = -\left[\frac{p \cdot L}{2} + \frac{m_2' - m_1'}{L}\right] \qquad [8.1.1.\text{b}]$$

Conviene, sin embargo, rescribir las ecuaciones anteriores en función de los momentos flectores extremos. Así pues:

$$V_{izdo,r} = \frac{p \cdot L}{2} - \frac{M_{izdo,r} - M_{dcho,r}}{L} \qquad [8.1.2.\text{a}]$$

$$V_{dcho,r} = -\frac{p \cdot L}{2} - \frac{M_{izdo,r} - M_{dcho,r}}{L} \qquad [8.1.2.\text{b}]$$

donde $M_{izdo,r}$ y $M_{dcho,r}$ son, respectivamente, los valores de los momentos flectores en las secciones extremas del vano con el signo que les corresponda; habitualmente, frente a acciones gravitatorias, serán ambos negativos. Finalmente, las leyes de cortantes y flectores correspondientes al análisis con redistribución limitada se obtienen como:

$$V_r(x) = V_{izdo,r} - p \cdot x \qquad [8.1.3.\text{a}]$$

$$M_r(x) = M_{izdo,r} + V_{izdo,r} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2 \qquad [8.1.3.\text{b}]$$

donde la abscisa $x$ se toma con referencia en el extremo izquierdo.

## 1.2 LA REDISTRIBUCIÓN LIMITADA EN LA INSTRUCCIÓN EHE-08

El factor $r$ está limitado en los comentarios de la *CPH* al artículo 21º de la Instrucción EHE-08, de la siguiente manera:

$$r \leq 56 - 125 \cdot \frac{x}{d} = 56 - 125 \cdot \xi$$
$$r \leq 20\% \quad \text{con aceros B400S y B500S} \qquad [8.1.4]$$
$$r \leq 30\% \quad \text{con aceros B400SD y B500SD}$$

Los parámetros $x$ y $d$ son, respectivamente, la profundidad de la fibra neutra en rotura y el canto útil correspondientes a la sección sometida al máximo momento flector tras la redistribución.

Como puede observarse, un análisis lineal sin redistribución corresponde a $r = 0$ y ello conduce a:

$$r \leq 0 = 56 - 125 \cdot \xi \quad \rightarrow \quad \xi \leq \frac{56}{125} = 0{,}448 \approx 0{,}45 \qquad [8.1.5]$$

que es, precisamente, el criterio de dimensionamiento que se ha recordado más arriba. La ecuación [8.1.5] conduce a los planos de rotura que se muestran en la Figura 99.

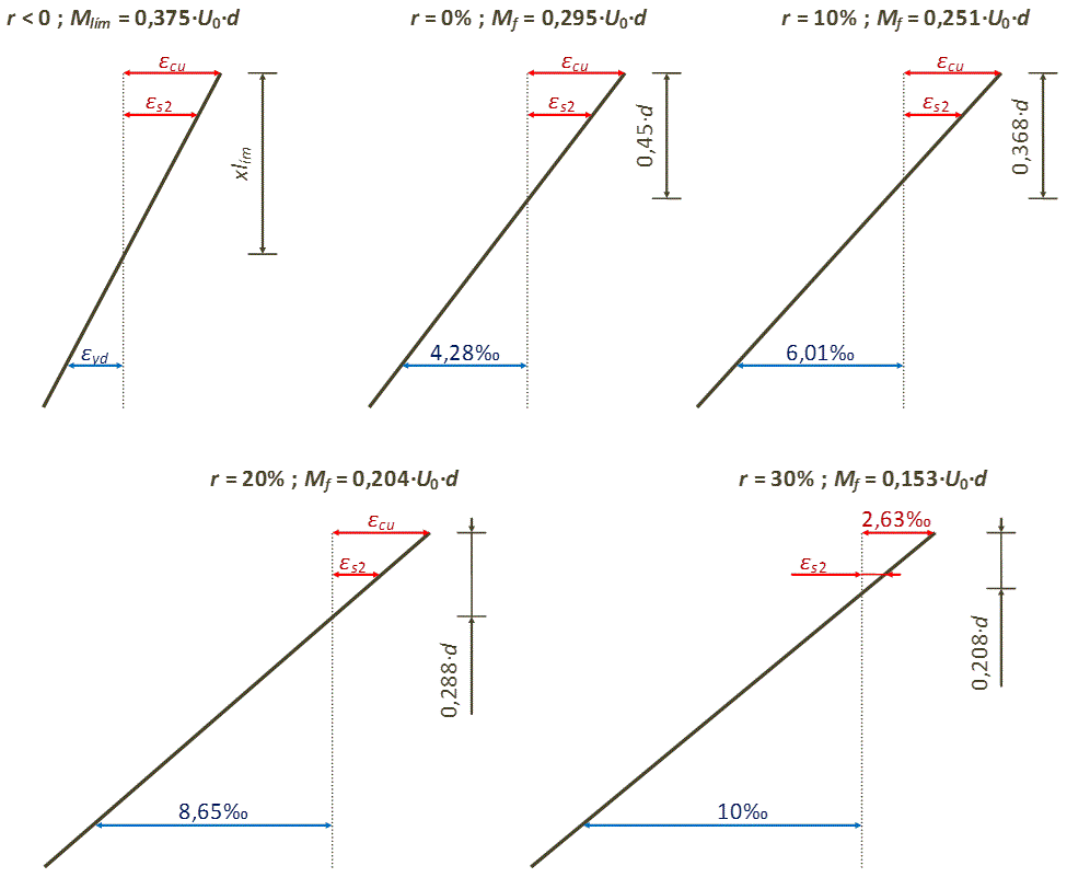



Figura 99. Capacidad de rotación de la sección crítica en función de la redistribución

Un alto porcentaje de redistribución de momento flector en una determinada sección crítica exige de ésta suficiente capacidad de rotación en la rotura; la Figura 99 ilustra gráficamente esta regla, conforme a la formulación del artículo 21º de la Instrucción EHE-08.

Se llama la atención sobre los siguientes puntos:

- el procedimiento es aplicable sólo a estructuras sensiblemente intraslacionales
- sólo se pueden redistribuir los momentos de las vigas, dinteles o forjados; no es posible "retocar" los momentos transmitidos a los soportes, que serán calculados con los valores obtenidos de un análisis lineal
- para cada porcentaje de redistribución (p. ej. $r = 20\%$) se definirá un valor de momento frontera, para valores por encima del cual la sección habrá de dimensionarse teniendo en cuenta la contribución de la armadura principal de compresión a fin de controlar la profundidad de la fibra neutra en rotura
- sólo se puede aplicar a los Estados Límite Últimos y no a los de Servicio

La Instrucción española coincide en este punto con lo recogido en el Eurocódigo 2 y en el Código Modelo de 1990, aunque varían ligeramente la formulación para hormigones de alta resistencia; además, de acuerdo con el Código Modelo:

- el factor $r$ se limitaría al 25% en vigas continuas y dinteles de pórticos intraslacionales
- mientras que $r$ se limitaría al 10% en dinteles de pórticos traslacionales

La Tabla 8.1 recoge los cantos útiles mínimos recomendados en cuatro supuestos de redistribución, entendiéndolos como aquellos que evitan tener que disponer armadura de compresión.

Tabla 8.1 Valores mínimos del canto útil según el grado de redistribución

| Diseño con $r = 0$ | Diseño con $r = 10\%$ | Diseño con $r = 20\%$ | Diseño con $r = 30\%$ |
|---|---|---|---|
| $d \geq 1{,}84 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}}$ | $d \geq 2{,}00 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}}$ | $d \geq 2{,}21 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}}$ | $d \geq 2{,}45 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} \cdot b}}$ |

Por otro lado, las Tablas 8.2, 8.3 y 8.4 recogen las ecuaciones de dimensionamiento para diseños en los que se ha aplicado un análisis lineal con redistribución del 10%, 20% y 30%, respectivamente, y en los supuestos en los que debe dimensionarse la armadura de compresión. Dichas ecuaciones reflejan el hecho de que el diseño de armado puede ser sensible a la relación entre el valor del recubrimiento mecánico $d'$ de la armadura principal de compresión y el canto útil $d$ de la sección; por ello se emplea el recubrimiento mecánico adimensional $\delta'$, que ya fue definido en el Capítulo 4, "Agotamiento por solicitaciones normales":

$$\delta' = \frac{d'}{d} \qquad [8.1.6]$$

Del valor de $\delta'$ depende el de un parámetro auxiliar $\kappa$ que también fue definido en el Capítulo 4 y que permite discriminar entre dos posibles situaciones:

- si $\kappa = 1$ la armadura principal de compresión llega a plastificar
- en cambio, si $\kappa > 1$ la armadura de compresión no alcanza la deformación $\varepsilon_{yd}$ y no aprovecha íntegramente su capacidad mecánica $U_{s2}$

Esta última situación puede ser crítica cuando se diseñan vigas planas, muy frecuentes en la tipología habitual de edificación en España.

Tabla 8.2 Diseño con redistribución de hasta el 10% / $\xi = 0{,}368$ cuando $\mu_d > 0{,}251$

| Ecuaciones | Tipo de acero | Valores de $\kappa$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta' = 0,05$ | $\delta' = 0,10$ | $\delta' = 0,15$ | $\delta' = 0,20$ |
| $\omega = 0{,}294 + \frac{\omega'}{\kappa} \qquad \omega' = \frac{\mu_d - 0{,}251}{1-\delta'} \cdot \kappa$ $\kappa = \frac{105 \cdot \varepsilon_{yd}}{0{,}368 - \delta'} \geq 1$ | B400S | 1 | 1 | 1 | 1,09 |
| | B500S | 1 | 1 | 1,05 | 1,36 |

Tabla 8.3 Diseño con redistribución de hasta el 20% / $\xi = 0{,}288$ cuando $\mu_d > 0{,}204$

| Ecuaciones | Tipo de acero | Valores de $\kappa$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta' = 0,05$ | $\delta' = 0,10$ | $\delta' = 0,15$ | $\delta' = 0,20$ |
| $\omega = 0{,}230 + \frac{\omega'}{\kappa} \qquad \omega' = \frac{\mu_d - 0{,}204}{1-\delta'} \cdot \kappa$ $\kappa = \frac{82{,}3 \cdot \varepsilon_{yd}}{0{,}288 - \delta'} \geq 1$ | B400S | 1 | 1 | 1,04 | 1,63 |
| | B500S | 1 | 1 | 1,29 | 2,03 |

Tabla 8.4 Diseño con redistribución de hasta el 30% / $\xi = 0{,}208$ cuando $\mu_d > 0{,}153$

| Ecuaciones | Tipo de acero | Valores de $\kappa$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta' = 0,05$ | $\delta' = 0,10$ | $\delta' = 0,15$ | $\delta' = 0,20$ |
| $\omega = 0{,}166 + \frac{\omega'}{\kappa} \qquad \omega' = \frac{\mu_d - 0{,}153}{1-\delta'} \cdot \kappa$ $\kappa = \frac{79{,}1 \cdot \varepsilon_{yd}}{0{,}208 - \delta'} \geq 1$ | B400SD | 1 | 1,27 | 2,37 | No recomendable |
| | B500SD | 1,09 | 1,59 | 2,96 | |

La observación “No recomendable” que se recoge en la Tabla 8.4 para los diseños en los que $d' = 0{,}20 \cdot d$ , es debida al problema de la posible falta de plastificación en dicha armadura. Tal y como indica dicha tabla, si el momento de cálculo se obtiene de un análisis con $r = 30\%$, la profundidad adimensional $\xi$ de la fibra neutra en rotura se limita a poco más de 0,20. Por lo tanto, el acero de la armadura principal $A_{s2}$ tendría una deformación unitaria prácticamente nula y no sería efectivo para el control de la ductilidad en una sección crítica sometida a un momento flector adimensional $\mu_d$ superior a 0,153.

**ÁBACO GENERAL DE FLEXIÓN PURA** Sección rectangular / B500S ó B500SD / $f_{ck} \leq 50$ MPa / Con redistribución, $r \leq 10\%$

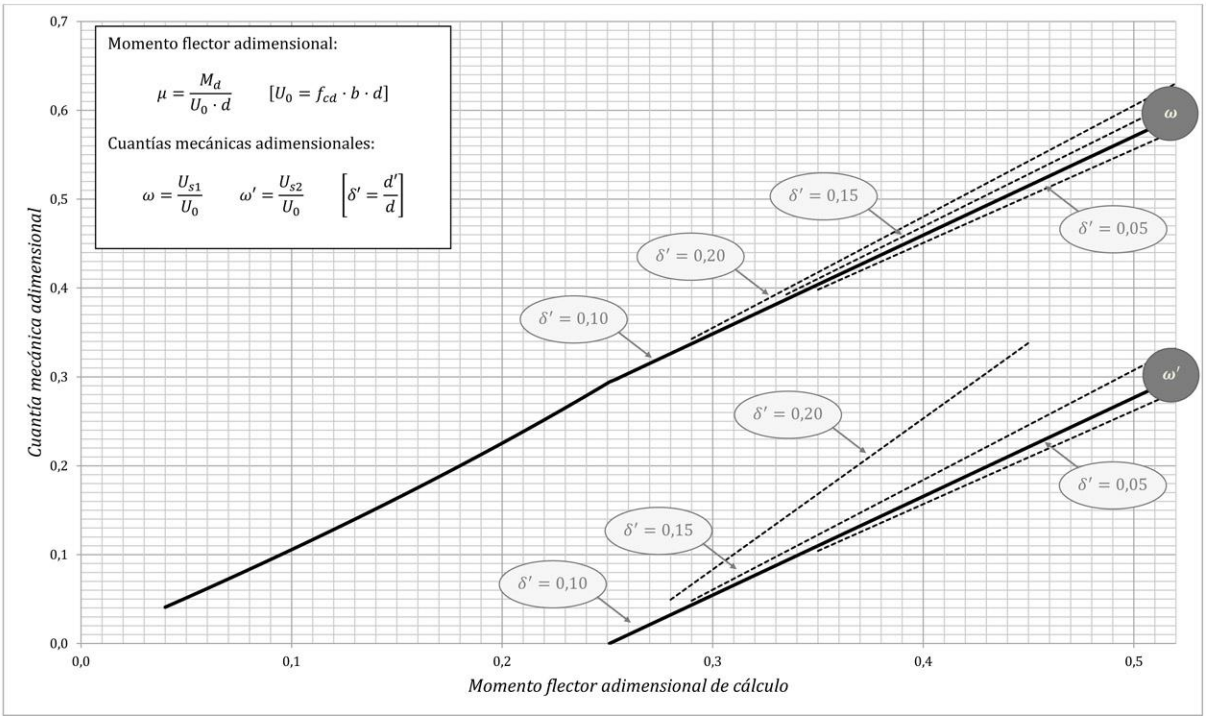



Figura 100. Ábaco de dimensionamiento en flexión pura para análisis con redistribución de hasta el 10%

**ÁBACO GENERAL DE FLEXIÓN PURA** Sección rectangular / B500S ó B500SD / $f_{ck} \leq 50$ MPa / Con redistribución, $r \leq 20\%$

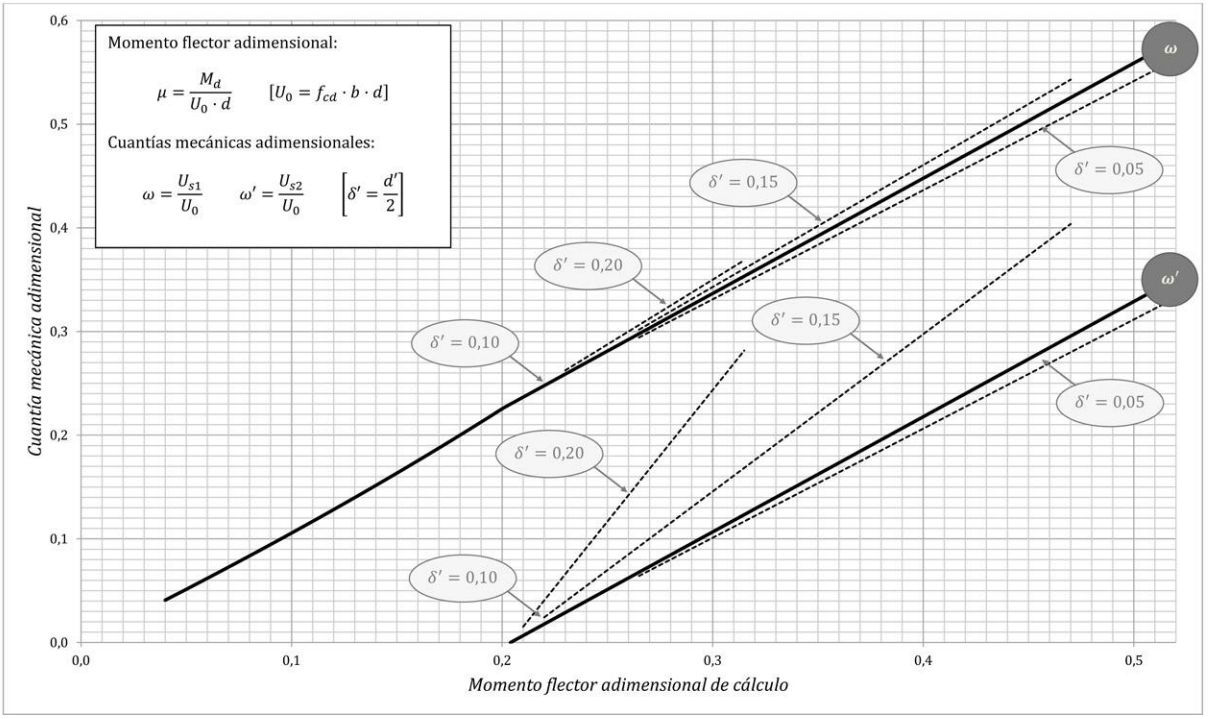



Figura 101. Ábaco de dimensionamiento en flexión pura para análisis con redistribución de hasta el 20%

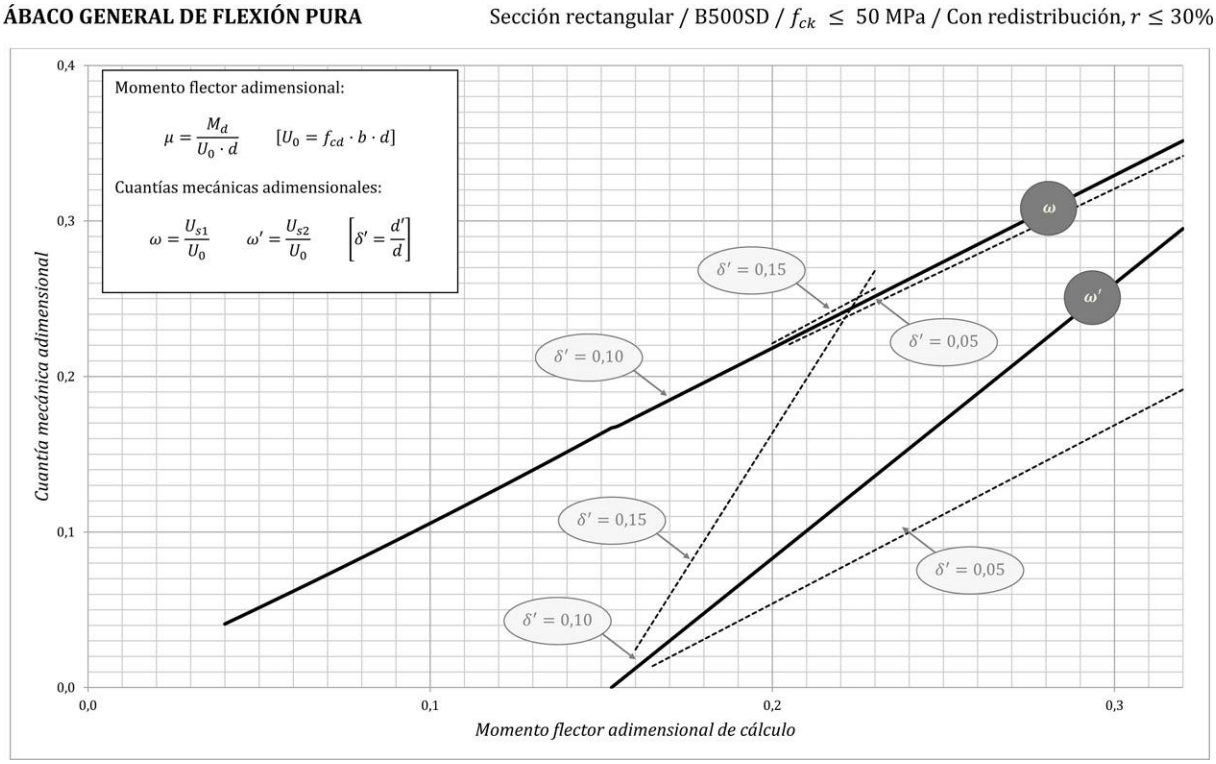



Figura 102. Ábaco de dimensionamiento en flexión pura para análisis con redistribución de hasta el 30%

Las Figuras 100, 101 y 102 muestran los ábacos adimensionales de dimensionamiento para diseños en los que se aplique la redistribución limitada de momentos. Los ábacos se obtienen como representación gráfica de las ecuaciones de las Tablas 8.2, 8.3 y 8.4. Estas construcciones gráficas permiten apreciar que, a medida que se incrementa el porcentaje $r$ de redistribución de momentos, cobra mayor importancia el recubrimiento mecánico $d'$ de la armadura de compresión (a través del parámetro $\delta'$). Piénsese en una viga plana de edificación de canto $h = 30$ cm con recubrimiento mecánico $d' = 4$ cm ($\delta' \approx 0{,}15$); obsérvese en la Figura 102 que si se aplicase un análisis con redistribución de hasta el 30% podría llegar a necesitarse un armado simétrico ($U_{s1} = U_{s2}$) en flexión pura para un momento flector adimensional $\mu_d \approx 0{,}225$. Y para momentos superiores habría de disponerse una armadura de mayor capacidad mecánica en la cara comprimida.

**<u>Ejemplo 1</u>: La viga de la Figura 103 tiene una sección rectangular de ancho *b* = 30 cm y canto *h* = 55 cm, y está sometida a las siguientes cargas:**

- **Peso propio de la viga**
- **Carga permanente uniformemente distribuida, de valor 55 kN/m**
- **Carga variable uniformemente distribuida, de valor 22 kN/m**

**Los materiales empleados son HA-25 y acero B500S y el recubrimiento mecánico de las armaduras longitudinales es 50 mm. La ley de momentos flectores que generaría una carga genérica $p_d$ en un análisis lineal sin redistribución se representa en la Figura 103.**

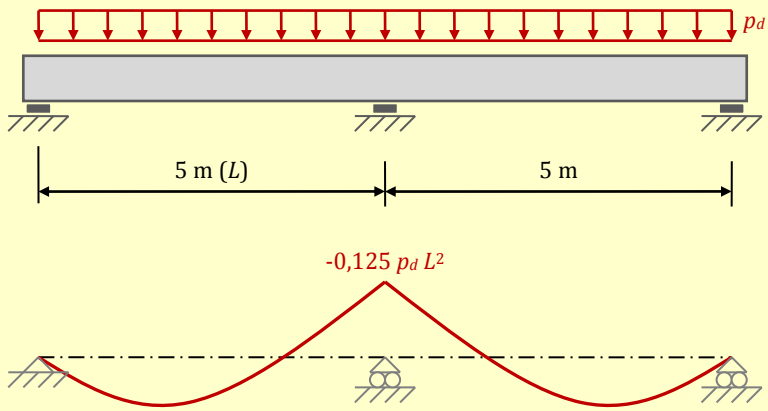



Figura 103. Viga continua de dos vanos iguales sometida a carga de cálculo $p_d$

**Se pide:**

**a) Valor de la carga $p_d$ para posteriores cálculos en ELU.**

**b) Obtener la ley de momentos flectores correspondiente a un análisis lineal con la máxima redistribución que permite el tipo de acero empleado. Representarla indicando el momento máximo positivo y el máximo negativo.**

**c) Definir las necesidades de armado longitudinal en las secciones más solicitadas tras la redistribución.**

a)

El peso propio de la viga es 25 kN/m$^3$ · 0,30 m · 0,55 m = 4,125 kN/m y el valor de la carga distribuida de diseño o de cálculo es:

$$p_d = 1{,}35 \cdot (4{,}125 + 55) + 1{,}50 \cdot 22 = 112{,}8 \text{ kN/m}$$

b)

Como se trata de un acero de ductilidad normal (no lleva característica SD) la máxima redistribución permitida por la EHE-08 es el 20%.

El momento máximo de negativos antes de la redistribución es:

$$M_d^- = -0{,}125 \cdot p_d \cdot L^2 = -352{,}6 \text{ mkN}$$

Con la redistribución del 20%, este valor pasa a ser -282,0 mkN y el correspondiente diagrama de flectores se representa en la Figura 104.

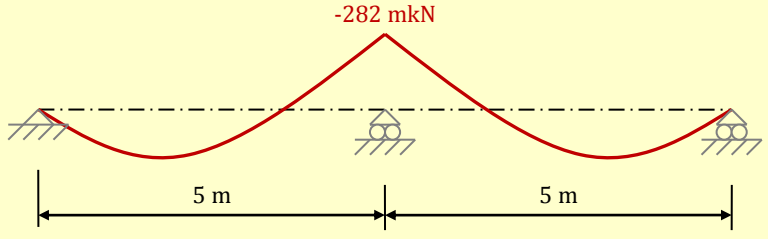



Figura 104. Diagrama de flectores tras la redistribución

Para obtener el máximo de positivos hace falta la ley de cortantes y para determinar esta ley hace falta el valor del cortante en el extremo izquierdo de la viga tras la redistribución:

$$V^r_{d,izdo} = \frac{p_d \cdot L}{2} - \frac{M^r_{d,izdo} - M^r_{d,dcho}}{L} = \frac{112{,}8 \cdot 5}{2} - \frac{0-(-282)}{5} = 225{,}6 \text{ kN}$$

Las leyes de cortantes y flectores tras la redistribución son:

$$V^r_d(x) = 225{,}6 - 112{,}8 \cdot x$$

$$M^x_d(x) = 225{,}6 \cdot x - 56{,}4 \cdot x^2$$

Como es sabido, la ley de flectores producida por una carga distribuida presenta un máximo allí donde el cortante se anula. Por lo tanto:

$$V^r_d(x_0) = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = \frac{225{,}6}{112{,}8} = 2 \text{ m} \quad \rightarrow \quad M^r_{d,máx} = 225{,}6 \text{ mkN}$$

***Observación:***

El momento máximo de positivos en la ley sin redistribución (Figura 103) sería $^9/_{128} \cdot p_d \cdot L^2 = 198{,}3$ mkN, por lo que el incremento de los flectores máximos de positivos ha sido de un 14% aproximadamente, y no ha superado el valor de $r$.

El diagrama de flectores tras la redistribución queda de la siguiente manera.

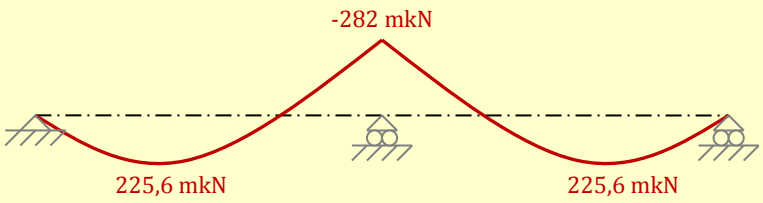



Figura 105. Flectores máximos y mínimos tras la redistribución

c)

Parámetros necesarios:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}67 \text{ MPa} \quad ; \quad d = h - d' = 550 - 50 = 500 \text{ mm}$$

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = 16{,}67 \cdot 300 \cdot 500 = 2500 \text{ kN}$$

- Flexión positiva:

$$\mu_d = \frac{M_d}{U_0 \cdot d} = \frac{225{,}6 \text{ mkN}}{2500 \text{ kN} \cdot 0{,}50 \text{ m}} = 0{,}1805$$

Como este momento adimensional es inferior a 0,204 no es necesario aplicar las ecuaciones de la tabla 8.3 de los apuntes ni dimensionar la armadura de compresión; basta con la de tracción:

$$U_{s1} = U_0 \cdot \omega = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d}\right) = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_d}{U_0 \cdot d}}\right) = 501{,}5 \text{ kN}$$

- Flexión negativa:

$$\mu_d = \frac{|M_d|}{U_0 \cdot d} = \frac{282 \text{ mkN}}{2500 \text{ kN} \cdot 0{,}50 \text{ m}} = 0{,}2256$$

Este momento adimensional es superior a 0,204 y, por lo tanto, deben aplicarse las ecuaciones de la tabla 8.3 de los apuntes:

$$\delta' = \frac{d'}{d} = \frac{50}{550} = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \kappa = 1 \quad \text{(ver tabla 8.3)}$$

Este resultado nos indica que la armadura de compresión sí alcanza la deformación del límite elástico y que, por lo tanto, su tensión es $f_{yd}$.

$$\begin{cases} U_{s2} = U_0 \cdot \omega' = U_0 \cdot \left(\dfrac{\mu_d - 0{,}204}{1-\delta'} \cdot \kappa\right) = U_0 \cdot 0{,}024 = 60 \text{ kN} \\ U_{s1} = U_0 \cdot \omega = U_0 \cdot \left(0{,}230 + \dfrac{\omega'}{\kappa}\right) = U_0 \cdot 0{,}254 = 635 \text{ kN} \end{cases}$$

# 2. DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS DE ARMADO

Se entiende por disposiciones constructivas al conjunto de reglas que afectan al diseño final del armado de los elementos de hormigón, las cuales están recogidas en la Instrucción EHE-08 y deben ser observadas, a fin de garantizar que los elementos de hormigón puedan ser ejecutados y se comporten adecuadamente a lo largo de la vida útil de la estructura. Estas disposiciones constructivas obedecen especialmente a las siguientes razones:

- facilitar la puesta en obra del hormigón
- formar elementos de ferralla armada suficientemente resistentes
- controlar los fenómenos reológicos
- evitar roturas agrias sin capacidad de aviso
- controlar la fisuración, evitando fenómenos como los denominados árboles de fisuras
- lograr un buen cosido de las bielas de cortante
- evitar pandeos internos de las barras longitudinales comprimidas
- garantizar la hipótesis de adherencia perfecta, evitando el fallo por anclaje

## 2.1 CUANTÍAS MECÁNICAS DE ARMADO

### 2.1.1 Cuantías mecánicas longitudinales

Se define como ***cuantía mecánica mínima en flexión pura*** a la capacidad mecánica mínima que debe tener la armadura principal de tracción para evitar una rotura agria; la armadura principal $A_{s1}$ debe ser capaz de resistir el esfuerzo de tracción que se produce cuando la sección de hormigón armado está solicitada con un momento flector igual al ***momento de fisuración***. En caso contrario, en cuanto la sección superase dicho momento se agotaría súbitamente en cuanto apareciera la primera fisura. El momento de fisuración es el correspondiente a una distribución de tensiones en la que la fibra más traccionada de hormigón soporta una tensión igual a la resistencia media a flexotracción $f_{ct,m,fl}$. De acuerdo con el apartado 42.3.2 de la Instrucción EHE-08, en una sección de hormigón armado (que sólo posee armaduras pasivas) la cuantía mecánica mínima de la armadura principal de tracción $A_{s1}$ debe cumplir:

$$U_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yd} \geq \frac{W_1}{z} \cdot f_{ct,m,fl} \qquad [8.2.1]$$

donde:

- $z$ es el brazo mecánico de la sección; a falta de cálculos precisos, puede tomarse $z \approx 0{,}8 \cdot h$

- $W_1$ es el módulo resistente de la sección bruta relativo a la fibra más traccionada

Para secciones rectangulares de ancho $b$ y canto $h$, el módulo resistente es el mismo para las fibras superior e inferior, y de valor $W_{1,rect} = {}^1/_6 \cdot b \cdot h^2$. Sustituyéndolo, la ecuación [8.2.1] queda de la siguiente manera:

$$U_{s1} = A_{s1} \cdot f_{yd} \geq 0{,}20 \cdot A_c \cdot f_{ct,m,fl} \qquad [8.2.2]$$

siendo $A_c$ el área de la sección bruta.

Por otro lado, en el caso de secciones de hormigón armado sometidas a ***tracción simple o compuesta***, las armaduras longitudinales deberán cumplir la siguiente condición de cuantía mínima:

$$U_{s,total} = A_{s,total} \cdot f_{yd} \geq A_c \cdot f_{ct,m} \qquad [8.2.3]$$

donde $A_{s,total}$ se refiere a la sección total de los redondos longitudinales dispuestos en la sección y $f_{ct,m}$ es la resistencia media a tracción del hormigón.

Finalmente, el apartado 42.3.3 de la EHE-08 establece que, en aquellas secciones sometidas a ***compresión simple o compuesta***, las armaduras principales que estén comprimidas deberán verificar la siguiente condición:

$$\begin{aligned} U'_{s1} = A'_{s1} \cdot f_{yd} \geq 0{,}05 \cdot N_d \quad \text{y} \quad U'_{s1} \leq 0{,}5 \cdot A_c \cdot f_{cd} \\ U'_{s2} = A'_{s2} \cdot f_{yd} \geq 0{,}05 \cdot N_d \quad \text{y} \quad U'_{s2} \leq 0{,}5 \cdot A_c \cdot f_{cd} \end{aligned} \qquad [8.2.4]$$

donde $A'_{s2}$ se refiere a la armadura más comprimida y $A'_{s1}$ a la menos comprimida (Figura 106).

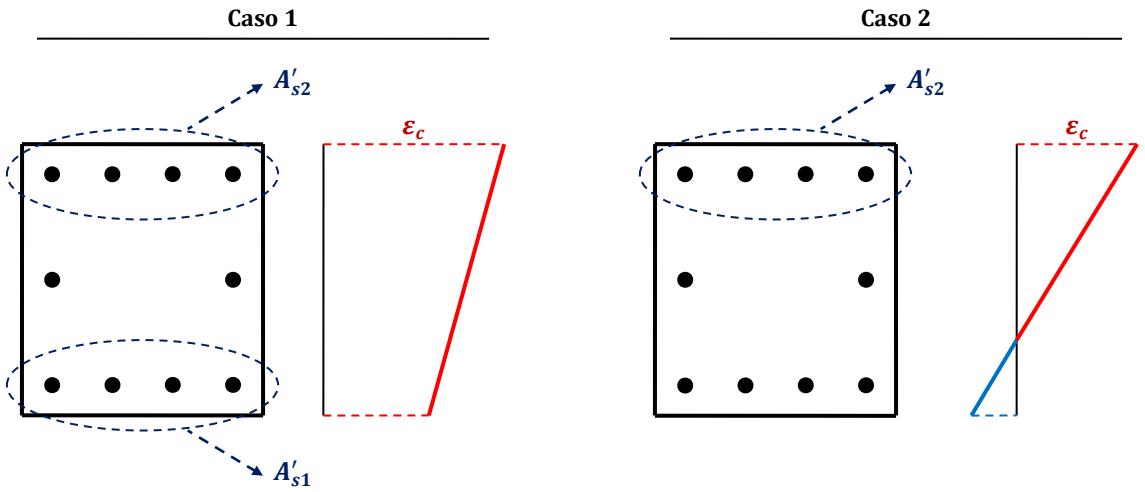



Figura 106. Armaduras principales comprimidas en compresión compuesta

### 2.1.2 Cuantía mecánica de la armadura transversal

El apartado 44.2.3.4.1 de la Instrucción establece la cuantía mínima de las armaduras transversales, que deben cumplir la siguiente condición:

$$\frac{A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d}}{\operatorname{sen}\alpha} \geq \frac{b_0 \cdot f_{ct,m}}{7{,}5} \qquad [8.2.5]$$

donde se recuerda que:

- $A_\alpha$ es el área de armadura longitudinal por unidad de longitud de la viga (expresada, por ejemplo, en mm²/mm)
- $f_{y\alpha,d}$ no puede tomar un valor superior a 400 N/mm²

- $b_0$ es el ancho de la sección definido en la Figura 75
- $f_{ct,m}$ es la resistencia a media a tracción del hormigón

También indica que al menos un tercio de la armadura transversal y, en cualquier caso, la cuantía mínima indicada, debe disponerse mediante estribos que formen un ángulo $\alpha = 90°$. Así pues, para la disposición habitual en vigas:

$$A_{90} \cdot f_{y90,d} \geq \frac{b_0 \cdot f_{ct,m}}{7{,}5} \quad \rightarrow \quad V_{su,min} = 0{,}12 \cdot b_0 \cdot d \cdot f_{ct,m} \qquad [8.2.6]$$

siendo $V_{su,min}$ la contribución mínima de la armadura transversal frente al esfuerzo cortante.

## 2.2 CUANTÍAS GEOMÉTRICAS DE LAS ARMADURAS LONGITUDINALES

Las cuantías geométricas mínimas son los valores mínimos que deben cumplir las secciones de las armaduras longitudinales de los distintos elementos de hormigón armado. El apartado 42.3.5 de la Instrucción define estas cuantías mínimas para vigas, soportes, muros, losas, forjados unidireccionales y elementos de cimentación.

### 2.2.1 Cuantía geométrica en vigas

La armadura principal de tracción $A_{s1}$ deberá estar formada por al menos dos redondos y tener una sección de, al menos:

- el 3,3‰ de $A_c$ cuando se emplea un acero B400S ó B400SD
- el 2,8‰ de $A_c$ cuando se emplea un acero B500S ó B500SD

siendo $A_c$ la sección transversal bruta de la viga ($b \cdot h$ cuando es de sección rectangular).

Por otro lado, la armadura principal de compresión $A_{s2}$ deberá estar formada también por al menos dos redondos y su sección será como mínimo:

- el 0,99‰ de $A_c$ cuando se emplea un acero B400S ó B400SD
- el 0,84‰ de $A_c$ cuando se emplea un acero B500 ó B500SD

Aun cuando no sea necesaria la contribución de la armadura de compresión para satisfacer el Estado Límite Último de agotamiento por solicitaciones normales, su presencia será necesaria, además de por razones obvias de montaje, para el control de los efectos reológicos del hormigón (fluencia y retracción).

### 2.2.2 Cuantía geométrica en soportes

La armadura longitudinal $A_s$ de la sección transversal de un soporte deberá tener un área de, por lo menos, el 4‰ de la sección transversal bruta $A_c$ a fin de constituir una ferralla armada suficientemente estable y resistente antes y durante el hormigonado.

En el caso de soportes de sección cuadrada o rectangular la armadura longitudinal estará formada por al menos 4 redondos situados en sus esquinas. Y en el caso de columnas (soportes de sección circular) el armado longitudinal lo formarán al menos 6 redondos dispuestos hexagonalmente.

## 2.3 DIÁMETROS Y SEPARACIONES

### 2.3.1 Diámetros, grupos y separaciones en las armaduras longitudinales

Aunque la Instrucción EHE-08 no hace ninguna indicación en este sentido, se recomienda emplear redondos de diámetro nominal no inferior a 12 mm en las armaduras longitudinales de las vigas. Por otro lado, aunque la serie de diámetros nominales de la EHE-08 incluye el Ø14, éste no suele emplearse en la práctica. Así mismo, salvo en determinados casos, no se recomienda emplear redondos de diámetros nominales superiores a 25 mm, por lo costoso que pueden resultar las operaciones de doblado y grifado de los mismos y también por la mayor longitud de anclaje que necesitan.

Al contrario que en las vigas, la Instrucción sí limita el diámetro de los redondos en el caso de los soportes. Concretamente, el artículo 54º de la Instrucción establece que la barra comprimida más delgada no tendrá un diámetro inferior a 12 mm. Como consecuencia, para el caso habitual de soportes con armadura simétrica, esta regla se hace extensiva a todas las armaduras longitudinales, estén comprimidas o no. En lo relativo al diámetro máximo, la instrucción no recoge ninguna indicación para el uso de barras aisladas, pero la práctica aconseja evitar en la medida de lo posible los Ø32 y Ø40, por idénticas razones a las expuestas en el caso de las vigas.

Dos o más barras puestas en contacto constituyen un ***grupo de barras***. En aquellas ocasiones en las que la armadura principal sea muy densa, puede ser conveniente realizar agrupaciones de redondos a la hora de fabricar la ferralla, a fin de no bloquear el paso del hormigón fresco durante la puesta en obra. La Instrucción limita el número de barras que pueden constituir un grupo de la siguiente manera:

- si el grupo de barras funciona en tracción, no tendrá más de 3 redondos ni tampoco un *diámetro equivalente* superior a 50 mm
- si el grupo de barras está comprimido, pertenece a una pieza hormigonada en posición vertical (caso de los soportes *in situ*) y sus dimensiones son tales que no hacen necesario realizar empalmes, podrán constituirlo hasta 4 redondos, siempre que su *diámetro equivalente* no sea mayor de 70 mm

Se define como ***diámetro equivalente*** de un grupo de barras el del redondo ficticio cuya sección sería igual a la suma de todas las áreas de los que integran el grupo. Cuando el grupo de barras está formado por *n* redondos del mismo diámetro nominal Ø, entonces el diámetro equivalente se calcula como:

$$\emptyset_{eq} = \emptyset \cdot \sqrt{n} \qquad [8.2.7]$$

De acuerdo con el apartado 42.3.1 de la EHE-08, la armadura pasiva longitudinal resistente y la de piel deberán quedar adecuadamente distribuidas para evitar que queden zonas de hormigón sin armaduras y, para ello, establece que la separación entre redondos longitudinales cumplirá las siguientes condiciones:

$$\begin{matrix} s \leq 30 \text{ cm} \\ s \leq 3 \cdot e \end{matrix} \qquad [8.2.8]$$

siendo *e* el espesor bruto de la parte de la sección del elemento, alma o alas, en las que vayan situadas. Por ejemplo, en el caso de vigas cuyo canto sea superior a 50 cm, la separación entre las armaduras principales superior e inferior será, con toda probabilidad, superior a 30 cm, por lo que será necesario añadir redondos a las caras laterales para formar armaduras de piel. La cuantía geométrica mínima de la armadura de piel se obtiene de la siguiente expresión:

$$A_{piel} \geq \frac{0{,}5}{1000} \cdot b_0 \cdot d \qquad [8.2.9]$$

donde $A_{piel}$ se refiere a la sección de armadura de piel en cada cara.

En el caso de soportes, el artículo 54º permite ampliar la separación máxima entre barras longitudinales a 35 cm.

Por otro lado, el apartado 69.4.1 de la Instrucción define la distancia libre mínima horizontal y vertical entre dos barras o grupos de barras, que deberá ser igual o superior al mayor de los tres valores siguientes:

- 20 mm, salvo en viguetas y losas alveolares pretensadas donde se tomarán 15 mm
- el diámetro nominal del redondo más grueso o el máximo diámetro equivalente
- 1,25 veces el tamaño máximo de árido *D*

En el caso de grupos de barras la distancia libre se medirá desde el contorno real del grupo.

### 2.3.2 Diámetros y separaciones en las armaduras transversales

Los cercos o estribos se fabrican a partir de redondos corrugados de acero soldable mediante operaciones de corte y doblado; posteriormente se atan o sueldan a las armaduras longitudinales. Para dar forma a las esquinas de los cercos de Ø12 o más finos es posible efectuar el doblado con diámetros de mandril inferiores a los indicados en la Tabla 69.3.4 de la Instrucción, siempre que no se inicie un principio de fisuración en el acero. Los diámetros habituales empleados en la armadura transversal son los Ø6, Ø8 y Ø10.

En elementos convencionales, las armaduras transversales se disponen, por lo general, perpendiculares al eje de la viga o soporte y separados una distancia $s_t$ según el eje longitudinal del elemento correspondiente. Además de su misión resistente frente al esfuerzo cortante, la armadura transversal contribuye a asegurar un adecuado efecto de confinamiento en las bielas de hormigón sometidas a compresión oblicua; por esta razón, la separación máxima $s_t$ está limitada por la Instrucción EHE-08 en el apartado 44.2.3.4.1 de acuerdo con las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} &s_t \leq 0{,}75 \cdot d \cdot (1 + \cot\alpha) \not> 600 \text{ mm} && \text{cuando } V_{rd} \leq {}^1\!/_5 \cdot V_{u1} \\ &s_t \leq 0{,}60 \cdot d \cdot (1 + \cot\alpha) \not> 450 \text{ mm} && \text{cuando } {}^1\!/_5 \cdot V_{u1} < V_{rd} \leq {}^2\!/_3 \cdot V_{u1} \\ &s_t \leq 0{,}30 \cdot d \cdot (1 + \cot\alpha) \not> 300 \text{ mm} && \text{cuando } V_{rd} > {}^2\!/_3 \cdot V_{u1} \end{aligned} \qquad [8.2.10]$$

donde:

- $V_{rd}$ es el esfuerzo cortante efectivo de cálculo en la sección considerada
- $V_{u1}$ es la resistencia al agotamiento por compresión oblicua
- $\alpha$ es el ángulo de inclinación de la armadura transversal respecto del eje del elemento; para el caso habitual de $\alpha = 90°$ el valor de la cotangente será $\cot\alpha = 0$

Por otro lado, la Instrucción también limita la separación entre las ramas de la armadura transversal, expresada como $s_{t,trans}$ (ver Figura 107), que deberá cumplir la siguiente condición:

$$s_{t,trans} \leq d \not> 500 \text{ mm} \qquad [8.2.11]$$

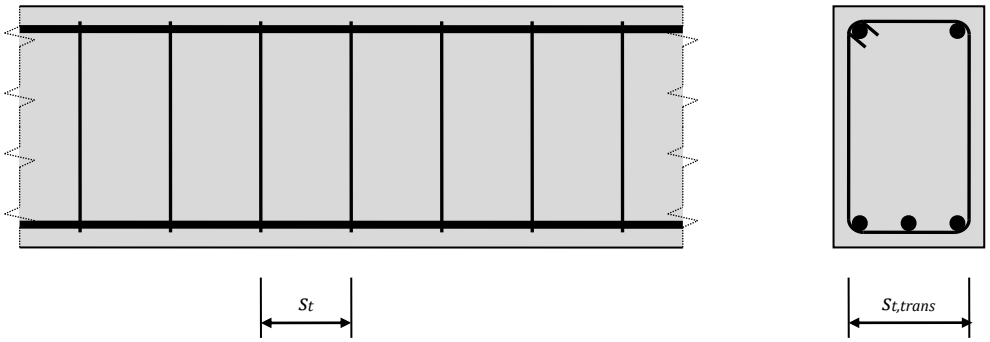



Figura 107. Separaciones en la armadura transversal

Cuando existan armaduras pasivas longitudinales en compresión cuya contribución sea tenida en cuenta frente al agotamiento por solicitaciones normales, dichas armaduras deberán ir adecuadamente sujetas por cercos o estribos para controlar el posible pandeo de las mismas. Esta situación puede darse en los siguientes casos:

- en los soportes, con carácter general
- en aquellas vigas sometidas a momentos flectores de cálculo superiores al momento límite o momento frontera correspondiente

En estos casos el diámetro nominal de los cercos deberá ser, al menos, la cuarta parte del diámetro nominal de la barra longitudinal comprimida más gruesa. Y la separación $s_t$ entre los cercos no deberá ser superior a 15 veces el diámetro de la barra longitudinal comprimida más fina. Además, si existen armaduras longitudinales dispuestas a lo largo de las caras y no sólo en las esquinas, deberán seguirse las siguientes reglas:

- se atarán con cercos al menos una de cada dos barras consecutivas de una misma cara
- y, en cualquier caso, aquellas que disten entre sí más de 150 mm

Esto da lugar a los posibles esquemas de armado recogidos en la Figura 108.

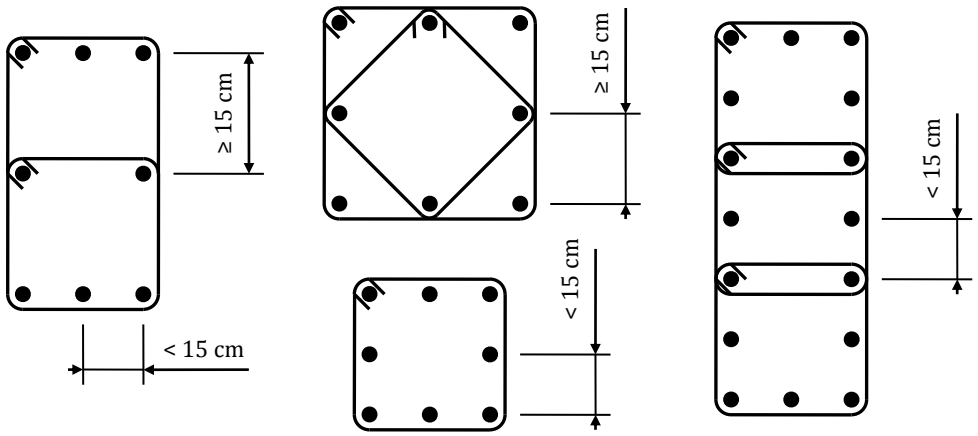



Figura 108. Esquemas de cercos con armaduras longitudinales comprimidas

Por último, en elementos comprimidos, la separación $s_t$ entre cercos no debe ser superior a la dimensión menor del elemento ni tampoco mayor que 300 mm.

## 2.4 DISPOSICIÓN DE SEPARADORES

Los separadores (Figura 109) se dispondrán conforme a lo establecido en el apartado 69.8.2 de la Instrucción EHE-08. Éstos tienen como misión principal la de garantizar los recubrimientos previstos en proyecto. El recubrimiento deberá ser igual o superior a un diámetro o al tamaño máximo del árido, pero la limitación más restrictiva suele ser la durabilidad, como se verá más adelante.

Tabla 69.8.2 de la EHE-08. Disposición de separadores

| Elemento | | Distancia máxima |
|---|---|---|
| Elementos superficiales horizontales (losas, forjados, zapatas y losas de cimentación, etc.) | Emparrillado inferior | $50\text{Ø} \geq 100$ cm |
| | Emparrillado superior | $50\text{Ø} \geq 50$ cm |
| Muros | Cada emparrillado | $50\text{Ø} \geq 50$ cm |
| | Separación entre emparrillados | 100 cm |
| Vigas[1] | | 100 cm |
| Soportes[1] | | $100\text{Ø} \geq 200$ cm |

[1] Se dispondrán, al menos, tres planos de separadores por vano, en el caso de las vigas, y por tramo, en el caso de los soportes, acoplados a los cercos o estribos

Ø es el diámetro de la armadura a la que se acople el separador

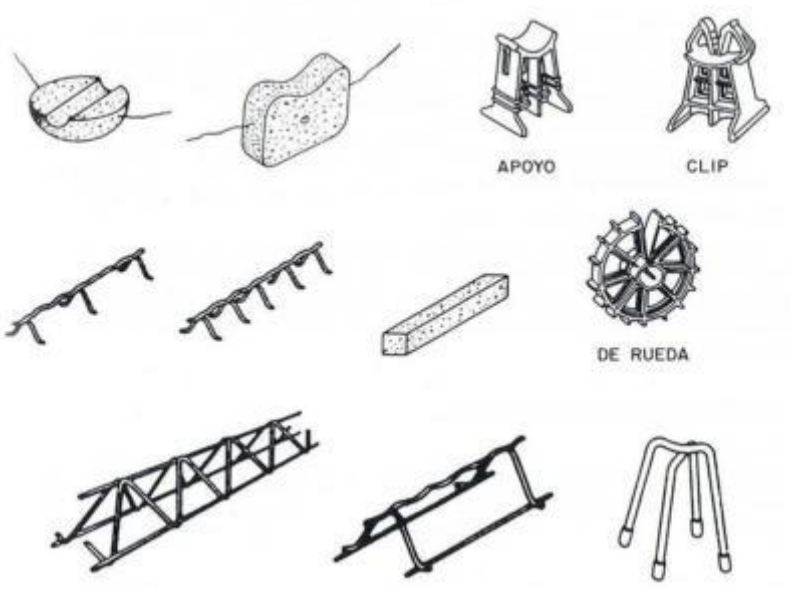



Figura 109. Tipos de separadores

## 2.5 REGLAS DE ANCLAJE Y DESPIECE

El artículo 69.5.1 de la EHE-08 recoge los criterios específicos para el anclaje de las armaduras pasivas. A los efectos del anclaje, la Instrucción EHE define dos posibles situaciones o zonas de anclaje en función de la posición que ocupan los redondos en elemento de hormigón:

- ***anclaje en posición I, de buena adherencia***: es el caso de aquellas barras dispuestas en dirección vertical o con una inclinación menor de 45° respecto de la dirección de hormigonado, situación habitual de las armaduras longitudinales de los soportes y columnas ejecutados *in situ*; además se incluirán en este grupo aquellos redondos dispuestos horizontalmente o bien formando un ángulo mayor de 45° con la dirección de hormigonado, cuando estén situados en la mitad inferior del elemento o a profundidades superiores a 30 cm desde la cara superior del elemento
- ***anclaje en posición II, de adherencia deficiente***: es el caso de aquellos redondos horizontales o que forman un ángulo mayor de 45° con la dirección de hormigonado, cuando están situados en la mitad superior del elemento o bien a una profundidad inferior a 30 cm desde la cara superior del elemento

Por ejemplo en el caso de las vigas, las armaduras principales de la cara inferior (de tracción en elementos sometidos a flexión positiva) están en posición I; mientras que las armaduras principales de la cara superior (de tracción en flexión negativa) están en posición II.

Cuando las características de adherencia de la barra de acero corrugado soldable están certificadas mediante el ensayo *beam-test* descrito en el Anejo C de la norma UNE-EN 10080 (ver Capítulo 3, "Propiedades mecánicas de los materiales"), entonces la ***longitud básica de anclaje*** $\ell_b$ se determinará a partir de las siguientes expresiones:

- caso de barras en posición I:

$$\ell_{b,I} = max\left\{m \cdot \emptyset^2 \; ; \; \frac{f_{yk}}{20} \cdot \emptyset\right\} \qquad \text{(expresada en mm)} \qquad [8.2.12.\text{a}]$$

- caso de barras en posición II:

$$\ell_{b,II} = max\left\{1{,}4 \cdot m \cdot \emptyset^2 \; ; \; \frac{f_{yk}}{14} \cdot \emptyset\right\} \qquad \text{(expresada en mm)} \qquad [8.2.12.\text{b}]$$

En las expresiones anteriores Ø es el diámetro nominal de la barra corrugada (expresado en mm), $f_{yk}$ es el límite elástico característico del acero en que está fabricada (expresado en N/mm²) y $m$ es un parámetro que se obtiene de la Tabla 66.5.1.2.a de la Instrucción EHE y que es función del tipo de acero y de la resistencia característica del hormigón ($f_{ck}$).

Tabla 69.5.1.2.a de la EHE-08. Valores del parámetro *m*

| Resistencia $f_{ck}$ (N/mm²) | *m* | |
|---|---|---|
| | B400 S/SD | B500 S/SD |
| 25 | 1,2 | 1,5 |
| 30 | 1,0 | 1,3 |
| 35 | 0,9 | 1,2 |
| 40 | 0,8 | 1,1 |
| 45 | 0,7 | 1,0 |
| 50 | 0,7 | 1,0 |

Por otro lado, la ***longitud neta de anclaje*** de un redondo se obtendrá a partir del valor de la longitud básica, que podrá reducirse si se mejoran las condiciones de anclaje o bien si no es necesario anclar el 100% de la capacidad mecánica de la armadura:

$$\ell_{b,neta} = \ell_b \cdot \beta \cdot \frac{A_{s,cálculo}}{A_{s,real}} \qquad [8.2.13]$$

donde:

- $A_{s,cálculo}$ es la sección transversal de armadura estrictamente necesaria por cálculo
- $A_{s,real}$ es la sección transversal de armadura que se ha dispuesto realmente
- $\beta$ es un factor de reducción que toma los siguientes valores:
  - $\beta = 1$ cuando el tramo de anclaje de un redondo traccionado es una prolongación recta
  - $\beta = 0{,}7$ cuando el tramo de anclaje de un redondo está rematado con doblado en patilla, gancho o gancho en U
  - $\beta = 0{,}7$ cuando en el tramo de anclaje un redondo comprimido o traccionado hay una barra transversal soldada a dicho redondo

El valor final de la longitud neta de anclaje no podrá tomar valores inferiores al mayor de los tres siguientes:

a) $10 \cdot \emptyset$

b) 150 mm

c) la tercera parte de la longitud básica $\ell_b$ para barras traccionadas y los dos tercios de $\ell_b$ para barras comprimidas

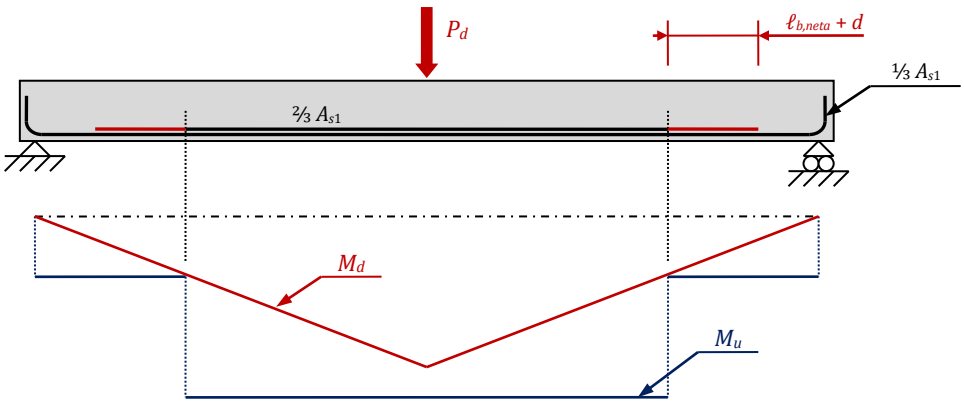



Figura 110. Despiece de la armadura de tracción en viga simplemente apoyada

El problema del anclaje de barras cobra una gran importancia en la práctica cuando se optimiza el despiece del armado de elementos lineales o superficiales: vigas y forjados, fundamentalmente. Debe tenerse en cuenta que el momento flector a lo largo de un elemento no suele ser constante; las leyes de flexión producidas por cargas transversales puntuales son típicamente lineales (Figura 110) mientras que las leyes parabólicas están producidas por cargas uniformemente repartidas (como es el caso del peso propio). Como consecuencia, habrá zonas del elemento que necesiten más armado que otras y, por lo tanto, habrá barras que dejen de ser necesarias más allá de unas determinadas posiciones a lo largo de un elemento lineal. Debe recordarse además lo expuesto en el Capítulo 6, "Agotamiento por solicitaciones tangenciales", en relación a la interacción entre el flector y el cortante que obliga, en los

elementos de hormigón armado, a ***decalar la ley de momentos*** una magnitud $s_d$. En la práctica, el decalaje de dicha ley de flectores suele tomarse igual al canto útil $d$, lo que queda del lado de la seguridad. Por lo tanto, a la hora de plantear el despiece de armaduras en un elemento, la prolongación recta de una barra más allá de la sección en la que deja de ser necesaria será igual a la longitud neta de anclaje $\ell_{b,neta}$ más el canto útil $d$, tal y como se representa en la Figura 110.

La Instrucción define en su apartado 42.3.2 las reglas de despiece de la armadura inferior para flexión positiva. Deberá prolongarse hasta los apoyos extremos al menos un tercio de la armadura necesaria para resistir el máximo momento flector positivo (ver Figura 110); y al menos la cuarta parte se prolongará hasta los apoyos intermedios en vigas continuas.

Por último, cuando el anclaje no es de barras aisladas sino de grupos de barras se deben tener en cuenta las disposiciones específicas recogidas en el apartado 69.5.1.3 de la Instrucción EHE-08:

- si todo un grupo de barras deja de ser necesario más allá de una sección transversal de un elemento lineal (porque el esfuerzo flector se ha reducido lo suficiente) la longitud de anclaje del grupo será mayor que la de una sola barra:
  - un 30% mayor si el grupo lo forman 2 redondos,
  - un 40% mayor si el grupo lo forman 3 redondos
  - y hasta un 60% mayor si el grupo lo forman 4 redondos
- si, por el contrario, tan sólo una barra de un grupo deja de ser necesaria más allá de una sección transversal de un elemento lineal, la longitud de anclaje para dicha barra será también mayor que si hubiera estado aislada:
  - un 20% mayor si forma parte de un grupo de 2 barras,
  - un 30% mayor si se trataba de un grupo de 3 que pasa a ser de 2
  - y un 40% mayor si se trataba de un grupo de 4 que pasa a ser de 3

## 3. DISPOSICIONES EN ZONAS SÍSMICAS

El Anejo 10 de la Instrucción EHE-08 recoge los requisitos especiales recomendados para estructuras en zonas sísmicas. Entre otros aspectos, este anejo cubre lo relacionado con el análisis estructural, establece el concepto de proyecto por capacidad, modifica sensiblemente la comprobación de agotamiento frente a esfuerzo cortante y propone detalles estructurales y disposiciones específicas para distintos tipos de elementos estructurales (vigas, soportes, pantallas, diafragmas, etc.).

Debe tenerse presente que cuando las estructuras están sometidas a acciones sísmicas***, la prioridad del autor del proyecto y del resto de agentes implicados en la ejecución de la obra es evitar con un coste razonable el colapso de la estructura y salvaguardar las vidas de los ocupantes de la misma***. Es decir, se admite que la estructura sufra daños de importancia, pero no llegará a transformarse en un mecanismo de forma prematura. Para ello, el diseño frente a acciones sísmicas importantes recurre a la ***capacidad de disipar energía que posee una estructura dúctil***, lo que permite reducir los esfuerzos que deben resistir sus elementos. Otro aspecto crucial es que, debido al carácter dinámico de las acciones y también a los eventuales daños, la respuesta de la estructura será no-lineal.

Los detalles y disposiciones que se recomiendan en el Anejo 10 tienen como objetivo el asegurar un comportamiento de ductilidad alta o incluso muy alta en las estructuras de hormigón. Dichas disposiciones obedecen fundamentalmente a cuatro razones:

- por tratarse de acciones dinámicas, durante un sismo puede llegar a producirse una ***reversibilidad de momentos*** y el cambio de las leyes de momentos a lo largo de un elemento debido al comportamiento no-lineal del conjunto
- el diseño debe orientarse a ***facilitar la ejecución***, evitando en lo posible que existan zonas con elevada concentración de armaduras
- además de contribuir a la resistencia a cortante y a evitar el pandeo de armaduras longitudinales comprimidas, las armaduras transversales tienen también la función de ***confinamiento del hormigón*** y la mejora de su resistencia y ductilidad
- el carácter cíclico de alternancia de las acciones sísmicas favorece el ***deterioro de las características de adherencia*** entre el hormigón y las armaduras, por lo que deberán incrementarse las longitudes de anclaje

## 3.1 DISPOSICIONES RELATIVAS A LAS VIGAS

Las siguientes son las disposiciones indicadas en el Anejo 10 de la EHE-08 para las vigas que trabajan fundamentalmente a flexión:

- la relación entre el ancho y el canto no será inferior a tres:

$$b \geq 3 \cdot h \qquad [8.3.1]$$

- la luz del vano no será inferior a cuatro veces el canto útil del elemento, por lo que:

$$d \leq \frac{1}{4} \cdot L \qquad [8.3.2]$$

- las longitudes de anclaje de las armaduras se incrementarán en $10 \cdot \emptyset$ respecto de las definidas para cargas estáticas en el artículo 69º de la Instrucción
- en la medida de lo posible, los empalmes de las armaduras se alejarán de cualquier zona crítica susceptible de albergar una rótula plástica; se define como ***zona crítica*** la comprendida desde el apoyo de la viga hasta una distancia igual a dos veces el canto *h* hacia el centro de la viga; cuando exista una carga concentrada se definirá también una zona crítica de longitud dos veces *h* a ambos lados de la misma (Figura 111)
- los esquemas estructurales con pilares discontinuos apeados en vigas (Figura 111) no son recomendables en zonas sísmicas

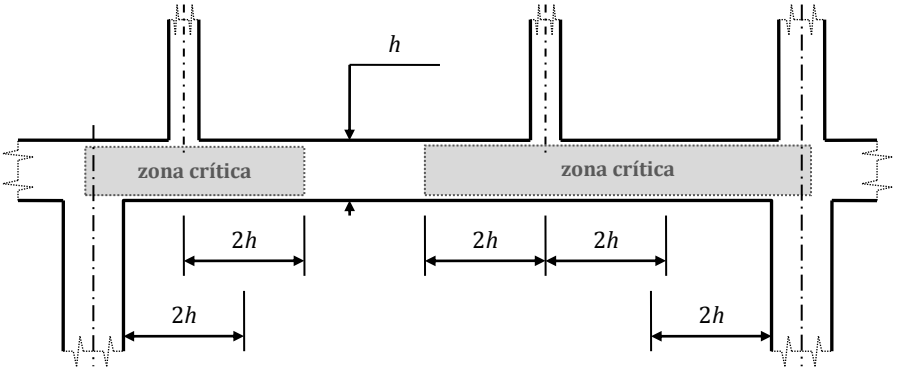



Figura 111. Viga con dos pilares apeados y zonas críticas correspondientes

### 3.1.1 Vigas en estructuras de ductilidad alta

Cuando el proyecto de la estructura contemple ***ductilidad alta***, se establecen las siguientes disposiciones generales en toda la viga:

- no se admiten vigas planas, por lo que ***las vigas deben ser descolgadas*** respecto del canto de la losa o forjado: el descuelgue debe ser superior a la profundidad $x$ de la fibra neutra en rotura en la sección de apoyo y el ancho del mismo será de, al menos, 200 mm
- en toda su longitud se debe disponer una armadura longitudinal de al menos 4Ø14 dispuestos dos en cada cara, y no menos del 25% de la cuantía máxima de armadura negativa en cualquier sección entre apoyos (obviamente, también se respetará la cuantía mínima establecida por el artículo 42º de la Instrucción)
- se define una ***cuantía máxima a tracción*** para cualquier sección de la viga:

$$\rho_{max} = \rho' + 72 \cdot \frac{f_{cd}}{{f_{yd}}^2} \qquad [8.3.3]$$

  siendo $\rho'$ la cuantía geométrica de la cara comprimida y donde $f_{cd}$ y $f_{yd}$ se expresan en N/mm$^2$
- los cercos de la armadura transversal serán cerrados, tendrán un diámetro de, por lo menos, Ø6 y la separación $s_t$ entre los mismos no será superior a la mitad del canto $h$
- además, en las zonas críticas de la viga se observarán las siguientes reglas:
  - la armadura de compresión será igual o superior al 33% de la armadura de tracción dispuesta en la misma sección
  - en la zona de apoyos la primera armadura transversal se situará a 5 cm del apoyo y la separación $s_t$ no será superior al menor de los siguientes valores:
    a) la cuarta parte del canto útil $d$
    b) 8 veces al diámetro nominal de la barra longitudinal más fina
    c) 24 veces el diámetro nominal del cerco
    d) 200 mm

### 3.1.2 Vigas en estructuras de ductilidad muy alta

Cuando el proyecto de la estructura contemple ***ductilidad muy alta***, se establecen las siguientes disposiciones generales en toda la viga:

- el descuelgue de la viga será superior a la profundidad $x$ de la fibra neutra en rotura en la sección de apoyo y el ancho del mismo será de, al menos, 250 mm
- en toda su longitud se debe disponer una armadura longitudinal de al menos 4Ø14 (dos en cada cara) y no menos del 33% de la cuantía máxima de armadura negativa en cualquier sección entre apoyos
- se define una ***cuantía máxima a tracción*** para cualquier sección de la viga:

$$\rho_{max} = \rho' + 50 \cdot \frac{f_{cd}}{{f_{yd}}^2} \qquad [8.3.4]$$

- los cercos de la armadura transversal serán cerrados, tendrán un diámetro de, por lo menos, Ø6 y la separación $s_t$ entre los mismos no será superior a la mitad del canto $h$
- además, en las zonas críticas de la viga se observarán las siguientes reglas:

- la armadura de compresión será igual o superior al 50% de la armadura de tracción dispuesta en la misma sección
- en la zona de apoyos la primera armadura transversal se situará a 5 cm del apoyo y la separación $s_t$ no será superior al menor de los siguientes valores:
  a) la cuarta parte del canto útil $d$
  b) 6 veces al diámetro nominal de la barra longitudinal más fina
  c) 24 veces el diámetro nominal del cerco
  d) 150 mm

## 3.2 DISPOSICIONES RELATIVAS A LOS SOPORTES

En el caso de elementos que trabajan fundamentalmente a compresión compuesta, el Anejo 10 de la EHE-08 establece las siguientes disposiciones generales

- la relación entre la dimensión mayor y menor del rectángulo en que se inscribe la sección transversal no excederá de 2,5
- las longitudes de anclaje de las armaduras se incrementarán en $10 \cdot \emptyset$ respecto de las definidas para cargas estáticas en el artículo 69º de la Instrucción
- los empalmes de las armaduras se alejarán, en lo posible, de las zonas próximas a los extremos o de las zonas críticas susceptibles de albergar una rótula plástica
- se define como ***zona crítica*** la comprendida desde el extremo de una columna hasta una longitud igual al máximo de los siguientes valores:
  a) la máxima dimensión de la sección transversal
  b) la sexta parte de la longitud libre del soporte
  c) 450 mm
- si la longitud libre de la columna es inferior a 3 veces la mayor dimensión de su sección transversal, toda la columna será considerada una zona crítica
- la cuantía geométrica de armadura longitudinal no será inferior al 1% ni superior al 6%
- si la sección transversal es simétrica, se dispondrá un armado longitudinal simétrico
- en secciones rectangulares se dispondrán al menos 3 redondos en cada cara
- la armadura transversal la formarán cercos cerrados de diámetro igual o superior a 6 mm
- a lo largo de las zonas críticas, la cuantía mecánica mínima adimensional de la armadura transversal será igual o superior a 0,08
- fuera de las zonas críticas, la armadura transversal consistirá en cercos cerrados de diámetro igual o superior a 6 mm y su separación $s_t$ no será mayor que 15 veces el diámetro de la armadura longitudinal más fina, ni tampoco superior a 150 mm; recuérdese también que el diámetro nominal del cerco no debe ser inferior a la cuarta parte del diámetro de la barra longitudinal más gruesa

### 3.2.1 Soportes en estructuras de ductilidad alta

Deberán observarse las siguientes disposiciones adicionales:

- la menor dimensión de la sección no será inferior a 250 mm
- la cuantía geométrica máxima de armado es el 4%

- la distancia entre armaduras longitudinales no será mayor de 200 mm
- la máxima separación $s_t$ en las zonas críticas será el más pequeño de los siguientes valores:
    a) la tercera parte del ancho del núcleo confinado $b_0$, que se mide entre las líneas centrales de los cercos confinantes
    b) 150 mm
    c) 8 veces el diámetro de la barra longitudinal más fina

### 3.2.2 Soportes en estructuras de ductilidad muy alta

Deberán observarse las siguientes disposiciones adicionales:

- la menor dimensión de la sección no será inferior a 300 mm
- la cuantía geométrica máxima de armado es el 4%
- la distancia entre armaduras longitudinales no será mayor de 150 mm
- el diámetro de los cercos será igual o superior a 8 mm
- la máxima separación $s_t$ en las zonas críticas será el más pequeño de los siguientes valores:
    a) la cuarta parte del ancho del núcleo confinado $b_0$
    b) 100 mm
    c) 6 veces el diámetro de la barra longitudinal más fina

# CAPÍTULO 9
# LOS ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO DEL HORMIGÓN

## 1. ESTUDIO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR FISURADA

Para las comprobaciones de Estados Límite de Servicio en secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a flexión pura o simple, la Instrucción EHE-08 permite suponer un ***comportamiento lineal fisurado*** que desprecia la contribución de las fibras de hormigón en tracción; por otro lado, el comportamiento del acero se asume como elástico lineal, es decir, no se admite su plastificación. Para el caso de una sección rectangular habitual sometida a un momento flector $M_k$ (valor de servicio, no de cálculo), el plano de deformaciones y el correspondiente diagrama de tensiones se representan en la Figura 112, en la que, por simplicidad, no se incluye la armadura de compresión y/o montaje.

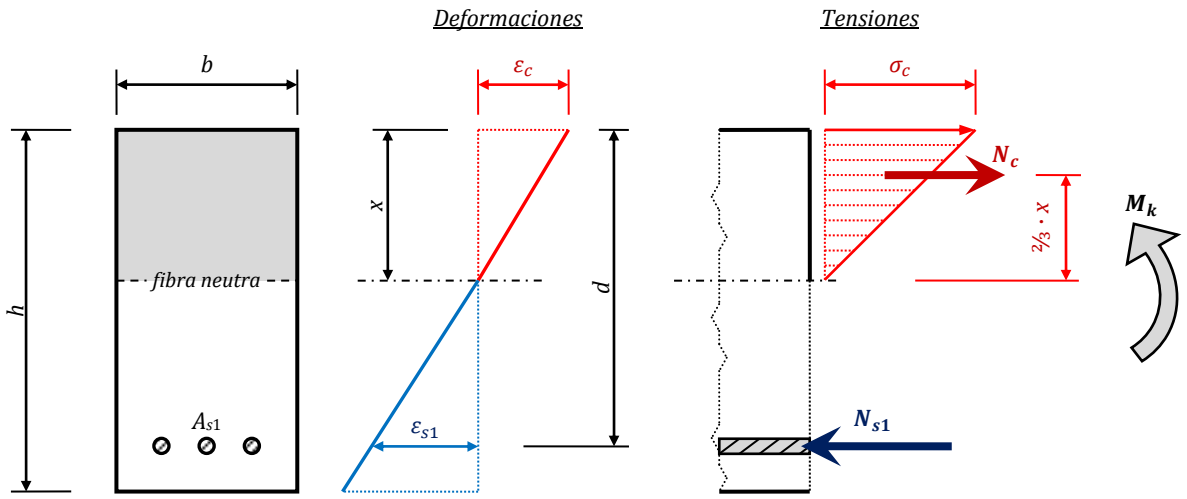



Figura 112. Sección rectangular en flexión pura: comportamiento lineal fisurado

El planteamiento del equilibrio en la sección rectangular de la Figura 112 es el siguiente:

- equilibrio de fuerzas:

$$\vec{N}_c + \vec{N}_{s1} = \vec{0}$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sigma_c + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_c + A_{s1} \cdot E_s \cdot \varepsilon_{s1} = 0 \qquad [9.1.1]$$

- equilibrio de momentos:

$$M_k = |N_{s1}| \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) \qquad [9.1.2]$$

Obsérvese que la tensión del hormigón $\sigma_c$ se obtiene de la deformación $\varepsilon_c$ aplicando la ***Ley de Hooke*** con el ***módulo de elasticidad secante*** $E_{cm}$ (ver Capítulo 3, "Propiedades mecánicas de los materiales"). Por otro lado, si se plantea la ecuación del plano de deformaciones, se puede expresar la deformación del acero $\varepsilon_{s1}$ (negativa por ser de tracción) en función de la deformación $\varepsilon_c$ del hormigón:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x-d} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{s1} = \frac{x-d}{x} \cdot \varepsilon_c \qquad [9.1.3]$$

Así pues, la ecuación [9.1.1] puede reescribirse como:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_c + A_{s1} \cdot E_s \cdot \frac{x-d}{x} \cdot \varepsilon_c = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_c + A_{s1} \cdot E_s \cdot \frac{E_{cm}}{E_{cm}} \cdot \frac{x-d}{x} \cdot \varepsilon_c = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_c + A_{s1} \cdot n \cdot E_{cm} \cdot (x-d) \cdot \varepsilon_c = 0$$

donde el parámetro $n = {E_s}/{E_{cm}}$ se denomina ***coeficiente de equivalencia entre el hormigón y el acero***. Finalmente, la ecuación de equilibrio de fuerzas queda de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + n \cdot A_{s1} \cdot (x-d) = 0 \qquad [9.1.4]$$

La profundidad $x$ de la fibra neutra en servicio se despeja de esta última ecuación de segundo grado:

$$\boxed{x = d \cdot n \cdot \rho_1 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho_1}}\right) \qquad [9.1.5]}$$

En la ecuación anterior $\rho_1$ es la cuantía geométrica de armadura de tracción respecto de la sección útil:

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} \qquad [9.1.6]$$

A continuación, se puede escribir la ecuación de momentos [9.1.2] en términos de $x$ y de $A_{s1}$:

$$M_k = A_{s1} \cdot E_s \cdot |\varepsilon_{s1}| \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)$$

$$M_k = A_{s1} \cdot n \cdot E_{cm} \cdot \left|\frac{x-d}{x} \cdot \varepsilon_c\right| \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)$$

$$M_k = A_{s1} \cdot n \cdot E_{cm} \cdot \varepsilon_c \cdot \frac{d-x}{x} \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right)$$

$$M_k = \frac{A_{s1} \cdot n \cdot \sigma_c}{x} \cdot (d-x) \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) \qquad [9.1.7]$$

Puesto que se ha asumido que el comportamiento de la sección será lineal, sin plastificaciones, se puede aplicar la ***Ley de Navier*** para relacionar el momento flector aplicado con la tensión máxima del hormigón en una fibra que esté situada a una distancia $x$ de la fibra neutra. Así pues, se plantea:

$$M_k = \frac{I_f \cdot \sigma_c}{x} \qquad [9.1.8]$$

donde $I_f$ es el ***momento de inercia de la sección fisurada***. Comparando las ecuaciones [9.1.7] y [9.1.8] la obtención de la expresión de dicha inercia es inmediata:

$$I_f = n \cdot A_{s1} \cdot (d - x) \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) \qquad [9.1.9]$$

En el desarrollo anterior se ha despreciado la presencia y contribución de la armadura principal comprimida. Para el caso de que se desee tenerla en cuenta, el Anejo 8 de la Instrucción EHE-08 recoge las expresiones correspondientes para el cálculo de la profundidad $x$ y de la inercia fisurada $I_f$.

## 2. EL ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN

### 2.1 FINALIDAD DEL ESTUDIO DE LA FISURACIÓN

La fisuración de las estructuras de hormigón armado es un fenómeno inevitable pero controlable y que ha ido cobrando importancia con los años, a medida que se han ido incrementando las resistencias de los aceros empleados como armaduras. Básicamente, los efectos de la fisuración son:

- pérdida de protección de las armaduras, por lo que ***afecta negativamente a la durabilidad***
- también afecta negativamente al ***aspecto estético*** de las construcciones
- produce temor en los usuarios de la construcción (***riesgo psicológico***)
- gastos extraordinarios en mantenimiento y reparación
- pérdida de estanquidad, etc.

La fisuración, como el resto de Estados Límite de Servicio, no supone un riesgo para la integridad física de los usuarios de las estructuras, al menos de manera inmediata. Sin embargo, si no es controlada puede comprometer la funcionalidad para la que haya sido proyectada la estructura y poner en riesgo su buen comportamiento a lo largo de la vida útil de la misma. Las fisuras en las estructuras de hormigón pueden clasificarse en dos grupos:

a) ***fisuras de origen tensional***: ortogonales a las armaduras y producidas por acciones permanentes y variables o bien por deformaciones impedidas (retracción y temperatura)

b) ***fisuras de origen atensional***: paralelas a las armaduras y debidas habitualmente al incremento de volumen de las barras cuando se oxidan

Una manera de evitar las fisuras del tipo a) es emplear armaduras finas y lo más próximas posible a la cara traccionada del elemento. Sin embargo, son precisamente las armaduras finas y con escasez de recubrimiento aquellas que pueden ocasionar fisuras del tipo b). Por otro lado, es preciso señalar que aunque la experiencia muestra que los daños más importantes producidos por la corrosión no guardan una clara relación con la ***abertura de las fisuras de tipo a)***, la casi totalidad de normativas internacionales proponen el control de la fisuración a través de dicho parámetro. En el ámbito de la Instrucción española y en ausencia de otros requisitos específicos, la abertura característica de fisura no superará los valores máximos recogidos en la Tabla 5.1.1.2 de la EHE-08.

Tabla 5.1.1.2 de la EHE-08

| Clase de exposición según artículo 8º | $w_{máx}$ (mm) | |
|---|---|---|
| | **Hormigón armado** (para la combinación cuasipermanente de acciones) | **Hormigón pretensado** (para la combinación frecuente de acciones) |
| I | 0,4 | 0,2 |
| IIa, IIb, H | 0,3 | 0,2(1) |
| IIIa, IIIb, IV, F, Qa(2) | 0,2 | Descompresión |
| IIIc, Qb(2), Qc(2) | 0,1 | |

(1) Adicionalmente deberá comprobarse que las armaduras activas se encuentran en la zona comprimida de la sección, bajo la combinación cuasipermanente de acciones

(2) La limitación relativa a la clase Q sólo será de aplicación en el caso de que el ataque químico pueda afectar a la armadura. En otros casos, se aplicará la limitación correspondiente a la clase general correspondiente

El libro *"Hormigón armado"* de Jiménez Montoya propone que para aquellos elementos cuya función exija de ***condiciones de estanquidad*** (tales como depósitos de almacenamiento de agua) el ancho máximo sin que se pierda dicha condición es de $w_{máx}$ = 0,10 mm, si existe alternancia de humedad-sequedad o exposición frente a heladas o acciones agresivas. En elementos sumergidos permanentemente se puede ser menos restrictivo y admitir $w_{máx}$ = 0,20 mm. Otras limitaciones de abertura de fisura recogidas por algunos autores son:

- 0,20 mm para una relación de 2,5 de altura de agua respecto a espesor de pared
- 0,15 mm para una relación de 5,0
- 0,10 mm para una relación de 10,0
- 0,05 mm para una relación de 20,0

El riesgo de corrosión por fisuración de origen tensional no sólo depende del ancho de fisura, sino que ***también influye el período de tiempo en que la fisura permanece abierta***. Por ejemplo, una carga accidental breve puede producir un ancho de fisura excesivo, pero al cesar su actuación la fisura se cerrará y no habrá riesgo de corrosión (aunque sí permanecerán los defectos estéticos). Por esta razón, la Tabla 5.1.1.2 de la Instrucción prescribe que la comprobación se realizará con una determinada combinación de acciones:

- la ***combinación cuasipermanente***, en el caso de elementos de hormigón ***armado***
- la ***combinación frecuente***, en el caso de elementos de hormigón ***pretensado***

Por otro lado, la fisuración también puede producirse por ***compresión excesiva de bielas***. La EHE-08 exige, por ello, que en todas las situaciones persistentes y en las situaciones transitorias bajo la combinación más desfavorable de acciones correspondientes a la fase de estudio, la tensión de compresión $\sigma_c$ en el hormigón debe cumplir la siguiente condición:

$$\sigma_c \leq 0{,}60 \cdot f_{ck,j} \qquad [9.2.1]$$

donde se recuerda que $f_{ck,j}$ es la resistencia característica a $j$ días de edad del hormigón en la fase considerada. El cálculo de la tensión de compresión puede realizarse a través de la ***Ley de Navier*** en régimen lineal fisurado:

$$\sigma_c = \frac{M_k \cdot x}{I_f} \qquad [9.2.2]$$

## 2.2 CÁLCULO DE LA ABERTURA MÁXIMA DE FISURA

En la Figura 113 se representa un tirante de hormigón armado sometido a un esfuerzo axil de tracción de valor $N_k$. Para valores pequeños de dicho esfuerzo no se producirán fisuras mientras no se supere la resistencia del hormigón a tracción. La Figura 113 representa una situación en la que ha sido superada dicha resistencia y, como consecuencia, se han producido dos fisuras separadas entre sí una distancia $s_m$. En el plano de cada una de dichas fisuras la pieza se encuentra en el denominado ***Estado II*** y el esfuerzo de tracción es resistido exclusivamente por las armaduras longitudinales; la tensión en el hormigón es nula porque el material se ha fisurado. Por consiguiente, el acero se encontrará sometido a su máximo nivel de tensión de tracción. A medida que la sección a estudiar se aleja del plano de fisuración, el anclaje de la armadura es más eficaz y, por lo tanto, el acero transfiere carga al hormigón sin que éste supere su resistencia a tracción; a esta situación se la denomina ***Estado I***. Obsérvese además que el alargamiento de la armadura no es constante, sino que es máximo en la posición de la fisura y mínimo allí donde el hormigón se encuentra más traccionado en las regiones situadas entre fisuras. Este efecto se conoce como ***rigidización de la sección*** o *"tension-stiffening"*.

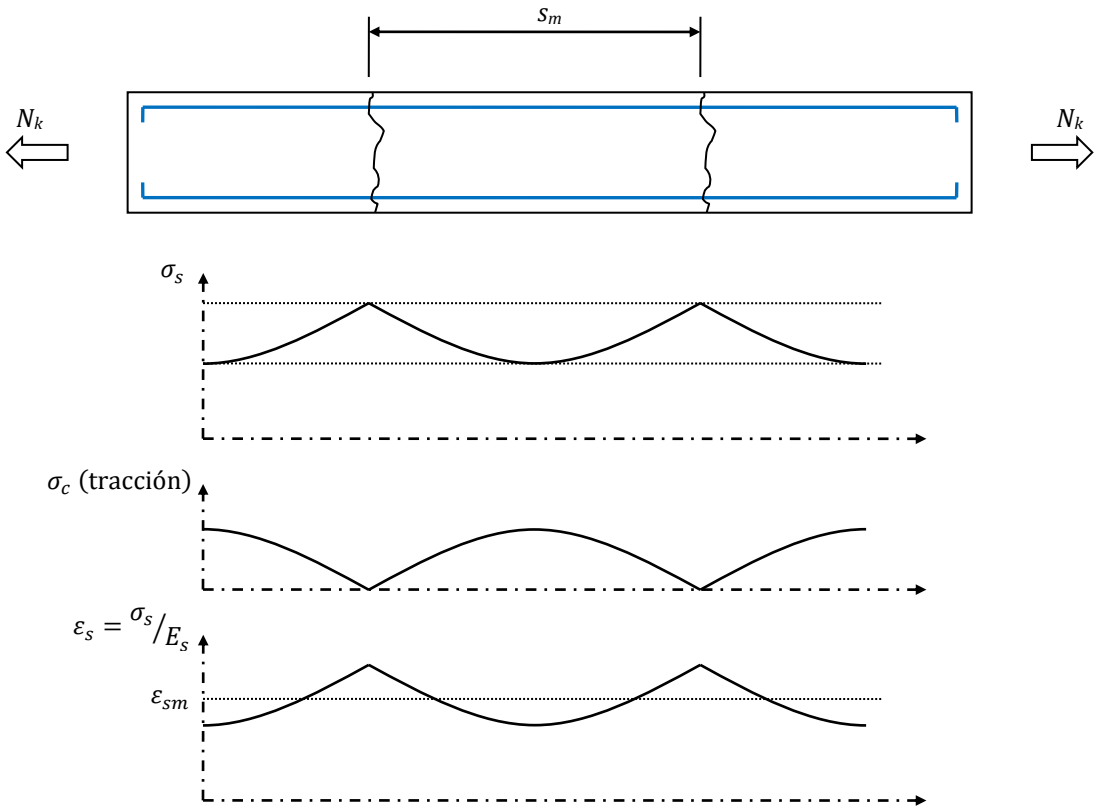



Figura 113. Fenómeno de fisuración y efecto de rigidización entre dos fisuras consecutivas

La experiencia demuestra que si se sigue incrementando el valor de $N_k$, el proceso de fisuración se desarrolla hasta una ***estabilización***, de forma que posteriores incrementos de tracción no provocarán la aparición de nuevas fisuras sino que incrementarán la abertura de las ya existentes. Por lo tanto, el cálculo de la abertura de las dos fisuras representadas en la Figura 113 puede plantearse de la siguiente manera:

- obviamente, el tirante se alargará bajo la acción del esfuerzo de tracción $N_k$;

- el incremento de longitud entre dos fisuras consecutivas se podrá estimar como el producto del segmento $s_m$ por el alargamiento unitario medio $\varepsilon_{sm}$ de la armadura de acero
- si se supone que las fisuras se producen para permitir dicho alargamiento …
- … entonces cada fisura que flanquea el segmento de tirante con longitud $s_m$ ha tenido que abrirse tanto como lo que se ha alargado dicho segmento

### 2.2.1 Cálculo de la separación media entre fisuras

La Instrucción EHE-08 permite calcular la ***separación media entre fisuras*** $s_m$ mediante una expresión ajustada a partir de numerosas campañas de ensayos:

$$s_m = 2 \cdot c + 0{,}2 \cdot s + 0{,}4 \cdot k_1 \cdot \frac{\emptyset \cdot A_{c,ef}}{A_s} \qquad [9.2.3]$$

donde:

- $c$ es el espesor del recubrimiento
- $s$ es la separación entre ejes de barras o de grupos de barras; en el caso de vigas se puede tomar $s$ como el cociente entre el ancho de la viga y el número de barras o grupos de barras situados al mismo nivel; no se debe tomar $s \geq 15\emptyset$
- $k_1$ es un coeficiente dependiente de la distribución de tensiones en la pieza, que se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{8 \cdot \varepsilon_1} \qquad [9.2.4]$$

  siendo $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ las deformaciones máxima y mínima en la zona traccionada; para casos particulares este parámetro vale:
  - $k_1 = 0{,}125$ en flexión simple
  - $k_1 = 0{,}25$ en tracción pura
- Ø es el diámetro de la barra más gruesa (o bien el diámetro equivalente cuando se emplean grupos de barras)
- $A_{c,ef}$ es el área de la ***zona efectiva de tracción o de recubrimiento***, que es aquella a la cual se extienden las tracciones transmitidas por las barras
- $A_s$ es el área de todas las armaduras longitudinales situadas en el área $A_{c,ef}$

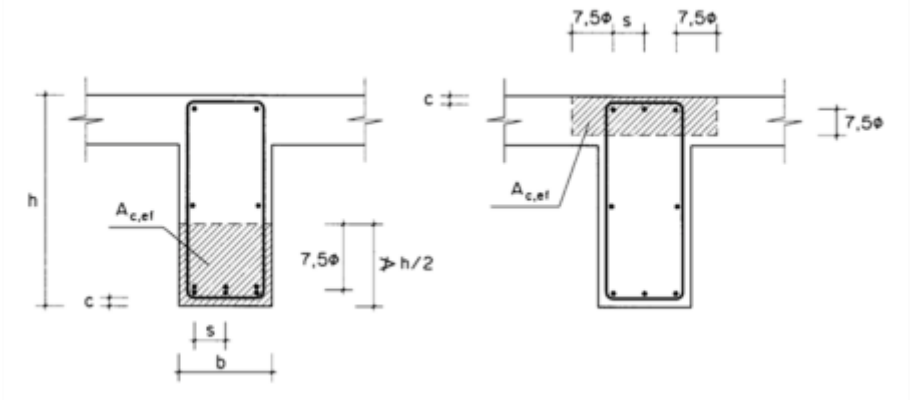



Figura 114. Área efectiva a tracción en vigas descolgadas

El área efectiva de tracción $A_{c,ef}$ se define en la Figura 49.2.4.b de la Instrucción EHE-08, distinguiendo entre vigas descolgadas o planas, losas y muros. Por ejemplo, para el caso de una ***viga descolgada o viga de canto*** sometida a un momento flector positivo (caso recogido en la izquierda de la Figura 114), su valor se calcula como:

$$A_{c,ef} = b \cdot (d' + 7{,}5 \cdot \emptyset) \leq \frac{b \cdot h}{2} \qquad [9.2.5]$$

Cuando se trata de ***vigas planas o secciones de muros***, el área de la zona efectiva de tracción se calcula de acuerdo con las siguientes expresiones:

- si la separación *s* entre redondos es inferior o igual a 15∅:

$$A_{c,ef} = s \cdot \frac{h}{4} \qquad [9.2.6.\text{a}]$$

- si, por el contrario, la separación *s* es superior a 15∅:

$$A_{c,ef} = 15\emptyset \cdot \frac{h}{4} \qquad [9.2.6.\text{b}]$$

- en ambos, casos, el área $A_s$ será la de un solo redondo (o grupo de redondos)

### 2.2.2 Cálculo del alargamiento medio de la armadura

La Instrucción propone el siguiente procedimiento para calcular el ***alargamiento medio de la armadura*** puede calcularse a través de:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[1 - k_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right] \geq 0{,}4 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \qquad [9.2.7]$$

donde:

- $\sigma_s$ es la tensión en la armadura en una sección en Estado II, bajo la combinación de acciones para la que corresponda la comprobación del Estado Límite
- $\sigma_{sr}$ es la tensión en la armadura en el momento en el cual la fibra de hormigón más traccionada supera la resistencia media a flexotracción $f_{ct,m,fl}$
- el coeficiente experimental $k_2$ toma el valor 1 para la primera carga instantánea de la pieza y 0,5 en los casos de cargas repetidas o de larga duración

A falta de un cálculo más exhaustivo, se pueden calcular las tensiones $\sigma_s$ y $\sigma_{sr}$ a través de las siguientes fórmulas aproximadas:

$$\sigma_s \approx \frac{M_k}{0{,}8 \cdot d \cdot A_{s1}} \qquad [9.2.8.\text{a}]$$

$$\sigma_{sr} \approx \frac{M_f}{0{,}8 \cdot d \cdot A_{s1}} = \frac{W_1 \cdot f_{ct,m,fl}}{0{,}8 \cdot d \cdot A_{s1}} \qquad [9.2.8.\text{b}]$$

donde:

- $M_f$ es el ***momento de fisuración*** de la sección
- $W_1$ es el módulo resistente correspondiente a la fibra más traccionada de la sección homogeneizada sin fisurar
- $A_{s1}$ es el área de la armadura principal traccionada

### 2.2.3 Valores medio y característico de la abertura de fisura

Una vez obtenidos $s_m$ y $\varepsilon_{sm}$ el ***valor medio*** del ancho de la fisura se calcula como:

$$w_m = s_m \cdot \varepsilon_{sm} \qquad [9.2.9]$$

La abertura de las fisuras es, de hecho, una ***variable aleatoria*** y el valor anterior es una previsión de su valor medio. Las campañas de ensayos realizadas muestran que puede aceptarse que la ***distribución estadística*** de esta variable aleatoria sigue de manera aproximada la de Gauss. Por ello, a efectos de la verificación del Estado Límite es más significativo el ***valor característico*** de abertura, que es el que únicamente será superado en un porcentaje muy pequeño de situaciones. Este valor característico se designa $w_k$ y es el que se compara con las aberturas máximas de la Tabla 5.1.1.2 de la EHE-08. Su cálculo se realiza a través de la siguiente expresión:

$$w_k = \beta \cdot w_m \qquad [9.2.10]$$

donde:

- $\beta = 1{,}3$ cuando la fisuración la producen acciones indirectas (asientos, acciones térmicas, acciones reológicas)
- $\beta = 1{,}7$ cuando la fisuración la producen acciones directas; este valor correspondería al cuantil del 95% en la distribución de Gauss

## 2.3 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

En determinados elementos estructurales y en determinadas condiciones de diseño, el control de la fisuración puede obligar a redefinir los esquemas de armado calculados para Estados Límite Últimos. Cuando no se satisface el Estado Límite de fisuración, puede que además de incrementar la sección de armadura traccionada, deba distribuirse de manera más adecuada: reduciendo las separaciones, disponiendo redondos de piel adicionales dentro de la zona efectiva de tracción, etc. De hecho, en aquellos elementos en los que se adopten recubrimientos iguales o superiores a 50 mm, puede ser necesario disponer armadura de piel para el control de la fisuración y para evitar el desprendimiento del hormigón de recubrimiento durante el período de resistencia al fuego.

En vigas de cantos superiores a 400-500 mm, puede ocurrir el fenómeno conocido como ***árbol de fisuras***, que consiste en la confluencia de varias fisuras en una sola con un ancho superior al de cada una de ellas. En estas condiciones, existe riesgo de oxidación y corrosión de los estribos que sean interceptados por el árbol de fisuras, tal y como muestra la Figura 115.

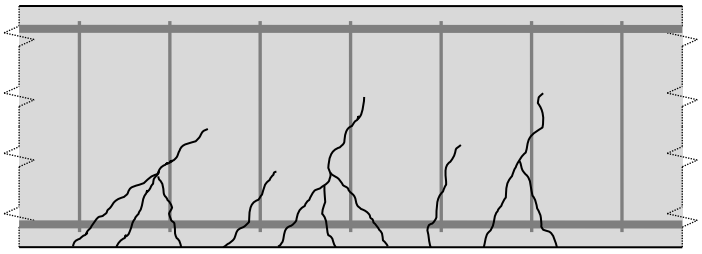


Figura 115. Propagación de fisuras formando un árbol

Para evitar este problema, es necesario disponer armaduras de piel, tal y como se describió en el Capítulo 8, "Diseño y disposiciones en vigas y soportes". El profesor José Calavera en su libro *"Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón"* hace las recomendaciones que se recogen en las Tablas 9.1 y 9.2.

Tabla 9.1 Diámetro mínimo para armadura de piel

| Ancho del alma | $b_0 \leq 150$ mm | $150 < b_0 < 300$ | $b_0 \geq 300$ |
|---|---|---|---|
| Diámetro de piel | Ø10 | Ø12 | Ø16 |

Tabla 9.2 Separación máxima entre barras de armadura de piel

| Tipo de hormigón | HA-25 | | HA-45 | |
|---|---|---|---|---|
| Ancho de fisura (mm) | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,4 |
| Separación máxima entre barras de piel (mm) | 150 | 250 | 100 | 150 |

Finalmente, si se respetan las disposiciones constructivas relativas a la armadura transversal y a la armadura de punzonamiento, el control de la fisuración en servicio frente a solicitaciones tangenciales estará asegurado sin comprobaciones adicionales.

**<u>Ejemplo 1</u>: La Figura 116 representa una viga de hormigón armado ubicada a la intemperie en una instalación portuaria, construida con hormigón HA-30 y acero B500S. La sección de la viga es rectangular de ancho 0,40 m y canto 0,50 m. Está sometida a su propio peso ($g$ = 5 kN/m) y a dos cargas puntuales de naturaleza variable, con un coeficiente de simultaneidad $\Psi_2 = 0,6$. El recubrimiento nominal de las armaduras longitudinales es 43 mm y el recubrimiento mecánico es 51 mm. De acuerdo con las comprobaciones de agotamiento frente a solicitaciones normales, el armado inferior más denso está constituido por 5Ø16.**

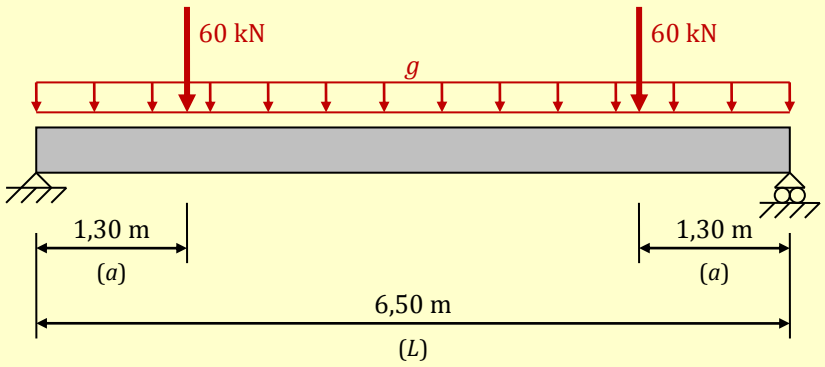



Figura 116. Estudio de fisuración en una viga ubicada en una instalación portuaria

Puesto que se trata de un elemento de hormigón armado, el máximo momento flector en situación de servicio debe calcularse con la combinación cuasipermanente de acciones:

$$M_k = M_G + \Psi_2 \cdot M_Q = g \cdot \frac{l^2}{8} + \Psi_2 \cdot Q \cdot a = 5 \cdot \frac{6{,}50^2}{8} + 0{,}6 \cdot 60 \cdot 1{,}30 = 73{,}2 \text{ mkN}$$

El momento de fisuración de la sección de hormigón se calcula como sigue:

$$M_f = W_1 \cdot f_{ct,m,fl}$$

donde:

$$W_1 = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{400 \cdot 500^2}{6} = 1{,}667 \cdot 10^7 \text{ mm}^3$$

$$f_{ct,m,fl} = max\left\{1 \ ; \ 1{,}6 - \frac{h}{1000}\right\} \cdot f_{ct,m} = max\left\{1 \ ; \ 1{,}6 - \frac{h}{1000}\right\} \cdot 0{,}30 \cdot {f_{ck}}^{2/3} =$$

$$= max\left\{1 \ ; \ 1{,}6 - \frac{500}{1000}\right\} \cdot 0{,}30 \cdot 30^{2/3} = 3{,}19 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Así pues:

$$M_f = 1{,}667 \cdot 10^7 \text{ mm}^3 \cdot 3{,}19 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 53{,}1 \cdot 10^6 \text{ mmN} = 53{,}1 \text{ mkN}$$

Como el flector máximo de servicio es superior al momento de fisuración, se prevé que la sección estará fisurada y es necesario calcular la abertura de fisura y comprobar que es inferior al valor máximo de la Tabla 5.1.1.2 de la EHE-08, $w_{max} = 0{,}2$ mm (para ambiente marino aéreo, clase general IIIa). Conocidos los valores de $M_k$ y de $M_f$ se pueden estimar los de las tensiones $\sigma_s$ y $\sigma_{sr}$:

$$\sigma_s \approx \frac{M_k}{0{,}8 \cdot d \cdot A_{s1}} = \frac{73{,}2 \cdot 10^6 \text{ mmN}}{0{,}8 \cdot 449 \text{ mm} \cdot 1005{,}3 \text{ mm}^2} = 202{,}7 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{sr} \approx \frac{M_f}{0{,}8 \cdot d \cdot A_{s1}} = \frac{53{,}1 \cdot 10^6 \text{ mmN}}{0{,}8 \cdot 449 \text{ mm} \cdot 1005{,}3 \text{ mm}^2} = 147{,}0 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

En los cálculos anteriores se han empleado los siguientes valores:

$$d = h - d' = 500 - 51 = 449 \text{ mm}$$

$$A_{s1} = \langle 5\emptyset 16 \rangle = 5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 16^2 = 1005{,}3 \text{ mm}^2$$

El alargamiento medio de la armadura se calcula a partir de la expresión [9.2.7]:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[1 - k_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}\right)^2\right] \geq 0{,}4 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{202{,}7}{200000} \cdot \left[1 - 0{,}5 \cdot \left(\frac{147{,}0}{202{,}7}\right)^2\right] \geq 0{,}4 \cdot \frac{202{,}7}{200000} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{sm} = 7{,}47 \cdot 10^{-4}$$

A continuación, la separación media entre fisuras se obtiene aplicando la expresión [9.2.3]:

$$s_m = 2 \cdot c + 0{,}2 \cdot s + 0{,}4 \cdot k_1 \cdot \frac{\emptyset \cdot A_{c,ef}}{A_s}$$

con los siguientes valores:

$$c = 43 \ mm \qquad s \approx \frac{b}{n} = \frac{400 \text{ mm}}{5 \text{ redondos}} = 80 \text{ mm} \qquad k_1 = 0{,}125 \ \text{ (flexión simple)}$$

$$\emptyset = 16 \text{ mm} \qquad A_s = A_{s1} = 1005{,}3 \text{ mm}^2$$

$$A_{c,ef} = b \cdot (d' + 7{,}5 \cdot \emptyset) \leq \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{c,ef} = 400 \cdot (51 + 7{,}5 \cdot 16) \leq \frac{400 \cdot 500}{2} \quad \rightarrow \quad A_{c,ef} = 68400 \text{ mm}^2$$

La separación media entre fisuras es:

$$s_m = 2 \cdot c + 0{,}2 \cdot s + 0{,}4 \cdot k_1 \cdot \frac{\emptyset \cdot A_{c,ef}}{A_s} = 156{,}4 \text{ mm}$$

Como la fisuración está producida por acciones aplicadas directamente sobre la estructura (no se trata de asientos o acciones térmicas), el parámetro $\beta$ de la expresión [9.2.10] toma el valor 1,7 y, finalmente, la abertura media de cada fisura se calcula como sigue:

$$w_k = \beta \cdot w_m = \beta \cdot \varepsilon_{sm} \cdot s_m = 1{,}7 \cdot 7{,}47 \cdot 10^{-4} \cdot 156{,}4 \text{ mm} = 0{,}199 \text{ mm}$$

Por consiguiente, la abertura característica estimada es inferior a la abertura máxima que recoge la Tabla 5.1.1.2 de la Instrucción para un ambiente IIIa y ***el esquema de armado adoptado es válido para el control de la fisuración por tracción***.

Por otro lado, también debe comprobarse la ***fisuración por compresión***, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\sigma_c = \frac{M_k \cdot x}{I_f} \leq 0{,}60 \cdot f_{ck}$$

que hace uso de los siguientes parámetros:

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} = \frac{1005{,}3\ \text{mm}^2}{400\ \text{mm} \cdot 449\ \text{mm}} = 0{,}0056$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{E_s}{8500 \cdot \sqrt[3]{f_{cm}}} = \frac{E_s}{8500 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8}} = \frac{200000\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{8500 \cdot \sqrt[3]{30 + 8\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = \frac{200000\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{28577\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 7{,}0$$

$$x = d \cdot n \cdot \rho_1 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho_1}}\right) = 449 \cdot 7{,}0 \cdot 0{,}0056 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho_1}}\right) = 109{,}3\ \text{mm}$$

$$I_f = n \cdot A_{s1} \cdot (d - x) \cdot \left(d - \frac{x}{3}\right) = 7{,}0 \cdot 1005{,}3 \cdot (449 - 109{,}3) \cdot \left(449 - \frac{109{,}3}{3}\right) = 9{,}862 \cdot 10^8\ \text{mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{M_k \cdot x}{I_f} = \frac{81 \cdot 10^6\ \text{mmN} \cdot 109{,}3\ \text{mm}}{9{,}862 \cdot 10^8\ \text{mm}^4} = 8{,}98\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \ldots \quad < 0{,}60 \cdot f_{ck} = 18\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Por lo tanto, la comprobación es satisfactoria.

## 3. EL ESTADO LÍMITE DE DEFORMACIÓN

Como introducción al presente apartado se recoge una cita textual del libro *"Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón"* del profesor José Calavera: *"Los métodos de cálculo correspondientes a los estados límite últimos, vistos anteriormente, los correspondientes valores de los coeficientes γ, los avances en los métodos de cálculo de esfuerzos y las mejoras obtenidas en los materiales, especialmente en los aceros, permiten el proyecto de piezas que, siendo **suficientemente resistentes**, resultan a veces **excesivamente deformables**. Incluso en muchos casos, aun no siendo las piezas excesivamente deformables, aisladamente consideradas, sus deformaciones resultan incompatibles con la rigidez de otras partes no estructurales del edificio. La fisuración de tabiquerías y fachadas por esta causa es hoy un problema grave en muchos países y, en particular, en España"*.

Esto pone de manifiesto que, si bien en épocas pasadas no parecía tan decisiva la comprobación del comportamiento en servicio de las estructuras de hormigón (fisuración y deformaciones), hoy en día existe un nuevo contexto que hace que pasen a primer plano. Se extraen a continuación algunas observaciones relevantes recogidas en el libro del profesor Calavera:

- en la década de los 1960, en las estructuras de los edificios residenciales y de oficinas los vanos rara vez superaban los 5 m de luz; actualmente, se superan de forma habitual los 6 m de luz, lo cual se traduce en deformaciones superiores en un 30-40%
- hasta los años 1960, la armadura de acero más habitual equivaldría B220 de la actualidad; sin embargo, hoy en día el límite elástico prácticamente se ha duplicado; con ello, se han reducido a la mitad las cuantías geométricas y la inercia equivalente, lo que se traduce en flechas dos veces mayores

- los métodos de cálculo con soporte de software y las revisiones de los coeficientes de seguridad permiten afinar más el diseño de las estructuras
- antiguamente, era habitual que las líneas de tabiques tuvieran continuidad hasta el terreno; hoy en día es muy frecuente que los bajos de los edificios sean diáfanos, por lo que aparecen deformaciones que antaño eran "absorbidas" por elementos no estructurales
- además, aunque los métodos antiguos empleaban la inercia bruta de las piezas, este "error" de planteamiento era en cierta medida "maquillado" al no proyectar grandes luces

Además, uno de los cambios más notables introducidos por la última revisión de la Instrucción del año 2.008 es la reducción de los coeficientes de mayoración de acciones en Estados Límite Últimos y la eliminación del factor de cansancio del hormigón. Como consecuencia, la determinación del armado para las situaciones de agotamiento es más afinada y, aunque ello no supone una merma de la seguridad y fiabilidad de las estructuras, sí que puede hacer que las patologías asociadas a los Estados Límite de Servicio cobren mayor importancia.

El problema del cálculo y comprobación de deformaciones del hormigón estructural es de enorme complejidad y ello se debe, fundamentalmente, a las características que se han ido exponiendo en los temas vistos con anterioridad, entre las que cabría destacar:

- la dispersión de sus propiedades y su dependencia de las variables higrométricas y térmicas ambientales
- la falta de linealidad
- fisuración frente a tensiones de tracción y cambios en la rigidez a lo largo de la pieza
- comportamiento reológico, etc.

En el estado actual de avance tecnológico, no existen procedimientos de cálculo que sean capaces de tener en cuenta todos estos parámetros de entrada de una manera suficientemente realista y que, al mismo tiempo, puedan ser aplicables de forma práctica y económica en el ámbito profesional de quienes desarrollan, redactan y dirigen proyectos de edificación. Por consiguiente, el problema de comprobación de deformaciones debe afrontarse por medio de un procedimiento que sea acorde y razonable de acuerdo con el objetivo buscado. En fase de proyecto es preferible una metodología suficientemente sencilla y rápida de aplicar, aunque deje de lado parámetros importantes (historiales de humedad y condiciones térmicas, tiempo de curado, proceso de aplicación de cargas, etc). Por el contrario, en el ámbito de la investigación experimental y estudios y peritaciones de patologías de edificación sí que se justifica el empleo de métodos más complejos con el apoyo de sofisticados recursos informáticos.

Las deformaciones en las estructuras de hormigón armado no sólo dependen del valor de las acciones aplicadas, ya que influye también el orden de aplicación de cargas y descargas en la estructura y la duración de las mismas. El comportamiento reológico del hormigón tiene una extraordinaria importancia, ya que el fenómeno de la fluencia contribuye a que las ***deformaciones instantáneas***, que siguen de manera inmediata a la aplicación de las cargas, se incrementen a medida que transcurre el tiempo si dichas cargas se mantienen aplicadas. Ese incremento de deformación entre el instante de puesta en carga y edades posteriores, que ya fue advertido por Eugene Freyssinet en 1.911, es lo que se conoce como ***deformación diferida***.

Finalmente, la flecha máxima de los elementos que trabajan predominantemente a flexión debe ser contrastada con unos valores límite de comprobación, los cuales son, generalmente, específicos para un determinado procedimiento de cálculo de deformaciones y están respaldados por la experiencia. En concreto, en el ámbito de la Instrucción EHE-08, las deformaciones de un elemento a flexión con una luz $L$ no superarán los siguientes valores:

- ***flecha total*** igual al menor valor de entre $L/250$ y $L/500 + 1\ cm$
- ***flecha activa*** igual a $L/400$

Las flechas activas se definen específicamente para los elementos resistentes que soportan otros elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por exceso de deformación, tales como las tabiquerías. Se entiende por ***flecha activa*** al máximo incremento de deformación en la estructura que se produce a partir del instante en el que se ejecuta el elemento dañable; su valor es, por tanto, *igual a la flecha total menos la que ya se haya producido hasta el instante en que se construye dicho elemento dañable*.

## 3.1 CANTOS MÍNIMOS EN LA INSTRUCCIÓN ESPAÑOLA

### 3.1.2 Cantos mínimos de vigas y placas

La Instrucción EHE-08 establece que no será necesaria la comprobación del Estado Límite de Servicio de deformaciones en aquellas vigas y losas de edificación cuya ***esbeltez*** o relación luz/canto útil sea igual o inferior a los valores indicados en la Tabla 50.2.2.1.a.; por lo tanto, el canto útil mínimo que debe tener un elemento (viga, losa unidireccional o placa) para evitar la comprobación de las deformaciones se obtiene de la siguiente expresión:

$$d \geq d_{min} = \frac{L}{C} \qquad [9.3.1]$$

en donde el parámetro $C$ depende de las condiciones de vinculación del elemento y su valor se obtiene de la mencionada Tabla 50.2.2.1.a de la Instrucción EHE-08. Cuando se trate de vigas en T ó losas aligeradas en las que el ancho del ala sea superior a 3 veces el ancho del nervio, los valores de $C$ se multiplicarán por 0,8 pudiendo interpolarse para casos intermedios. Si se trata de elementos que soportan tabiquerías, la luz $L$ no superará los 7 m cuando se trate de vigas o losas unidireccionales, ni los 8,5 m cuando se trate de placas (forjados sin vigas); para luces superiores deberán aplicarse los factores correctores establecidos en el Eurocódigo 2.

Tabla 50.2.2.1.a de la EHE-08. Relaciones $L/d$ en vigas y losas de hormigón armado sometidas a flexión simple

| Sistema estructural $L/d$ | $K$ | Elementos fuertemente armados ($\rho$=1,5%) | Elementos débilmente armados ($\rho$=0,5%) |
|---|---|---|---|
| Viga simplemente apoyada. Losa uni o bidireccional simplemente apoyada | 1,00 | 14 | 20 |
| Viga continua[1] en un extremo. Losa unidireccional continua[1,2] en un solo lado | 1,30 | 18 | 26 |
| Viga continua[1] en ambos extremos. Losa unidireccional o bidireccional continua[1,2] | 1,50 | 20 | 30 |
| Recuadros exteriores y de esquina en losas sin vigas sobre apoyos aislados | 1,15 | 16 | 23 |
| Recuadros interiores en losas sin vigas sobre apoyos aislados | 1,20 | 17 | 24 |
| Voladizo | 0,40 | 6 | 8 |

[1] Un extremo se considera continuo si el momento correspondiente es igual o superior al 85% del momento de empotramiento perfecto

[2] En losas unidireccionales, las esbelteces dadas se refieren a la luz menor.

[3] En losas sobre apoyos aislados (pilares), las esbelteces dadas se refieren a la luz mayor.

Además, los valores del parámetro $C$ están determinados para elementos fabricados en HA-30 y con armaduras de acero corrugado con límite elástico característico de 500 N/mm$^2$. Los comentarios del

artículo 50.2.2.1 recogen unas fórmulas que permiten generalizar esta metodología a elementos armados con cuantías geométricas ($\rho$) distintas de las consignadas en la tabla o con diferentes resistencias $f_{ck}$. Dichas fórmulas están extraídas del Eurocódigo 2.

### 3.2.2 Cantos mínimos en forjados unidireccionales

La función principal de los forjados es recibir las cargas debidas a su peso propio, al peso del resto de elementos constructivos (acabados, tabiquerías, instalaciones) y a las sobrecargas de uso, y transmitirlas a la estructura portante del edificio. Cuando se trata de forjados sin vigas resueltos mediante placas (macizas o aligeradas) el forjado transmite las cargas directamente a los soportes del edificio. Los forjados unidireccionales, por el contrario, necesitan de un esquema estructural de pórticos planos con vigas y soportes, de forma que transmiten las cargas a las vigas y éstas, a su vez, a los soportes. Las vigas pueden ser descolgadas o de canto (Figura 117) o bien planas (Figura 118).

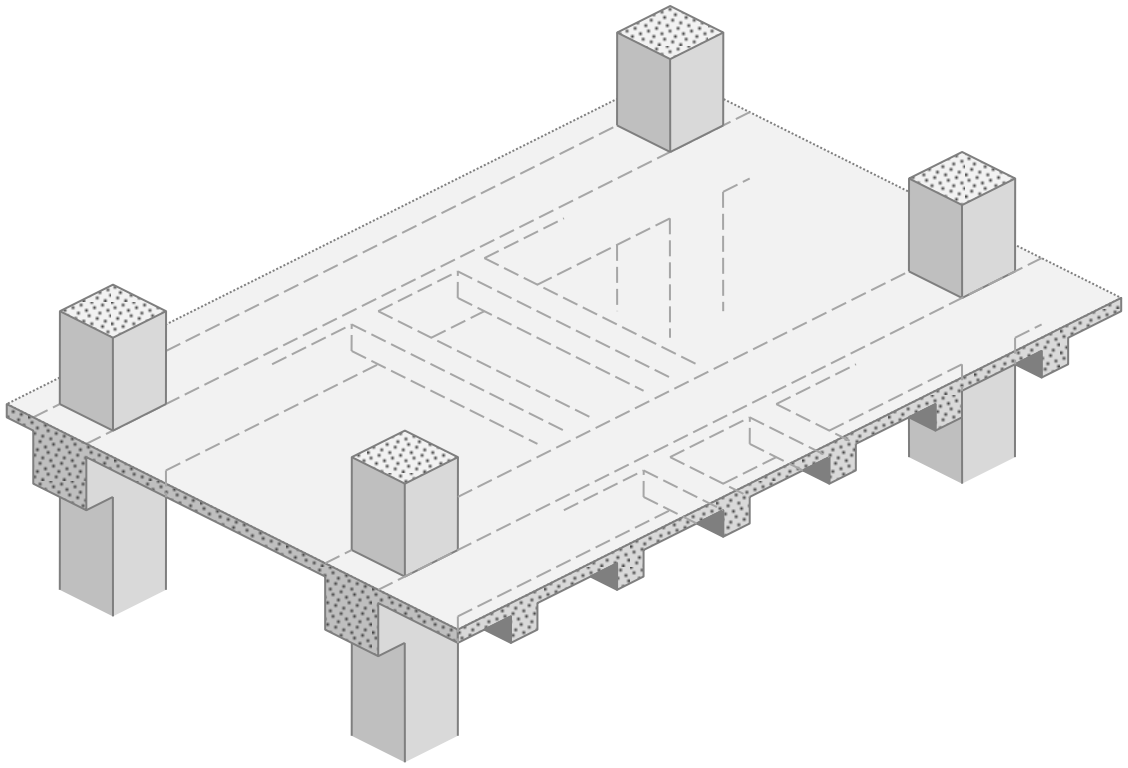


Figura 117. Forjado unidireccional de losa nervada sobre vigas descolgadas

Otras funciones del forjado dentro de la estructura son las siguientes:

- aporta rigidez transversal a la estructura principal del edificio
- incrementa su capacidad resistente a flexión y torsión
- solidariza los entramados a nivel de cada planta
- efecto de diafragma: el forjado equivale a una gran viga horizontal frente a acciones de viento y/o sismo

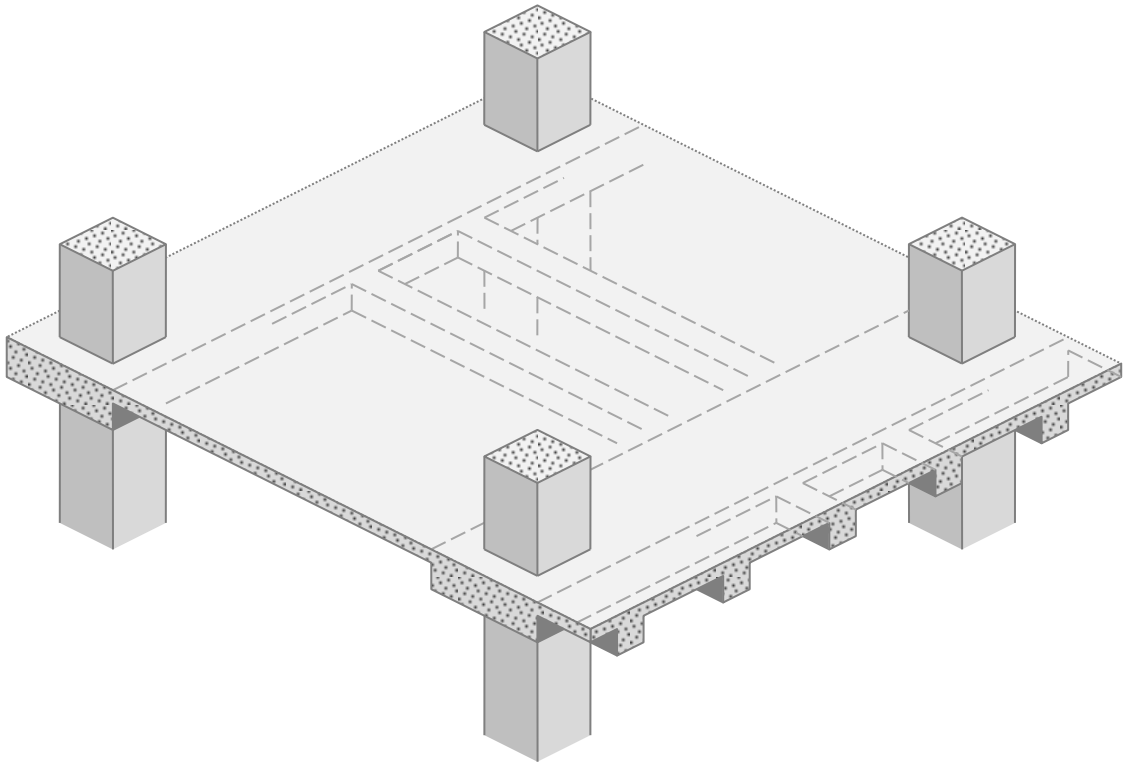


Figura 118. Forjado unidireccional de losa nervada sobre vigas planas

Algunas de las distintas tipologías de forjados unidireccionales se recogen en la Figura 119:

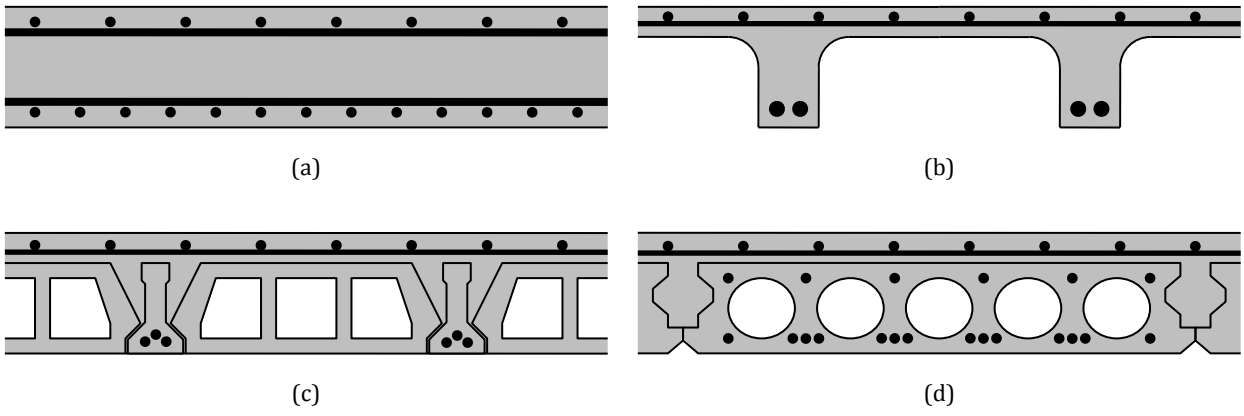



Figura 119. Tipologías de forjados unidireccionales: losa maciza (a); losa nervada o aligerada (b); con viguetas prefabricadas y bovedillas no recuperables (c); de losas alveolares pretensadas (d)

En lo referente a la flecha activa en forjados unidireccionales que sustenten tabiques o muros de partición o de cerramiento, la Instrucción EHE-08 limita el valor de aquella al más exigente de los valores $L/500$ ó $L/1000 + 5$ mm. El parámetro $L$ se refiere a la luz del vano o bien a 1,6 veces la longitud del voladizo.

De igual forma que en el caso de las vigas, la Instrucción permite omitir la comprobación del Estado Límite de deformaciones en aquellos forjados unidireccionales cuyo canto total $h$ sea igual o inferior a un valor mínimo $h_{min}$ y siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- si se trata de forjados de viguetas, las luces de los vanos no deben ser mayores que 7 m
- si se trata de forjados resueltos con losas alveolares pretensadas, las luces no deben ser mayores que 12 m
- en ambos casos las sobrecargas no deben ser superiores a 4 kN/m$^2$

El canto mínimo se obtiene de la siguiente expresión:

$$h_{min} = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \frac{L}{C} \qquad [9.3.2]$$

donde:

- el coeficiente $\delta_1$ se calcula a partir de la carga total $q$ (en kN/m$^2$) a partir de:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{q}{7}} \qquad [9.3.3.\text{a}]$$

- el coeficiente $\delta_2$ se calcula a partir de la luz de cálculo $L$ (en m) a partir de:

$$\delta_2 = \sqrt[4]{\frac{L}{6}} \qquad [9.3.3.\text{b}]$$

- la luz de cálculo $L$ se refiere a la longitud del vano o del voladizo
- el coeficiente $C$ se elige de acuerdo con la tabla 50.2.2.1.b de la EHE-08, reproducida a continuación; pero en el caso de voladizos se tomará $C = 6$, si el forjado recibe tabiques o muros, o bien $C = 9$, en caso contrario

Tabla 50.2.2.1.b de la EHE-08. Coeficientes $C$

| Tipo de forjado | Tipo de carga | Tipo de tramo | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Aislado | Extremo | Interior |
| Viguetas armadas | Con tabiques o muros | 17 | 21 | 24 |
| | Cubiertas | 20 | 24 | 27 |
| Viguetas pretensadas | Con tabiques o muros | 19 | 23 | 26 |
| | Cubiertas | 22 | 26 | 29 |
| Losas alveolares pretensadas(*) | Con tabiques o muros | 36 | – | – |
| | Cubiertas | 45 | – | – |

(*) Piezas pretensadas proyectadas de forma que, para la combinación poco frecuente no llegue a superarse el momento de fisuración

## 3.2 CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES

### 3.2.1 Cálculo de las deformaciones instantáneas

Tal y como se explicó en el apartado dedicado al Estado Límite de fisuración, en un estado tensional en el cual la sección de hormigón está total o parcialmente sometida a tracciones, llegará un momento en que se supere la resistencia a tracción del hormigón y aparecerá una distribución más o menos uniformemente espaciada de fisuras a lo largo de la pieza, una vez que el proceso de fisuración se haya estabilizado. Debido al fenómeno de rigidización de la sección (*"tension-stiffening"*), aunque la sección del elemento sea constante en toda su longitud, la rigidez de la pieza sufre variaciones a lo largo de la misma. Por otro lado, es habitual que el esquema de armado de la viga varíe también a lo largo de su longitud, como consecuencia de la variación de las leyes de momentos y los escalones de despieces.

Se comprende, por lo tanto, que la rigidez a flexión de la pieza (que depende del producto $E \cdot I$) no es en absoluto constante y, aparentemente, ya no valen las "fórmulas" y enfoques clásicos para piezas de inercia constante que se obtienen de la *Resistencia de Materiales*. Sin embargo, si se descartaran éstas, entonces las flechas no podrían calcularse sin recurrir a la ***integración de curvaturas*** y sería entonces imprescindible conocer y cuantificar exactamente la función de variación de la inercia a lo largo de las piezas. Ello implicaría determinar todas las variables que influyen en ella: función de adherencia acero-hormigón, distribución y aberturas de todas las fisuras, etc. No obstante, la gran mayoría de los profesionales prefiere métodos de rápida aplicación práctica en fases de proyecto, por lo que el procedimiento de obtención de deformaciones debe ser un punto intermedio entre ambos enfoques.

La Instrucción EHE-08 no sigue en este caso al Eurocódigo 2, sino que adopta el procedimiento de la norma norteamericana ACI-318 y que fue desarrollado originalmente por **Dan Earle Branson** (n. 1.928). El método se basa en la estimación de un ***momento de inercia equivalente*** cuyo empleo sea compatible con las fórmulas de la *Resistencia de Materiales* para calcular las ***deformaciones instantáneas*** por flexión en piezas de sección constante. La precisión del método de Branson para el cálculo de la flecha instantánea es del orden del 20% y es suficiente, en el actual estado de conocimientos, cuando se necesita un procedimiento que deba ser suficientemente "simple" para su aplicación en fase de proyecto. La expresión de la inercia equivalente $I_e$ se obtiene de la siguiente expresión empírica:

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 \cdot I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_f \not> I_b \qquad [9.3.4]$$

en la que:

- $M_f$ es el momento de fisuración de la sección, correspondiente a una tensión máxima de tracción en el hormigón igual a su resistencia a flexotracción $f_{ct,m,fl}$
- $M_a$ es el máximo momento flector histórico aplicado en la pieza hasta el instante en el que se calcule la flecha
- $I_b$ es el momento de inercia de la sección bruta
- $I_f$ es el momento de inercia de la sección fisurada homogeneizada a valores de hormigón

La flecha máxima de un elemento puede obtenerse aplicando las fórmulas de la *Resistencia de Materiales*, adoptando el momento de inercia $I_e$ como constante a lo largo de toda la pieza. Para poder aplicar dichas fórmulas se necesita también el valor del módulo de elasticidad longitudinal del hormigón. De los dos módulos de deformación longitudinal definidos en la Instrucción se debe emplear el ***módulo secante*** en lugar del ***módulo inicial*** (ver Capítulo 3, "Propiedades mecánicas de los materiales"). Así pues, el módulo de elasticidad del hormigón se calculará como:

$$E_{cm} = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \qquad [9.3.5]$$

expresado en N/mm$^2$ y con la resistencia característica expresada también en N/mm$^2$.

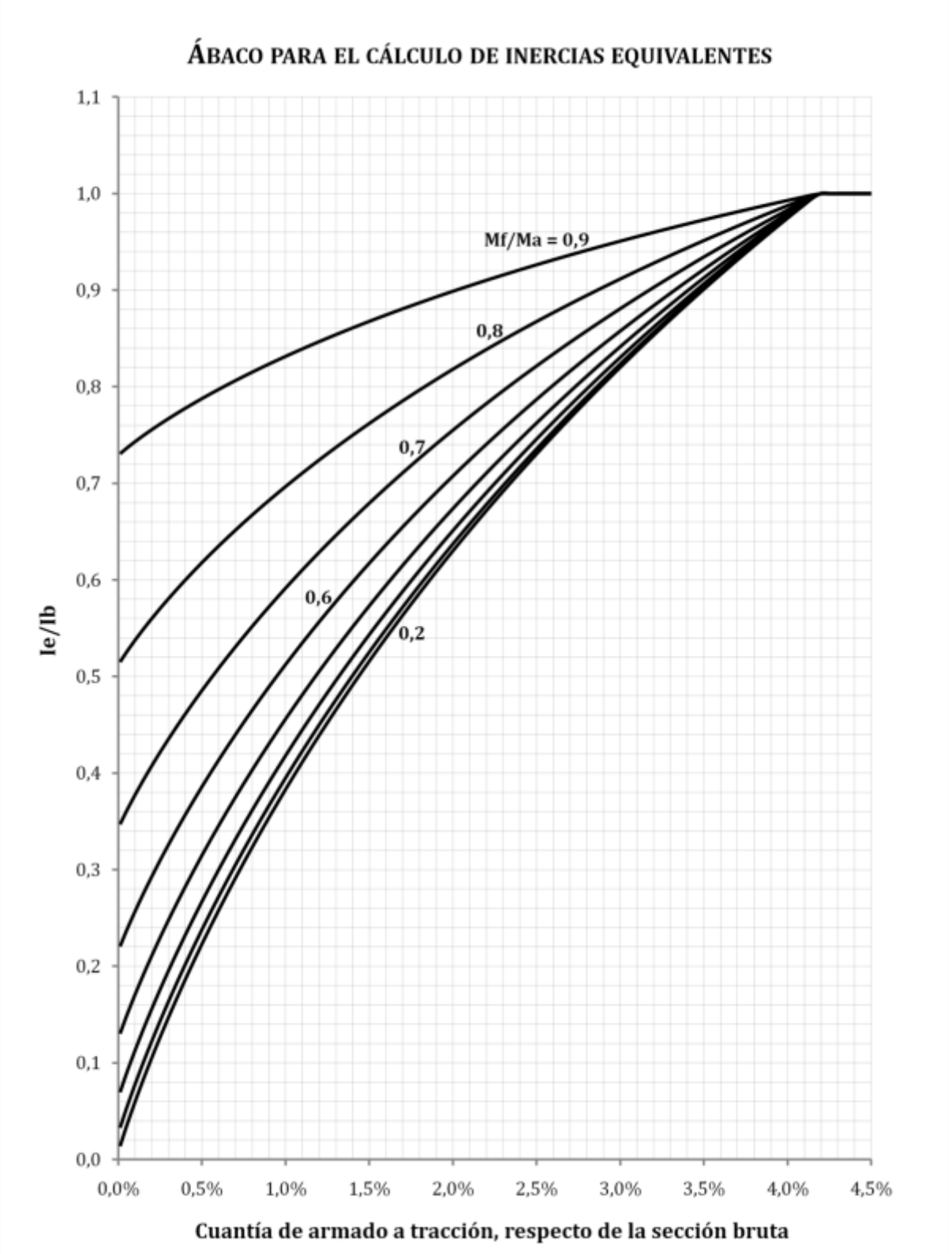



Figura 120. Ábaco para calcular la inercia equivalente (válido para HA-30 y acero B500S ó SD)

Se hace hincapié en que $M_a$ es el mayor valor del momento flector aplicado hasta el instante en que se desee calcular la deformación y está asociado a ***la menor inercia histórica de la pieza***. Téngase en cuenta que una vez producida la fisuración para un determinado estado de carga, la descarga ocultará las fisuras pero no las eliminará. Esto es de especial importancia en el caso de los forjados ejecutados por el sistema de cimbrado de plantas consecutivas, los cuales pasan por etapas en las que la carga soportada es del orden de 2 a 3 veces su peso propio. La sección de la que se toma el máximo momento histórico aplicado $M_a$ es:

- la sección de arranque, en el caso de piezas en voladizo
- la sección central en tramos simplemente apoyados

Para vigas continuas y dinteles de entramados, se aplican las siguientes reglas:

- en vanos internos de elementos continuos la inercia equivalente se determinará mediante la ponderación que se define a continuación:

$$I_e = 0{,}50 \cdot I_{e,central} + 0{,}25 \cdot I_{e,izda} + 0{,}25 \cdot I_{e,dcha} \qquad [9.3.6.\text{a}]$$

  donde:

  - $I_{e,central}$ es el momento de inercia equivalente correspondiente a la sección central del vano, calculado según la fórmula de Branson [9.3.4] y empleando como momento $M_a$ el máximo histórico aplicado en dicha sección central
  - $I_{e,izda}$ e $I_{e,dcha}$ son los momentos de inercia equivalentes correspondientes a los apoyos izquierdo y derecho de un tramo continuo, respectivamente, y calculados con los momentos históricos máximos que les correspondan

- y en los tramos extremos (p.ej. los de fachada) la inercia equivalente se determinará como:

$$I_e = 0{,}75 \cdot I_{e,central} + 0{,}25 \cdot I_{e,extr} \qquad [9.3.6.\text{b}]$$

  donde $I_{e,extr}$ es el momento de inercia equivalente correspondiente al apoyo con continuidad del vano extremo, calculado con su máximo momento histórico

El ábaco de la Figura 120 permite determinar gráficamente la inercia equivalente a partir de la inercia bruta, en función de la cuantía de armado $\rho_1$ (referida a la sección útil) y de la relación $M_f/M_a$. El ábaco es válido para secciones rectangulares sometidas a flexión simple, con $d = 0{,}9 \cdot h$ y construidas con un hormigón de resistencia característica de 30 N/mm² y armaduras de acero B500S ó SD.

### 3.2.2 Cálculo de las deformaciones diferidas

Para estimar la flecha diferida producida por las cargas de larga duración, la Instrucción española hace nuevamente uso del procedimiento establecido por Branson. La ***deformación adicional diferida*** se estima a partir del valor de la instantánea, la cual es multiplicada por el siguiente factor:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \qquad [9.3.7]$$

donde:

- $\rho'$ es la cuantía geométrica de la armadura de compresión $A_{s2}$ referida a la sección útil ($b \cdot d$)
- $\xi$ es un coeficiente que depende de la duración de la carga y cuyo valor se toma de la Tabla 9.3, o bien puede interpolarse de la Figura 121

Tabla 9.3 Valores del coeficiente $\xi$

| Duración de la carga | $\xi$ |
|---|---|
| 2 semanas | 0,5 |
| 1 mes | 0,7 |
| 3 meses | 1 |
| 6 meses | 1,2 |
| 1 año | 1,4 |
| 5 años ó más | 2,0 |

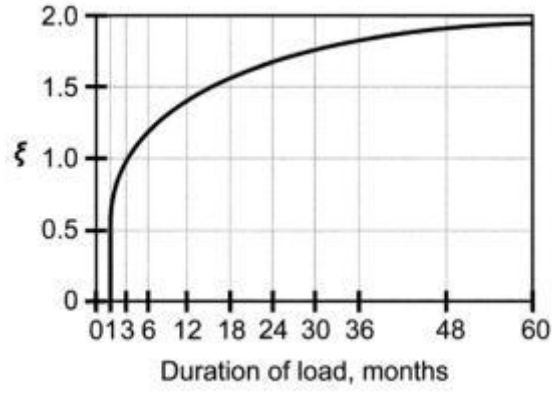



Figura 121. Coeficiente de flechas diferidas (extraído de la ACI 318)

Cuando la estructura es puesta en carga a la edad *j* y se quiere estimar la flecha diferida a una edad posterior *t*, entonces el valor de $\xi$ a tener en cuenta es $\xi(t) - \xi(j)$. Continuando con este ejemplo, la flecha total a tiempo *t* sería:

$$f_{total,t} = f_{inst,j} \cdot \left(1 + \lambda_{j \to t}\right) \qquad [9.3.8]$$

donde:

- $f_{inst,j}$ es la flecha instantánea producida en la puesta en carga
- $\lambda_{j \to t}$ es el factor de flecha diferida calculado mediante:

$$\lambda_{j \to t} = \frac{\xi(t) - \xi(j)}{1 + 50 \cdot \rho'} \qquad [9.3.9]$$

- cuando la carga total se aplica por fracciones, $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ y a diferentes edades, $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$, respectivamente, se puede plantear el cálculo de un coeficiente $\xi_e$ de puesta en carga a una edad equivalente $t_e$:

$$\xi_e = \frac{P_1 \cdot \xi_1 + P_2 \cdot \xi_2 + \ldots + P_n \cdot \xi_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} \qquad [9.3.10]$$

donde $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_n$ son los coeficientes que corresponderían a duraciones de aplicación iguales a las edades $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$; el factor de flecha diferida será entonces:

$$\lambda_{j \to t} = \frac{\xi(t) - \xi_e}{1 + 50 \cdot \rho'} \qquad [9.3.11]$$

**<u>Ejemplo 2</u>: La viga del ejemplo 1 se descimbra un mes después del hormigonado y entra en servicio dos meses después del descimbrado. Calcular la flecha máxima a largo plazo y comprobarla de acuerdo con los límites de la Instrucción EHE-08.**

El momento flector producido por el peso propio de la viga (5 kN/m) es:

$$g \cdot {L^2}/{8} = 26{,}4 \text{ mkN}$$

El momento flector debido a las cargas puntuales variables de valor característico $Q$ = 60 kN es:

$$Q \cdot a = 60 \text{ kN} \cdot 1{,}3 \text{ m} = 78 \text{ mkN}$$

Y la fracción cuasipermanente del flector producido por la acción de las cargas variables es:

$$\Psi_2 \cdot Q \cdot a = 0{,}6 \cdot 78 \text{ mkN} = 46{,}8 \text{ mkN}$$

El histórico de aplicación de las cargas o, mejor dicho, momentos flectores en la sección central de la viga podría ser el representado en el siguiente gráfico:

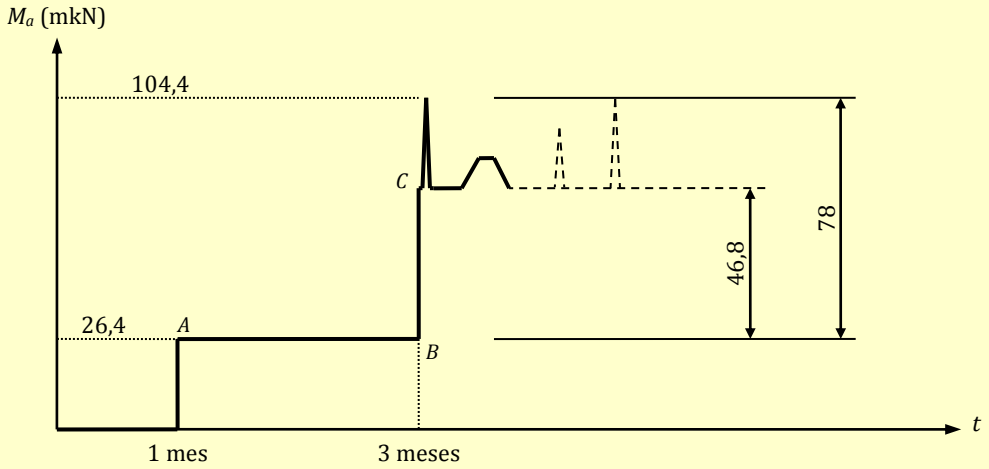



Figura 122. Histórico de momentos flectores en la sección central

El valor del momento de fisuración de la sección, calculado en el ejemplo 1, es $M_f$ = 53,1 mkN. Eso quiere decir que hasta el tercer mes el momento de inercia de la viga es el correspondiente a la sección bruta, puesto que el momento de servicio aplicado no supera el de fisuración.

$$I_b = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 400 \cdot 500^3 = 4{,}167 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

Sin embargo, para el cálculo de la flecha a largo plazo, la sección se habrá fisurado y no podrá utilizarse este valor. En su lugar, se hará uso de la inercia equivalente de Branson:

$$I_e = \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 \cdot I_b + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_f \not> I_b \quad \rightarrow \quad I_e = 1{,}405 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

donde se han empleado los siguientes valores:

$$M_a = 104{,}4 \text{ mkN} \qquad I_f = 9{,}862 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \quad \text{(ver ejemplo 1)}$$

Por otro lado, el módulo de elasticidad del hormigón también se calculó en el ejemplo 1:

$$E_{cm} = 28577 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La flecha instantánea producida por las cargas de larga duración se puede determinar mediante las siguientes fórmulas de la *Resistencia de Materiales* para el problema objeto de estudio:

- flecha máxima producida por una carga distribuida $p$:

$$f_{max} = \frac{5 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

- flecha máxima producida por dos cargas puntuales $P$ iguales simétricamente dispuestas a una distancia $a$ de los apoyos:

$$f_{max} = \frac{P \cdot a}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$$

La aplicación de las fórmulas anteriores al problema objeto de estudio es la siguiente:

a) flecha instantánea debida al <u>peso propio</u>:

$$f_g = \frac{5 \cdot g \cdot L^4}{384 \cdot E_{cm} \cdot I_e} = \frac{5 \cdot 5 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 6500^4 \ \text{mm}^4}{384 \cdot 28577 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1{,}405 \cdot 10^9 \ \text{mm}^4} = 2{,}9 \ \text{mm}$$

b) flecha instantánea debida a la <u>fracción cuasipermanente</u> de la sobrecarga $Q$:

$$f_{\Psi_2 \cdot Q} = \frac{(\Psi_2 \cdot Q) \cdot a}{24 \cdot E_{cm} \cdot I_e} \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2) =$$

$$= \frac{(0{,}6 \cdot 60000 \ \text{N}) \cdot 1300 \ \text{mm}}{24 \cdot 28577 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1{,}405 \cdot 10^9 \ \text{mm}^4} \cdot (3 \cdot 6500^2 - 4 \cdot 1300^2 \ \text{mm}^2) = 5{,}8 \ \text{mm}$$

c) para la determinación de la <u>flecha diferida</u> producida por estas acciones de larga duración, se debe determinar el valor del coeficiente equivalente $\xi_e$ de edad de puesta en carga:

$$\xi_e = \frac{M_1 \cdot \xi_1 + M_2 \cdot \xi_2}{M_1 + M_2} = \frac{26{,}4 \ \text{mkN} \cdot \xi(1 \ \text{mes}) + 46{,}8 \ \text{mkN} \cdot \xi(3 \ \text{meses})}{26{,}4 + 46{,}8 \ \text{mkN}} =$$

$$= \frac{26{,}4 \cdot 0{,}7 + 46{,}8 \cdot 1}{26{,}4 + 46{,}8} = 0{,}89$$

Por lo tanto, la flecha adicional diferida será:

$$f_{diferida} = f_{inst} \cdot \frac{\xi(5 \ \text{años}) - \xi_e}{1 + 50 \cdot \rho'} = (2{,}9 + 5{,}8 \ \text{mm}) \cdot \frac{2 - 0{,}89}{1 + 50 \cdot \rho'}$$

y despreciando el área de la armadura de compresión, se obtiene:

$$f_{diferida} = (2{,}9 + 5{,}8 \ \text{mm}) \cdot \frac{2 - 0{,}89}{1 + 50 \cdot 0} = 9{,}7 \ \text{mm}$$

d) flecha instantánea debida a la <u>fracción no cuasipermanente</u> de la sobrecarga $Q$:

$$f_{(1-\Psi_2) \cdot Q} = f_{\Psi_2 \cdot Q} \cdot \frac{(1 - \Psi_2)}{\Psi_2} = 5{,}8 \ \text{mm} \cdot \frac{1 - 0{,}6}{0{,}6} = 3{,}9 \ \text{mm}$$

Finalmente, la <u>flecha total a largo plazo</u> es:

$$f_{total} = f_g + f_{\Psi_2 \cdot Q} + f_{diferida} + f_{(1-\Psi_2) \cdot Q} = 2{,}9 + 5{,}8 + 9{,}7 + 3{,}9 = 22{,}3 \ \text{mm}$$

La flecha máxima a largo plazo debe cumplir la siguiente condición:

$$f_{total} \leq min\left\{\frac{L}{250} \ ; \ \frac{L}{500} + 1 \ \text{cm}\right\} = min\{26 \ \text{mm} \ ; \ 23 \ \text{mm}\} = 23 \ \text{mm}$$

por lo que se puede dar por satisfactoria la verificación del Estado Límite de Servicio de deformaciones.

La Figura 123.a representa la evolución aproximada de la flecha máxima de la viga, mientras que la Figura 123.b representa el procedimiento de cálculo simplificado que se ha aplicado estimar las deformaciones diferidas.

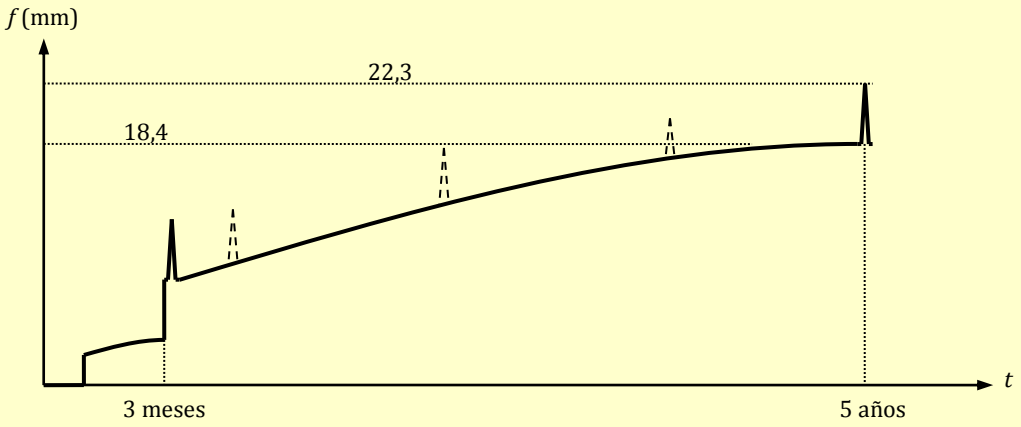



Figura 123.a Evolución de la flecha máxima

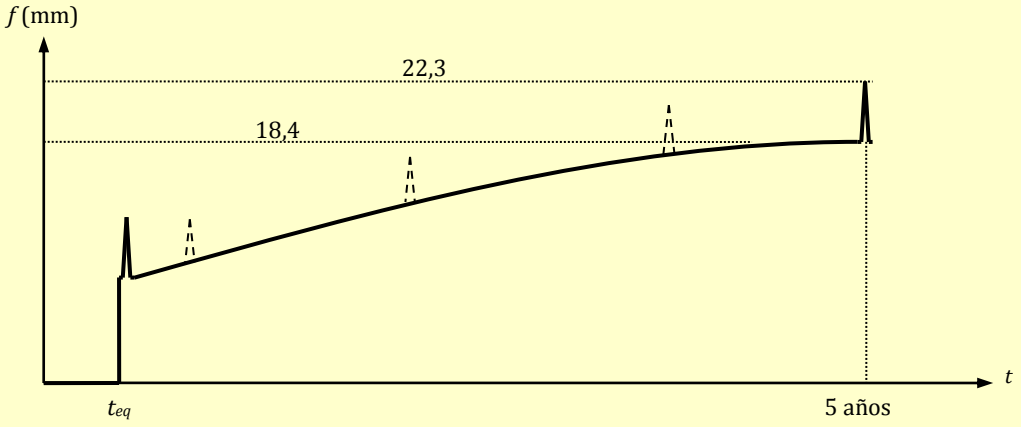



Figura 117.b. Evolución simplificada de la flecha máxima

## 4. EL ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES

En el caso de estructuras esbeltas o en exceso deformables deben ser estudiados y limitados los efectos dinámicos derivados de la acción de cargas variables en el tiempo. Una forma de controlarlos es evitar el problema de la ***resonancia dinámica*** cuando dichas acciones actúen con frecuencias de vibración próximas a las frecuencias naturales de oscilación de la estructura. Las siguientes son las situaciones habituales en las que las acciones externas pueden producir vibraciones:

- maquinaria
- acción dinámica de las ráfagas de viento
- oleaje y mareas
- tráfico de vehículos y ferrocarriles
- procedimientos constructivos (hinca de pilotes o tablestacas, compactación de suelos, etc.)

- movimiento rítmico de personas caminando, corriendo, saltando o bailando
- acciones sísmicas

El artículo 51º de la Instrucción establece límites inferiores para la frecuencia de oscilación natural de estructuras susceptibles de experimentar vibraciones ante movimientos rítmicos de personas:

- 8 Hz en el caso de gimnasios o palacios de deporte
- 7 Hz en el caso de salas de fiestas o de conciertos, sin asientos fijos
- 3,4 Hz en el caso de salas de fiestas o de conciertos, con asientos fijos
- 5 Hz en el caso de pasarelas peatonales

En general, el análisis dinámico de una estructura frente a las acciones aplicadas debe llevarse a cabo mediante el empleo de software y, en no pocos casos, estudios de campo o a escala. Para estructuras sencillas y, a modo de predimensionamiento, puede emplearse la fórmula de **Lord Rayleigh** (1.842-1.919) para estimar la frecuencia natural de vibración $f_0$ de una pieza:

$$f_0 = k \cdot \sqrt{\frac{E_c \cdot I_b \cdot g}{q \cdot L^4}} \qquad [9.4.1]$$

donde:

- $k$ es un coeficiente que depende de las condiciones de vinculación del elemento:
  - 0,56 en un voladizo
  - 1,56 en una viga simplemente apoyada
  - 2,45 en una viga empotrada-apoyada
  - 3,56 en una viga bi-empotrada
- $E_c$ es el módulo de elasticidad inicial, puesto que se analiza la estructura sometida a acciones rápidamente variables $\left[{\mathrm{N}}/{\mathrm{mm}^2}\right]$
- $I_b$ es el momento de inercia de la sección bruta [$\mathrm{mm}^4$]
- $g$ es la aceleración del campo gravitatorio terrestre, $g = 9800\ {\mathrm{mm}}/{\mathrm{s}^2}$
- $q$ es la carga total aplicada por unidad de longitud $\left[{\mathrm{N}}/{\mathrm{mm}}\right]$
- $L$ es la luz de la pieza [mm]

# CAPÍTULO 10
# ELEMENTOS DE CIMENTACIÓN Y CONTENCIÓN

## 1. INTRODUCCIÓN

La cimentación es la parte de una estructura encargada de transmitir al terreno las cargas que actúan sobre la totalidad de la construcción. Debido a que la resistencia y la rigidez del terreno son, en general, inferiores en orden de magnitud a las de los materiales empleados en la estructura del edificio, los elementos de cimentación suelen ser extensos en superficie para poder "dispersar" las tensiones en un área de terreno suficientemente amplia. Los elementos de cimentación convencionales suelen ser piezas de gran volumen y no suele ser necesario recurrir a hormigones de resistencias superiores a $f_{ck}$ = 25 N/mm². No obstante, el tipo de exposición o la agresividad química del terreno sí que puede hacer necesario recurrir a resistencias superiores, por motivos de durabilidad. Y algunas cimentaciones especiales muy solicitadas sí que pueden necesitar resistencias más importantes e incluso hormigones especiales. Por ejemplo, la losa de cimentación de la Torre Sacyr Vallehermoso de Madrid (236 m de altura) tiene un espesor de 4 m aproximadamente y está ejecutada en dos fases de unos 2 m de espesor cada una, siendo la inferior una losa postesada; y la Torre Cristal de Madrid (250 m de altura) emplea también una losa de cimentación con una gran densidad de armaduras pasivas, lo que obliga a recurrir a hormigón autocompactante.

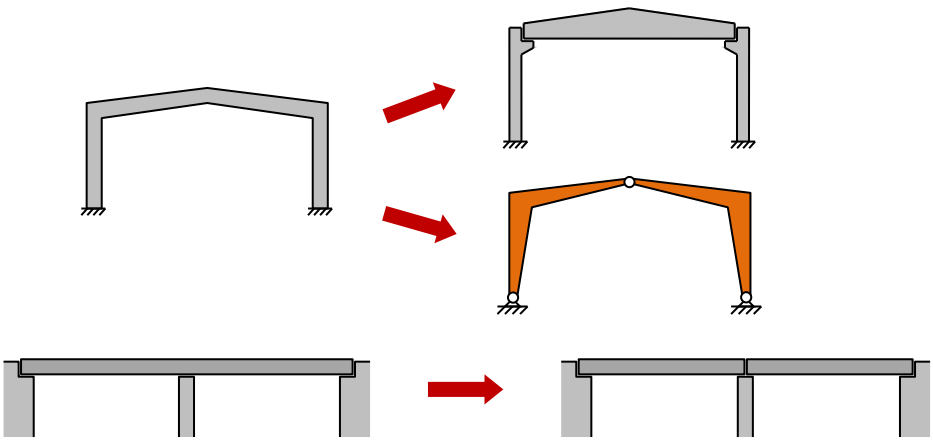


Figura 124. Eliminación de hiperestaticidades en tipologías estructurales

Por otro lado, aunque las cimentaciones convencionales habituales son de hormigón armado, es posible también estudiar la posibilidad de diseñarlas de hormigón en masa. Es importante tener presente que ***el terreno es un material de construcción***, ya que tiene que ser capaz de resistir unos esfuerzos aplicados y garantizar la estabilidad de la estructura de edificación. Sin embargo, a diferencia del hormigón estructural, el acero de armaduras o el acero estructural, no es elegido por el proyectista sino que viene impuesto. En ocasiones puede ser posible realizar algún tipo de actuación con el fin de mejorar una determinada característica del mismo (*jet-grouting*, congelación con

nitrógeno líquido, etc.). La parte crítica del diseño de un sistema de cimentación no sólo es su concepción y cálculo sino la elección adecuada de la tipología estructural más compatible con el terreno y con la magnitud de cargas que deba transmitir. Por ejemplo, cuando se prevean asientos importantes en el sustrato de apoyo, puede ser conveniente replantear la tipología estructural eliminando las hiperestaticidades (Figura 124).

Por sus dimensiones y su tipología muchas estructuras de cimentación son altamente hiperestáticas, con lo que el cálculo preciso de las mismas obliga a hacer uso del ordenador. Como contrapartida, debe tenerse en cuenta que el conocimiento de las características del terreno es siempre imperfecto. Finalmente, es preciso destacar que una gran parte de la estructura de cimentación queda oculta en el propio terreno, lo cual hace muy difícil el poder detectar a tiempo patologías que pueden afectarla y comprometer su durabilidad (fisuraciones, asientos o grandes deformaciones, etc.). En general, cualquier fallo no será observable hasta no alcanzar elevada gravedad. En la siguiente figura se representan las diferentes formas de agotamiento estructural identificadas habitualmente en elementos de cimentación.

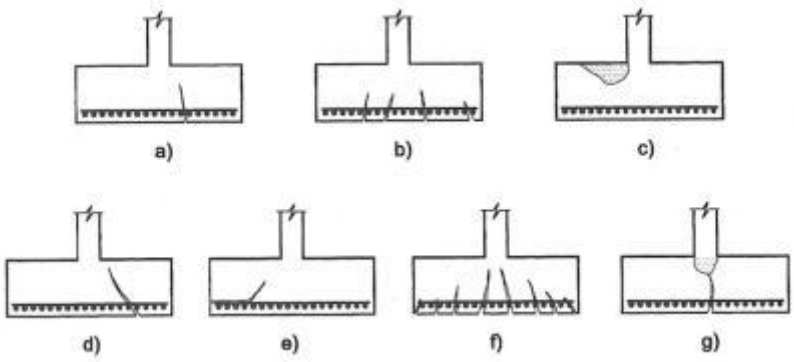



Figura 125. Extraída de *"Cálculo de estructuras de cimentación"* de J. Calavera

Las situaciones reflejadas en la Figura 125 son las siguientes:

a) Fallo a flexión, con rotura frágil y sin previo aviso, que puede darse en piezas de cimentación con cuantías de armadura inferiores a la mecánica mínima

b) Fallo a flexión por agotamiento de la armadura y, por consiguiente, dúctil

c) Fallo a flexión por agotamiento del hormigón en compresión, que sólo se da en piezas con una cuantía excesiva de acero y, por lo tanto, antieconómica

d) Fallo por cortante, con fisura inclinada aproximadamente 45°

e) Fallo por insuficiente anclaje de la armadura

f) Fallo por exceso de fisuración; en sí mismo no es un Estado Límite Último pero favorece la corrosión de las armaduras y puede degenerar en un fallo a flexión a largo plazo

g) Fallo por hendimiento por tracciones horizontales excesivas en zapatas muy rígidas, debidas a una compresión excesiva del muro o soporte sobre la zapata, pero de muy rara aparición en la práctica

## 1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS CIMENTACIONES

La primera y más fundamental de las clasificaciones que pueden hacerse de las estructuras de cimentación es la distinción entre cimentaciones superficiales o directas y cimentaciones profundas:

- las ***cimentaciones superficiales*** pueden emplearse cuando el terreno presenta unas condiciones técnica y económicamente aptas a profundidades de no más de 3 m por debajo de la zona inferior de apoyo de la estructura; suelen denominarse también cimentaciones directas y están constituidas por ***zapatas***, ***vigas de cimentación***, ***muros*** y ***placas*** o ***losas*** (Figura 126)
- las ***cimentaciones profundas*** son la solución más adecuada cuando el nivel apto para cimentar se sitúa a profundidades aproximadamente iguales o superiores a 10 m por debajo de la cota de apoyo de la estructura; su empleo se justifica por el excesivo coste económico que supondría la ejecución de cimentaciones directas (volumen de excavación y de hormigón, cantidad de ferralla, etc.); las cimentaciones directas consisten en ***pilotes*** (Figura 127) y ***pantallas*** y su funcionamiento puede ser por punta o por fuste

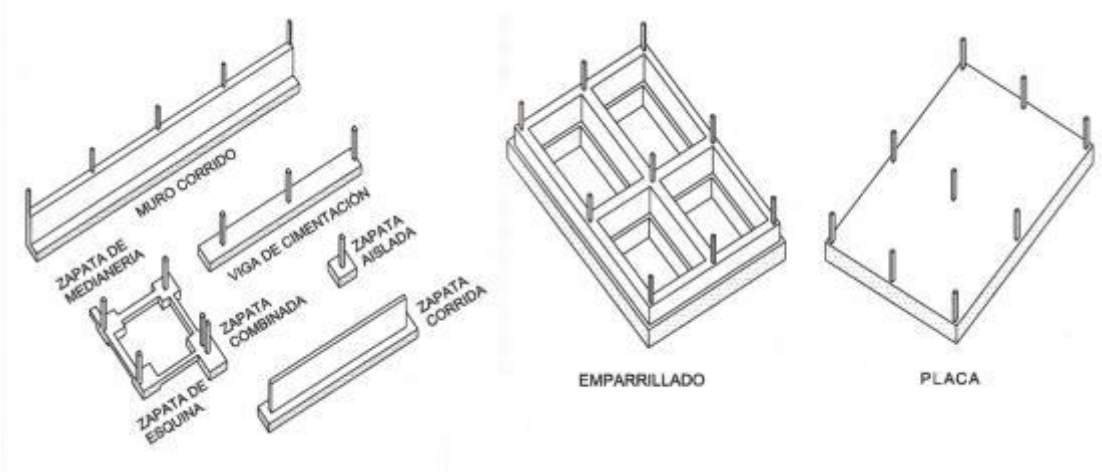



Figura 126. Cimentaciones superficiales. Extraída de *"Cálculo de estructuras de cimentación"* de J. Calavera

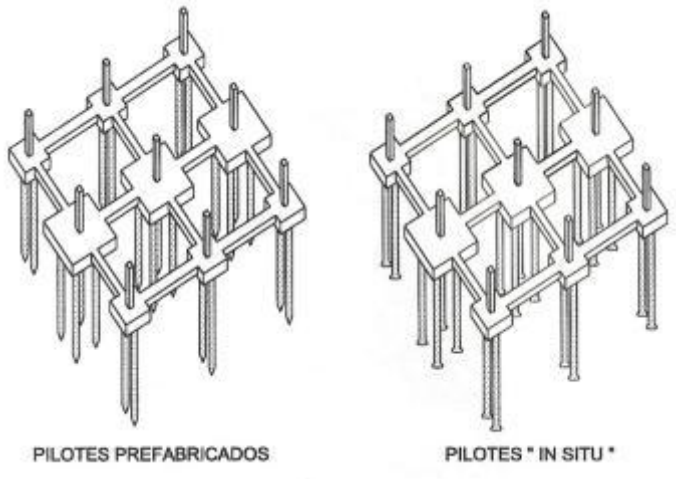



Figura 127. Extraída de *"Cálculo de estructuras de cimentación"* de J. Calavera

- para situaciones intermedias entre los dos casos anteriores, suele ser habitual emplear cimentaciones directas, compensando la diferencia de cotas hasta el sustrato resistente con ***pozos de cimentación*** ejecutados con hormigón pobre, con una dosificación de cemento de en torno a 100 kg/m$^3$ (Figuras 128.b y c); es también posible recurrir a ***plintos*** o ***pedestales robustos*** de hormigón armado (Figura 128.a) que sirven de conexión entre las zapatas y los soportes de la estructura, evitando incrementar excesivamente su longitud de pandeo

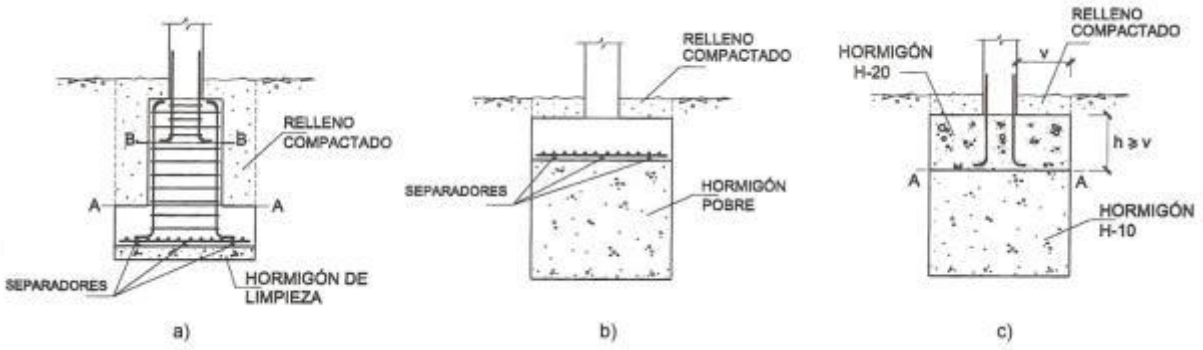



Figura 128. Plintos (a) y pozos de cimentación (b, c). Extraída de *"Cálculo de estructuras de cimentación"* de J. Calavera

## 1.2 DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES EN EL TERRENO

Al cargar un elemento de cimentación apoyado en el terreno, el efecto se transmite a profundidades tanto mayores cuanto mayor sea la anchura *b* del elemento de cimentación. La zona de terreno que se ve afectada se conoce como bulbo de presiones y se representa en la Figura 129.

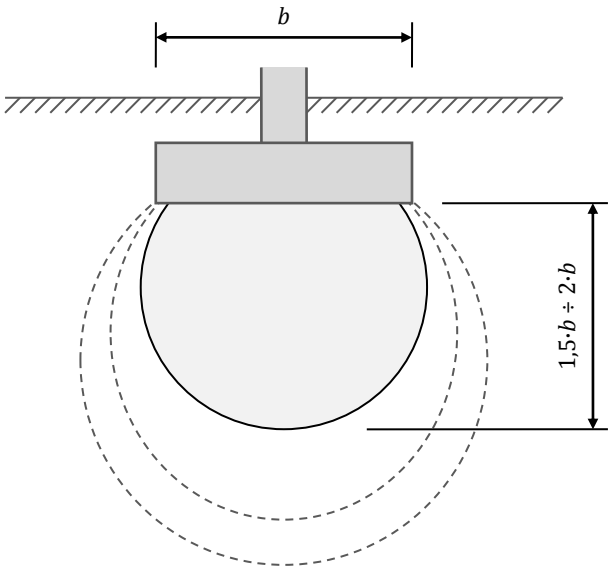



Figura 129. Bulbo de presiones bajo un cimiento de ancho *b*

De acuerdo con el Anejo E del CTE-DB-SE-Cimientos, más allá del bulbo que alcanza una profundidad de entre 1,5·*b* y 2·*b* por debajo del cimiento, el incremento de presión recibido por el suelo será lo suficientemente pequeño como para que sus efectos puedan ser despreciados. La caracterización precisa a los efectos de cálculo de la distribución de las presiones en la cota de apoyo del cimiento es un tema complejo que depende de muchas variables, pero especialmente de la ***rigidez del elemento de cimentación*** en relación con la del suelo y de las características tensión-deformación de éste. El citado Anejo E establece el criterio para determinar qué elementos de cimentación pueden ser considerados suficientemente rígidos frente al terreno, a los efectos de caracterizar la distribución de presiones bajo el cimiento; este criterio, que se presentará más adelante, está basado en el módulo de balasto del terreno y en el parámetro denominado unidad elástica.

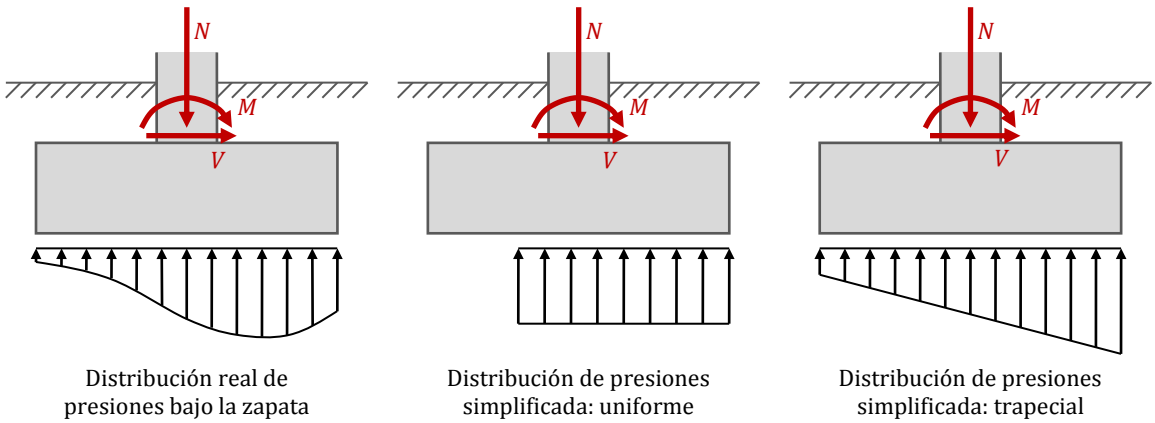



Figura 130. Modelos de distribución de presiones bajo el elemento de cimentación

Para las longitudes de vuelo habitualmente adoptadas en los cimientos aislados y corridos, la práctica universal es aceptar una distribución simplificada de presiones. La Figura 130 representa dos posibles modelos: presión uniforme o presión con variación lineal (que puede ser trapecial o triangular). En estos casos, a los efectos del ***comportamiento estructural del cimiento***, el citado documento del CTE sigue el criterio marcado por el artículo 58º de la Instrucción EHE-08, que clasifica las cimentaciones de la siguiente manera:

- ***Cimentaciones rígidas***: se trata de aquellas zapatas y encepados cuyo máximo vuelo $v_{max}$ no es superior al doble del canto $h$ del elemento (ver Figura 131); el dimensionamiento del armado de estos elementos se hará conforme a los modelos de bielas y tirantes propuestos en la Instrucción para regiones tipo D

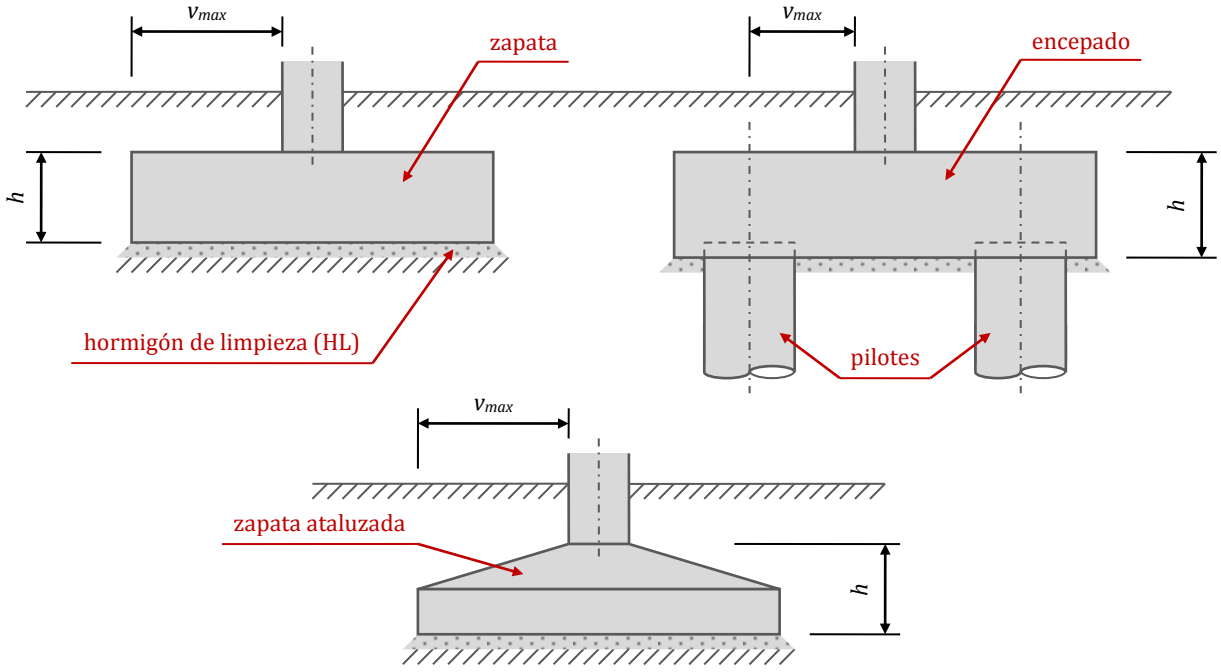



Figura 131. Vuelo máximo y canto en zapatas y encepados

- ***Cimentaciones flexibles***: se trata de aquellos elementos de cimentación que no cumplen el criterio anterior; el dimensionamiento del armado de estos elementos se hará con las herramientas expuestas para regiones tipo B (Bernouilli) y para comprobaciones de agotamiento frente a solicitaciones tangenciales (cortante y punzonamiento)

Aunque la Instrucción EHE-08 no establece la obligación de realizar las comprobaciones a cortante y punzonamiento para los elementos de cimentación rígidos, algunos autores sugieren que estas comprobaciones también deben realizarse siempre que el vuelo $v_{max}$ sea superior al canto $h$.

En teoría, una zapata ataluzada como la representada en la Figura 131 y su variante de tipo escalonada consiguen una transición "suave" y óptima de los esfuerzos transmitidos por el soporte a los que puede absorber el terreno en la cota de apoyo. No obstante, el encofrado de la solución escalonada encarece la ejecución. Y el hormigonado de una zapata ataluzada requiere de un hormigón de consistencia seca y, por tanto, difícil de poner en obra; además la compactación será siempre deficiente. Por ello, en la práctica habitual se recurre casi exclusivamente a soluciones de canto constante.

## 1.3 CRITERIOS DE DISEÑO

Los Estados Límite Últimos de una estructura de cimentación son los siguientes:

- pérdida de la capacidad portante del terreno, por hundimiento, deslizamiento o vuelco
- pérdida de la estabilidad del terreno próximo a la cimentación
- pérdida de la capacidad resistente de la cimentación por fallo estructural
- fallos debidos al comportamiento reológico de los materiales

Los Estados Límite de Servicio son, básicamente, los movimientos excesivos de la cimentación, incompatibles con los del resto de la estructura. Aunque no constituyan un fallo de gravedad similar a un colapso último, afectan a la funcionalidad de dicha estructura (estética, confort, operación de equipos, vibraciones, etc.).

Las comprobaciones a realizar en las estructuras de cimentación pueden dividirse en dos grupos bien diferenciados:

- ***Comprobaciones de tipo geotécnico y de estabilidad:*** en este tipo de comprobaciones se seguirán los criterios marcados por el CTE-DB-SE-Cimientos; tal y como recoge este documento en su apartado 2.3.2, las combinaciones de acciones para ELU se realizarán con los coeficientes parciales de seguridad de acciones iguales a la unidad (acciones permanentes y variables desfavorables) o a cero (acciones variables favorables); por lo tanto, ***las acciones que tengan efecto desfavorable no se mayorarán***, y las acciones variables que no sean dominantes se multiplicarán por su correspondiente coeficiente de simultaneidad $\Psi_0$; en este tipo de comprobaciones se incluirá el peso del cimiento
- ***Comprobaciones de resistencia estructural:*** estas comprobaciones deberán realizarse siguiendo el texto de la Instrucción EHE-08 y con las combinaciones de acciones establecidas en la misma, por lo que en el caso de los ELU las acciones que tengan efecto desfavorable se mayorarán; en general, el peso del cimiento no se considerará

Del primer grupo de comprobaciones, en este texto se tendrán en cuenta las tres siguientes:

- comprobación frente al ***hundimiento***, para la que se fija un coeficiente de seguridad de 3; el valor de la tensión admisible $\sigma_{adm}$ que suelen proponer los estudios geotécnicos ya incluye esta minoración
- comprobación frente al ***vuelco***; los momentos estabilizadores se minorarán por 0,9 y los momentos desestabilizadores se mayorarán por 1,8 ; el coeficiente de seguridad a vuelco será, por lo tanto, igual a 2

- comprobación frente al ***deslizamiento***, para la que se fija un coeficiente de seguridad de 1,5

En cuanto a los recubrimientos de las armaduras, cuando los elementos de cimentación se encofren contra el terreno, el recubrimiento mínimo no será inferior a 70 mm. Esta situación es habitual en el caso de pilotes y pantallas ejecutados *in situ*, pero también es aplicable a zapatas, encepados y vigas de cimentación, ya que permite ahorrar el coste de los paneles de encofrado. En caso contrario, los recubrimientos se elegirán conforme a la metodología desarrollada en el artículo 37º de la Instrucción y que está recogida en estos apuntes en el Capítulo 2, "Bases de cálculo y durabilidad". Cuando los elementos de cimentación no vayan a estar en contacto con aguas marinas, la clase de exposición general será IIa, pudiendo ir acompañada de una clase específica en función de la agresividad química del suelo.

Finalmente, la Figura 132 muestra un detalle de las disposiciones de diseño habituales para zapatas.

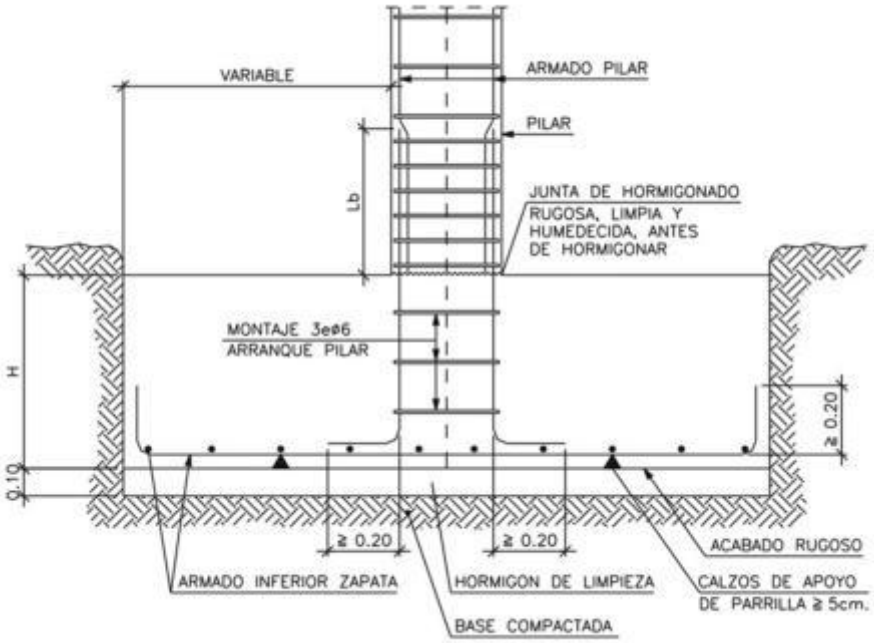



Figura 132. Detalles y disposiciones en zapatas

## 2. DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE ZAPATAS AISLADAS

### 2.1 PREDIMENSIONAMIENTO

El predimensionamiento de una zapata aislada suele centrarse en el primer grupo de comprobaciones (hundimiento, vuelco y deslizamiento), por lo que toma como datos los esfuerzos aplicados obtenidos de la ***combinación de las acciones sin mayorar***. Aunque es habitual referirse a estos valores como característicos, no debe olvidarse que se trata, de hecho, de valores para comprobaciones últimas. Por ejemplo, el esfuerzo vertical sobre la zapata que, de hecho, es la reacción vertical del apoyo del modelo estructural y que se designa $N_k$ puesto que coincide con el esfuerzo axil del soporte correspondiente, se calcula como:

$$N_k = 1 \cdot N_G + 1 \cdot N_{G^*} + 1 \cdot N_{Q1} + 1 \cdot \sum \Psi_{0,i} \cdot N_{Qi} \qquad [10.2.1]$$

donde:

- $N_G$ es la reacción debida a las cargas permanentes características
- $N_{G^*}$ es la reacción debida a las cargas permanentes de valor no constante (asientos, fluencia, retracción, etc.)
- $N_{Q1}$ es la reacción debida a la carga variable dominante
- $N_{Qi}$ son las reacciones debidas al resto de cargas variables consideradas

En el caso de un modelo estructural plano, hay otros dos esfuerzos concomitantes con $N_k$ y se trata de:

- el esfuerzo cortante $V_k$ del soporte, que constituye una fuerza lateral que puede producir el deslizamiento del cimiento
- el momento flector $M_k$ del soporte, que puede producir el vuelco de la zapata

A estos esfuerzos, en el caso de las comprobaciones geotécnicas y de estabilidad debe sumarse el peso de la zapata $G_z$ que se representa en la Figura 133. Por lo tanto, los esfuerzos finales sobre la zapata son los siguientes:

$$\begin{aligned} N_{total} &= N_k + G_z && \text{(carga vertical)} \\ M_{total} &= M_k + V_k \cdot h && \text{(momento de vuelco)} \\ F_{desliz} &= V_k && \text{(fuerza lateral)} \end{aligned} \qquad [10.2.2]$$

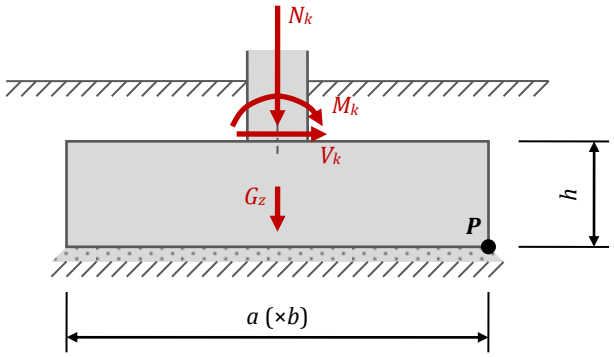



Figura 133. Esfuerzos característicos en una zapata

El ancho de la zapata se designa por $b$ y el lado $a$ es paralelo al plano objeto de estudio. El ***momento de vuelco*** o ***momento desestabilizador*** es el que producen el momento $M_k$ y el cortante $V_k$ respecto del punto ***P*** indicado en la Figura 133. El esquema reflejado en dicha Figura 133 puede representarse también en función de la ***excentricidad*** de los esfuerzos verticales resultantes en la base de la zapata, tal y como se recoge en la Figura 134. Cuando dicha excentricidad se obtenga con esfuerzos característicos, su valor se designará como $e_k$ para distinguirlo de la situación de comprobación estructural con acciones mayoradas.

La ***excentricidad característica*** se calcula como:

$$e_k = \frac{M_{total}}{N_{total}} = \frac{M_k + V_k \cdot h}{N_k + G_z} \qquad [10.2.3]$$

El problema fundamental del predimensionamiento es que aún no se conocen las dimensiones $a$, $b$ y $h$ de la zapata, por lo que tampoco se conocen ni la carga vertical total ni el momento de vuelco. En esta fase de predimensionamiento es habitual realizar las siguientes estimaciones:

- hasta que no se determinen las dimensiones de la zapata, su peso $G_z$ se estimará como la décima parte de $N_k$

- el canto $h$ de la zapata puede predimensionarse como 0,40 m ó 0,50 m; no es aconsejable diseñar con cantos inferiores a éstos para no comprometer el anclaje de los soportes a la zapata, tanto si son de hormigón como metálicos

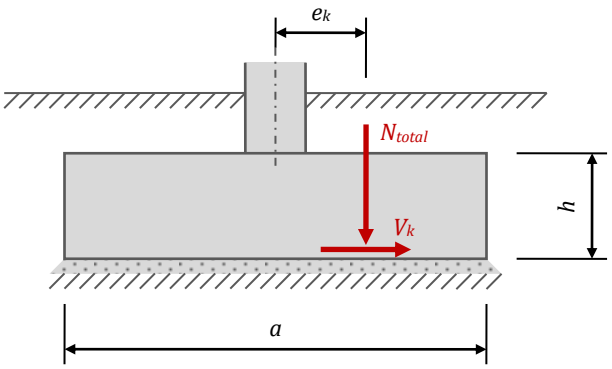



Figura 134. Excentricidad característica en la base de la zapata

### 2.1.1 Comprobación de vuelco

De acuerdo con la Figura 133, el vuelco de la zapata podría suponerse que se produciría respecto del punto ***P***. Así pues, el ***momento estabilizador*** sería el que producen las fuerzas verticales $N_k$ y $G_z$ respecto de ***P***:

$$M_{estabilizador} = N_{total} \cdot \frac{a}{2} \qquad [10.2.4]$$

De acuerdo con el CTE, la comprobación de vuelco debe verificar que:

$$0{,}9 \cdot M_{estabilizador} \geq 1{,}8 \cdot M_{desestabilizador} \qquad [10.2.5]$$

A continuación se va a desarrollar esta inecuación para establecer un criterio de dimensionamiento del lado $a$ de la zapata.

$$0{,}9 \cdot N_{total} \cdot \frac{a}{2} \geq 1{,}8 \cdot M_{total}$$

$$N_{total} \cdot \frac{a}{2} \geq 2 \cdot M_{total}$$

$$a \geq 4 \cdot \frac{M_{total}}{N_{total}} = 4 \cdot e_k \qquad [10.2.6]$$

La ecuación anterior es aplicable para predimensionar el lado $a$ de la zapata. Posteriormente, la zapata podrá ser comprobada a vuelco de modo indirecto verificando que:

$$\boxed{\frac{e_k}{a} \leq 0{,}25 \qquad [10.2.7]}$$

El cociente $e_k/a$ suele denominarse ***excentricidad adimensional característica*** y se designa como $\eta_k$.

$$\eta_k = \frac{e_k}{a} \qquad [10.2.8]$$

### 2.1.2 Comprobación de hundimiento

La Figura 135 representa el modelo simplificado distribución uniforme de presiones transmitidas al terreno por la zapata. De acuerdo con dicho modelo, la presión o tensión característica $\sigma_k$ se determina como:

$$\sigma_k = \frac{N_{total}}{(a - 2 \cdot e_k) \cdot b} = \frac{N_{total}}{a \cdot b \cdot (1 - 2 \cdot \eta_k)} \qquad [10.2.9]$$

y, por lo tanto, la comprobación de hundimiento será:

$$\boxed{\sigma_k = \frac{N_{total}}{a \cdot b \cdot (1 - 2 \cdot \eta_k)} \leq \sigma_{adm}} \qquad [10.2.10]$$

donde $\sigma_{adm}$ es la tensión admisible del sustrato de apoyo, que ya incluye el coeficiente de seguridad de 3 que establece el documento CTE-DB-SE-Cimientos.

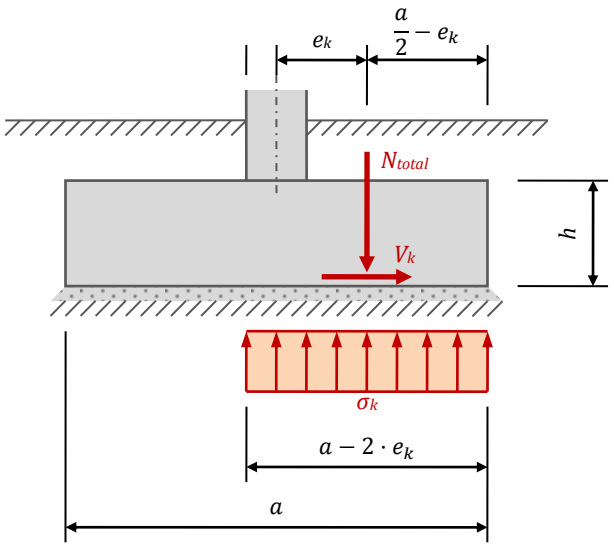



Figura 135. Distribución uniforme de presiones del terreno en zapatas con carga excéntrica

Otra posibilidad es suponer distribuciones trapeciales o triangulares como las representadas en la Figura 136. El cálculo de los valores de tensiones del terreno se haría con las siguientes expresiones:

- Distribución trapecial (si $\eta_k \leq {}^1/_6$):

$$\sigma_{max} = \frac{N_{total}}{a \cdot b} \cdot (1 + 6 \cdot \eta_k) \qquad [10.2.11.\text{a}]$$

$$\sigma_{min} = \frac{N_{total}}{a \cdot b} \cdot (1 - 6 \cdot \eta_k) \qquad [10.2.11.\text{b}]$$

- Distribución triangular (si $\eta_k > {}^1/_6$):

$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot N_{total}}{3 \cdot a \cdot b \cdot (1 - 2 \cdot \eta_k)} \qquad [10.2.11.\text{c}]$$

En los casos en que se adopten distribuciones lineales pero no uniformes, la tensión máxima de borde $\sigma_{max}$ no deberá superar la tensión admisible del terreno $\sigma_{adm}$ .

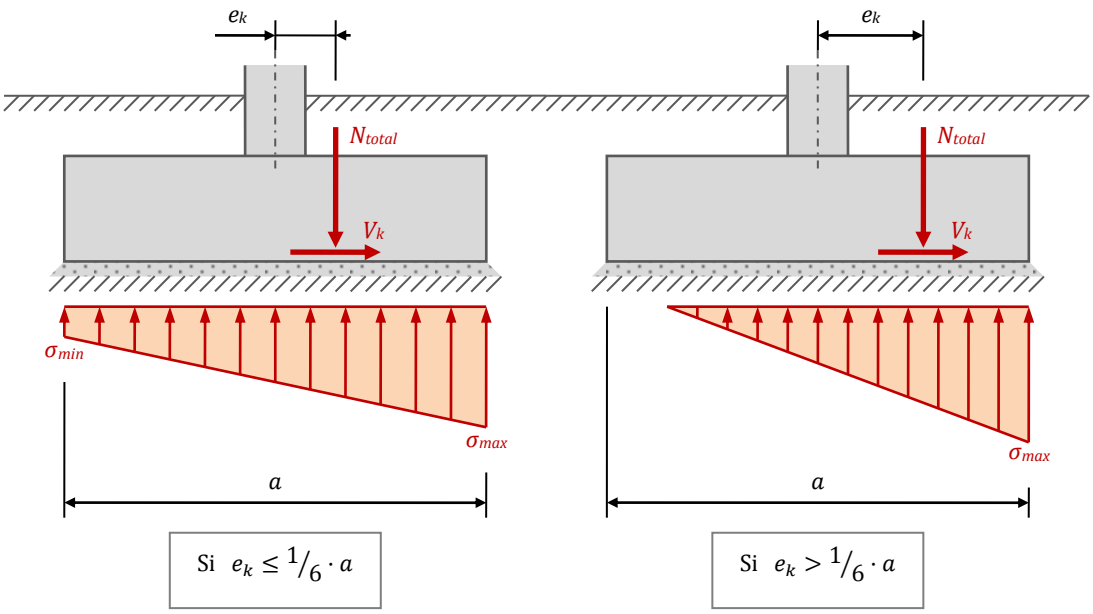



Figura 136. Distribuciones trapecial y triangular de presiones del terreno en zapatas con carga excéntrica

### 2.1.3 Comprobación de deslizamiento

Debido a la acción de la fuerza lateral que actúa sobre la zapata, entre la base de la misma y el suelo aparece una ***tensión rasante*** $\tau_S$ que se determina como:

$$\tau_S = \frac{V_k}{a \cdot b} \qquad [10.2.12]$$

La comprobación de estabilidad frente al deslizamiento consiste en verificar que esta tensión rasante $\tau_S$ no sea superior a la ***resistencia a corte*** $\tau_R$ determinada con el modelo de Mohr-Coulomb, minorada por un coeficiente de seguridad igual a 1,5:

$$\tau_S \leq \frac{\tau_R}{1{,}5} = \frac{c' + \sigma_t \cdot \text{tg}\,\delta}{1{,}5} \qquad [10.2.13]$$

donde:

- $c'$ es la componente cohesiva o de adherencia, que sólo se tiene en cuenta en situaciones transitorias en las que el proyectista considere adecuado calcular en condiciones sin drenaje
- $\delta$ es el ángulo de rozamiento terreno-cimiento, que se tomará igual a ${}^3/_4$ del ángulo de rozamiento interno del terreno $\varphi$
- $\sigma_t$ es la tensión transmitida por la zapata al terreno que, del lado de la seguridad, podrá tomarse como:

$$\sigma_t = \frac{N_{total}}{a \cdot b} \qquad [10.2.14]$$

Por consiguiente, si se combinan las ecuaciones anteriores, la comprobación a deslizamiento da lugar a la siguiente expresión:

$$\boxed{V_k \leq \frac{2}{3} \cdot N_{total} \cdot \text{tg}\left({}^3/_4 \cdot \varphi\right) \qquad [10.2.15]}$$

## 2.2 COMPROBACIONES ESTRUCTURALES

Una vez que ya se han fijado las dimensiones de la zapata tales que cumplan el primer grupo de comprobaciones (hundimiento, vuelco y deslizamiento), se procede al dimensionamiento del armado de la misma. En este caso, los esfuerzos aplicados sobre la zapata deben estar mayorados de acuerdo con los coeficientes de seguridad de la Instrucción EHE-08. Por ejemplo, el esfuerzo vertical sobre la zapata se designa por $N_d$ y coincide con el esfuerzo axil de cálculo del soporte correspondiente:

$$N_d = 1{,}35 \cdot N_G + 1{,}5 \cdot N_{G^*} + 1{,}5 \cdot N_{Q1} + 1{,}5 \cdot \sum \Psi_{0,i} \cdot N_{Qi} \qquad [10.2.16]$$

donde:

- $N_G$ es la reacción debida a las cargas permanentes características
- $N_{G^*}$ es la reacción debida a las cargas permanentes de valor no constante (asientos, fluencia, retracción, etc.); en el caso de que su efecto fuera favorable iría multiplicada por 1 en lugar de por 1,5
- $N_{Q1}$ es la reacción debida a la carga variable dominante con efecto desfavorable
- $N_{Qi}$ son las reacciones debidas al resto de cargas variables que tengan efecto desfavorable

Los esfuerzos concomitantes con el axil de cálculo del soporte son el cortante $V_d$ y el flector $M_d$. A diferencia de las comprobaciones geotécnicas, en el caso de las comprobaciones estructurales no se considerará el peso propio del cimiento, puesto que el terreno actúa como un apeo permanente para esta fracción de la carga y el hormigón armado sólo tendrá que resistir las acciones que se añadan una vez que haya endurecido. Obviamente, si se recurriera a plintos para compensar la diferencia de cotas entre la parte superior de la zapata y la base de la estructura, entonces sí que habría que tener en cuenta el peso propio de dichos elementos.

### 2.2.1 Dimensionamiento y comprobación de zapatas rígidas

El apartado 58.4.1.1 de la Instrucción propone un modelo de bielas y tirantes para el dimensionamiento del armado inferior de las zapatas rígidas. Este modelo se representa en la Figura 137. La distribución de presiones en el terreno se remplaza por las reacciones $R_{1d}$ y $R_{2d}$ que se aplican en los nudos del tirante; a su vez, la carga vertical $N_d$ y el flector $M_d$ se sustituyen por dos cargas $N_{1d}$ y $N_{2d}$ aplicadas en los nudos de las bielas. El brazo mecánico de la celosía se toma aproximadamente como $0{,}85 \cdot d$. La capacidad mecánica de la armadura inferior de la zapata se calcula como:

$$A_{s1} \cdot f_{yd} \geq T_d = \frac{R_{1d}}{0{,}85 \cdot d} \cdot \left(x_1 - \frac{a_0}{4}\right) \qquad [10.2.17]$$

Se recuerda que, por tratarse de un modelo de bielas y tirantes, la tensión de la armadura no debe superar 400 N/mm$^2$. En el libro *"Hormigón armado"* del profesor Jiménez Montoya se recogen las siguientes expresiones para el cálculo de $R_{1d}$ y de $x_1$:

$$R_{1d} = \frac{N_d}{2} \cdot (1 + 3 \cdot \eta_d) \qquad [10.2.18.\text{a}]$$

$$x_1 = a \cdot \frac{(1 + 4 \cdot \eta_d)}{(4 + 12 \cdot \eta_d)} \qquad [10.2.18.\text{b}]$$

$$\eta_d = \frac{e_d}{a} = \frac{M_d + V_d \cdot h}{N_d \cdot a} \qquad [10.2.18.\text{c}]$$

La comprobación de la resistencia de los nudos del modelo no será necesaria cuando la resistencia característica del hormigón de los soportes sea igual a la del cimiento. En caso contrario, será de aplicación el artículo 40º de la Instrucción, resumido en estos apuntes en el Capítulo 5, "El método de bielas y tirantes". La armadura $A_{s1}$ se dispondrá sin reducción mediante redondos paralelos al lado $a$

de la zapata y se anclará en los bordes; la Instrucción EHE-08 recomienda recurrir a barras transversales soldadas.

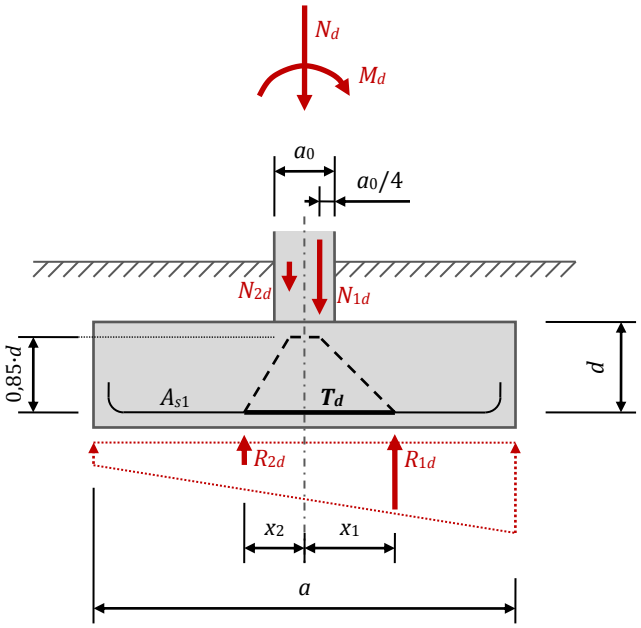



Figura 137. Modelo de bielas y tirantes para zapatas rígidas

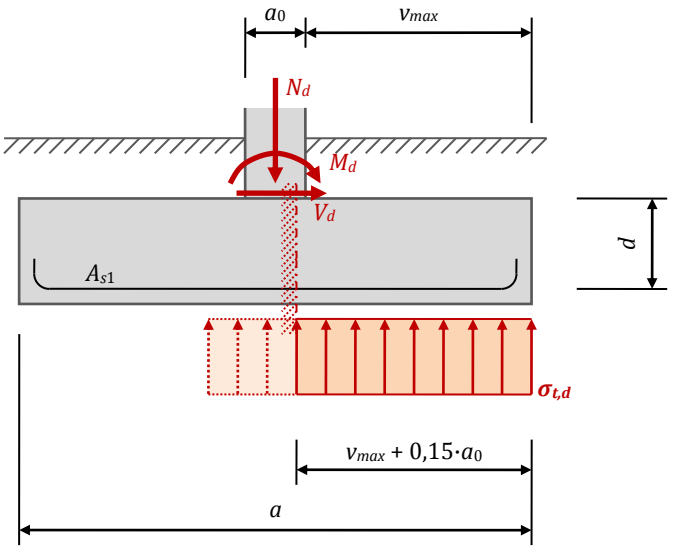



Figura 138. Cálculo a flexión en zapatas flexibles

### 2.2.2 Dimensionamiento y comprobación de zapatas flexibles

El procedimiento de dimensionamiento para zapatas flexibles consiste en aplicar la teoría general de la flexión de elementos de hormigón armado (regiones B) y pasa por calcular la tensión de cálculo del terreno $\sigma_{t,d}$ a partir de las acciones de cálculo sobre la zapata (ver Figura 138):

$$\sigma_{t,d} = \frac{N_d}{b \cdot (a - 2 \cdot e_d)} \qquad [10.2.19]$$

donde $e_d$ es la ***excentricidad de cálculo*** de las acciones las cargas aplicadas sobre la zapata:

$$e_d = \frac{M_{d,total}}{N_d} = \frac{M_d + V_d \cdot h}{N_d} \qquad [10.2.20]$$

El armado inferior de la zapata se dimensiona como un voladizo sometido al momento flector que produce la distribución de presiones del terreno respecto de una sección ficticia situada detrás de la cara vertical del soporte a una distancia igual a $0{,}15 \cdot a_0$ hacia su interior (ver Figura 138):

$$M_d = \sigma_{t,d} \cdot b \cdot \frac{(v_{max} + 0{,}15 \cdot a_0)^2}{2} \qquad [10.2.21]$$

Por otro lado, la sección de comprobación del cortante es la situada a un canto útil de la cara vertical del soporte, hacia el borde de la zapata (ver Figura 139). Por lo tanto el cortante efectivo de cálculo en la sección transversal de la zapata es la fuerza resultante de las presiones del terreno en la porción de zapata más allá de dicha sección:

$$V_{rd} = \sigma_{t,d} \cdot b \cdot (v_{max} - d) \qquad [10.2.22]$$

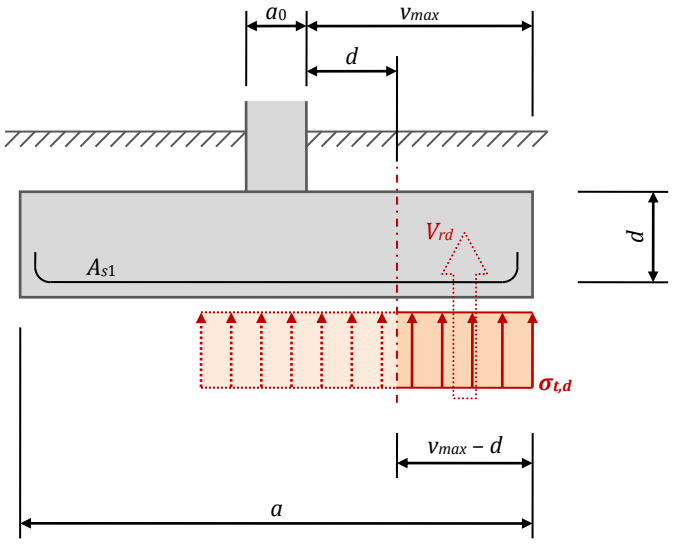



Figura 139. Cálculo a cortante en zapatas flexibles

No es habitual disponer estribos en las zapatas aisladas, por lo que el cortante de cálculo debe ser inferior a la resistencia a tracción del alma $V_{u2}$ obtenida de la expresión correspondiente a secciones sin armadura transversal (ver las ecuaciones [6.1.11] y [6.1.12] del Capítulo 6, "Agotamiento por solicitaciones tangenciales"). Si los vuelos de la zapata fueran mayores que $2 \cdot d$ sería necesario además comprobarla a punzonamiento. El anclaje de las armaduras de tracción deberá comprobarse a partir de las dos secciones $S_2$ y $S_3$ indicadas en la Figura 140. La comprobación de anclaje en la sección $S_3$ se realizará para una fuerza reducida de anclaje $T_d$, de valor:

$$T_d \approx 0{,}60 \cdot \sigma_{t,d} \cdot b \cdot (v_{max} + 0{,}15 \cdot a_0 - 0{,}25 \cdot h) \qquad [10.2.23]$$

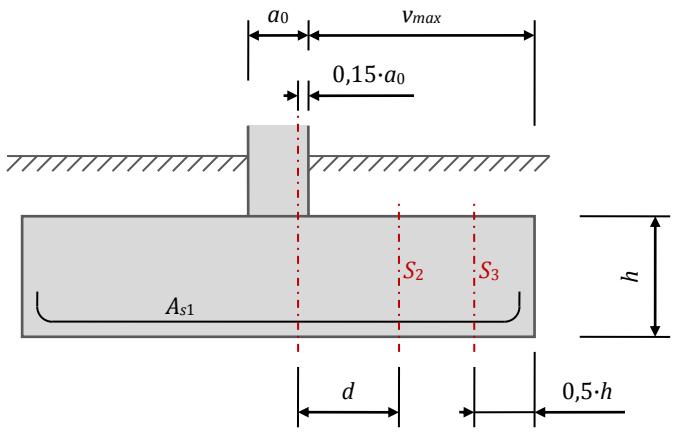



Figura 140. Secciones de comprobación de anclaje en zapatas flexibles

### 2.2.3 Zapatas excéntricas en dos planos principales

Si una zapata recibe la carga con excentricidad según los dos planos principales, las distribuciones de presiones resultan complicadas de calcular ya que debe contemplarse la posibilidad de que no se "despegue" ninguna esquina, o bien de que se despeguen una, dos o hasta tres.

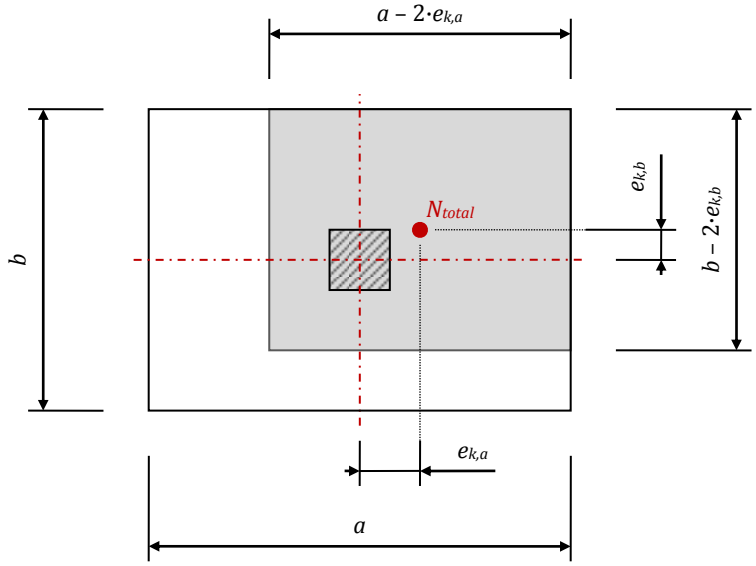



Figura 141. Superficie equivalente en zapata bi-excéntrica

Para el cálculo de un modelo de presiones variables linealmente bajo una zapata bi-excéntrica (según un plano doblemente inclinado), los libros *"Hormigón armado"* del profesor Jiménez Montoya y *"Cálculo de estructuras de cimentación"* del profesor José Calavera incluyen procedimientos basados en tablas y ábacos, respectivamente. Un método más simple es el de la cimentación rectangular equivalente (Figura 141), recogido por el CTE-DB-SE-Cimientos y por la *"Guía de cimentaciones en obras de carretera"* publicada por el Ministerio de Fomento. Se trata de una generalización de la ecuación [10.2.9] recogida en estos apuntes:

$$\sigma_t = \frac{N_{total}}{(a - 2 \cdot e_{k,a}) \cdot (b - 2 \cdot e_{k,b})} \qquad [10.2.24]$$

donde:

- $e_{k,a}$ es la excentricidad característica de la carga $N_{total}$ medida en dirección paralela al lado $a$
- $e_{k,b}$ es la excentricidad característica de la carga $N_{total}$ medida en dirección paralela al lado $b$

Para el dimensionamiento y las comprobaciones estructurales se puede generalizar este procedimiento, empleando la carga vertical de cálculo $N_d$ y las excentricidades de cálculo correspondientes según ambos planos principales.

### 2.2.4 Cuantías mínimas

La cuantía geométrica mínima que establece la Instrucción para las zapatas es:

- el 1,0‰ de la sección bruta si se emplean armaduras de acero B400S
- el 0,9‰ de la sección bruta si se emplean armaduras de acero B500S

Y la cuantía mecánica mínima de la armadura paralela al lado $a$ de la zapata es:

$$U_{s1,a} \geq 0{,}04 \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} \qquad [10.2.25]$$

Como las zapatas son elementos de gran volumen, es habitual que la armadura necesaria por cálculo $U_{s1,cal}$ sea inferior a estas cuantías mínimas. La Instrucción EHE-08 permite disponer un armado de capacidad inferior a la cuantía mecánica mínima de la ecuación anterior; este valor reducido se obtiene de multiplicar la capacidad necesaria por cálculo por un factor $\alpha$ determinado mediante:

$$\alpha = 1{,}5 - 12{,}5 \cdot \frac{U_{s1,cal}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \qquad [10.2.26]$$

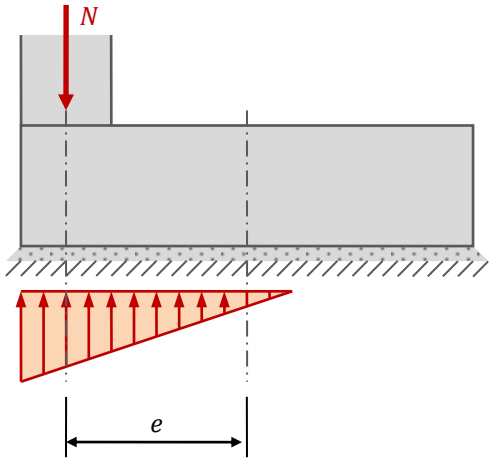



Figura 142. Zapata de medianería

## 2.3 ZAPATAS DE MEDIANERÍA

La Figura 142 muestra el caso de una cimentación que debe disponerse en sin retranqueo posible, en lo que viene a denominarse como ***zapata de medianería***. Como la distribución de presiones está muy descompensada, la cimentación podría estar muy comprometida desde el punto de vista de su estabilidad, pudiendo llegar a introducir acciones no previstas sobre la estructura y sobre el terreno. Por ello es recomendable añadir un elemento centrador:

- cuando las cargas son importantes se emplea una ***viga centradora***

- cuando las cargas son de poca importancia puede emplearse la solución del ***tirante embebido en el forjado***

### 2.3.1 Zapata de medianería con viga centradora

La viga centradora es una viga de unión entre la zapata de medianería y la zapata correspondiente al soporte interior inmediato situado a una distancia $L$ (medida entre ejes de soportes). Con esta viga de rigidez adecuada se consigue uniformizar las presiones transmitidas al terreno (ver Figura 143). Como la rigidez de la viga será en general bastante mayor que la de los soportes de la estructura, en el cálculo posterior suele adoptarse la hipótesis de que está apoyada en los mismos.

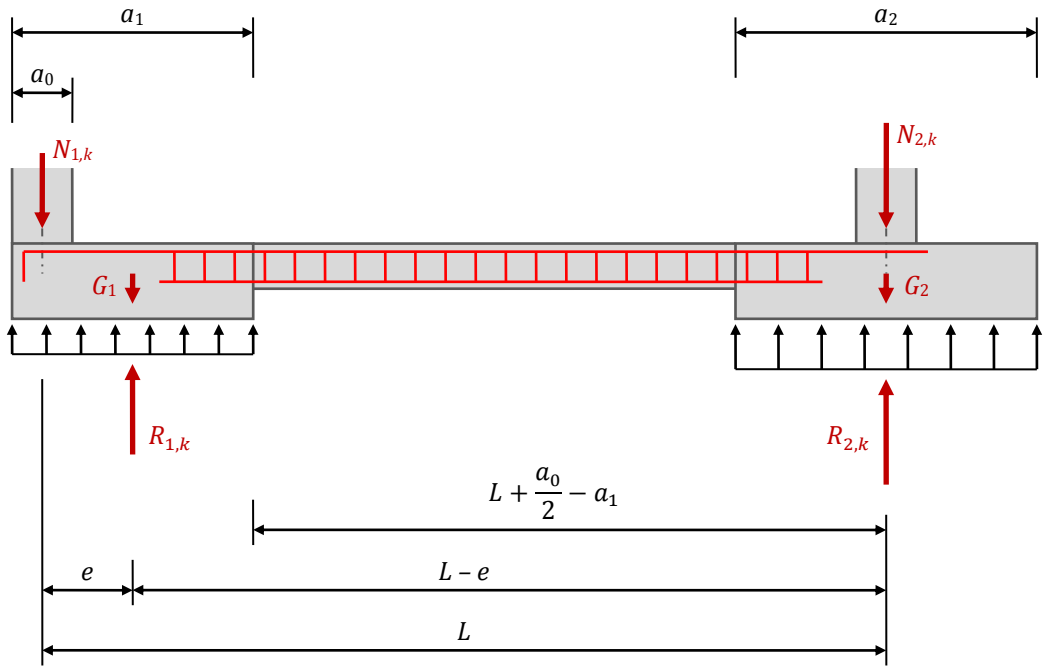



Figura 143. Zapata de medianería con viga centradora

$N_{1,k}$ y $N_{2,k}$ son las cargas verticales características transmitidas por los soportes y $G_1$ y $G_2$ son los pesos de las zapatas correspondientes. Por otro lado, $R_{1,k}$ y $R_{2,k}$ son las resultantes de las presiones transmitidas al terreno. Las ecuaciones de equilibrio que las relacionan son las siguientes:

- equilibrio de fuerzas verticales:

$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1,k} + G_1 + N_{2,k} + G_2 = R_{1,k} + R_{2,k} \qquad [10.2.27.\text{a}]$$

- equilibrio de momentos respecto de la zapata interior:

$$\sum M_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{1,k} \cdot L + G_1 \cdot (L - e) = R_{1,k} \cdot (L - e) \qquad [10.2.27.\text{b}]$$

Y, por lo tanto:

$$R_{1,k} = N_{1,k} \cdot \frac{L}{L - e} + G_1 \qquad [10.2.28.\text{a}]$$

$$R_{2,k} = N_{2,k} + G_2 - N_{1,k} \cdot \frac{e}{L - e} \qquad [10.2.28.\text{b}]$$

El predimensionamiento se haría por tanteo de las dimensiones de las zapatas ($a_1$, $b_1$, $h_1$ y $a_2$, $b_2$, $h_2$) tales que ambas cumplan la comprobación de hundimiento:

$$\frac{R_{1,k}}{a_1 \cdot b_1} \leq \sigma_{adm} \qquad \frac{R_{2,k}}{a_2 \cdot b_2} \leq \sigma_{adm} \qquad [10.2.29.\text{a y b}]$$

Además los cantos $h_1$ y $h_2$ de las zapatas, al igual que el canto de la viga centradora deben tomar valores elevados, a fin de que sea correcto suponerles una elevada rigidez en comparación con la de los soportes.

Para las comprobaciones estructurales de las zapatas se prescinde de su peso propio y, lógicamente, se emplean los valores de cálculo (mayorados) de las cargas verticales, $N_{1,d}$ y $N_{2,d}$ (Figura 144). Los valores de las resultantes de presiones en el terreno para la comprobación de E.L.U. en las zapatas son:

$$R_{1,d} = N_{1,d} \cdot \frac{L}{L-e} \qquad R_{2,d} = N_{2,d} - N_{1,d} \cdot \frac{e}{L-e} \qquad [10.2.30]$$

Para el dimensionamiento de la viga centradora se recurre a la hipótesis de que la rigidez del conjunto zapatas-viga sea elevada con respecto a la de los soportes. En ese supuesto, los diagramas de esfuerzos en la viga son los representados en la Figura 144. Los esfuerzos de dimensionamiento de la viga centradora se calculan con las siguientes expresiones:

$$V_{1d} = R_{1,d} - N_{1,d} = N_{1,d} \cdot \frac{L}{L-e} - N_{1,d} = N_{1,d} \cdot \frac{e}{L-e} \qquad [10.2.31.\text{a}]$$

$$M_{1d} = V_{1d} \cdot \left(L + \frac{a_0}{2} - a_1\right) = N_{1,d} \cdot \frac{e}{L-e} \cdot \left(L + \frac{a_0}{2} - a_1\right) \qquad [10.2.31.\text{b}]$$

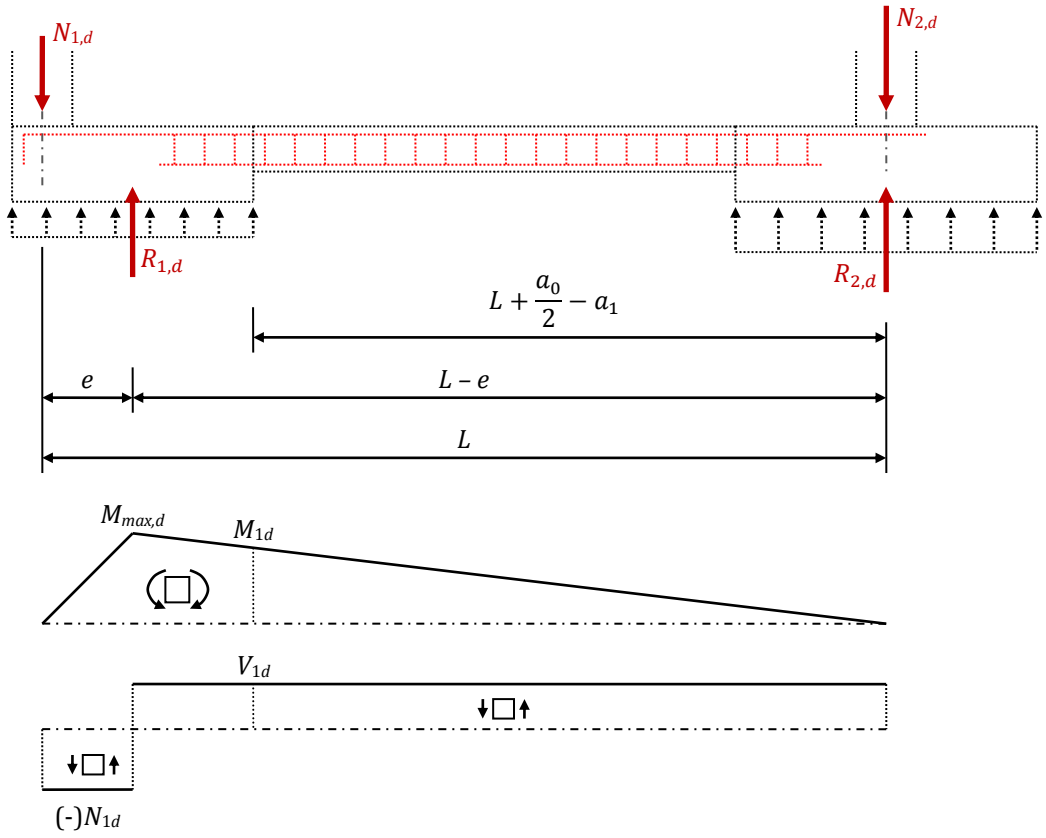



Figura 144. Dimensionamiento de la viga centradora

El armado principal de la zapata de medianería es el que se dispone paralelo a dicha medianería. La zapata interior se calcula como una zapata aislada convencional.

### 2.3.2 Zapata de medianería con tirante embebido en el forjado

Esta solución consiste en equilibrar la distribución de presiones mediante un par de fuerzas $T$ situadas al nivel del forjado de la primera planta (tirante embebido en el forjado) y al nivel de la superficie de contacto de la zapata con el terreno (ver Figura 145). Esta solución tiene dos inconvenientes:

- en primer lugar, debe aumentarse el armado del primer forjado con una capacidad mecánica adicional igual o superior a $T_d$
- en segundo lugar los momentos en la base del soporte se incrementan en una cantidad $T_d \cdot H$

Con el fin de controlar estos problemas, conviene que el canto $h$ de la zapata sea grande y se recomienda adoptar esta solución únicamente en aquellos casos en los que las cargas sean pequeñas.

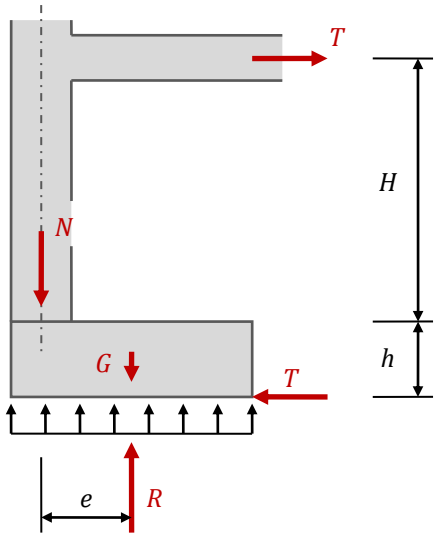



Figura 145. Zapata de medianería con tirante en forjado

## 3. ZAPATAS COMBINADAS Y VIGAS DE CIMENTACIÓN

En ocasiones, los soportes de una estructura de edificación están situados a distancias suficientemente cortas como para que sea más económico ejecutar una sola zapata sobre la cual apoyar ambos soportes, que proyectar dos aisladas (Figura 146). Lo que se invierte en el incremento del volumen de hormigón puede suponer un ahorro neto si se compara con los costes de ejecución en encofrados y por disponer un emparrillado en lugar de dos. Además, téngase en cuenta que aunque las zapatas sean aisladas, si la construcción se ubica en una zona sísmica deben ir vinculadas obligatoriamente por una viga de atado y es probable que sea más rápido y menos costoso construir una sola zapata rectangular en vez de dos zapatas de dimensiones diferentes atadas por un elemento viga.

En teoría, las dimensiones de la zapata combinada deben ser tales que el centro de gravedad del cimiento esté situado aproximadamente debajo del centro de cargas, donde se supone aplicada la resultante. El problema es que las reacciones de la estructura tienen una determinada componente variable debida a las sobrecargas de uso, acciones eólicas y de otros tipos, por lo que la posición de

dicha resultante no es fija. Una solución podría ser la de dimensionar en base a las reacciones cuasipermanentes. En cualquier caso, para una situación general como la representada en la Figura 146, en la que las acciones de los soportes actúan con excentricidad, es aconsejable representarlas como se indica en la Figura 147, con el objeto de facilitar el dimensionamiento.

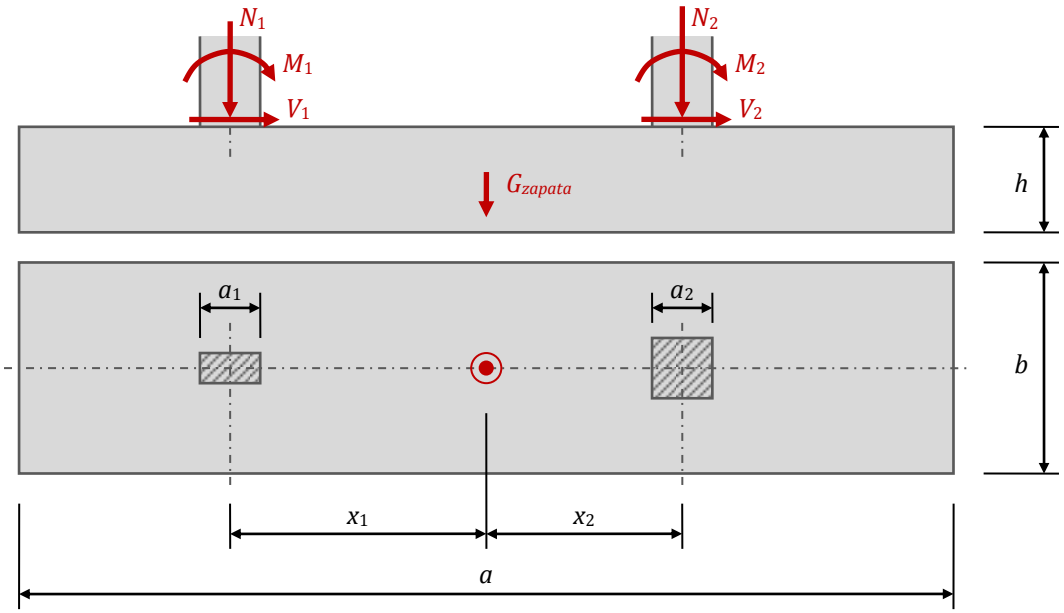



Figura 146. Zapata combinada de dos soportes

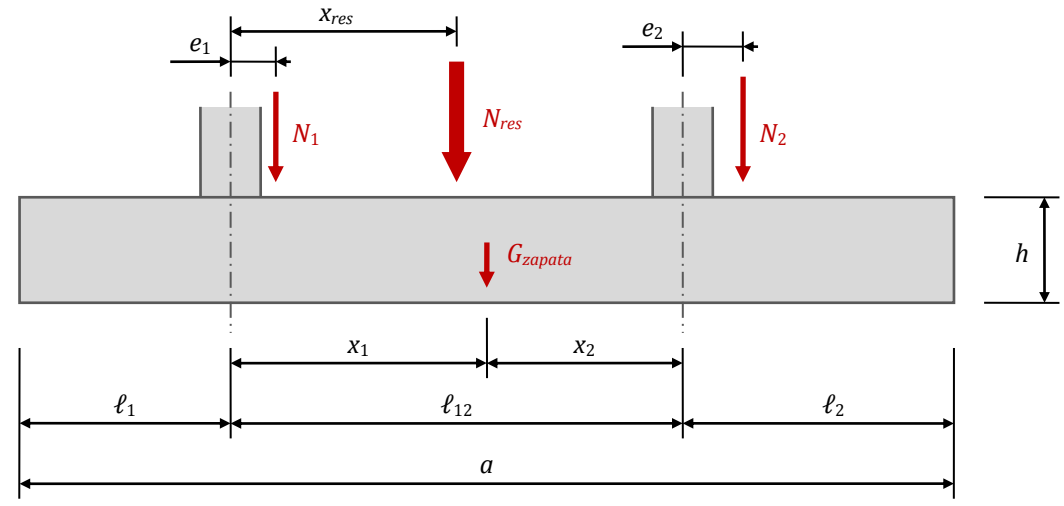



Figura 147. Resultante de cargas sobre una zapata combinada

El modelo de la Figura 147 es válido tanto para valores característicos como para valores de cálculo. La resultante de las acciones sobre la zapata es:

$$N_{res} = N_1 + N_2 \qquad [10.3.1]$$

y su posición, respecto del eje del soporte izquierdo es:

$$x_{res} = \frac{e_1 \cdot N_1 + (\ell_{12} + e_2) \cdot N_2}{N_1 + N_2} \qquad [10.3.2]$$

La posición óptima del centro de la zapata sería la que hiciera coincidir los valores de $x_{res}$ y $x_1$. Si se diesen esas condiciones, la distribución de presiones bajo el cimiento sería uniforme (carga total dividida por superfice $a$×$b$), ***siempre que se cumpliese el supuesto de que la zapata fuera rígida frente al suelo de apoyo***. Cuando no coincidan $x_{res}$ y $x_1$ pero pueda seguir admitiéndose la hipótesis de zapata rígida, la distribución de presiones sobre el terreno podrá calcularse por los procedimientos vistos en los apartados anteriores: o bien presión uniforme en una superficie equivalente o bien distribución variable linealmente (triangular o trapecial). Las condiciones que debe cumplir una zapata combinada para ser considerada rígida frente al terreno en que apoya dependen de las características mecánicas del cimiento y de la deformabilidad del terreno. La ***longitud elástica*** $\alpha$ es una propiedad importante que define la interacción suelo-cimiento y se determina mediante la siguiente fórmula:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E_{cm} \cdot I_c}{K_c \cdot b}} \qquad [10.3.3]$$

donde:

- $E_{cm}$ es el módulo de elasticidad secante del hormigón
- $I_c$ es el momento de inercia de la sección $b$×$h$ del cimiento
- $K_c$ es el ***módulo de balasto*** del terreno, representativo de las dimensiones del cimiento

Tabla D-29 del CTE-DB-SE-Cimientos. Valores orientativos del coeficiente de balasto, $K_{30}$

| Tipo de suelo | $K_{30}$ (MN/m³) |
|---|---|
| Arcilla blanda | 15-30 |
| Arcilla media | 30-60 |
| Arcilla dura | 60-200 |
| Limo | 15-45 |
| Arena floja | 10-30 |
| Arena media | 30-90 |
| Arena compacta | 90-200 |
| Grava arenosa floja | 70-120 |
| Grava arenosa compacta | 120-300 |
| Margas arcillosas | 200-400 |
| Rocas algo alteradas | 300-5000 |
| Rocas sanas | >5000 |

El módulo de balasto es también conocido como ***módulo de Winkler***. Lleva unidades de fuerza partida por unidades de longitud al cubo (p. ej. kN/m³) y representa la presión que hay que ejercer sobre un suelo para conseguir un asiento determinado (p. ej. kN/m² de presión para un asiento de 1 m). La medida de este valor se hace mediante ***ensayos de placa de carga***, de dimensiones normalizadas y presenta un cierto grado de dispersión. La incertidumbre de su valor es muy acusada en la práctica porque depende fuertemente de las dimensiones de la superficie a través de la cual se ejerce la

presión, del tipo de terreno, de la velocidad de aplicación de la presión ejercida, etc. El documento CTE-DB-SE-Cimientos recoge en su Tabla D.29 una serie de valores orientativos del módulo de balasto $K_{30}$ (medido con placa de 30 cm). La determinación del módulo de balasto que corresponde a una zapata combinada de anchura $b$ se realiza conforme a las siguientes expresiones:

- zapata cuadrada de ancho $b$ sobre suelo cohesivo:

$$K_c = K_{30} \cdot \frac{0{,}30}{b} \quad (b \text{ expresado en m}) \qquad [10.3.5.\text{a}]$$

- zapata cuadrada de ancho $b$ sobre suelo granular:

$$K_c = K_{30} \cdot \left(\frac{b + 0{,}30}{2 \cdot b}\right)^2 \quad (b \text{ expresado en m}) \qquad [10.3.5.\text{b}]$$

- zapata rectangular de ancho $b$ y longitud $a$ sobre cualquier tipo de suelo:

$$K_{c,a\times b} = K_{c,b\times b} \cdot \left(1 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) \qquad [10.3.5.\text{c}]$$

Cuando se trate de una ***zapata combinada de dos soportes***, la distribución de presiones que produce sobre el terreno en que apoya podrá suponerse lineal si sus dimensiones cumplen las siguientes condiciones:

$$\ell_1 , \ell_2 \leq \frac{\pi}{4} \cdot \alpha \qquad [10.3.4.\text{a}]$$

$$\ell_{12} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \alpha \qquad [10.3.4.\text{b}]$$

siendo $\ell_1, \ell_2$ y $\ell_{12}$ las longitudes indicadas en la Figura 147. El cálculo estructural a flexión de la zapata se realiza como la de una viga simplemente apoyada sobre los soportes y con dos voladizos, la cual está sometida a una carga distribuida $\sigma_{td}$ fruto de la presión del suelo sobre la cara inferior de la zapata y que no tiene en cuenta el peso de la zapata (ver Figura 148). En las zonas extremas (voladizos) la flexión es positiva y necesitará armado en la cara inferior. En la zona central (entre soportes) la flexión es negativa y la zapata necesitará armado en la cara superior. Es habitual que los armados calculados arriba y abajo se extiendan a toda la longitud $a$ de la zapata y se repartan uniformemente en todo el ancho $b$. Adicionalmente se comprobará la resistencia frente a cortante en las secciones situadas a un canto útil de las caras de los pilares; si la contribución $V_{cu}$ del hormigón fuera insuficiente, habría que incrementar el canto de la zapata o bien podría optarse por dimensionar y disponer un armado transversal a base de estribos. Tal y como se comentó en el Capítulo 8, "Diseño y disposiciones en vigas y soportes", las ramas verticales de un estribo o conjunto de estribos no se separarán una distancia mayor que el canto útil de la zapata ni tampoco más de 500 mm.

Si no se cumplen las condiciones anteriores la zapata se considerará flexible. Para este caso y para ***vigas de cimentación*** (zapatas combinadas con tres o más soportes), emparrillados y losas de cimentación, el CTE-DB-SE-Cimientos establece que deberán emplearse métodos de cálculo que tengan en cuenta la interacción suelo-estructura. Uno de los métodos más aplicados es el de la ***viga flotante sobre lecho elástico continuo***; dos recomendaciones habituales para su aplicación son las siguientes:

- las cargas verticales que transmitan dos soportes contiguos no diferirán más de un 20%
- las luces de dos vanos adyacentes de la viga no diferirán más de un 20%

El lecho elástico pretende reflejar el comportamiento del suelo sobre el que apoya la viga, remplazándolo por un número infinito de resortes elásticos cuya rigidez depende del módulo de balasto (ver Figura 149). Este procedimiento de análisis es también conocido como ***modelo de Winkler*** en honor al ingeniero alemán **Emil Winkler** (1.835-1.888), quien desarrolló una teoría para dimensionar las vías de ferrocarril apoyadas sobre traviesas y, a través de éstas, en el balasto.

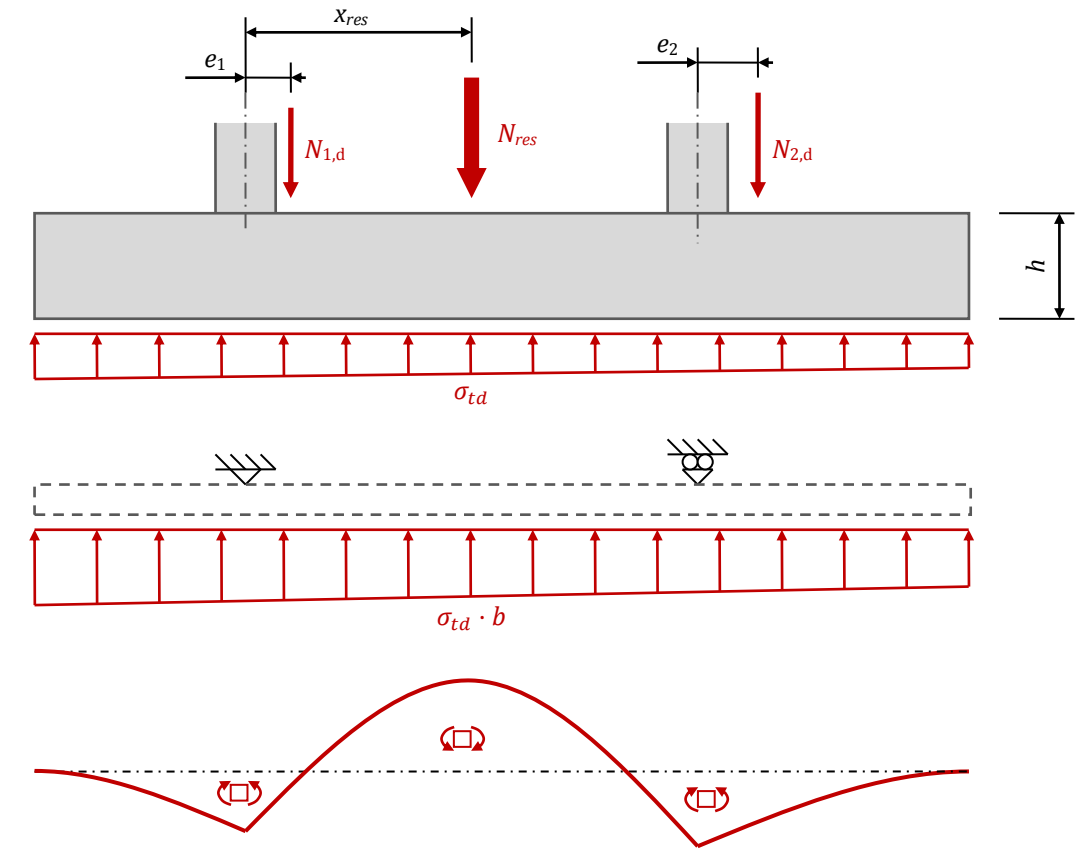



Figura 148. Dimensionamiento estructural de la zapata combinada

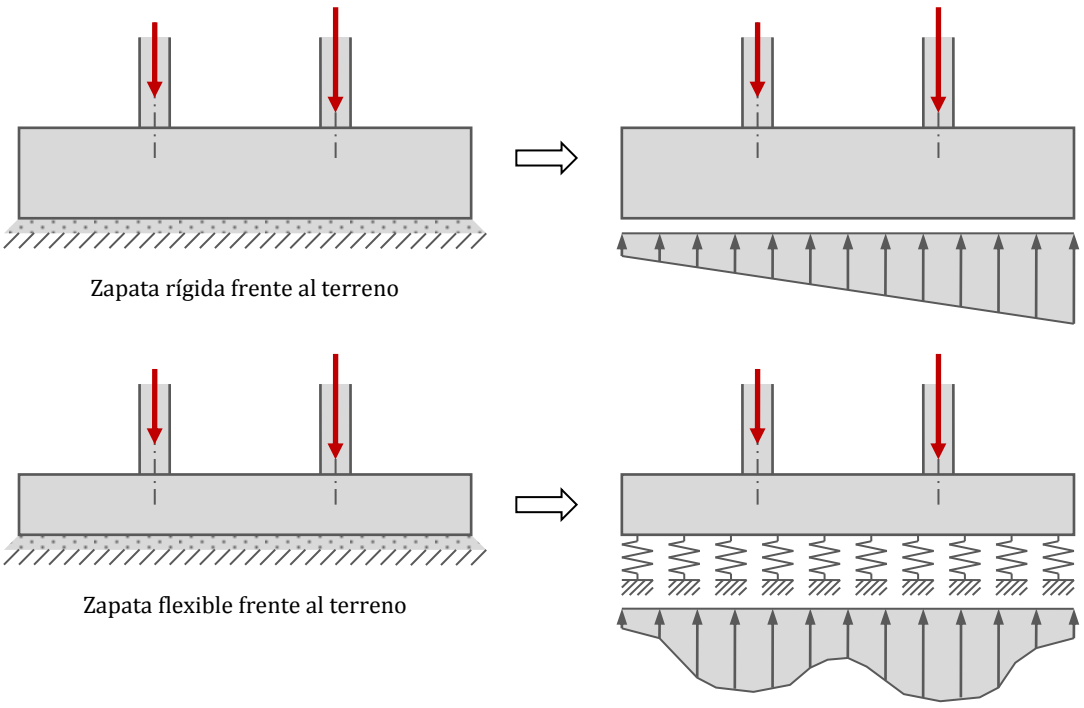



Figura 149. Zapatas combinadas rígidas y flexibles

**<u>Ejemplo 1</u>: Calcular la unidad elástica de una zapata combinada de dimensiones 6,00×2,50×0,60 (m) y hormigonada con HA-30, que apoya sobre una arcilla media con módulo de balasto $K_{30}$ = 40 MN/m³.**

En primer lugar, el módulo de elasticidad del hormigón es:

$$E_{cm} = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{cm}} = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8} = 8500 \cdot \sqrt[3]{30 + 8} = 28577 \ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2}$$

El momento de inercia de la sección bruta, con anchura $b$ = 2,50 m es:

$$I_c = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2500 \cdot 600^3}{12} = 4{,}5 \cdot 10^{10} \ \mathrm{mm}^4$$

Por tratarse de suelo cohesivo, el coeficiente de balasto para el ancho $b$ se obtiene de la ecuación [10.3.5.a]:

$$K_c = K_{30} \cdot \frac{0{,}30}{b} = 40 \cdot \frac{0{,}30 \ \mathrm{m}}{2{,}50 \ \mathrm{m}} = 4{,}8 \ {}^{\mathrm{MN}}/_{\mathrm{m}^3} = 4{,}8 \cdot 10^6 \ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^3} = 4{,}8 \cdot 10^{-3} \ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^3}$$

y, el módulo de balasto para la zapata combinada es:

$$K_{c,a\times b} = K_{c,b\times b} \cdot \left(1 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) = 4{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{2 \cdot 6}\right) = 5{,}8 \cdot 10^{-3} \ {}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^3}$$

Finalmente, la longitud elástica es:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E_c \cdot I_c}{K_c \cdot b}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 28577 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{10}}{5{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 2500}} = 4340 \ \mathrm{mm}$$

La interpretación de este resultado aplicada a una zapata combinada sería la siguiente:

- los vuelos (medidos desde el eje del soporte) no deben ser superiores a 3,4 m ($^{\pi}/_{4} \cdot \alpha$)
- la distancia entre los ejes de dos soportes contiguos no debe superar 6,8 m ($^{\pi}/_{2} \cdot \alpha$)

Al ser la longitud de la zapata de tan sólo 6 m, la distancia entre pilares será menor que la indicada y también es más que probable que no vayan a alcanzarse vuelos tan largos, por lo que se tratará de una zapata rígida frente al terreno en que apoya.

# 4. CIMENTACIONES PROFUNDAS

## 4.1 PILOTES

El CTE-DB-SE-Cimientos define las cimentaciones profundas como aquellas cuya cota inferior se sitúa a una profundidad superior a 8 veces su ancho o diámetro. Las cimentaciones profundas se resuelven habitualmente mediante pilotes: aislados, en grupos o formando pantallas. Las soluciones basadas en micropilotes suelen adoptarse especialmente en la reparación o recalce de cimentaciones existentes (superficiales o profundas) o en cimentaciones nuevas cuando existen restricciones que reducen la maniobrabilidad de las grandes máquinas de pilotajes (p. ej. cimentaciones de nueva ejecución en el interior de naves industriales).

Por su forma de trabajo los pilotes se clasifican en:

- ***pilotes por fuste*** o pilotes flotantes, que transmiten su carga al terreno por medio de su superficie lateral, fundamentalmente
- ***pilotes por punta*** o pilotes columna, que transmiten la mayor parte de su carga al estrato resistente situado al nivel de la parte más profunda del pilote

Por el tipo de material y proceso constructivo, los pilotes pueden ser:

- ***pilotes de hormigón in situ***, ejecutados por *desplazamiento* (hincado de la entubación, con azuche de hormigón), *extracción* (conteniendo la excavación con entubación) o *perforación* (entubación con lodos tixotrópicos o bien en barrena continua)
- ***pilotes de hormigón prefabricado***, con hormigón armado de alta resistencia o bien hormigón pretensado o postesado, colocados en obra mediante hincado, produciendo el desplazamiento del terreno; la punta suele ser de azuche metálico
- pilotes construidos con otros materiales (acero, madera, mixtos)

El cálculo geotécnico de un pilote está actualmente recogido en el CTE-DB-SE-Cimientos, en el capítulo 5. Se contemplan los siguientes tipos de fallo:

- pérdida de estabilidad global
- hundimiento
- rotura por arrancamiento
- rotura horizontal del terreno bajo cargas del pilote
- capacidad estructural del pilote

El modo de fallo que va a estudiarse en estos apuntes es éste último. Los demás tipos de fallo están tratados en profundidad en el citado documento. Existe un cierto "solape" de competencias entre la Instrucción EHE-08 y el apartado dedicado por CTE-DB-SE-Cimientos a las consideraciones estructurales. Este documento establece que el tope estructural de un pilote se calcula como:

$$Q_{tope} = \sigma \cdot A \qquad [10.4.1]$$

donde $\sigma$ es una tensión normal tope definida en la Tabla 5.1 del CTE-DB-SE-Cimientos y $A$ es la sección transversal del pilote. Este tope estructural se compara con el máximo axil característico $N_k$ absorbido por el pilote bajo la peor combinación de acciones, empleando coeficientes de mayoración iguales a la unidad para las acciones permanentes y para las acciones variables desfavorables, tal y como se recoge a modo de ejemplo en la ecuación [10.2.1].

Tabla 5.1 del CTE-DB-SE-Cimientos. Valores recomendados para el tope estructural de los pilotes

| **Procedimiento** | **Tipo de pilote** | **Valores de $\sigma$ (MPa)** | |
|---|---|---|---|
| Hincados | Hormigón pretensado o postesado | $0{,}30(f_{ck}$ -$0{,}9\, f_p)$ | |
| | Hormigón armado | $0{,}30\, f_{ck}$ | |
| | Metálicos | $0{,}30\, f_{yk}$ | |
| | Madera | 5 | |
| | | **Tipo de apoyo** | |
| | | **Suelo firme** | **Roca** |
| Perforados (1) | Entubados | 5 | 6 |
| | Lodos | 4 | 5 |
| | En seco | 4 | 5 |
| | Barrenados sin control de parámetros | 3,5 | - |
| | Barrenados con control de parámetros | 4 | - |

(1) Con un control adecuado de la integridad, los pilotes perforados podrán ser utilizados con topes estructurales un 25% mayores

No obstante, cuando se trata de pilotes de hormigón armado, la resistencia se comprueba de acuerdo a la Instrucción EHE-08 y obteniendo el peor axil de cálculo $N_d$ según las combinaciones de acciones correspondientes a Estados Límite Últimos: las cargas sobre el encepado y el peso propio de éste se mayorarán por 1,35 si tienen efecto desfavorable; y las acciones variables con efecto desfavorable se mayorarán por 1,5. El CTE-DB-SE-Cimientos "invade" en cierto sentido las competencias de la Instrucción de Hormigón Estructural añadiendo que si existen importantes esfuerzos de flexión actuando sobre el pilote, a efectos de cálculo no se trabajará con una $f_{ck}$ mayor de 18 N/mm$^2$. El dimensionamiento del pilote deberá satisfacer la siguiente inecuación, que supone que la sección del pilote está sometida a compresión simple:

$$N_d \leq N_u = A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd} \qquad [10.4.2]$$

donde:

- $A_c$ es el área de la sección transversal del pilote que, en el caso de pilotes hormigonados *in situ*, sin camisa de chapa, debe calcularse con un diámetro reducido $D_d$ de cálculo igual a 0,95 veces el diámetro nominal $D_{nom}$, debiendo verificarse además:

$$D_{nom} - 50 \leq D_d \leq D_{nom} - 20 \quad \text{(en mm)} \qquad [10.4.3]$$

- $f_{cd}$ es la resistencia de cálculo del hormigón; para pilotes *in situ* sin camisa permanente, el profesor José Calavera sugiere emplear un coeficiente de minoración $\gamma_c = 1{,}65$
- $A_s$ es el área de la armadura longitudinal del pilote y $f_{yd}$ es el límite elástico de cálculo de la armadura longitudinal, que no deberá tomarse superior a 400 N/mm$^2$, ya que la sección transversal del pilote trabaja en dominio 5

En principio no es necesario añadir excentricidades de segundo orden, ya que se supone que el pandeo está impedido parcialmente por el terreno. La Instrucción EHE-08 establece que debe determinarse una excentricidad mínima de acuerdo con las tolerancias de ejecución.

Siguiendo prácticamente las mismas disposiciones de armado que las correspondientes a soportes de hormigón, la armadura longitudinal del pilote no empleará diámetros inferiores a Ø12 y constará al menos de 6 redondos, a distancias no mayores de 350 mm (200 mm según el profesor José Calavera). En pilotes prefabricados de sección circular, de diámetros más pequeños, pueden utilizarse no menos de 5 redondos. Esta armadura deberá ir convenientemente arriostrada por un sistema de cercos que deben cumplir las disposiciones del apartado 42.3.1 de la Instrucción EHE-08 y que pueden disponerse de manera helicoidal. Si los pilotes son ejecutados *in situ* sin camisa que sirva de encofrado, el recubrimiento deberá ser de 70 mm. Las cuantías mecánicas de la armadura longitudinal son las siguientes:

$$0{,}1 \cdot N_{Rd} \leq U_{s,total} \leq A_c \cdot f_{cd} \qquad [10.4.4]$$

y la cuantía geométrica es:

$$A_s \geq \frac{4}{1000} \cdot A_c \quad \rightarrow \quad U_{s,total} \geq \frac{4}{1000} \cdot A_c \cdot f_{yd} \qquad [10.4.5]$$

En previsión de las dificultades de hormigonado que presentan los pilotes, el profesor José Calavera recomienda no apurar la cuantía máxima y mantener la capacidad de la armadura por debajo del 60% de $A_c \cdot f_{cd}$.

Respecto del problema de las acciones horizontales que pueden aplicarse sobre los pilotes a través del encepado, el profesor José María Rodríguez Ortiz en el libro *"Curso aplicado de cimentaciones"*, escrito con los profesores Jesús Serra Gesta y Carlos Oteo Mazo, propone el siguiente criterio:

- si la carga horizontal que actúa sobre el encepado es inferior al 5% de la carga vertical concomitante, no es necesario considerarla
- si la carga horizontal que actúa sobre el encepado está entre el 5% y el 10% de la carga vertical concomitante, pueden absorberla los pilotes a flexión

- si la carga horizontal es superior al 10% de la vertical concomitante, se deben disponer pilotes inclinados

## 4.2 ENCEPADOS

La unión de los soportes de la estructura a los grupos de pilotes se realiza por medio de encepados de hormigón armado. Una vez ejecutados los pilotes, habitualmente desde la cota de explanación, se procede a la excavación del terreno hasta la profundidad de apoyo de la base del encepado. A continuación se procede al descabezado de los pilotes, demoliendo casi toda la longitud que sobresale desde el fondo de la excavación, normalmente por medio de martillo neumático. No obstante, debe respetarse una ***longitud de entrega*** del pilote dentro del encepado, que suele estar comprendida entre 100 mm y 150 mm. De esta manera se mejoran las condiciones de vinculación y se compensan las microfisuras que se hayan podido producir durante la operación de descabezado del pilote. El proceso de construcción se representa en la Figura 150.

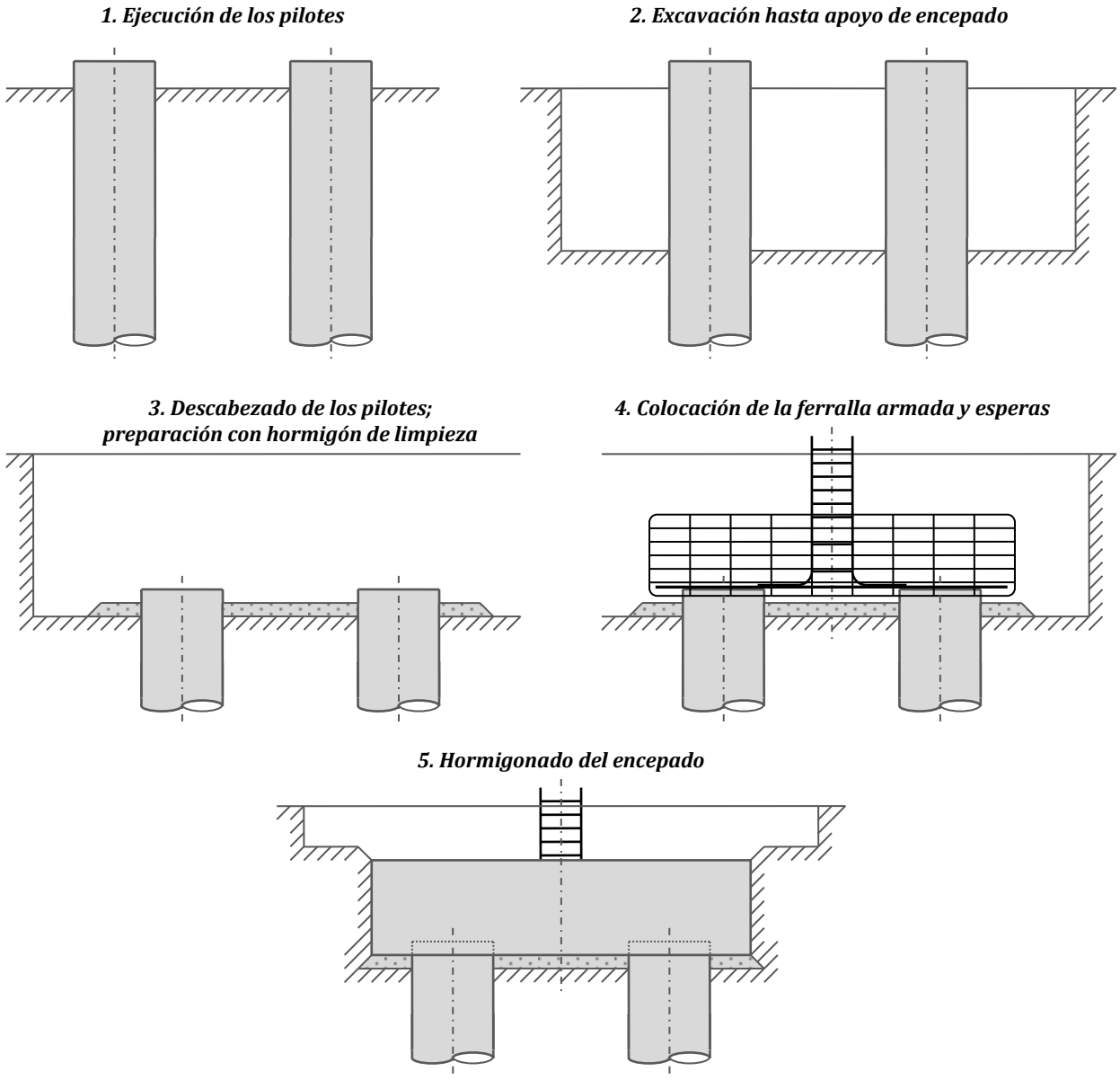



Figura 150. Ejecución de una cimentación profunda de pilotes con encepado

### 4.2.1 Encepados de un pilote

De acuerdo con el CTE-DB-SE-Cimientos, los pilotes de diámetro inferior a 450 mm no podrán disponerse como pilotes aislados. Para diámetros de entre 450 mm y 1000 mm sí se admite plantear encepados de un solo pilote, a condición de que se dispongan arriostrados a los encepados contiguos por ***vigas centradoras*** dispuestas en dos direcciones ortogonales (ver Figura 151). Dichas vigas son las encargadas de absorber a flexión las excentricidades transmitidas por el soporte de la estructura. Si los pilotes son de diámetros superiores a 1000 mm y se disponen aislados, no será necesario disponer ***vigas centradoras*** que arriostren el encepado correspondiente, a no ser que la cimentación se ubique en zona sísmica, en cuyo caso se dispondrán ***vigas de atado***. La solución de un solo pilote puede aplicarse en los casos en los que los soportes no transmitan momentos a la cimentación. No obstante, debido a las tolerancias de precisión en la ejecución es muy difícil que el eje del soporte coincida con el del pilote. Por esta razón, y de forma análoga a como se prescribe en la Instrucción para los soportes en compresión centrada, el profesor José Calavera sugiere dimensionar las vigas de atado para ser capaces de absorber el momento que produce la carga del soporte con una ***excentricidad mínima accidental***, debida a posibles errores de posicionamiento entre los ejes del encepado y del soporte:

- 50 mm si el nivel de control de ejecución es intenso
- 100 mm si el nivel de control de ejecución es normal

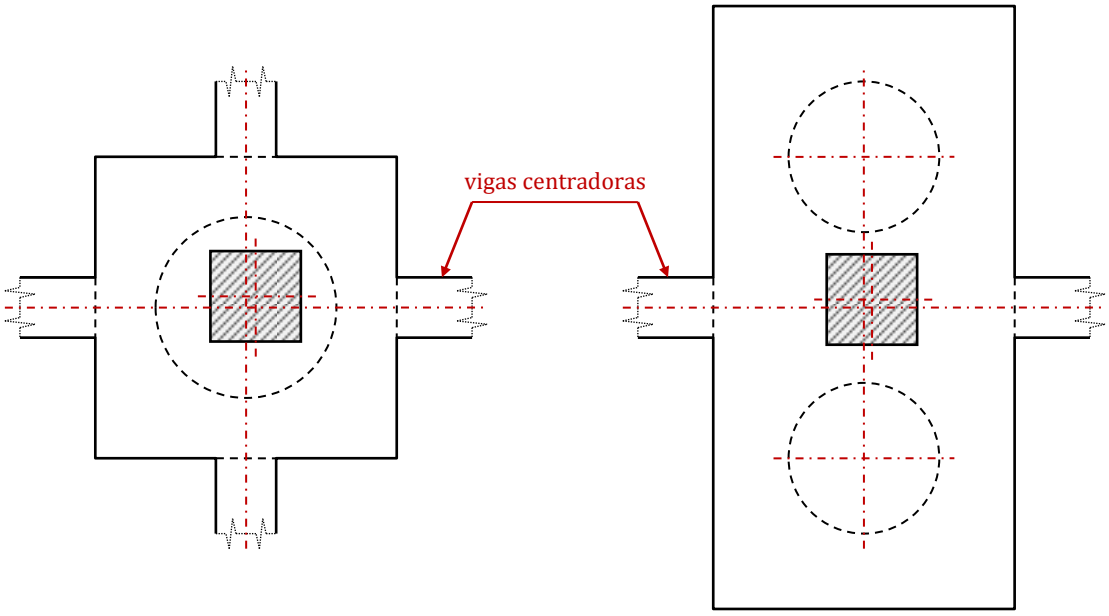



Figura 151. Vigas centradoras en encepados de uno y de dos pilotes

### 4.2.2 Encepados de dos pilotes

Un encepado de dos pilotes es capaz de absorber momentos en el plano que contiene a los ejes de los dos pilotes, debiendo ir arriostrado con vigas centradoras en la dirección ortogonal (ver Figura 151). Aunque no existan momentos en dicha dirección, es conveniente que las vigas centradoras sean capaces a absorber el momento producido por la excentricidad mínima accidental. Los encepados de dos pilotes (y también los de 3 y 4 pilotes) se diseñan habitualmente como piezas rígidas. Como se recordará, la condición de que un encepado de dos pilotes sea rígido es que el vuelo $v$ no sea superior al doble del canto $h$ del encepado. La Instrucción EHE-08 establece que el canto mínimo de los encepados en su borde no debe ser inferior al mayor de los dos valores siguientes: ni 40 cm ni tampoco el diámetro de los pilotes.

Además, la distancia entre cualquier punto del contorno del pilote al borde del encepado no será inferior a 250 mm. Algunos autores añaden la condición de que esta distancia entre el perímetro del pilote y el borde del encepado tampoco debe ser inferior al radio del pilote. En cuanto a la distancia $\ell$ de separación entre los ejes de dos pilotes consecutivos (Figura 152), la Instrucción EHE-08 no define ningún tipo de restricción, pero el profesor José Calavera recomienda que no sea inferior a 2 veces su diámetro si trabajan por punta, o a 3 veces su diámetro si trabajan por fuste.

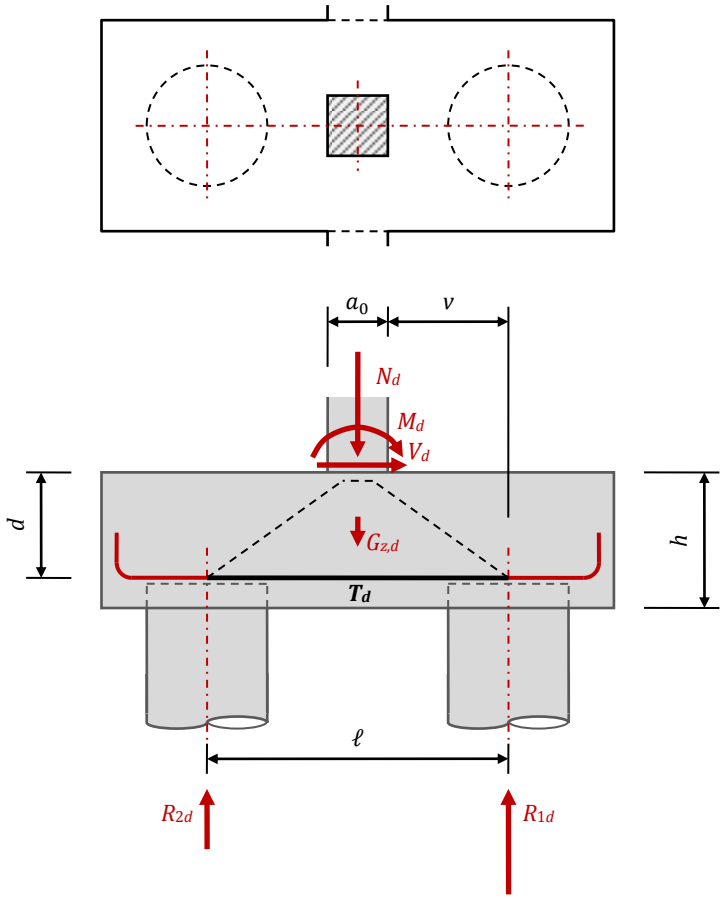



Figura 152. Modelo de bielas y tirantes en encepado de dos pilotes

Las cargas que absorbe cada pilote se obtienen planteando el equilibrio de fuerzas y momentos, lo que da lugar a las siguientes ecuaciones:

- esfuerzos característicos para la comprobación de tope estructural según el CTE-DB-SE-Cimientos:

$$R_{1k} = \frac{N_k + G_{z,k}}{2} + \frac{M_k + V_k \cdot h}{\ell} \qquad [10.4.6.\,a]$$

$$R_{2k} = \frac{N_k + G_{z,k}}{2} - \frac{M_k + V_k \cdot h}{\ell} \qquad [10.4.6.\,b]$$

- esfuerzos de cálculo para dimensionamiento según EHE-08:

$$R_{1d} = \frac{N_d + G_{z,d}}{2} + \frac{M_d + V_d \cdot h}{\ell} \qquad [10.4.7.\,a]$$

$$R_{2d} = \frac{N_d + G_{z,d}}{2} - \frac{M_d + V_d \cdot h}{\ell} \qquad [10.4.7.\,b]$$

En las expresiones anteriores $G_{z,k}$ y $G_{z,d}$ son los valores característico y de cálculo del peso del encepado, respectivamente. Si el ***encepado es rígido*** ($v \leq 2 \cdot h$) constituye una región D y el dimensionamiento de la armadura principal $U_s$ se plantea a través del modelo de bielas y tirantes representado en la Figura 152:

$$U_s \geq T_d = \frac{R_{1d}}{0{,}85 \cdot d} \cdot \left(v + \frac{a_0}{4}\right) \qquad [10.4.8]$$

en donde $R_{1d}$ es el esfuerzo de cálculo en el pilote más cargado. Se recuerda que la capacidad $U_s$ no puede ser calculada con una tensión superior a 400 N/mm$^2$ en el acero.

La armadura principal $U_s$ se dispondrá en redondos colocados sobre los dos pilotes, ocupando un ancho de banda como el indicado en la Figura 58.4.1.2.2.b de la Instrucción EHE-08; este ancho es igual al diámetro del pilote más dos veces la separación entre la cara superior del pilote y el centro de gravedad de la armadura del tirante, pero ***es habitual tomar el diámetro del pilote como anchura de banda, por simplificación***. La comprobación de anclaje se efectúa a partir del eje del pilote, pudiendo ser necesario doblar en patilla o disponer barras transversales soldadas si no hay suficiente longitud disponible para anclar.

Los encepados de dos pilotes pueden sufrir torsiones que son difíciles de tener en cuenta en los cálculos y por ello, además de la armadura principal inferior, llevarán armaduras secundarias:

- ***armadura secundaria superior***: dispuesta en la cara superior en redondos paralelos a las armaduras principales inferiores, con una capacidad mecánica no inferior a $^1/_{10}$ de $U_s$
- ***armadura secundaria horizontal y vertical***: dispuesta en las caras laterales y con una cuantía geométrica será superior al 4‰, referida a la sección de encepado perpendicular a los redondos; es habitual formar esta armadura a base de cercos verticales y horizontales

En el caso de ***encepados flexibles*** ($v > 2 \cdot h$), su cálculo se efectuará aplicando la teoría general de flexión (regiones B) y realizando las correspondientes comprobaciones a cortante y punzonamiento, si procede. Las secciones de referencia son las siguientes:

- para el cálculo del momento flector de cálculo, se tomará la sección situada a una distancia $0{,}15 \cdot a_0$ desde la cara del soporte hacia su interior
- la comprobación de cortante por agotamiento a tracción del alma ($V_{rd} \leq V_{u2}$) se realizará en la sección situada a un canto útil de la cara vertical del soporte; en caso de que no se verifique, entonces, será necesario disponer estribos ($V_{su}$)
- la comprobación de anclaje se efectuará en las secciones que se indican en la Figura 140

### 4.2.3 Encepados rígidos de tres y cuatro pilotes

En los encepados de varios pilotes, las acciones transmitidas a cada pilote del grupo se calculan de la siguiente manera:

$$R_{id} = \frac{N_d}{n} \pm \frac{M_{xd} \cdot y_i}{\sum {y_i}^2} \pm \frac{M_{yd} \cdot x_i}{\sum {x_i}^2} \qquad [10.4.9]$$

donde:

- $R_{id}$ es la carga de cálculo sobre el *i*-ésimo pilote; no es aconsejable que las cargas $R_{id}$ tomen valores negativos, pero en opinión de algunos autores pueden admitirse valores negativos cuando son del mismo orden del peso del pilote (efecto de "lastre")
- *n* es el número de pilotes
- $N_d$, $M_{xd}$ y $M_{yd}$ son, respectivamente, los esfuerzos (de cálculo) vertical, flector alrededor del eje *X* y flector alrededor del eje *Y*; los ejes *X* e *Y* son los ejes principales del soporte

- $x_i$ es la distancia del eje del *i*-ésimo pilote al eje *Y*
- $y_i$ es la distancia del eje del *i*-ésimo pilote al eje *X*

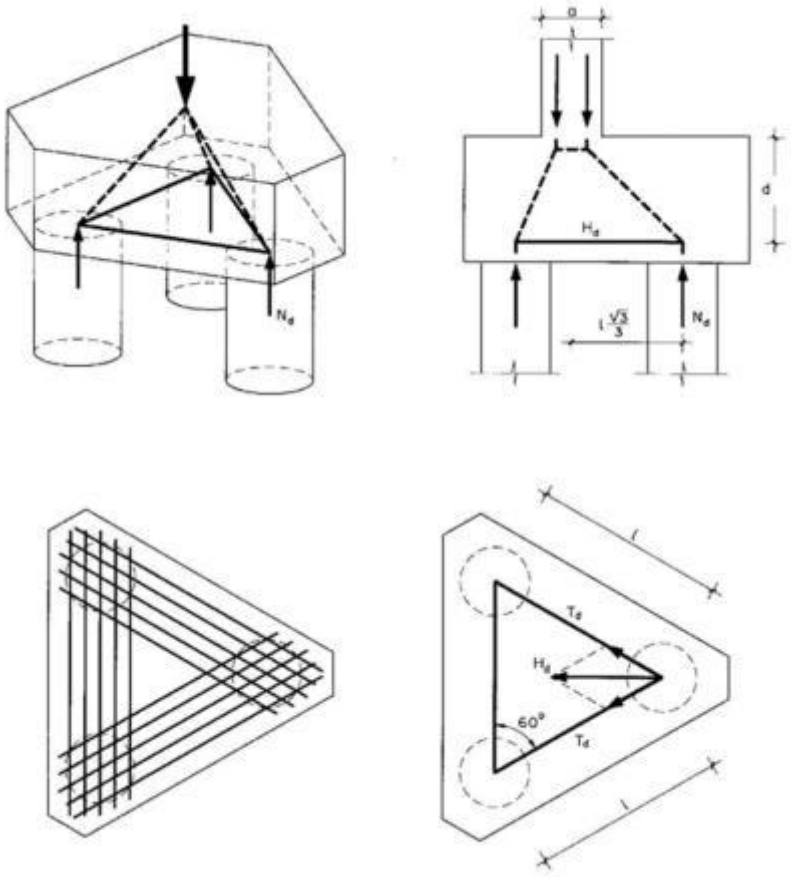



Figura 153. Encepado de tres pilotes y modelo de bielas y tirantes

Los encepados de 3 pilotes cuyos ejes formen un triángulo equilátero y se dispongan de manera que el baricentro coincida con el eje del soporte (Figura 153), serán considerados rígidos si se cumple:

$$\ell \leq 2{,}6 \cdot h \qquad [10.4.10]$$

siendo $\ell$ la distancia entre ejes de los pilotes y $h$ el canto del encepado. La armadura principal del encepado se dispondrá en bandas entre cada pareja de pilotes:

$$U_s \geq T_d = 0{,}68 \cdot \frac{R_{1d}}{d} \cdot \left(0{,}58 \cdot \ell - \frac{a_0}{4}\right) \qquad [10.4.11]$$

donde $R_{1d}$ es el esfuerzo axil del pilote más cargado.

Basándose en los trabajos de los profesores J. Blevot, R. Fremy y J. R. Robinson, el profesor José Calavera recomienda aplicar una cuantía superior de la armadura $A_s$ del tirante:

$$A_s \leq 0{,}006 \cdot \ell \cdot d \qquad [10.4.12]$$

para evitar diseños poco adecuados en los que se pretenda ahorrar volumen de hormigón disminuyendo el canto del encepado a costa de un armado muy denso; en este tipo de diseños el agotamiento podría producirse por rotura de bielas (rotura agria) en vez de localizarse en las armaduras (rotura dúctil).

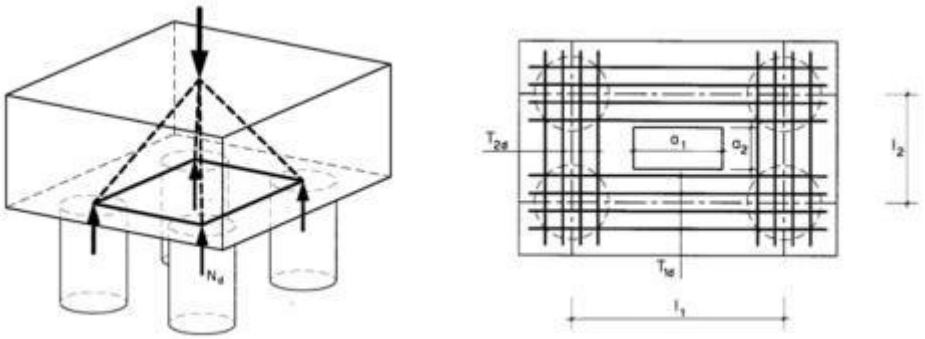



Figura 154. Encepado de cuatro pilotes y modelo de bielas y tirantes

Los encepados de 4 pilotes cuyos ejes formen un cuadrado o rectángulo de dimensiones $\ell_1 \times \ell_2$ y se dispongan de manera que el baricentro coincida con el eje del soporte (Figura 154) serán considerados rígidos si se cumple la condición:

$$min\{\ell_1\ ;\ \ell_2\} \leq 3 \cdot h \qquad [10.4.13]$$

en cuyo caso, la armadura principal entre cada pareja de pilotes será:

$$U_{s,1} \geq T_{d,1} = \frac{R_{1d}}{0{,}85 \cdot d} \cdot \left(\frac{\ell_1}{2} - \frac{a_{0,1}}{4}\right) \qquad [10.4.14.\text{a}]$$

$$U_{s,2} \geq T_{d,2} = \frac{R_{1d}}{0{,}85 \cdot d} \cdot \left(\frac{\ell_2}{2} - \frac{a_{0,2}}{4}\right) \qquad [10.4.14.\text{b}]$$

donde:

- $R_{1d}$ es el esfuerzo axil de cálculo del pilote más cargado de los cuatro
- $U_{s,1}$ es la capacidad mecánica de las bandas de armaduras que se colocan paralelas a la longitud $\ell_1$ sobre ambas parejas de pilotes
- $U_{s,2}$ es la capacidad mecánica de las bandas de armaduras que se colocan paralelas a la longitud $\ell_1$ sobre ambas parejas de pilotes
- $a_{0,1}$ es la dimensión del soporte paralela a la longitud $\ell_1$
- $a_{0,2}$ es la dimensión del soporte paralela a la longitud $\ell_2$

Para encepados de 3 ó más pilotes, la Instrucción EHE-08 define las siguientes armaduras secundarias:

- armadura horizontal secundaria inferior, dispuesta entre las bandas de armaduras principales y con una capacidad no inferior a un 25% de la de las bandas
- se recomienda que en los casos de importantes cargas portantes, se disponga una armadura secundaria vertical, a base de cercos de suspensión, cuya capacidad mecánica no será inferior a $N_d/1{,}5 \cdot n$, siendo $N_d$ el axil de cálculo del soporte y $n$ el número de pilotes; la separación entre las ramas de estos cercos no será mayor que el canto útil no tampoco superior a 500 mm
- aunque la EHE-08 no exige una armadura secundaria horizontal superior para encepados de 3 ó más pilotes, algunos autores consideran que en los encepados de grandes dimensiones o sometidos a cargas importantes es recomendable

### 4.2.4 Encepados corridos sobre parejas de pilotes

Los encepados corridos de parejas de pilotes, como el representado en la Figura 155, se calculan con los modelos de bielas y tirantes del encepado de 2 pilotes (armado transversal, en bandas sobre cada dos pilotes) y de la viga de gran canto continua (armado longitudinal).

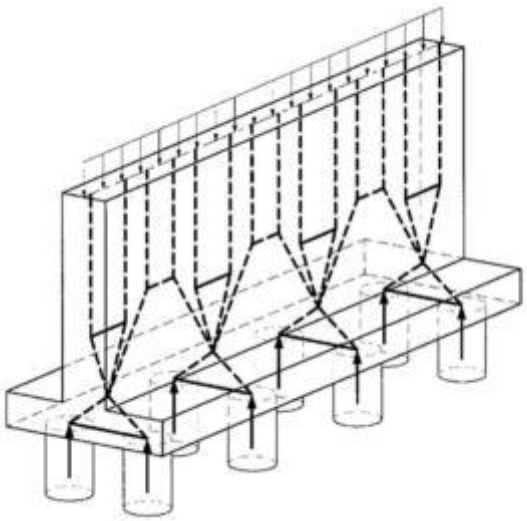


Figura 155. Encepado corrido sobre parejas de pilotes

## 5. VIGAS DE ATADO

Para evitar eventuales desplazamientos horizontales relativos entre los elementos de cimentación de un edificio, es convenientemente disponer unas piezas de atado en forma de vigas que, en ocasiones podrían tener también una función centradora. En el caso de estructuras resueltas con cimentaciones superficiales que se ubiquen en zonas sísmicas en las que la aceleración de cálculo $a_c$ sea igual o superior a 0,16·$g$ las vigas de atado son obligatorias y afectan a todas las zapatas. Deberán disponerse de forma que cada zapata esté atado en dos direcciones ortogonales o sensiblemente ortogonales (ver Figura 156). Cuando la cimentación se resuelva mediante pilotes y encepados, éstos últimos deberán ir atados en dos direcciones ortogonales aún cuando no se trate de un emplazamiento afectado por acciones sísmicas. Si se trata de una zona sísmica con aceleración $a_c$ inferior a 0,16·$g$ la norma NCSE-02 admite que la solera de hormigón sirva de elemento de atado si se sitúa al nivel de las zapatas o apoyada sobre éstas y rodea los pilares en todas direcciones. En su libro *"Cálculo de estructuras de cimentación"*, el profesor Calavera avisa de aunque la solera rodee los soportes, no está en contacto con ellos directamente, sino a través de la junta de dilatación, lo que anula en cierta manera los efectos de atado de la solera. En ubicaciones con acciones sísmicas, las vigas de atado deben dimensionarse para resistir tanto a tracción como a compresión un esfuerzo axil igual a $a_c$ veces el esfuerzo vertical del soporte más cargado de los dos a que sirve de enlace. Así pues:

- en compresión:

$$A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd} \geq a_c \cdot N_{d,max} \qquad [10.5.1]$$

- en tracción:

$$A_s \cdot f_{yd} \geq a_c \cdot N_{d,max} \qquad [10.5.2]$$

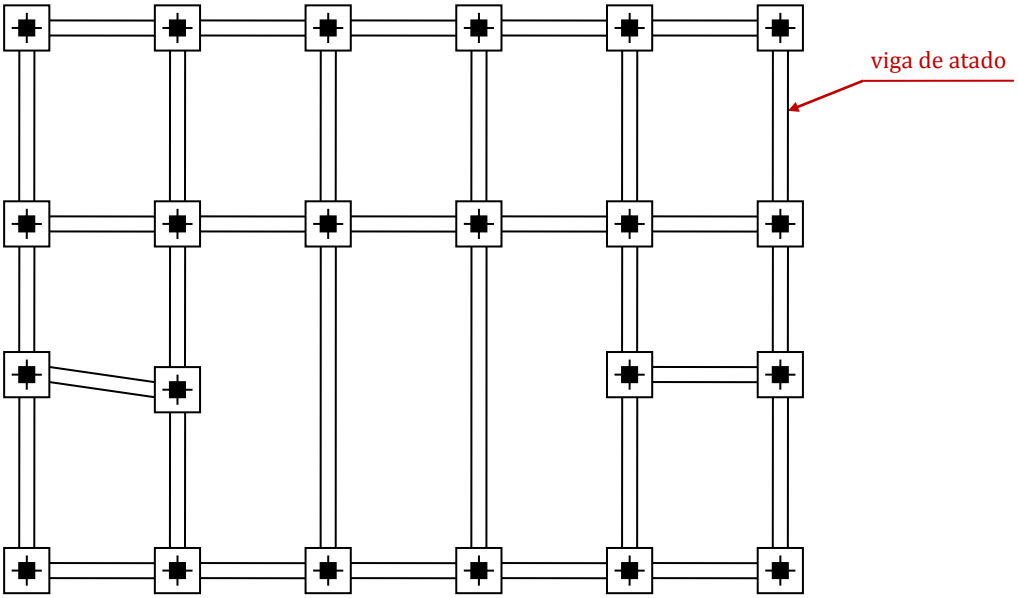



Figura 156. Vigas de atado en sistema de cimentación

En la ecuación [10.5.1] la tensión del acero está limitada a 400 N/mm², por tratarse de un cálculo a compresión simple (dominio 5). En general, si se satisface la condición [10.5.2] también se satisface implícitamente la condición [10.5.1]. Además, debe tenerse en cuenta que este dimensionamiento se está haciendo con combinaciones que incluyen la acción sísmica, por lo que:

- la resistencia de cálculo $f_{cd}$ del hormigón está calculada a partir de la característica $f_{ck}$ con un coeficiente de minoración $\gamma_c = 1{,}3$
- el límite elástico de cálculo $f_{yd}$ del acero se obtiene del valor característico $f_{yk}$ del fabricante, minorándolo por el coeficiente $\gamma_s = 1$
- el esfuerzo $N_{d,max}$ del soporte más cargado se calcula con la combinación sísmica (ecuación [2.1.4] del Capítulo 2, "Bases de cálculo y durabilidad") en la que las acciones con efecto desfavorable (permanentes o variables) no se mayoran (ver Tabla 2.1 del Capítulo 2)

Aunque se ha visto que el dimensionamiento en compresión no es determinante, sí que lo es el hecho de que puede ser susceptible de pandear. Los efectos de segundo orden se podrán despreciar si la esbeltez mecánica de la viga es menor que la esbeltez límite inferior definida en el Capítulo 7, "Estado Límite Último de inestabilidad". La experiencia demuestra que el esfuerzo de compresión $a_c \cdot N_{d,max}$ puede ser muy pequeño en comparación con la capacidad mecánica del hormigón ($A_c \cdot f_{cd}$). De hecho, puede demostrarse que si se cumple la siguiente condición:

$$\nu = \frac{N_{d,max}}{A_c \cdot f_{cd}} \leq {}^1/_7 \qquad [10.5.3]$$

entonces la esbeltez límite inferior tomaría su valor superior de 100 (ecuación [7.2.1]) y la viga de atado podría dimensionarse con una esbeltez de hasta 100 sin necesidad de considerar efectos de segundo orden. Para poder obtener la condición anterior, se ha supuesto que el armado de la viga de atado se distribuye simétricamente en las cuatro caras y se ha introducido una excentricidad de primer orden igual a ${}^1/_{20}$ del canto $h$ de la viga. Por lo tanto, la condición de dimensionamiento es:

$$\frac{\ell_0}{i_c} = \frac{\ell_0}{{}^b/_{\sqrt{12}}} \leq 100 \qquad [10.5.4]$$

donde $b$ es la dimensión mínima de la sección transversal. Si se supone que la viga de atado está empotrada en las zapatas o encepados que enlaza, entonces se llega a:

$$b \geq {}^{1}/_{50} \cdot L_{libre} \qquad [10.5.5]$$

siendo $L_{libre}$ la luz libre de la viga de atado entre las caras de las zapatas o encepados (ver Figura 157). Estrictamente, la esbeltez de la viga que cumpla la condición anterior sería de 86,6.

Cuando se emplean encofrados laterales para fabricar la viga de atado, sus dimensiones deben ser de, por lo menos, 250×250 mm. Pero en el caso de que se encofren las caras laterales contra el terreno, se recomienda que el ancho de la viga sea de, al menos, 400 mm; se recuerda que, de hacerse así, los recubrimientos laterales deberán ser de 70 mm. En cuanto a las disposiciones de armado, las armaduras deben prolongarse hasta el eje de los soportes y la superior debe anclarse a partir de dicho eje (ver Figura 157).

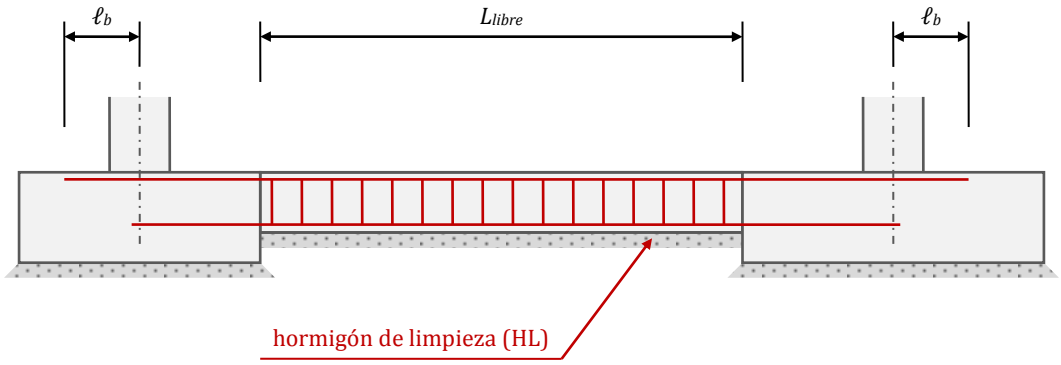



Figura 157. Anclaje de las armaduras de la viga de atado

Las cuantías para el armado de la viga de atado son las mismas que las aplicables a vigas convencionales, aunque se recomienda además que la capacidad mecánica total $U_s$ de las armaduras longitudinales sea, al menos, el 15% de la capacidad $A_c \cdot f_{cd}$ para controlar los efectos de la retracción.

## 6. MUROS DE CONTENCIÓN Y MUROS DE SÓTANO

El CTE-DB-SE-Cimientos define los muros como elementos de contención destinados a establecer y mantener una diferencia de niveles en el terreno con una pendiente de transición superior a lo que permitiría la resistencia del mismo, transmitiendo a su base y resistiendo con deformaciones admisibles los correspondientes empujes laterales. De las diferentes tipologías de elementos de contención cubiertas por el CTE-DB-SE-Cimientos, este apartado se va a centrar en los muros de contención en ménsula (en L o en T invertida) y en los muros de sótano (Figura 158).

En los muros en ménsula la base del muro está constituida por una zapata corrida sobre la que se levanta el alzado, que suele ser de espesor reducido y funciona como una ménsula frente a los empujes horizontales del terreno del trasdós (ver Figura 159). La zapata puede tener puntera y talón o bien sólo puntera o sólo talón. Así mismo, la zapata también puede tener un recrecido en su base, denominado zarpa o tacón, cuya misión es mejorar la resistencia a deslizamiento del conjunto. Si el alzado es de gran altura, pueden disponerse cartabones o contrafuertes para incrementar su resistencia a flexión.

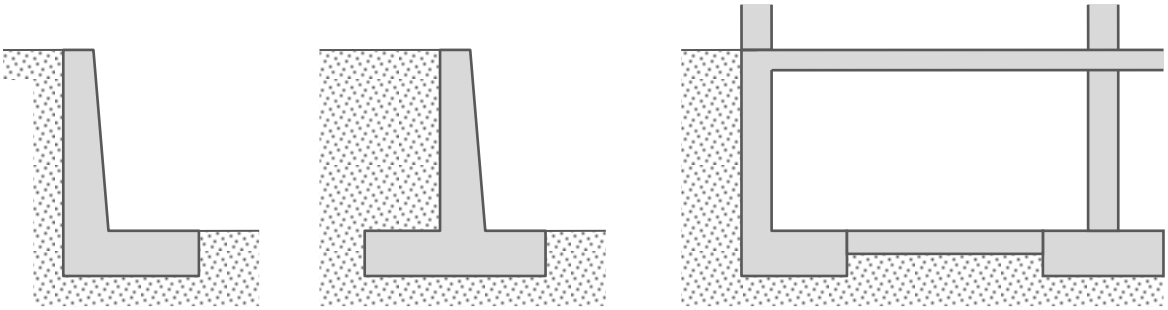



Figura 158. Muros de contención en ménsula y muros de sótano

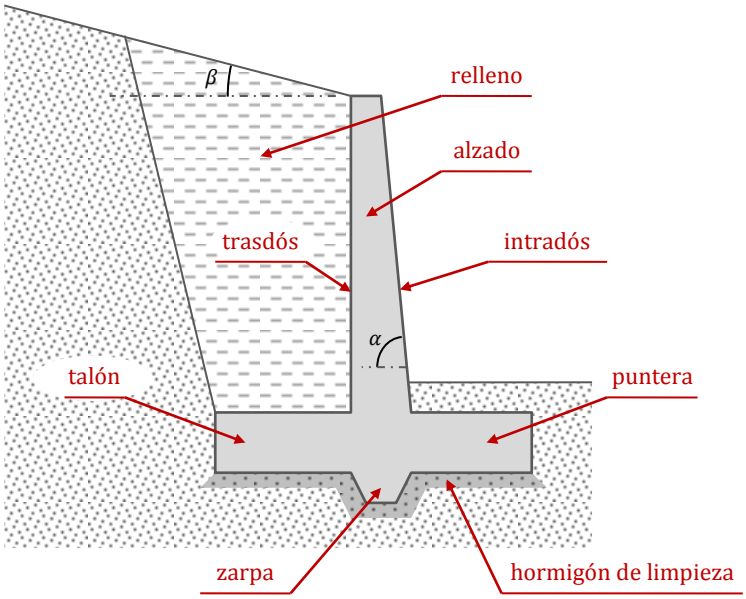



Figura 159. Elementos de un muro en ménsula

Los muros de sótano, además de soportar el empuje del terreno, están sometidos a las cargas transmitidas por los forjados y por los muros de carga o pilares que arranquen desde ellos. Los forjados actúan como elementos de arriostramiento lateral.

Las acciones a considerar en el cálculo de muros son las siguientes:

- el peso propio del elemento de contención
- el empuje y peso del terreno circundante, teniendo en cuenta la presencia eventual de nivel freático
- los empujes debidos al agua, bien en forma de presión intersticial, subpresión o presión de filtración
- las sobrecargas aplicadas sobre la estructura de contención o sobre el relleno del trasdós
- los efectos sísmicos, dependiendo de la ubicación de la estructura

- en casos excepcionales, los empujes de terrenos expansivos, los debidos a la congelación del agua en el suelo, los inducidos por la compactación del relleno o las incidencias constructivas previsibles

## 6.1 DETERMINACIÓN DE LOS EMPUJES DEL TERRENO

El empuje horizontal que ejercen las tierras en contacto con un muro depende fundamentalmente del peso específico de dichas tierras y del movimiento relativo entre ellas y el muro. La Figura 160 muestra esquemáticamente las tres posibles situaciones de empuje:

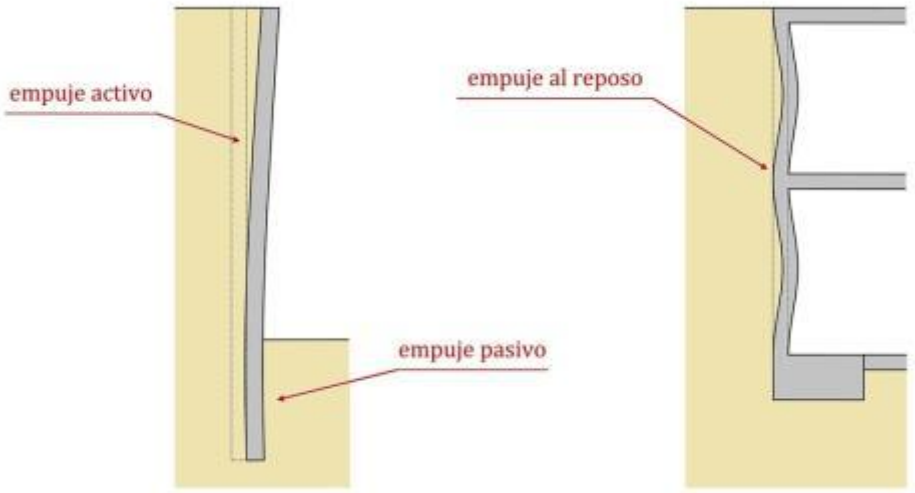



Figura 160. Desplazamientos relativos para movilizar los distintos tipos de empuje

- ***empuje activo***: cuando el muro tiene suficiente capacidad para ser desplazado por el efecto del empuje de las tierras, las tensiones horizontales sobre el trasdós son inferiores a una situación en la que el terreno empuje sobre un elemento de contención rígido e inmóvil; la relación entre las tensiones verticales debidas al peso del terreno y las tensiones horizontales de empuje es el coeficiente de empuje activo $K_A$ ; por ejemplo, en un alzado de 4 m empujado por un suelo granular denso, el desplazamiento necesario para "movilizar" este empuje sería de 2 mm
- ***empuje pasivo***: es el caso que se da en la zona de empotramiento de las pantallas de contención; si el muro es empujado y desplazado contra el terreno, entonces la reacción del terreno contra el que se empuja es superior a la situación de reposo; la relación entre la tensión vertical y la horizontal en la zona sometida sobre la que presiona el muro es el coeficiente de empuje pasivo $K_P$ , pero para movilizarlo es necesario que se produzcan mayores desplazamientos que en el caso del empuje activo; por ejemplo, en un alzado de 4 m empujado por un suelo granular denso, se necesitaría un desplazamiento de unos 2 cm para poder considerar el 100% del empuje pasivo (10 veces mayor que en el caso del activo)
- ***empuje al reposo***: cuando los movimientos del muro están suficientemente impedidos y su rigidez a flexión sea importante, las tensiones horizontales de empuje sobre el muro fruto de las tensiones verticales debidas al peso de las tierras y sobrecargas sobre el relleno son mayores que cuando el elemento de contención tiene capacidad para ser desplazado; la relación entre ambas tensiones es el coeficiente de empuje al reposo $K_0$ ; en el caso de los muros de sótano, arriostrados transversalmente, conviene estimar los empujes en estado al reposo para quedar del lado de la seguridad

El ingeniero escocés **William John Macquorn Rankine** (1.820-1.872) desarrolló a mediados del siglo XIX una teoría para determinar los valores de los coeficientes de empuje activo y pasivo:

$$K_A = tg^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \text{sen}\,\varphi}{1 + \text{sen}\,\varphi} \qquad [10.6.1.\text{a}]$$

$$K_P = tg^2\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 + \text{sen}\,\varphi}{1 - \text{sen}\,\varphi} \qquad [10.6.1.\text{b}]$$

Estos coeficientes son aplicables para rellenos con superficie libre horizontal ($\beta = 0$) y en los que se no considere ni la cohesión ni el rozamiento entre el trasdós y la superficie del muro. En el caso de rellenos cohesivos o con superficie no horizontal o bien cuando la superficie del trasdós sea rugosa (caso de las pantallas excavadas y hormigonadas *in situ*), es aconsejable recurrir las fórmulas propuestas por Coulomb, recogidas en el CTE-DB-SE-Cimientos; precisamente, a la hora de dimensionar pantallas es además recomendable minorar el empuje pasivo por 1,5 ya que su efecto suele ser favorable.

El coeficiente de empuje al reposo se puede determinar de acuerdo con la expresión desarrollada por el húngaro **József Jáky** (1.893-1.950):

$$K_0 = 1 - \text{sen}\,\varphi \qquad [10.6.1.\text{c}]$$

El modelo simplificado de tratamiento del empuje debido a la sobrecarga del trasdós es válido para situaciones en las que la magnitud de las sobrecargas no sea superior al 30% del empuje total. El apartado 6.2.7 del CTE-DB-SE-Cimientos recoge diferentes casos de sobrecargas aplicadas sobre el trasdós con las correspondientes leyes simplificadas de tensiones horizontales sobre el elemento de contención. Además avisa de que cuando las sobrecargas sean elevadas, deberán emplearse métodos de análisis basados en la definición de superficies de rotura o métodos numéricos capaces de abordar el comportamiento no lineal del problema.

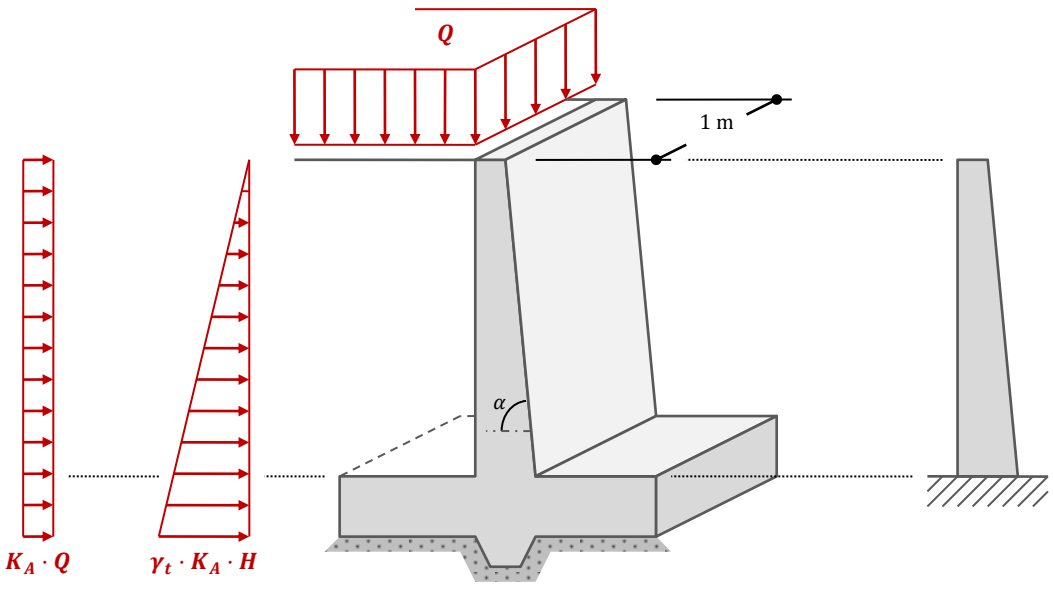



Figura 161. Modelo para cálculo de empujes en muro en ménsula

En el caso de muros en ménsula el empuje horizontal puede determinarse mediante el coeficiente activo (ver Figura 161), suponiendo que, como se ha indicado anteriormente, el alzado tiene capacidad

de ser desplazado. Por el contrario, en el caso de un muro de sótano, para quedar del lado de la seguridad puede suponerse que la movilidad está impedida por el forjado y los empujes horizontales se calculan con el coeficiente al reposo (Figura 162).

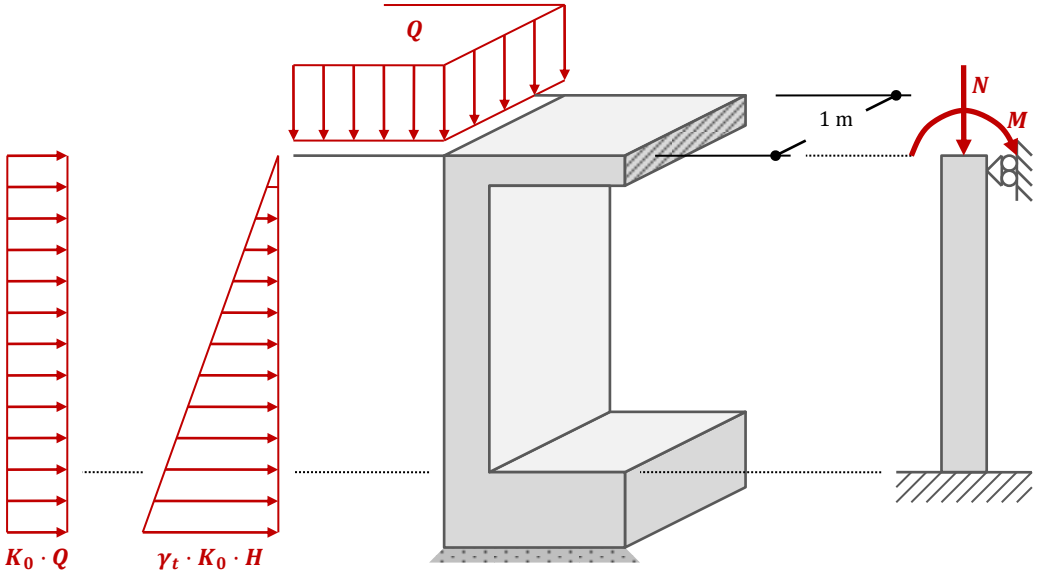



Figura 162. Modelo para cálculo de empujes en muro de sótano

## 6.2 CRITERIOS DE DISEÑO

Tal y como se representa en las Figuras 161 y 162, los elementos de contención que puedan considerarse "infinitamente largos" podrán calcularse por "rebanadas" de un metro de ancho y las comprobaciones de ***hundimiento***, ***vuelco*** y ***deslizamiento*** se harán como en el caso de las ***zapatas corridas***, de manera muy similar a la de las zapatas aisladas; las acciones sobre el elemento se expresarán en valores característicos. La comprobación de ***estabilidad global del terreno*** se hará conforme a lo recogido en bibliografía especializada y en el CTE-DB-SE-Cimientos.

Por el contrario, el dimensionamiento estructural se hará con los valores mayorados de acuerdo con la Instrucción EHE-08, teniendo en cuenta además las siguientes observaciones:

- dado que las propiedades mecánicas del terreno son sensibles a múltiples factores (humedad, obras colindantes, etc.) algunos autores sugieren tratar el empuje producido por el peso del propio terreno como una carga variable para cubrir en cierta forma cualquier incertidumbre;
- en los muros en ménsula, el alzado se dimensionará a flexión y se despreciará su peso propio; para el dimensionamiento de la zapata se despreciará el peso propio de ésta pero sí que se tendrá en cuenta el peso del alzado y el de las tierras y sobrecargas del trasdós cuando se trate de un muro con talón;
- en los muros de sótano, el alzado se dimensionará a flexo-compresión y podrá estudiarse como elemento empotrado-apoyado sobre el que actúan los empujes horizontales del suelo y las cargas derivadas del forjado o forjados y el resto de la estructura.

En ambos casos el espesor del alzado y el de la zapata suelen determinarse de forma que ***no sea necesaria la armadura transversal*** para resistir frente al agotamiento por tracción del alma debido al esfuerzo cortante ($V_{rd} \leq V_{u2}$); se recuerda que dicha comprobación se efectuaría en la sección situada a un canto útil desde la base del alzado. Además deberá estudiarse el Estado Límite Último de ***agotamiento por rasante en la junta de hormigonado*** entre el alzado y la zapata. Las cuantías

mecánicas de armado son las mismas que se exponen en el Capítulo 8, "Diseño y disposiciones en vigas y soportes", en función de si se refieren a armaduras principales comprimidas o traccionadas. Los redondos suelen disponerse con las siguientes separaciones:

- redondos de diámetro Ø cada 100 mm (10 redondos pml.)
- redondos de diámetro Ø cada 150 mm (≈ 6,7 redondos pml.)
- redondos de diámetro Ø cada 200 mm (5 redondos pml.)
- redondos de diámetro Ø cada 250 mm (4 redondos pml.)
- redondos de diámetro Ø cada 300 mm (≈ 3,3 redondos pml.)

Las cuantías mínimas geométricas de armado establecidas en el apartado 42.3.5 de la Instrucción EHE-08 se indican a continuación, con las referencias de la Figura 163:

1. ***Armado principal a tracción del alzado*** (obtenida por cálculo a flexión del alzado): 1,2‰ si se arma con redondos B400 y 0,9‰ cuando se arma con redondos B500
2. ***Armado vertical del intradós***: 0,36‰ si se arma con redondos B400 y 0,27‰ cuando se arma con redondos B500; el mínimo constructivo será de 4Ø10 pml.
3. ***Armado horizontal del alzado***: 4‰ si se arma con B400 y 3,2‰ cuando se arma con B500; esta armadura se repartirá al 50% en ambas caras si son vistas; si la única cara vista es el intradós se dispondrá el 66% en dicha cara y el 33% en el trasdós; estas cuantías pueden reducirse al 2‰ si se disponen juntas verticales de contracción a distancias inferiores a 7,5 m con las barras horizontales interrumpidas; en la mitad superior del alzado (pero nunca en los 2,5 m inferiores del mismo) estas cuantías podrán también reducirse al 2‰; en el caso de alzados de espesor mayor que 50 cm, las cuantías se determinarán con un área efectiva de 50 cm, distribuidos en 25 cm por cara, ignorando la zona central.

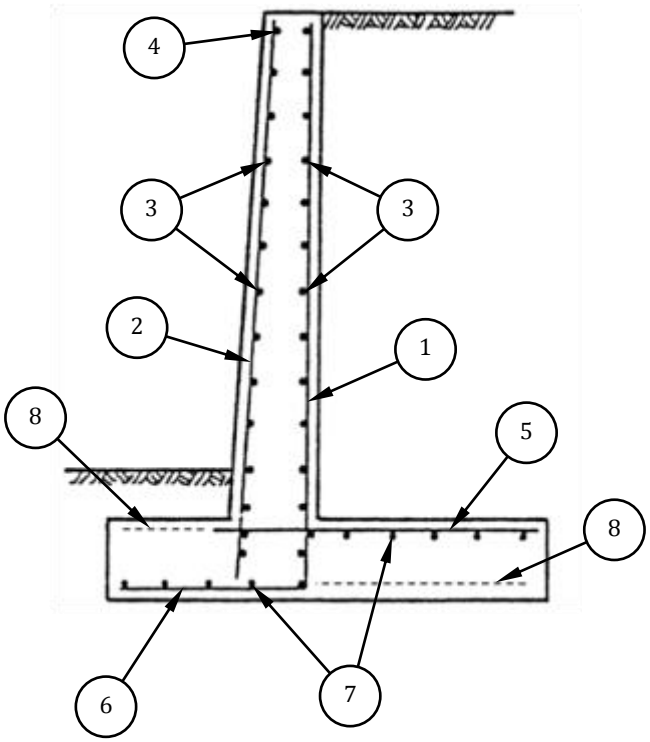



Figura 163. Armaduras constitutivas de un muro de contención

4. ***Armadura de coronación***: estará formada por, al menos, 2Ø16
5. ***Armadura principal a tracción del talón*** (obtenida por cálculo a flexión del talón sometido al peso de las tierras del trasdós): 1‰ si se arma con B400 y 0,9‰ cuando se arma con B500
6. ***Armadura principal a tracción de la puntera***: es la prolongación de la armadura vertical del trasdós de la base del alzado
7. ***Armadura horizontal de la zapata***: el 20% de la longitudinal en la cara correspondiente y, al menos, el mínimo geométrico de losas (2‰ con B400 y 1,8‰ con B500) entre ambas caras
8. ***Armadura longitudinal en el resto de la zapata***: el mínimo geométrico correspondiente a losas repartido entre ambas caras

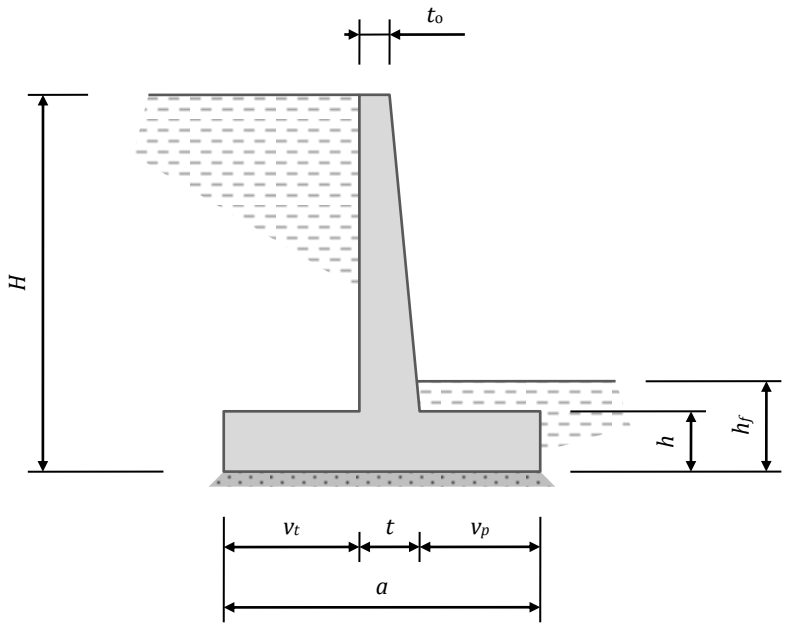



Figura 164. Dimensiones características de un muro de contención

Dependiendo de la altura $H$ desde la coronación del alzado hasta la base de la zapata, se pueden tomar los siguientes valores para la fase de predimensionamiento (ver Figura 164):

- ancho $a$ de la zapata: entre $0{,}45 \cdot H$ y $0{,}60 \cdot H$
- espesor $t$ del alzado en la base: en torno a la décima parte de $H$
- espesor $t_o$ del alzado en la coronación: por lo menos 25 cm
- canto $h$ de la zapata: por lo menos la mitad del vuelo $v_p$ y, en cualquier caso, al menos 50 cm
- vuelo $v_p$ de la puntera: entre $0{,}25 \cdot a$ y $0{,}30 \cdot a$
- vuelo $v_t$ del talón: en torno a $2 \cdot v_p$
- profundidad $h_f$: al menos 100 cm

**<u>Ejemplo 2</u>: El muro de contención de la Figura 165 está construido con HA-25 y armaduras B500 con recubrimiento mecánico de 50 mm. El relleno del trasdós es un terreno con un ángulo de rozamiento interno de 35° y un peso específico de 18 kN/m³. El sustrato de apoyo de la zapata del muro tiene una tensión admisible de 250 kN/m² y el mismo ángulo de rozamiento interno que el relleno del trasdós. Se pide efectuar las comprobaciones de estabilidad en el muro y dimensionar el armado del alzado.**

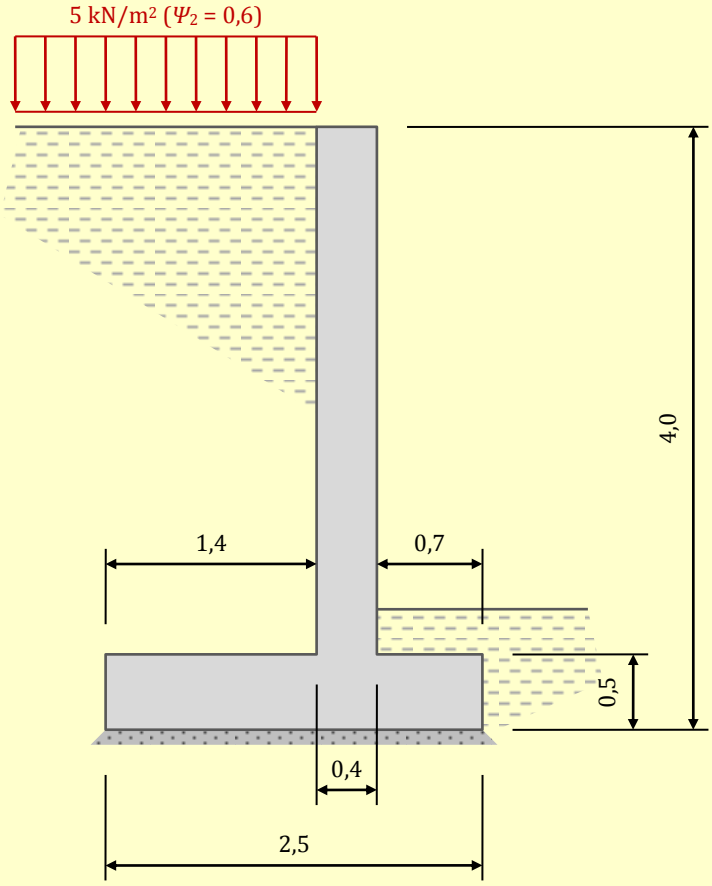



Figura 165. Muro de contención construido con HA-25 y B500S

En primer lugar, se determina el valor de las acciones verticales que gravitan sobre la zapata del muro:

- peso del trasdós:

$$18\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 1{,}4\ \text{m} \times (4\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) = 88{,}2\ \text{kN pml.}$$

- sobrecarga sobre el trasdós:

$$5\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times 1{,}4\ \text{m} = 7\ \text{kN pml.}$$

- peso del alzado:

$$25\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0{,}4\ \text{m} \times (4\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) = 35\ \text{kN pml.}$$

- peso propio de la zapata:

$$25\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \times 0{,}5\ \text{m} \times 2{,}5\ \text{m} = 31{,}25\ \text{kN pml.}$$

Estas cargas verticales y su posición se representan en la Figura 166.

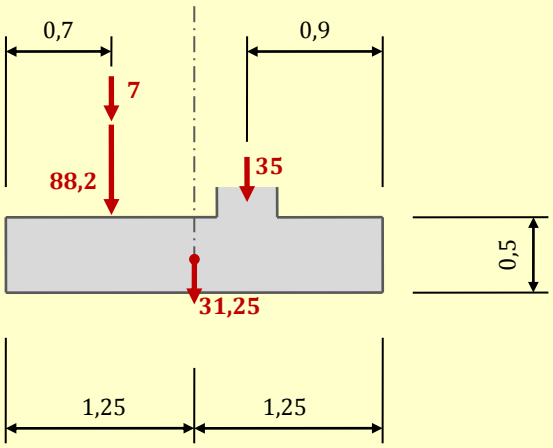



Figura 166. Cargas verticales sobre la zapata

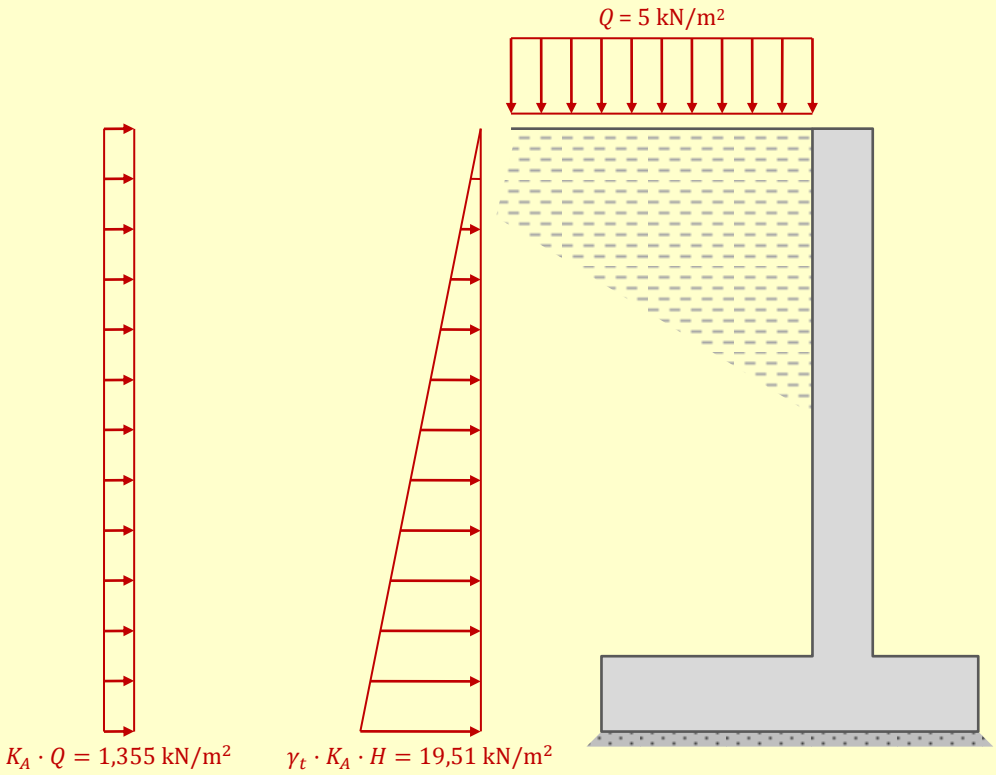



Figura 167. Leyes de empuje activo sobre el muro de contención

Para el cálculo del empuje del trasdós, se debe determinar primero el valor del coeficiente $K_A$ de empuje activo:

$$K_A = \frac{1 - \operatorname{sen}\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi} = \frac{1 - \operatorname{sen} 35°}{1 + \operatorname{sen} 35°} = 0{,}271$$

Las leyes de empuje sobre el muro de contención se muestran en la Figura 167; las unidades indicadas en dichas leyes (kN/m²) son, de hecho, distribuciones lineales aplicadas a una "rebanada" unitaria de muro (kN/m pml.).

Los empujes resultantes y su posición son:

- empuje debido al peso del trasdós:

$$E_G = 19{,}51\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times {}^1\!/_2 \times 4\ \text{m} = 39{,}02\ \text{kN pml.}$$

  … aplicado a ${}^1\!/_3 \times 4\ \text{m} = 1{,}33\ \text{m}$ de la base de la zapata

- sobrecarga sobre el trasdós:

$$E_Q = 1{,}355\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times 4\ \text{m} = 5{,}42\ \text{kN pml.}$$

  … aplicado a ${}^1\!/_2 \times 4\ \text{m} = 2\ \text{m}$ de la base de la zapata

La Figura 168 muestra la posición de los empujes y la suma y combinación de éstos más las cargas verticales aplicadas, para obtener las cargas características sobre la zapata.

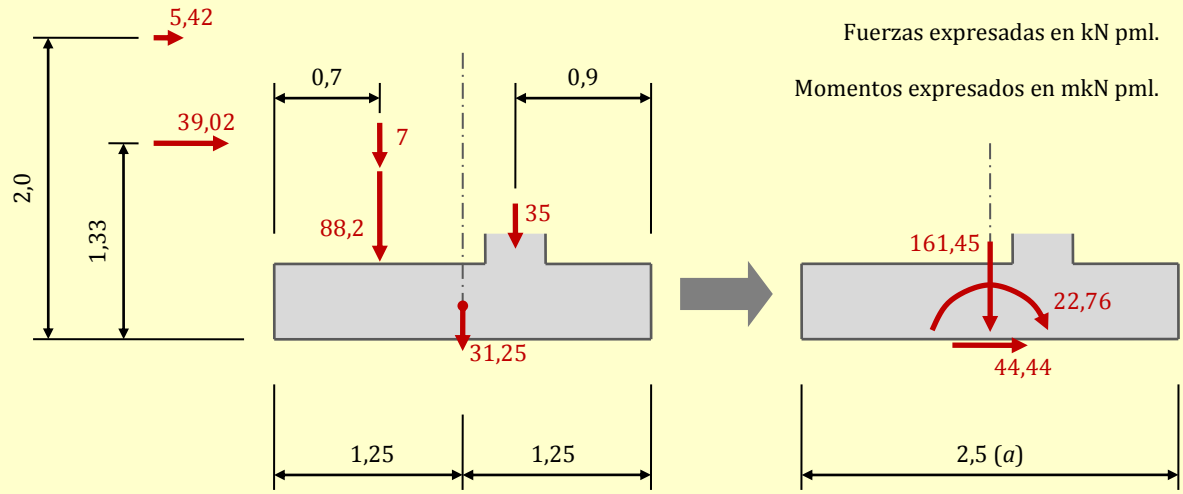



Figura 168. Fuerzas y momentos resultantes aplicados sobre la zapata del muro

La excentricidad $e_k$ de las cargas verticales características aplicadas en la zapata es:

$$e_k = \frac{M_k}{N_k} = \frac{22{,}76\ \text{mkN pml.}}{161{,}45\ \text{kN pml.}} = 0{,}141\ \text{m}$$

y su valor adimensional es:

$$\eta_k = \frac{e_k}{a} = \frac{0{,}141}{2{,}5} = 0{,}056$$

que es inferior a ${}^1\!/_4$ por lo que, de forma automática, el diseño del muro ***cumple la seguridad a vuelco***.

La tensión transmitida al sustrato de apoyo es:

$$\sigma_t = \frac{N_k}{b \cdot (a - 2 \cdot e_k)} = \langle b = 1\ \text{m} \rangle = \frac{N_k}{(a - 2 \cdot e_k)} = \frac{161{,}45\ \text{kN pml.}}{(2{,}5\ \text{m} - 2 \cdot 0{,}141\ \text{m})} = 72{,}8\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

que es inferior a la tensión admisible de 250 kN/m², por lo que también ***se satisface la comprobación de seguridad frente al hundimiento***.

En cuanto a la comprobación de deslizamiento, la ecuación [10.2.15] presentada para zapatas, sigue siendo válida para muros:

$$V_k = 44{,}44 \text{ kN pml.} \leq \frac{2}{3} \cdot N_k \cdot \text{tg}\left(\frac{3}{4} \cdot \varphi\right) = \frac{2}{3} \cdot 161{,}45 \text{ kN pml.} \cdot \text{tg}\left(\frac{3}{4} \cdot 35°\right) = 53{,}08 \text{ kN pml.}$$

Por lo tanto, el muro de contención ***tiene seguridad suficiente frente al deslizamiento***.

Para el armado del alzado y su comprobación estructural, las leyes de empuje se deben mayorar de acuerdo con los coeficientes de la EHE-08:

- 1,35 para el empuje activo debido al peso propio del trasdós
- 1,5 para el empuje activo debido a la sobrecarga $Q$ de 5 kN/m² aplicada en la coronación del trasdós

La Figura 169 representa las leyes de empuje activo que actúan sobre el trasdós del alzado, que es la cara traccionada en la que debe dimensionarse el armado vertical ($A_{s1}$). Así mismo, se representa también la sección $S_1$ de comprobación del agotamiento a cortante por tracción del alma. El canto útil $d$ del alzado es:

$$d = t - d' = 0{,}40 \text{ m} - 0{,}05 \text{ m} = 0{,}35 \text{ m}$$

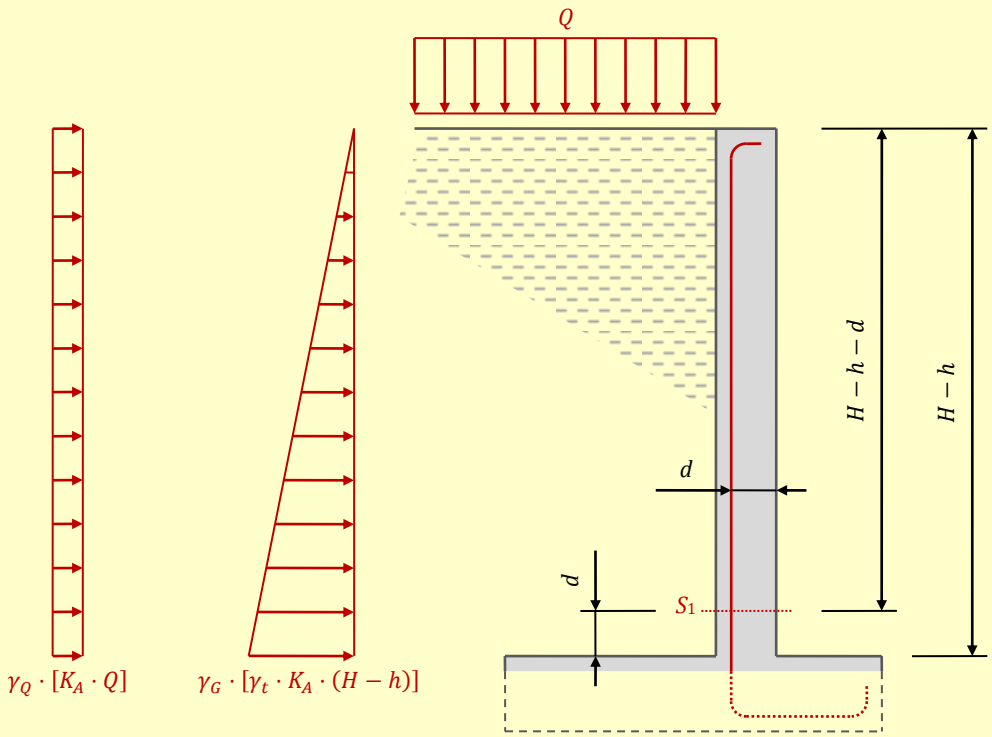



Figura 169. Leyes de empuje sobre el alzado del muro

Los esfuerzos de cálculo son los siguientes (se adopta $\gamma_G = 1{,}5$ para el efecto de empuje de tierras):

- momento flector:

$$M_d = \gamma_G \cdot \gamma_t \cdot K_A \cdot \frac{(H-h)^3}{6} + \gamma_Q \cdot K_A \cdot Q \cdot \frac{(H-h)^2}{2} = 64{,}7 \text{ mkN pml.}$$

- esfuerzo cortante:

$$V_d = \gamma_G \cdot \gamma_t \cdot K_A \cdot \frac{(H-h-d)^2}{2} + \gamma_Q \cdot K_A \cdot Q \cdot (H-h-d) = 42{,}7 \text{ kN pml.}$$

La capacidad $U_0$ del alzado es:

$$U_0 = f_{cd} \cdot b \cdot d = \frac{25000 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{1{,}5} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0{,}35 \text{ m} = 5833{,}3 \text{ kN pml.}$$

y el momento límite del alzado es:

$$M_{lim} = 0{,}375 \cdot U_0 \cdot d = 0{,}375 \cdot 5833{,}3 \text{ kN pml.} \cdot 0{,}35 \text{ m} = 765{,}6 \text{ mkN pml.}$$

por lo que no hace falta tener en cuenta la contribución de la armadura de compresión (la de la cara del intradós). La capacidad mecánica de cálculo de la armadura vertical del trasdós es:

$$U_{s1} = U_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_d}{U_0 \cdot d}}\right) = 187{,}9 \text{ kN pml.}$$

Obsérvese que se ha despreciado el peso propio del alzado, y el cálculo de la armadura de tracción se ha hecho en flexión simple y no en flexión compuesta. Las cuantías mínimas para la armadura vertical de tracción son:

- geométrica, con acero B500S:

$$U_{s1} \geq \frac{0{,}9}{1000} \cdot A_c \cdot f_{yd} = \frac{0{,}9}{1000} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0{,}40 \text{ m} \cdot \frac{500000 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{1{,}15} = 156{,}5 \text{ kN pml.}$$

- mecánica:

$$U_{s1} \geq 0{,}20 \cdot A_c \cdot f_{ct,m,fl} = 0{,}20 \cdot 1 \text{ m} \cdot 0{,}40 \text{ m} \cdot 3080 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 246{,}4 \text{ kN pml.}$$

La resistencia media a flexotracción $f_{ct,m,fl}$ del hormigón es la correspondiente a un elemento hormigón HA-25 con un espesor de 400 mm (3,08 N/mm²). Por lo tanto, de acuerdo con los cálculos anteriores, la armadura vertical del trasdós se dimensiona por cuantía mecánica (246,4 kN pml.) y corresponde a 6 redondos de Ø12 por cada metro de muro (295,0 kN pml.); también se puede especificar como redondos de Ø12 cada 150 mm (≈ 6,7 redondos en cada metro).

La cuantía geométrica mínima para la armadura vertical del intradós es:

$$U_{s2} \geq \frac{0{,}27}{1000} \cdot A_c \cdot f_{yd} = \frac{0{,}3}{1000} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0{,}40 \text{ m} \cdot \frac{500000 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{1{,}15} = 46{,}9 \text{ kN pml.}$$

que sería cubierta por 2 redondos de Ø10 por cada metro de muro (68,3 kN pml.) aunque, como se apuntó anteriormente, el mínimo constructivo es 4Ø10 por metro de alzado o, lo que es lo mismo, Ø10 cada 250 mm.

Con redondos de B500S, si se disponen juntas verticales de contracción a distancias no mayores que 7,5 m, las armaduras horizontales se arman para un mínimo geométrico de:

$$U_{s,horiz} \geq \frac{1{,}6}{1000} \cdot A_c \cdot f_{yd} = \frac{1{,}6}{1000} \cdot 1 \text{ m} \cdot 0{,}40 \text{ m} \cdot \frac{500000 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{1{,}15} = 278{,}3 \text{ kN pml.}$$

La tercera parte de este mínimo (92,8 kN pml.) se dispone en el trasdós y el resto (185,5 kN pml.) se dispone en el intradós, que es la cara vista. Ello da lugar a:

- armado horizontal de Ø10 cada 300 mm (≈ 3Ø10 pml., 102,4 kN pml.) en el trasdós
- armado horizontal de Ø12 cada 250 mm (4Ø12 pml., 196,7 kN pml.) en el intradós

La comprobación a cortante se debe hacer teniendo en cuenta que se trata de un muro y que no llevará armado transversal, se emplea la siguiente expresión para el cálculo del agotamiento por tracción del alma:

$$V_{u2} = max\left[\frac{0{,}18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot \sqrt[3]{100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck}} \ ; \ \frac{0{,}075}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\xi^3 \cdot f_{ck}}\right] \cdot b \cdot d$$

La comprobación a cortante arroja los siguientes resultados:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{350 \text{ mm}}} = 1{,}756 \qquad A_{s1} = \langle 6\text{Ø}12 \rangle = 678{,}6 \text{ mm}^2$$

$$\rho_l = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} = \frac{678{,}6\ \text{mm}^2}{1000\ \text{mm} \cdot 350\ \text{mm}} = 0{,}00194$$

$$V_{u2} = max\left[0{,}357\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\ ;\ 0{,}582\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right] \cdot 1000\ \text{mm} \cdot 350\ \text{mm} = 203{,}6\ \text{kN pml.}$$

Como el cortante de cálculo es 42,7 kN pml. el muro ***cumple a cortante con suficiente seguridad***.

A modo de resumen, la Figura 170 representa el croquis de armado del alzado, incluyendo los redondos de coronación.

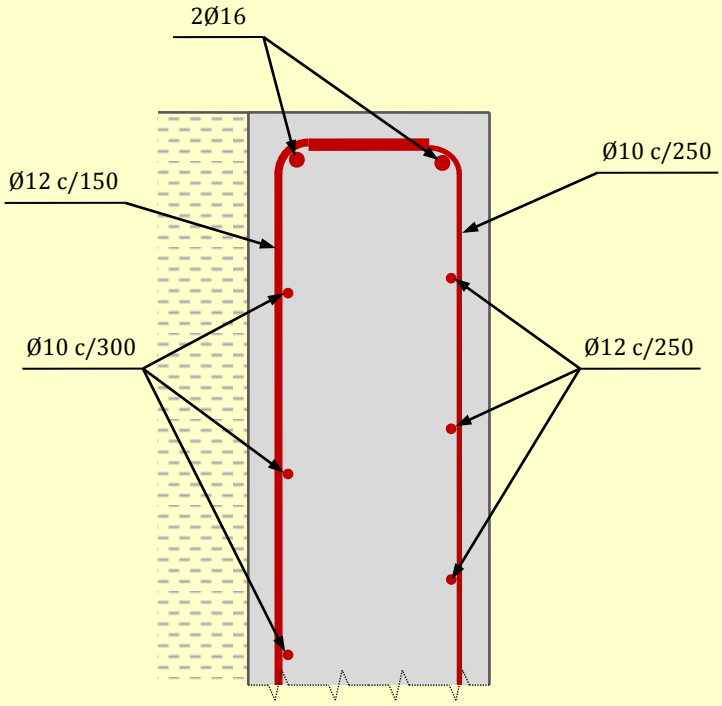



Figura 170. Croquis de armado del alzado

Por último, se va a efectuar también la comprobación del ELS de fisuración en el alzado del muro. En primer lugar se determina el momento de fisuración de la sección del muro, de espesor 0,4 m:

$$M_f = W_1 \cdot f_{ct,m,fl} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_{ct,m,fl} = \frac{1\ \text{m} \cdot (0{,}4\ \text{m})^2}{6} \cdot 3080\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 82{,}1\ \text{mkN pml.}$$

A continuación, se determina el momento de servicio cuasi-permanente, calculado con los empujes activos sin mayorar y reduciendo el empuje de la sobrecarga por el coeficiente de simultaneidad:

$$M_k = \gamma_t \cdot K_A \cdot \frac{(H-h)^3}{6} + \Psi_2 \cdot K_A \cdot Q \cdot \frac{(H-h)^2}{2} = 39{,}8\ \text{mkN pml.}$$

Por lo tanto, no son necesarios cálculos adicionales, ya que no se producen fisuras de tracción en el trasdós. En el caso de que el momento flector de servicio fuera superior al de fisuración, debería calcularse la abertura característica de fisura $w_k$ y compararla con el valor máximo para una clase general IIa, suponiendo que el relleno del trasdós pueda estar en contacto con aguas libre de cloruros de origen marino; ese valor máximo es 0,3 mm (ver Tabla 5.1.1.2 de la EHE-08). Dependiendo además de la agresividad del suelo podría limitarse aún más la abertura característica de fisura, de acuerdo con los valores prescritos para las clases específicas Q.

En cuanto a la fisuración por compresión, se aplican las ecuaciones [9.1.5], [9.1.9], [9.2.1] y [9.2.2]:

$$E_s = 200000\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \qquad E_{cm} = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{ck} + 8\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 27264\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \qquad n = \frac{E_s}{E_{cm}} = 7{,}33$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} = 0{,}00194 \qquad x = 54{,}3 \text{ mm} \qquad I_f = 4{,}882 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{M_k \cdot x}{I_f} = \frac{39{,}8 \cdot 10^6 \text{ mmN} \cdot 54{,}3 \text{ mm}}{4{,}882 \cdot 10^8 \text{ mm}^4} = 4{,}43 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < 0{,}60 \cdot f_{ck} = 15 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Como se ha visto, la tensión de compresión del hormigón en servicio es inferior al 60% de la resistencia característica y, por lo tanto, la comprobación de fisuración por compresión es satisfactoria.

# BIBLIOGRAFÍA

*Instrucción de hormigón estructural EHE-08 (3ª edición)*; Comisión Permanente del Hormigón; Centro de Publicaciones del Ministerio de Fomento, Madrid, 2.009

*CTE: Código Técnico de la Edificación*; Ministerio de la Vivienda; Centro de Publicaciones del Ministerio de la Vivienda, Madrid, 2.006

*NCSE-02: Norma de construcción sismorresistente: parte general y edificación*; Comisión Permanente de Normas Sismorresistentes; Centro de Publicaciones del Ministerio de Fomento, Madrid, 2.003

*BS EN 1992-1-1:2004 Eurocode 2: Design of concrete structures. General rules and rules for buildings*; Comité Europeo de Normalización, Sub-comité B/525/2 del BSI; BSI, Londres, 2.006

*Jiménez Montoya - Hormigón armado (15ª edición)*; Álvaro García Meseguer, Francisco Morán Cabré, Juan Carlos Arroyo Portero; Gustavo Gili, Barcelona, 2.009

*Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón (2 tomos, 2ª edición)*; José Calavera Ruíz; Intemac, Madrid, 2.008

*Hormigón: adaptado a la instrucción de recepción de cementos y a la instrucción de hormigón estructural EHE*; Manuel Fernández Cánovas; E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, Madrid, 2.002

*Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado: forjados, losas, vigas de canto, vigas planas*; José Calavera Ruíz, Luis García Dutari; Intemac, Madrid, 1.992

*Cálculo de estructuras de cimentación*; José Calavera Ruíz; Intemac, Madrid, 2.000

*Curso aplicado de cimentaciones (6ª Edición)*; José María Rodríguez Ortiz, Jesús Serra Gesta, Carlos Oteo Mazo; Servicio de Publicaciones del Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid, 1.995

# APÉNDICE 1. TABLAS

| CAPACIDAD MECÁNICA DE REDONDOS B400 S/SD | | | | | | | | | | $f_{yd}$ = 348 MPa | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ø | Capacidad mecánica (kN) | | | | | | | | | | |
| (mm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 6 | 9,8 | 19,7 | 29,5 | 39,3 | 49,2 | 59,0 | 68,8 | 78,7 | 88,5 | 98,3 | 118,0 |
| 8 | 17,5 | 35,0 | 52,5 | 69,9 | 87,4 | 104,9 | 122,4 | 139,9 | 157,4 | 174,8 | 209,8 |
| 10 | 27,3 | 54,6 | 82,0 | 109,3 | 136,6 | 163,9 | 191,2 | 218,5 | 245,9 | 273,2 | 327,8 |
| 12 | 39,3 | 78,7 | 118,0 | 157,4 | 196,7 | 236,0 | 275,4 | 314,7 | 354,0 | 393,4 | 472,1 |
| 14 | 53,5 | 107,1 | 160,6 | 214,2 | 267,7 | 321,3 | 374,8 | 428,3 | 481,9 | 535,4 | 642,5 |
| 16 | 69,9 | 139,9 | 209,8 | 279,7 | 349,7 | 419,6 | 489,5 | 559,5 | 629,4 | 699,3 | 839,2 |
| 20 | 109,3 | 218,5 | 327,8 | 437,1 | 546,4 | 655,6 | 764,9 | 874,2 | 983,5 | 1092,7 | 1311,3 |
| 25 | 170,7 | 341,5 | 512,2 | 683,0 | 853,7 | 1024,4 | 1195,2 | 1365,9 | 1536,6 | 1707,4 | 2048,9 |
| 32 | 279,7 | 559,5 | 839,2 | 1119,0 | 1398,7 | 1678,4 | 1958,2 | 2237,9 | 2517,6 | 2797,4 | 3356,9 |
| 40 | 437,1 | 874,2 | 1311,3 | 1748,4 | 2185,5 | 2622,5 | 3059,6 | 3496,7 | 3933,8 | 4370,9 | 5245,1 |

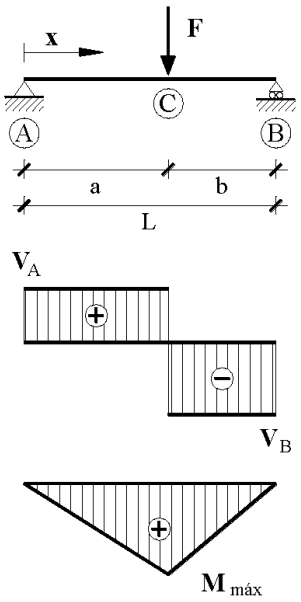
| CAPACIDAD MECÁNICA DE REDONDOS B500 S/SD. Tracción | | | | | | | | | | $f_{yd}$ = 435 MPa | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ø | Capacidad mecánica (kN) | | | | | | | | | | |
| (mm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 6 | 12,3 | 24,6 | 36,9 | 49,2 | 61,5 | 73,8 | 86,1 | 98,3 | 110,6 | 122,9 | 147,5 |
| 8 | 21,9 | 43,7 | 65,6 | 87,4 | 109,3 | 131,1 | 153,0 | 174,8 | 196,7 | 218,5 | 262,3 |
| 10 | 34,1 | 68,3 | 102,4 | 136,6 | 170,7 | 204,9 | 239,0 | 273,2 | 307,3 | 341,5 | 409,8 |
| 12 | 49,2 | 98,3 | 147,5 | 196,7 | 245,9 | 295,0 | 344,2 | 393,4 | 442,6 | 491,7 | 590,1 |
| 14 | 66,9 | 133,9 | 200,8 | 267,7 | 334,6 | 401,6 | 468,5 | 535,4 | 602,4 | 669,3 | 803,2 |
| 16 | 87,4 | 174,8 | 262,3 | 349,7 | 437,1 | 524,5 | 611,9 | 699,3 | 786,8 | 874,2 | 1049,0 |
| 20 | 136,6 | 273,2 | 409,8 | 546,4 | 683,0 | 819,5 | 956,1 | 1092,7 | 1229,3 | 1365,9 | 1639,1 |
| 25 | 213,4 | 426,8 | 640,3 | 853,7 | 1067,1 | 1280,5 | 1494,0 | 1707,4 | 1920,8 | 2134,2 | 2561,1 |
| 32 | 349,7 | 699,3 | 1049,0 | 1398,7 | 1748,4 | 2098,0 | 2447,7 | 2797,4 | 3147,1 | 3496,7 | 4196,1 |
| 40 | 546,4 | 1092,7 | 1639,1 | 2185,5 | 2731,8 | 3278,2 | 3824,5 | 4370,9 | 4917,3 | 5463,6 | 6556,4 |

| CAPACIDAD MECÁNICA DE REDONDOS B500 S/SD. Compresión. Estribos. Tirantes | | | | | | | | | | $f_{yd}$ = 400 MPa | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ø | Capacidad mecánica (kN) | | | | | | | | | | |
| (mm) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 6 | 11,3 | 22,6 | 33,9 | 45,2 | 56,5 | 67,9 | 79,2 | 90,5 | 101,8 | 113,1 | 135,7 |
| 8 | 20,1 | 40,2 | 60,3 | 80,4 | 100,5 | 120,6 | 140,7 | 160,8 | 181,0 | 201,1 | 241,3 |
| 10 | 31,4 | 62,8 | 94,2 | 125,7 | 157,1 | 188,5 | 219,9 | 251,3 | 282,7 | 314,2 | 377,0 |
| 12 | 45,2 | 90,5 | 135,7 | 181,0 | 226,2 | 271,4 | 316,7 | 361,9 | 407,2 | 452,4 | 542,9 |
| 14 | 61,6 | 123,2 | 184,7 | 246,3 | 307,9 | 369,5 | 431,0 | 492,6 | 554,2 | 615,8 | 738,9 |
| 16 | 80,4 | 160,8 | 241,3 | 321,7 | 402,1 | 482,5 | 563,0 | 643,4 | 723,8 | 804,2 | 965,1 |
| 20 | 125,7 | 251,3 | 377,0 | 502,7 | 628,3 | 754,0 | 879,6 | 1005,3 | 1131,0 | 1256,6 | 1508,0 |
| 25 | 196,3 | 392,7 | 589,0 | 785,4 | 981,7 | 1178,1 | 1374,4 | 1570,8 | 1767,1 | 1963,5 | 2356,2 |
| 32 | 321,7 | 643,4 | 965,1 | 1286,8 | 1608,5 | 1930,2 | 2251,9 | 2573,6 | 2895,3 | 3217,0 | 3860,4 |
| 40 | 502,7 | 1005,3 | 1508,0 | 2010,6 | 2513,3 | 3015,9 | 3518,6 | 4021,2 | 4523,9 | 5026,5 | 6031,9 |

# APÉNDICE 2. PRONTUARIO

El prontuario de las páginas siguientes cubre el cálculo de esfuerzos y deformaciones en un amplio número de casos de vigas simples y continuas de 2 y 3 vanos.

## VIGA SIMPLE APOYADA: carga puntual F genérica.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{Fb}{L}$ $R_B = \frac{Fa}{L}$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{Fb}{L}$ $V_{CB} = -\frac{Fa}{L}$

Flectores: $M_{AC} = \frac{Fb}{L}x$ $M_{CB} = \frac{Fa}{L}(L-x)$

$$M_{máx} = M_C = \frac{Fab}{L} \quad \text{para} \quad x = a$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_A = -\frac{Fab}{6EIL}(L+b) \qquad \varphi_B = \frac{Fab}{6EIL}(L+a) \qquad \varphi_C = \frac{Fab}{3EIL}(a-b)$$

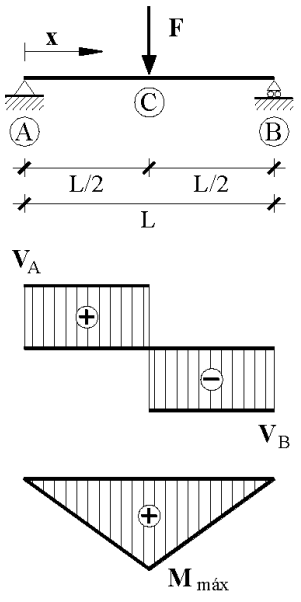
Elástica:

$$y_{AC} = \frac{FLbx}{6EI}\left(1-\frac{b^2}{L^2}-\frac{x^2}{L^2}\right) \qquad y_{CB} = \frac{FLa(L-x)}{6EI}\left(1-\frac{a^2}{L^2}-\frac{(L-x)^2}{L^2}\right)$$

Flecha máxima (**a**>**b**):

$$y_{máx} = \frac{Fb}{9EIL\sqrt{3}}\left(L^2-b^2\right)^{3/2} \quad \text{para} \quad x = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: carga puntual F centrada.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = R_B = \frac{F}{2}$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{F}{2}$ $V_{CB} = -\frac{F}{2}$

Flectores: $M_{AC} = \frac{F}{2}x$ $M_{CB} = \frac{F}{2}(L-x)$

$$M_{máx} = M_C = \frac{FL}{4} \quad \text{para} \quad x = \frac{L}{2}$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_A = -\frac{FL^2}{16EI} \qquad \varphi_B = \frac{FL^2}{16EI} \qquad \varphi_C = 0$$

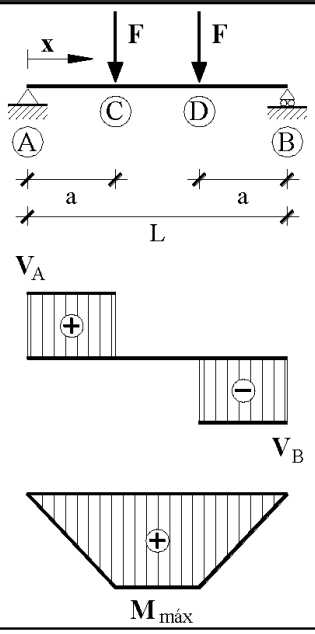
Elástica:

$$y_{AC} = \frac{FL^2x}{16EI}\left(1-\frac{4}{3}\frac{x^2}{L^2}\right) \qquad y_{CB} = \frac{FL^2(L-x)}{12EI}\left(\frac{3}{4}-\frac{(L-x)^2}{L^2}\right)$$

Flecha máxima:

$$y_{máx} = y_C = \frac{FL^3}{48EI} \quad \text{para} \quad x = \frac{L}{2}$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: cargas puntuales F simétricas.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_A = R_B = F}$

Cortantes: $\mathbf{V_{AC} = F}$ $\quad \mathbf{V_{CD} = 0}$ $\quad \mathbf{V_{DB} = -F}$

Flectores: $\mathbf{M_{AC} = Fx}$ $\quad \mathbf{M_{DB} = F(L-x)}$ $\quad \mathbf{M_{CD} = M_{máx} = Fa}$

### Deformaciones

Giros:

$$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{Fa(L-a)}{2EI} \qquad -\varphi_C = \varphi_D = \frac{Fa(L-2a)}{2EI}$$

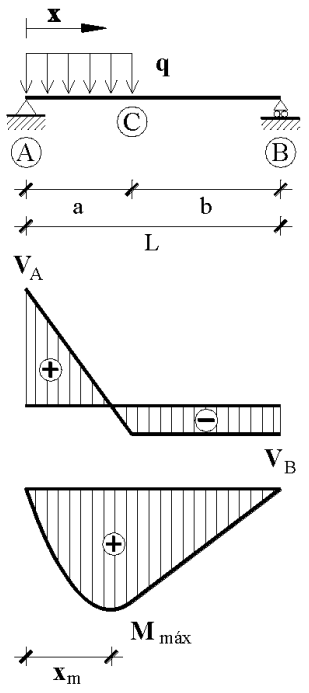
Elástica:

$$y_{AC} = \frac{Fx}{6EI}\left(3aL - 3a^2 - x^2\right) \qquad y_{CD} = \frac{Fa}{6EI}\left(3Lx - 3x^2 - a^2\right)$$

Flecha máxima:

$$y_{máx} = \frac{Fa}{24EI}\left(3L^2 - 4a^2\right) \quad \text{para} \quad x = \frac{L}{2}$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: carga uniforme q en un extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_A = \frac{qa}{L}\left(b + \frac{a}{2}\right)}$ $\quad \mathbf{R_B = \frac{qa^2}{2L}}$

Cortantes:

$$V_A = \frac{qa}{L}\left(b + \frac{a}{2}\right) \qquad V_{AC} = \frac{qa}{L}\left(b + \frac{a}{2}\right) - px \qquad V_{CB} = -\frac{qa^2}{2L}$$

Flectores: $\mathbf{M_{AC} = \frac{qa}{L}\left(b + \frac{a}{2}\right)x - \frac{px^2}{2}}$ $\quad \mathbf{M_{CB} = \frac{qa^2}{2L}(L - x)}$

$$M_{máx} = \frac{qa^2}{2}\left(1 - \frac{a}{2L}\right)^2 \quad \text{para} \quad x_m = a\left(1 - \frac{a}{2L}\right)$$

### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = -\frac{qa^2}{24EIL}(L+b)^2$ $\quad \varphi_B = \frac{qa^2}{12EI}\left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)L$

Elástica:

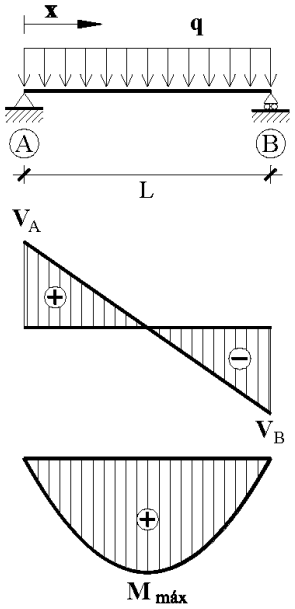
$$y_{AC} = \frac{qx}{24EIL}\left[Lx^3 - 4a\left(b + \frac{a}{2}\right)x^2 + a^2(L+b)^2\right]$$

$$y_{CB} = -\frac{q(L-x)a^2}{12EI\,L}\left[(L-x)^2 - L^2\left(1 - \frac{a^2}{2L^2}\right)\right]$$

Flecha máxima: $y_{máx} = \frac{qa^2}{216EIL}\left(2L^2 - a^2\right)\sqrt{6\left(2L^2 - a^2\right)}$

$$\text{para} \quad a < 0{,}4531L \quad \text{en} \quad x = L - \sqrt{\frac{L^2}{3} - \frac{a^2}{6}}$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: carga uniforme q en todo el vano.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = R_B = \frac{qL}{2}$

Cortantes: $V_{AB} = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$ $\qquad V_A = -V_B = \frac{qL}{2}$

Flectores: $M_{AB} = \frac{qx}{2}(L - x)$

$M_{máx} = \frac{qL^2}{8}$ para $x = \frac{L}{2}$

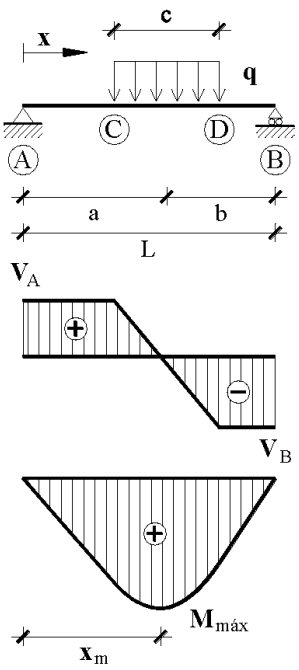
### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\qquad \varphi_B = \frac{qL^3}{24EI}$

Elástica: $y_{AB} = \frac{qx}{24EI}\left(x^3 - 2Lx^2 + L^3\right)$

Flecha máxima: $y_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI}$ para $x = \frac{L}{2}$

## VIGA SIMPLE APOYADA: carga uniforme q en tramo intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{qbc}{L}$ $\qquad R_B = \frac{qac}{L}$

Cortantes:

$V_{AC} = \frac{qbc}{L}$ $\qquad V_{CD} = \frac{qbc}{L} - q\left(\frac{c}{2} - a + x\right)$ $\qquad V_{DB} = -\frac{qac}{L}$

Flectores: $M_{AC} = \frac{qbc}{L}x$ $\qquad M_{CD} = \frac{qbc}{L}x - \frac{q}{2}\left[x - a + \frac{c}{2}\right]^2$

$M_{DB} = \frac{qac}{L}(L - x)$ $\qquad M_{máx} = \frac{qbc}{2L}\left(2a - c + \frac{bc}{L}\right)$ para $x_m = a - \frac{c}{2} + \frac{bc}{L}$

### Deformaciones

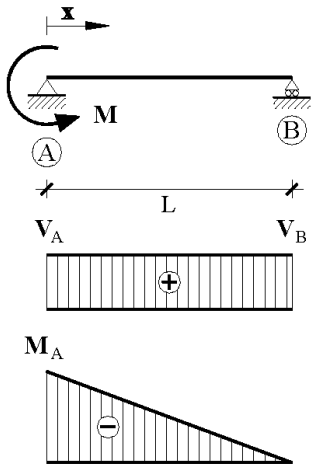
Giros: $\varphi_A = -\frac{qabc}{6EIL}\left(L + b - \frac{c^2}{4a}\right)$ $\qquad \varphi_B = \frac{qabc}{6EIL}\left(L + a - \frac{c^2}{4b}\right)$

Elástica: $y_{AC} = \frac{qbcx}{6EIL}\left[-x^2 + a\left(L + b - \frac{c^2}{4a}\right)\right]$

$y_{CD} = \frac{q}{24EIL}\left[L\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^4 - 4bcx^3 + 4abc\left(L + b - \frac{c^2}{4a}\right)x\right]$

$y_{DB} = \frac{qac(L - x)}{6EI\,L}\left[-(L - x)^2 + b\left(L + a - \frac{c^2}{4b}\right)\right]$

## VIGA SIMPLE APOYADA: momento puntual M en extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{M}{L}$ $\quad R_B = -\frac{M}{L}$

Cortantes: $V_{AB} = \frac{M}{L}$

Flectores: $M_{AB} = -M\left(1-\frac{x}{L}\right)$ $\quad M_A = -M$ $\quad M_B = 0$

### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = \frac{ML}{3EI}$ $\quad \varphi_B = -\frac{ML}{6EI}$

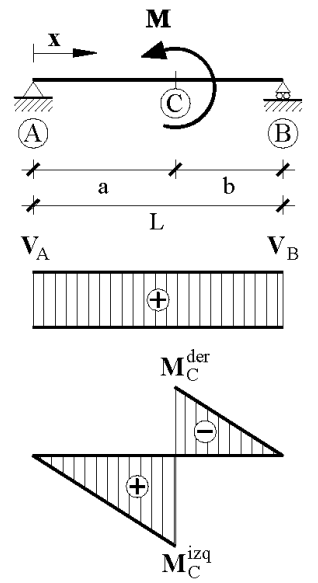
Elástica:

$$y_{AB} = -\frac{ML}{6EI}(L-x)\left[1-\left(\frac{L-x}{L}\right)^2\right]$$

Flecha máxima:

$$y_{máx} = -\frac{ML^2}{9EI\sqrt{3}} \quad \text{para} \quad x = L\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: momento puntual M intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{M}{L}$ $\quad R_B = -\frac{M}{L}$

Cortantes: $V_{AB} = \frac{M}{L}$

Flectores: $M_{AC} = \frac{M}{L}x$ $\quad M_{CB} = -\frac{M}{L}(L-x)$

$$M_C^{izq} = \frac{M}{L}a \qquad M_C^{der} = -\frac{M}{L}b \qquad |M| = |M_C^{izq}| + |M_C^{der}|$$

### Deformaciones

Giros:

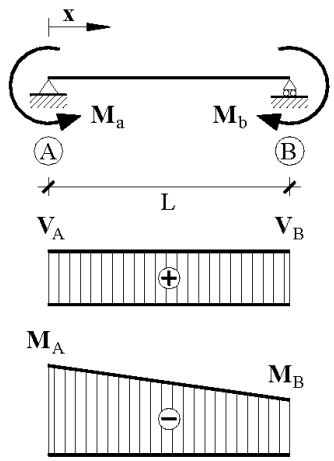
$$\varphi_A = \frac{ML}{6EI}\left(3\frac{b^2}{L^2}-1\right) \qquad \varphi_B = \frac{ML}{6EI}\left(3\frac{a^2}{L^2}-1\right) \qquad \varphi_C = \frac{M}{3EI\,L^2}\left(a^3+b^3\right)$$

Elástica:

$$y_{AC} = \frac{MLx}{6EI}\left(1-3\frac{b^2}{L^2}-\frac{x^2}{L^2}\right) \qquad y_{CB} = -\frac{ML(L-x)}{6EI}\left[1-3\frac{a^2}{L^2}-\left(\frac{L-x}{L}\right)^2\right]$$

Flecha en C: $y_C = -\frac{Mab}{3EI\,L}(b-a)$

## VIGA SIMPLE APOYADA: momentos puntuales M contrarios en extremos.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{M_a - M_b}{L}$ $\quad R_B = -\frac{M_a - M_b}{L}$

Cortantes: $V_{AB} = \frac{M_a - M_b}{L}$

Flectores:

$$M_{AB} = -\frac{M_a}{L}(L - x) - \frac{M_b}{L}x \qquad M_A = -M_a \qquad M_B = -M_b$$

### Deformaciones

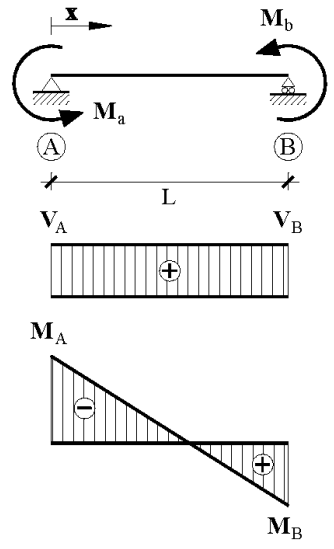
Giros:

$$\varphi_A = \frac{L}{6EI}(2M_a + M_b) \qquad \varphi_B = -\frac{L}{6EI}(M_a + 2M_b)$$

Elástica:

$$y_{AB} = -\frac{M_a x}{6EI}(L - x)\left[1 + \frac{L - x}{L} + \frac{M_b}{M_a}\left(1 + \frac{x}{L}\right)\right]$$

## VIGA SIMPLE APOYADA: momentos puntuales M en extremos.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{M_a + M_b}{L}$ $\quad R_B = -\frac{M_a + M_b}{L}$

Cortantes: $V_{AB} = \frac{M_a + M_b}{L}$

Flectores:

$$M_{AB} = -\frac{M_a}{L}(L - x) + \frac{M_b}{L}x \qquad M_A = -M_a \qquad M_B = M_b$$

### Deformaciones

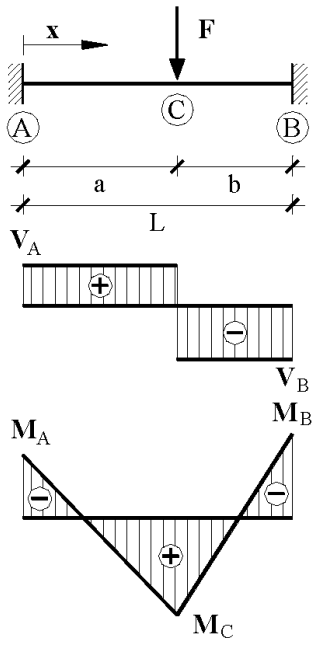
Giros:

$$\varphi_A = -\frac{L}{6EI}(2M_a - M_b) \qquad \varphi_B = -\frac{L}{6EI}(2M_b - M_a)$$

Elástica:

$$y_{AB} = \frac{x(L - x)}{6EI\,L}\left[(M_a + M_b)x - (2M_a - M_b)L\right]$$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: carga puntual F genérica.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{Fb^2}{L^3}(L+2a)$ $R_B = \frac{Fa^2}{L^3}(L+2b)$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{Fb^2}{L^3}(L+2a)$ $V_{CB} = -\frac{Fa^2}{L^3}(L+2b)$

Flectores: $M_A = -\frac{Fab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Fa^2b}{L^2}$ $M_C = \frac{2Fa^2b^2}{L^3}$

$M_{AC} = \frac{Fb^2}{L^3}(Lx+2ax-aL)$ $M_{CB} = \frac{Fa^2}{L^3}(Lb+L^2-Lx-2bx)$

### Deformaciones

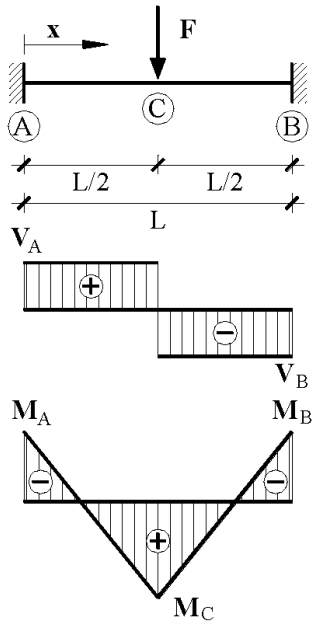
Elástica: $y_{AC} = \frac{Fb^2}{6EI}\left(3a-x-\frac{2ax}{L}\right)\frac{x^2}{L^2}$

$y_{CB} = \frac{Fa^2}{6EI}\left(3b-(L-x)-2b\frac{L-x}{L}\right)\frac{(L-x)^2}{L^2}$

Flechas:

$y_C = \frac{Fb^3a^3}{3EIL^3}$ $y_{máx} = \frac{2Fb^2a^3}{3EI(L+2a)^2}$ para $x = \frac{2aL}{L+2a}$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: carga puntual F centrada.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = R_B = \frac{F}{2}$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{F}{2}$ $V_{CB} = -\frac{F}{2}$

Flectores: $M_{AC} = \frac{FL}{8}\left(4\frac{x}{L}-1\right)$ $M_{CB} = \frac{FL}{8}\left(3-4\frac{x}{L}\right)$

$M_A = M_B = -\frac{FL}{8}$ $M_{máx} = M_C = \frac{FL}{8}$ para $x = \frac{L}{2}$

### Deformaciones

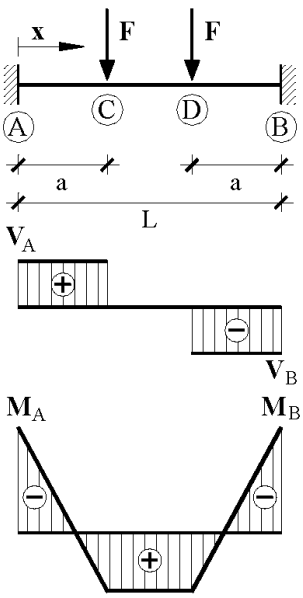
Elástica:

$y_{AC} = \frac{FLx^2}{48EI}\left(3-4\frac{x}{L}\right)$ $y_{CB} = \frac{F(L-x)^2}{48EI}(4x-L)$

Flecha máxima:

$y_{máx} = y_C = \frac{FL^3}{192EI}$ para $x = \frac{L}{2}$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: cargas puntuales F simétricas.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_A = R_B = F}$

Cortantes: $\mathbf{V_{AC} = F}$ $\quad \mathbf{V_{CD} = 0}$ $\quad \mathbf{V_{DB} = -F}$

Flectores: $\mathbf{M_{AC} = \frac{F}{L}\left(L(x-a)+a^2\right)}$ $\quad \mathbf{M_{CD} = \frac{Fa^2}{L}}$

$$\mathbf{M_{DB} = \frac{F}{L}\left(L(L-x-a)+a^2\right)} \qquad \mathbf{M_A = M_B = -\frac{Fa}{L}(L-a)}$$

### Deformaciones

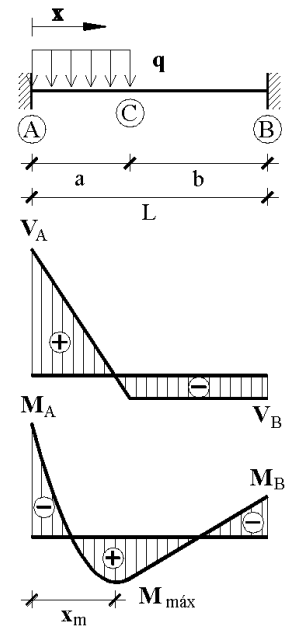
Elástica:

$$\mathbf{y_{AC} = \frac{Fx^2}{6EIL}\left(3aL-3a^2-Lx\right)} \qquad \mathbf{y_{CD} = \frac{Fa^2}{6EIL}\left(-aL+3Lx-3x^2\right)}$$

Flecha máxima:

$$\mathbf{y_{máx} = \frac{Fa^2}{24EI}(3L-4a)} \quad \text{para} \quad \mathbf{x = \frac{L}{2}}$$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: carga uniforme q en un extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones:

$$\mathbf{R_A = \frac{qa}{2L}(L+b)-\frac{M_A-M_B}{L}} \qquad \mathbf{R_B = \frac{qa^2}{2L}+\frac{M_A-M_B}{L}}$$

Cortantes:

$$\mathbf{V_A = R_A} \qquad \mathbf{V_{AC} = R_A - px} \qquad \mathbf{V_{CB} = R_A - pa} \qquad \mathbf{V_B = -R_B}$$

Flectores:

$$\mathbf{M_{AC} = R_A x + M_A - \frac{px^2}{2}} \qquad \mathbf{M_{CB} = R_B(L-x)+M_B}$$

$$\mathbf{M_A = -\frac{qa^2}{12L^2}\left(6L^2-8La+3a^2\right)} \qquad \mathbf{M_B = -\frac{qa^3}{3L}\left(1-\frac{3a}{4L}\right)}$$

### Deformaciones

Elástica:

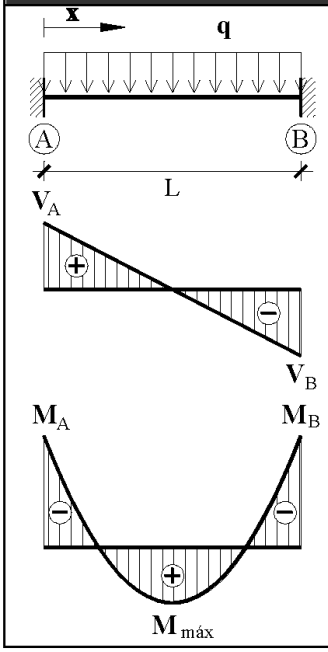
$$\mathbf{y_{AC} = \frac{x^2}{24EI}\left(qx^2-4R_Ax-12M_A\right)}$$

$$\mathbf{y_{CB} = \frac{1}{6EI}\left[R_Bx^3-3(M_B+LR_B)x^2+3(2M_B+LR_B)Lx-(3M_B+LR_B)L^2\right]}$$

Flecha máxima:

$$\mathbf{y_{máx} = -\frac{2M_B{}^3}{3R_B{}^2EI}} \quad \text{para} \quad \mathbf{x = \frac{2M_B+LR_B}{R_B}}$$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: carga uniforme q en todo el vano.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = R_B = \frac{qL}{2}$

Cortantes: $V_{AB} = q\left(\frac{L}{2} - x\right)$ $\qquad V_A = -V_B = \frac{qL}{2}$

Flectores: $M_{AB} = -\frac{q}{12}\left(L^2 - 6Lx + 6x^2\right)$ $\qquad M_A = M_B = -\frac{qL^2}{12}$

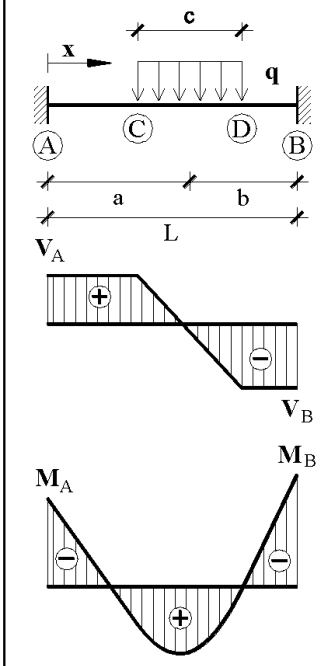
$M_{máx} = \frac{qL^2}{24}$ para $x = \frac{L}{2}$ $\qquad M_x = 0$ para $x = 0{,}2113L$

### Deformaciones

Elástica: $y_{AB} = \frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)^2$

Flecha máxima: $y_{máx} = \frac{qL^4}{384EI}$ para $x = \frac{L}{2}$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: carga uniforme q en tramo intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{qbc}{L} - \frac{M_A - M_B}{L}$ $\qquad R_B = \frac{qac}{L} + \frac{M_A - M_B}{L}$

Cortantes:

$V_{AC} = R_A$ $\qquad V_{CD} = R_A - q\left(x - a + \frac{c}{2}\right)$ $\qquad V_{DB} = -R_B$

Flectores: $M_{AC} = R_A x + M_A$ $\qquad M_{CD} = R_A x + M_A - \frac{q}{2}\left[x - a + \frac{c}{2}\right]^2$

$M_{DB} = R_B(L - x) + M_B$ $\qquad M_A = -\frac{qc^3}{12L^2}\left(L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2}\right)$

$M_B = -\frac{qc^3}{12L^2}\left(L - 3a + \frac{12a^2b}{c^2}\right)$

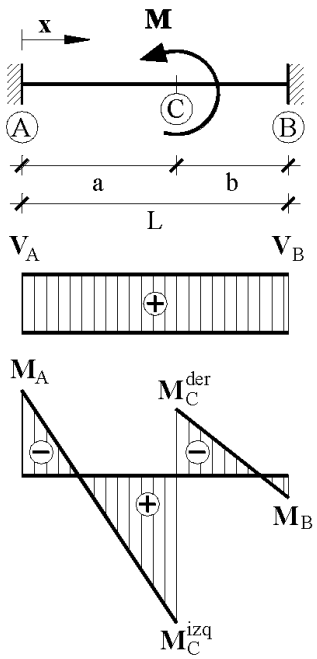
### Deformaciones

Elástica: $y_{AC} = \frac{x^2}{6EI}\left[-3M_A - R_A x\right]$

$y_{CD} = \frac{1}{24EI}\left[q\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^4 - 4R_A x^3 - 12M_A x^2\right]$

$y_{DB} = \frac{1}{6EI}\left[R_B x^3 - 3(M_B + LR_B)x^2 + 3(2M_A + LR_B)Lx - (3M_B + LR_B)L^2\right]$

## VIGA SIMPLE EMPOTRADA: momento puntual M intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{6M}{L^3}ab$ $\quad R_B = -\frac{6M}{L^3}ab$

Cortantes: $V_{AB} = \frac{6M}{L^3}ab$

Flectores:

$$M_{AC} = \frac{Ma}{L}\left[1-3\frac{a}{L}\left(1-2\frac{x}{L}\right)\right] \qquad M_{CB} = -\frac{Mb}{L}\left[1-3\frac{b}{L}\left(1-2\frac{L-x}{L}\right)\right]$$

$$M_A = \frac{Ma}{L}\left(1-3\frac{a}{L}\right) \qquad M_B = -\frac{Mb}{L}\left(1-3\frac{b}{L}\right)$$

$$M_C^{izq} = M_A + \frac{6M}{L^3}a^2b \qquad M_C^{der} = M_A - \frac{M}{L^3}\left(L^3 - 6a^2b\right)$$

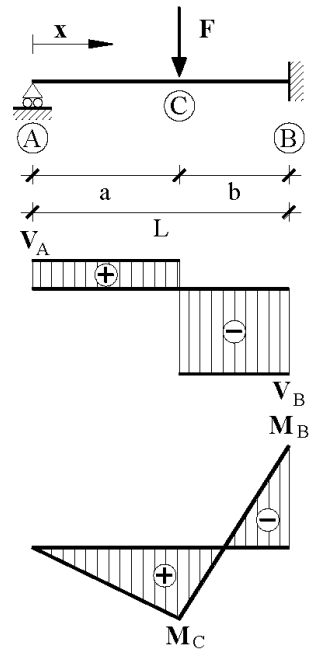
### Deformaciones

Elástica:

$$y_{AC} = \frac{Mbx^2}{2EIL}\left(2a\frac{L-x}{L^2} - \frac{b}{L}\right) \qquad y_{CB} = -\frac{Ma(L-x)^2}{2EIL}\left(2\frac{bx}{L^2} - \frac{a}{L}\right)$$

Flecha en C: $y_C = -\frac{Ma^2b^2}{2EIL^3}(a-b)$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: carga puntual F genérica.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{Fb^2}{2L^3}(3L-b)$ $\quad R_B = \frac{Fa}{2L^3}\left(3L^2-a^2\right)$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{Fb^2}{2L^3}(3L-b)$ $\quad V_{CB} = -\frac{Fa}{2L^3}\left(3L^2-a^2\right)$

Flectores: $M_B = -\frac{Fa}{2L^2}\left(L^2-a^2\right)$ $\quad M_C = \frac{Fa}{2L^3}b^2(3a+2b)$

$$M_{AC} = \frac{Fxb^2}{2L^3}(3a+2b) \qquad M_{CB} = \frac{Fa}{2L^3}\left(2L^3 - 3L^2x + a^2x\right)$$

### Deformaciones

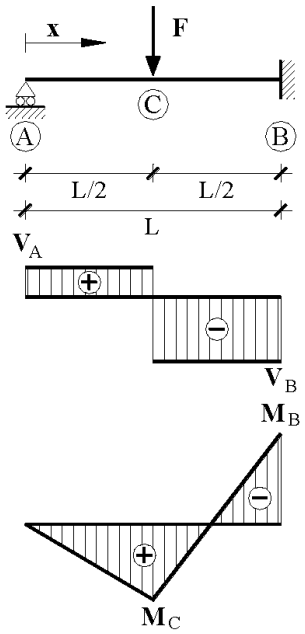
Giros: $\varphi_A = -\frac{Fa}{4EIL}(L-a)^2$ $\quad \varphi_C = -\frac{Fa(L-a)^2}{4EIL^3}\left(L^2-2aL-a^2\right)$

Elástica: $y_{AC} = \frac{Fb^2x}{12EIL^3}\left[3aL^2 - x^2(2L+a)\right]$

$$y_{CB} = \frac{Fa(L-x)^2}{12EI}\left[3\left(1-\frac{a^2}{L^2}\right) - \left(3-\frac{a^2}{L^2}\right)\frac{L-x}{L}\right]$$

Flechas: $y_{máx} = \frac{Fb^2a}{6EI}\sqrt{\frac{a}{2L+a}}$ para $x = L\sqrt{\frac{a}{2L+a}}$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: carga puntual F centrada.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{5}{16}F$ $\quad R_B = \frac{11}{16}F$

Cortantes: $V_{AC} = \frac{5}{16}F$ $\quad V_{CB} = -\frac{11}{16}F$

Flectores: $M_{AC} = \frac{5}{16}Fx$ $\quad M_{CB} = \frac{FL}{16}\left(11\frac{L-x}{L} - 3\right)$

$M_B = -\frac{3}{16}FL$ $\quad M_C = \frac{5}{32}FL$

### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = -\frac{Fa^2}{32EI}$ $\quad \varphi_C = \frac{FL^2}{128EI}$

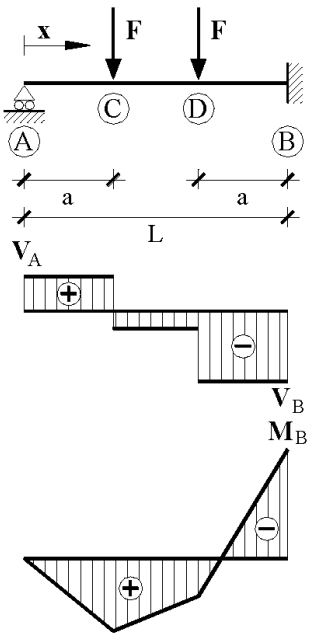
Elástica:

$y_{AC} = \frac{FL^2}{96EI}x\left(3 - 5\frac{x^2}{L^2}\right)$ $\quad y_{CB} = \frac{FL}{96EI}(L-x)^2\left(9 - 11\frac{L-x}{L}\right)$

Flechas:

$y_C = \frac{7FL^3}{768EI}$ $\quad y_{máx} = \frac{FL^3}{48\sqrt{5}EI}$ para $x = \frac{L}{\sqrt{5}}$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: cargas puntuales F simétricas.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = F\frac{2L^2 + 3a^2 - 3aL}{2L^2}$ $\quad R_B = F\frac{2L^2 - 3a^2 + 3aL}{2L^2}$

Cortantes:

$V_{AC} = F\frac{2L^2 + 3a^2 - 3aL}{2L^2}$ $\quad V_{CD} = 3Fa\frac{a-L}{2L^2}$ $\quad V_{DB} = F\frac{-2L^2 + 3a^2 - 3aL}{2L^2}$

Flectores: $M_{AC} = Fx\frac{2L^2 + 3a^2 - 3aL}{2L^2}$ $\quad M_{CD} = F\left[\frac{3a(a-L)x}{2L^2} + a\right]$

$M_{DB} = F\left(\frac{3a^2 - 3aL - 2L^2}{2L^2}x + L\right)$ $\quad M_B = -3Fa\frac{L-a}{2L}$

### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = -F\frac{a(L-a)}{4EI}$

Elástica:

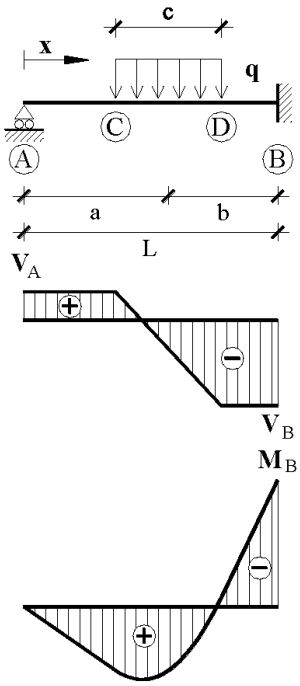
$y_{AC} = \frac{Fx}{12EIL^2}\left[\left(3aL - 3a^2 - 2L^2\right)x^2 + 3aL^3 - 3a^2L^2\right]$

$y_{CD} = \frac{Fa}{12EIL^2}\left[3(L-a)x^3 - 6L^2x^2 + 3L^2(L+a)x - 2L^2a^2\right]$

$y_{DB} = \frac{F(L-x)^2}{12EIL^2}\left[\left(3a^2 - 3aL - 2L^2\right)x + 2L\left(3a^2 - 3aL + L^2\right)\right]$

Flecha máxima: $y_{máx}$ para $x = \frac{2L - \sqrt{L^2 + 3a^2}}{3(L-a)L}$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: carga uniforme q intermedia.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{qbc}{L} + \frac{M_B}{L}$ $\quad R_B = \frac{qac}{L} - \frac{M_B}{L}$

Cortantes: $V_{AC} = R_A$ $\quad V_{CD} = R_A - q\left(x - a + \frac{c}{2}\right)$ $\quad V_{DB} = -R_B$

Flectores: $M_{AC} = R_A x$ $\quad M_{CD} = R_A x - \frac{q}{2}\left[x - a + \frac{c}{2}\right]^2$

$M_{DB} = R_B(L - x) + M_B$ $\quad M_B = -\frac{qabc}{2L^2}\left(L + a - \frac{c^2}{4b}\right)$

### Deformaciones

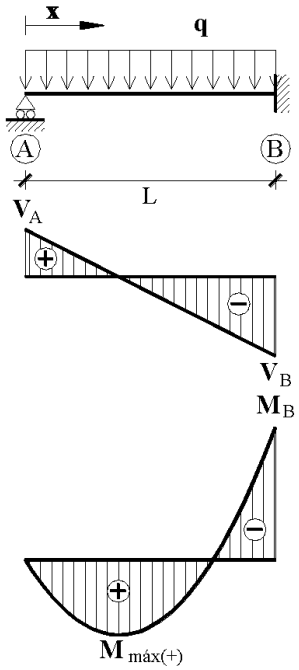
Giros: $\varphi_A = -\frac{qc^3}{48EIL}\left(L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2}\right)$

Elástica: $y_{AC} = \frac{x}{48EIL}\left[-8R_A L x^2 + qc^3\left(L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2}\right)\right]$

$y_{CD} = \frac{1}{48EIL}\left[-8R_A L x^3 + 2qL\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^4 + qc^3\left(L - 3b + \frac{12ab^2}{c^2}\right)x\right]$

$y_{DB} = -\frac{(L-x)^2}{6EI}\left[R_B(L - x) + 3M_B\right]$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: carga uniforme q en todo el vano.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_A = \frac{3}{8}qL$ $\quad R_B = \frac{5}{8}qL$

Cortantes: $V_{AB} = qL\left(\frac{3}{8} - \frac{x}{L}\right)$ $\quad V_A = \frac{3}{8}qL$ $\quad V_B = -\frac{5}{8}qL$

Flectores: $M_{AB} = \frac{qx}{8}(3L - 4x)$ $\quad M_B = -\frac{qL^2}{8}$

$M_{máx(+)} = \frac{9}{128}qL^2$ para $x = \frac{3}{8}L$ $\quad M_x = 0$ para $x = \frac{3}{4}L$

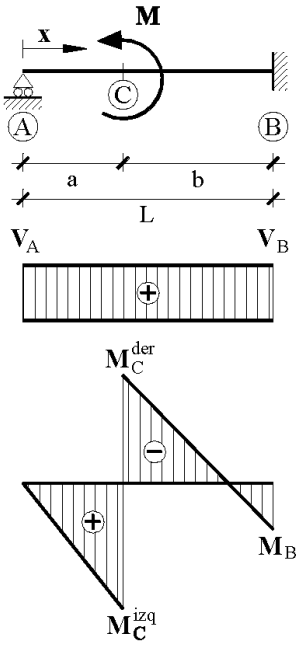
### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = -\frac{qL^3}{48EI}$

Elástica: $y_{AB} = \frac{qx}{48EI}(L + 2x)(L - x)^2$

Flecha máxima: $y_{máx} = \frac{qL^4}{185EI}$ para $x = \frac{1 + \sqrt{33}}{16}L$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: momento puntual M intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_A = -R_B = \frac{3}{2}\frac{M}{L^3}\left(L^2 - a^2\right)}$

Cortantes: $\mathbf{V_{AB} = R_A}$

Flectores:

$$\mathbf{M_{AC} = \frac{3}{2}\frac{Mx}{L^3}\left(L^2 - a^2\right)} \qquad \mathbf{M_{CB} = \frac{M}{2}\left[3\frac{x}{L}\left(1 - \frac{a^2}{L^2}\right) - 2\right]}$$

$$\mathbf{M_B = \frac{M}{2L^2}\left(L^2 - 3a^2\right)} \qquad \mathbf{M_C^{izq} = R_A\, a} \qquad \mathbf{M_C^{der} = R_A a - M}$$

### Deformaciones

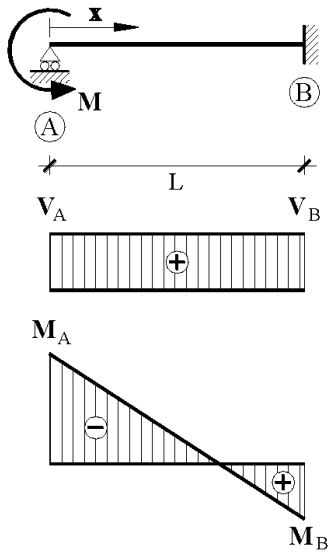
Giros: $\mathbf{\varphi_A = -\frac{M}{4EI\,L}(L-a)(3a-L)}$

$$\mathbf{\varphi_C = \frac{Mb}{4EI}\left[4 - 3\frac{b}{L}\left(1 + \frac{a}{L}\right)^2\right]}$$

Elástica: $\mathbf{y_{AC} = \frac{Mbx}{4EI\,L^3}\left[-4L^3 - \left(x^2 - 3L^2\right)(a+L)\right]}$

$$\mathbf{y_{CB} = \frac{M(L-x)^2}{4EI\,L^3}\left[2a^2L - x\left(L^2 - a^2\right)\right]}$$

## VIGA SIMPLE APOYADA-EMPOTRADA: momento puntual M extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones:

$$\mathbf{R_A = -R_B = \frac{3}{2}\frac{M}{L}}$$

Cortantes:

$$\mathbf{V_{AB} = R_A}$$

Flectores:

$$\mathbf{M_{AB} = \frac{M}{2}\left(3\frac{x}{L} - 2\right)} \qquad \mathbf{M_B = \frac{M}{2}}$$

### Deformaciones

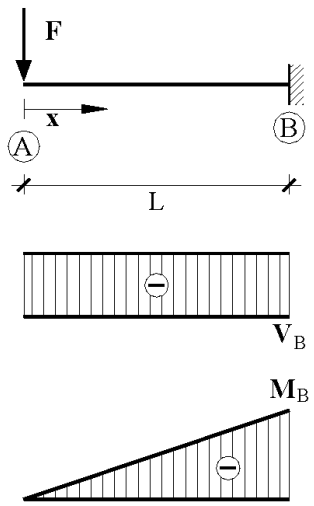
Giros:

$$\mathbf{\varphi_A = \frac{ML}{4EI}}$$

Elástica:

$$\mathbf{y_{AB} = -\frac{Mx}{4EI\,L}(L-x)^2}$$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: carga puntual F en extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones:

$$R_B = F$$

Cortantes:

$$V_{AB} = -F$$

Flectores:

$$M_{CB} = -Fx \qquad M_B = -FL$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_A = \frac{FL^2}{2EI}$$

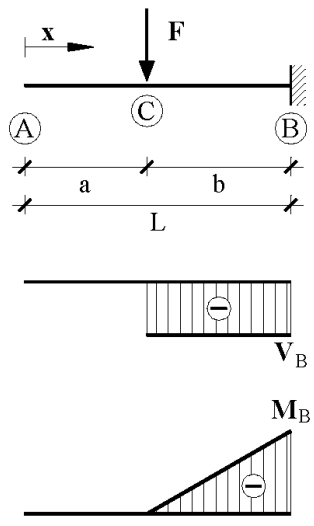
Elástica:

$$y_{AB} = \frac{F}{6EI}(L-x)^2(2L+x)$$

Flechas:

$$y_A = \frac{FL^3}{3EI}$$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: carga puntual F genérica.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones:

$$R_B = F$$

Cortantes:

$$V_{AC} = 0 \qquad V_{CB} = -F$$

Flectores:

$$M_{AC} = 0 \qquad M_{CB} = -F(x-a) \qquad M_B = -Fb$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_C = \varphi_A = \frac{Fb^2}{2EI}$$

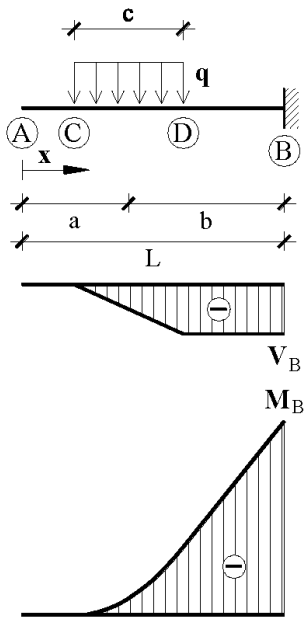
Elástica:

$$y_{AC} = \frac{Fb^2}{6EI}[3(L-x)-b] \qquad y_{CB} = \frac{F}{6EI}(L-x)^2(2b-a+x)$$

Flechas:

$$y_C = \frac{Fb^3}{3EI} \qquad y_A = \frac{Fb^2}{6EI}(2b+3a)$$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: carga uniforme q intermedia.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_B = qc}$

Cortantes: $\mathbf{V_{AC} = 0}$ $\quad \mathbf{V_{CD} = -q\left(x - a + \frac{c}{2}\right)}$ $\quad \mathbf{V_B = -qc}$

Flectores: $\mathbf{M_{AC} = 0}$ $\quad \mathbf{M_{CD} = -\frac{q}{2}\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^2}$

$\mathbf{M_{DB} = -qc(x - a)}$ $\quad \mathbf{M_B = -qcb}$

### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = \varphi_C = \frac{qc}{2EI}\left(b^2 + \frac{c^2}{12}\right)$ $\quad \varphi_D = \frac{qc}{2EI}\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)$

Elástica: $y_{AC} = \frac{qc}{6EI}\left[(a - x)\left(3b^2 + \frac{c^2}{4}\right) + 2b^3\right]$

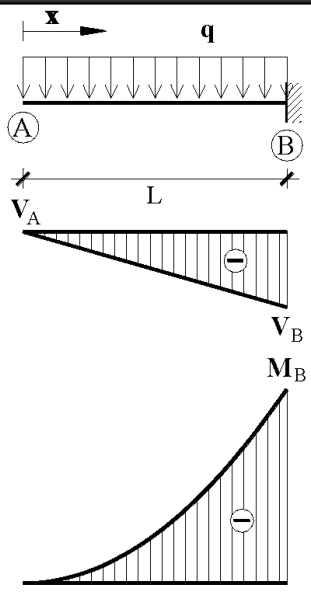
$y_{CD} = \frac{q}{24EI}\left[\left(x - a + \frac{c}{2}\right)^4 + 4c(a - x)\left(3b^2 + \frac{c^2}{4}\right) + 8b^3c\right]$

$y_{DB} = \frac{qc}{6EI}(L - x)^2(2b - a + x)$

Elástica: $y_A = \frac{qc}{6EI}\left[a\left(3b^2 + \frac{c^2}{4}\right) + 2b^3\right]$

$y_C = \frac{qc}{12EI}\left[\left(b + \frac{c}{2}\right)^2(4b - c) + c^3\right]$ $\quad y_D = \frac{qc}{EI}\left(b - \frac{c}{2}\right)^2\left(\frac{b}{3} + \frac{c}{12}\right)$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: carga uniforme q en todo el vano.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $\mathbf{R_B = qL}$

Cortantes: $\mathbf{V_{AB} = -q\,x}$ $\quad \mathbf{V_B = -qL}$

Flectores: $\mathbf{M_{AB} = -\frac{q\,x^2}{2}}$ $\quad \mathbf{M_B = -\frac{qL^2}{2}}$

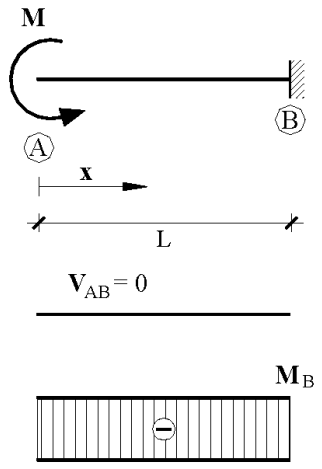
### Deformaciones

Giros: $\varphi_A = \frac{qL^3}{6EI}$

Elástica: $y_{AB} = \frac{q}{24EI}(L - x)^2\left(3L^2 + 2Lx + x^2\right)$

Flecha máxima: $y_A = \frac{qL^4}{8EI}$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: momento puntual M extremo.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones:

$$R_B = 0$$

Cortantes:

$$V_{AB} = 0$$

Flectores:

$$M_{AB} = -M$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_A = -\frac{ML}{EI}$$

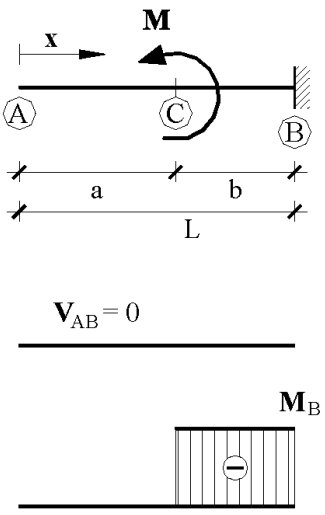
Elástica:

$$y_{AB} = \frac{M}{2EI}\left(x^2 - 2Lx + L^2\right)$$

Flecha:

$$y_A = \frac{ML^2}{2EI}$$

## VIGA SIMPLE EN VOLADIZO: momento puntual M intermedio.




### Reacciones y solicitaciones

Reacciones: $R_B = 0$

Cortantes: $V_{AB} = 0$

Flectores:

$$M_{AC} = 0 \qquad M_{CB} = -M \qquad M_B = -M$$

### Deformaciones

Giros:

$$\varphi_A = \varphi_C = \frac{Mb}{EI}$$

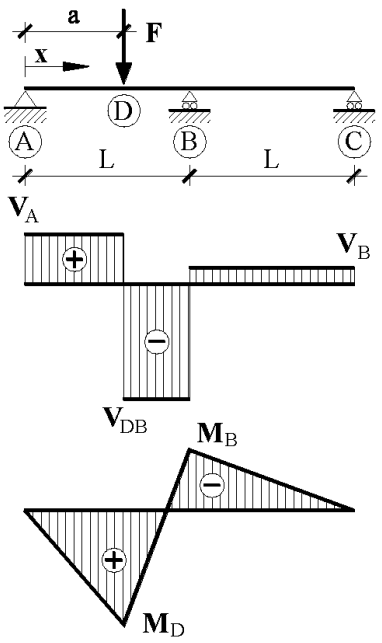
Elástica:

$$y_{AC} = \frac{M}{2EI}b\left(2L - 2x - b\right) \qquad y_{CB} = \frac{M}{2EI}\left(L - x\right)^2$$

Flecha:

$$y_A = \frac{M}{2EI}b\left(2L - b\right) \qquad y_C = \frac{Mb^2}{2EI}$$

## VIGA 2 VANOS IGUALES: carga puntual F en 1er vano.




**Reacciones**

$$R_A = \frac{F}{4L^3}\cdot\left(4L^3 - 5L^2 a + a^3\right)$$

$$R_B = \frac{F a}{2L^3}\cdot\left(3L^2 - a^2\right)$$

$$R_C = -\frac{F a}{4L^3}\cdot\left(L^2 - a^2\right)$$

**Cortantes**

$$V_{AD} = R_A$$

$$V_{DB} = \frac{F a}{4L^3}\cdot\left(a^2 - 5L^2\right)$$

$$V_{BC} = -R_C$$

**Flectores**

$$M_{AD} = \frac{F}{4L^3}\cdot\left(4L^3 - 5L^2 a + a^3\right)\cdot x$$

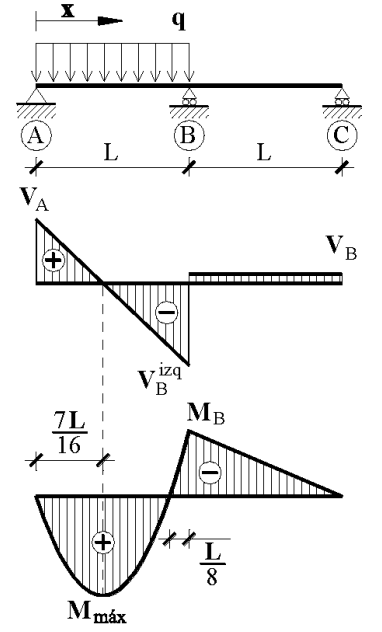
$$M_{DB} = \frac{F a}{4L^3}\cdot\left(a^2 - 5L^2\right)\cdot x + Pa$$

$$M_{BC} = \frac{F a}{4L^3}\cdot\left(L^2 - a^2\right)\cdot\left(x - 2L\right)$$

$$M_D = \frac{F a}{4L^3}\cdot\left(4L^3 - 5L^2 a + a^3\right)$$

$$M_B = -\frac{F a}{4L^2}\cdot\left(L^2 - a^2\right)$$

## VIGA 2 VANOS IGUALES: carga repartida en 1er vano.




**Reacciones**

$$R_A = \frac{7qL}{16}$$

$$R_B = \frac{5qL}{8}$$

$$R_C = -\frac{qL}{16}$$

**Cortantes**

$$V_{AB} = \frac{q}{16}\cdot\left(7L - 16x\right)$$

$$V_B^{izq} = -\frac{9qL}{16}$$

$$V_{BC} = \frac{qL}{16}$$

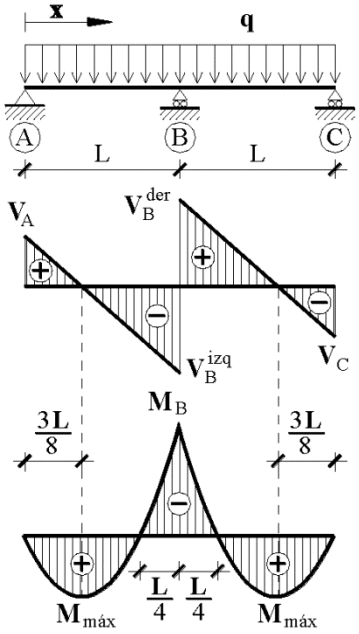
**Flectores**

$$M_{AB} = \frac{q x}{16}\cdot\left(7L - 8x\right)$$

$$M_{BC} = -\frac{qL}{16}\cdot\left(2L - x\right)$$

$$M_{máx} = \frac{49qL^2}{512} \quad \text{para} \quad x = \frac{7L}{16}$$

## VIGA 2 VANOS IGUALES: carga repartida en los 2 vanos.




### Reacciones

$$R_A = -R_C = \frac{3qL}{8}$$

$$R_B = \frac{5qL}{4}$$

### Cortantes

$$V_{AB} = \frac{q}{8}\cdot(3L - 8x)$$

$$V_B^{izq} = -V_B^{der} = -\frac{5qL}{8}$$

$$V_{BC} = \frac{q}{8}\cdot(13L - 8x)$$

### Flectores

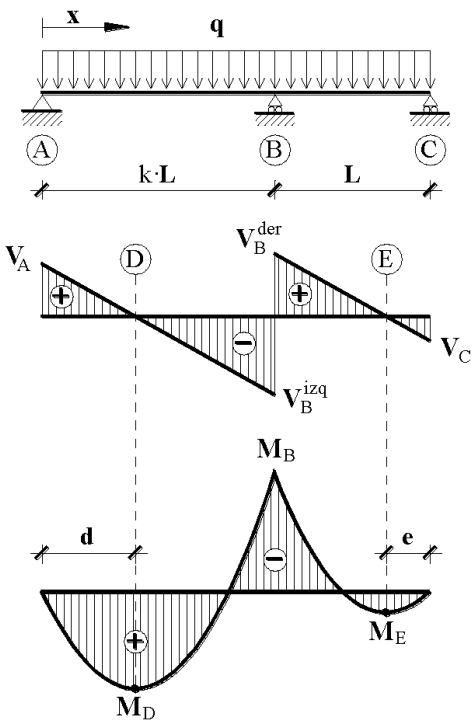
$$M_{AB} = \frac{qx}{8}\cdot(3L - 4x)$$

$$M_{BC} = \frac{q}{8}\cdot(2L - x)\cdot(4x - 5L)$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{8}$$

$$M_{máx} = \frac{9qL^2}{128} \quad \text{para} \quad x = \frac{3L}{8} \quad \text{y} \quad x = \frac{13L}{8}$$

## VIGA 2 VANOS DESIGUALES: carga repartida en los 2 vanos.




**Reacciones:**

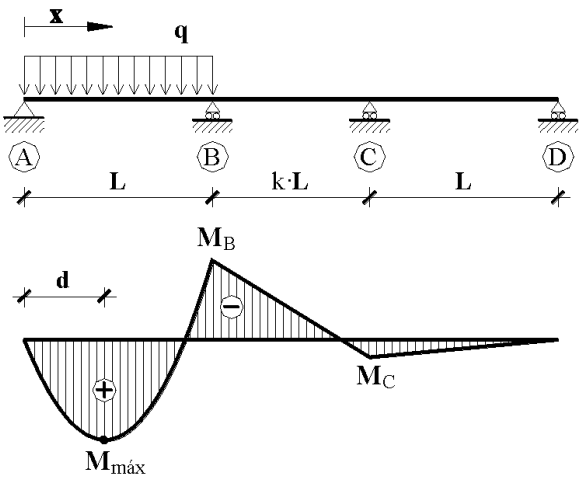
$$R_A = V_A$$

$$R_B = -V_B^{izq} + V_B^{der}$$

$$R_C = -V_C$$

| k | Cortantes | | | | Flectores | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $V_A$ ($\times q \cdot L$) | $V_B^{izq}$ ($\times q \cdot L$) | $V_B^{der}$ ($\times q \cdot L$) | $V_C$ ($\times q \cdot L$) | $M_B^{(-)}$ ($\times q \cdot L^2$) | $M_D^{(+)}$ ($\times q \cdot L^2$) | d ($\times L$) | $M_E^{(+)}$ ($\times q \cdot L^2$) | e ($\times L$) |
| 1,1 | 0,424 | -0,676 | 0,639 | -0,361 | -0,139 | 0,090 | 0,424 | 0,065 | 0,361 |
| 1,2 | 0,471 | -0,729 | 0,655 | -0,345 | -0,155 | 0,111 | 0,471 | 0,060 | 0,345 |
| 1,3 | 0,516 | -0,784 | 0,674 | -0,326 | -0,174 | 0,133 | 0,516 | 0,053 | 0,326 |
| 1,4 | 0,560 | -0,840 | 0,695 | -0,305 | -0,195 | 0,157 | 0,560 | 0,047 | 0,305 |
| 1,5 | 0,604 | -0,896 | 0,719 | -0,281 | -0,219 | 0,183 | 0,604 | 0,040 | 0,281 |
| 1,6 | 0,647 | -0,953 | 0,745 | -0,255 | -0,245 | 0,209 | 0,647 | 0,033 | 0,255 |
| 1,7 | 0,689 | -1,011 | 0,774 | -0,226 | -0,274 | 0,237 | 0,689 | 0,026 | 0,226 |
| 1,8 | 0,730 | -1,070 | 0,805 | -0,195 | -0,305 | 0,267 | 0,730 | 0,019 | 0,195 |
| 1,9 | 0,772 | -1,128 | 0,839 | -0,161 | -0,339 | 0,298 | 0,772 | 0,013 | 0,161 |
| 2 | 0,812 | -1,188 | 0,875 | -0,125 | -0,375 | 0,330 | 0,812 | 0,008 | 0,125 |
| 2,1 | 0,853 | -1,247 | 0,914 | -0,086 | -0,414 | 0,364 | 0,853 | 0,004 | 0,086 |
| 2,2 | 0,892 | -1,308 | 0,954 | -0,045 | -0,455 | 0,399 | 0,892 | 0,001 | 0,045 |
| 2,3 | 0,933 | -1,367 | 0,999 | -0,001 | -0,499 | 0,435 | 0,933 | $\sim 0$ | 0,001 |
| 2,4 | 0,973 | -1,427 | 1,045 | 0,045 | -0,545 | 0,473 | 0,973 | - - - | - - - |
| 2,5 | 1,013 | -1,487 | 1,094 | 0,094 | -0,594 | 0,513 | 1,013 | - - - | - - - |

## VIGA 3 VANOS DESIGUALES: carga repartida en vano extremo.




**Reacciones:**

$$R_A = \frac{3+7k+3k^2}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot qL$$

$$R_B = \frac{2+13k+18k^2+6k^3}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{4k}\cdot qL$$

$$R_C = \frac{-(1+k)\cdot(2+k)}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{4k}\cdot qL$$

$$R_D = \frac{k}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot qL$$

**Flectores:**

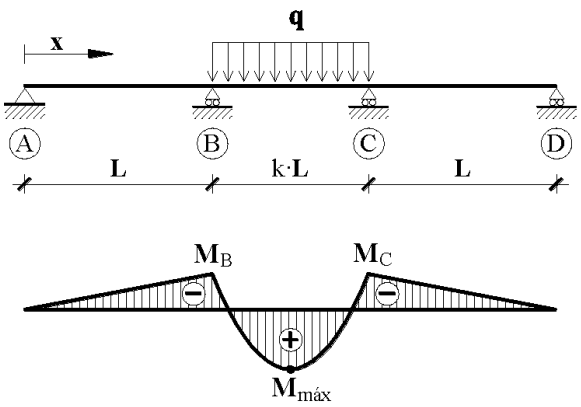
$$M_B = \frac{-(1+k)}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot qL^2$$

$$M_C = \frac{k}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot qL^2$$

$$M_{máx} = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3+7k+3k^2}{4+8k+3k^2}\right)^2\cdot qL^2 \quad \text{en} \quad x = d = \frac{3+7k+3k^2}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{L}{2}$$

| k | Reacciones | | | | Flectores | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_A$ ($\times qL$) | $R_B$ ($\times qL$) | $R_C$ ($\times qL$) | $R_D$ ($\times qL$) | $M_B$ ($\times qL^2$) | $M_C$ ($\times qL^2$) | $M_{máx}$ ($\times qL^2$) | d ($\times L$) |
| 0,5 | 0,414 | 0,786 | -0,214 | 0,014 | -0,086 | 0,014 | 0,086 | 0,414 |
| 0,6 | 0,419 | 0,741 | -0,175 | 0,015 | -0,081 | 0,015 | 0,088 | 0,419 |
| 0,7 | 0,423 | 0,709 | -0,148 | 0,016 | -0,077 | 0,016 | 0,090 | 0,423 |
| 0,8 | 0,427 | 0,685 | -0,128 | 0,016 | -0,073 | 0,016 | 0,091 | 0,427 |
| 0,9 | 0,430 | 0,665 | -0,112 | 0,017 | -0,070 | 0,017 | 0,093 | 0,430 |
| 1 | 0,433 | 0,650 | -0,100 | 0,017 | -0,067 | 0,017 | 0,094 | 0,433 |
| 1,1 | 0,436 | 0,637 | -0,090 | 0,017 | -0,064 | 0,017 | 0,095 | 0,436 |
| 1,2 | 0,439 | 0,626 | -0,082 | 0,017 | -0,061 | 0,017 | 0,096 | 0,439 |
| 1,3 | 0,441 | 0,617 | -0,075 | 0,017 | -0,059 | 0,017 | 0,097 | 0,441 |
| 1,4 | 0,443 | 0,609 | -0,069 | 0,017 | -0,057 | 0,017 | 0,098 | 0,443 |
| 1,5 | 0,445 | 0,603 | -0,064 | 0,016 | -0,055 | 0,016 | 0,099 | 0,445 |
| 1,6 | 0,447 | 0,597 | -0,060 | 0,016 | -0,053 | 0,016 | 0,100 | 0,447 |
| 1,7 | 0,449 | 0,591 | -0,056 | 0,016 | -0,051 | 0,016 | 0,101 | 0,449 |
| 1,8 | 0,450 | 0,586 | -0,053 | 0,016 | -0,050 | 0,016 | 0,101 | 0,450 |
| 1,9 | 0,452 | 0,582 | -0,050 | 0,016 | -0,048 | 0,016 | 0,102 | 0,452 |
| 2 | 0,453 | 0,578 | -0,047 | 0,016 | -0,047 | 0,016 | 0,103 | 0,453 |
| 2,1 | 0,454 | 0,575 | -0,044 | 0,015 | -0,046 | 0,015 | 0,103 | 0,454 |
| 2,2 | 0,456 | 0,571 | -0,042 | 0,015 | -0,044 | 0,015 | 0,104 | 0,456 |
| 2,3 | 0,457 | 0,568 | -0,040 | 0,015 | -0,043 | 0,015 | 0,104 | 0,457 |
| 2,4 | 0,458 | 0,566 | -0,038 | 0,015 | -0,042 | 0,015 | 0,105 | 0,458 |
| 2,5 | 0,459 | 0,563 | -0,037 | 0,015 | -0,041 | 0,015 | 0,105 | 0,459 |
| 2,6 | 0,460 | 0,561 | -0,035 | 0,014 | -0,040 | 0,014 | 0,106 | 0,460 |
| 2,7 | 0,461 | 0,559 | -0,034 | 0,014 | -0,039 | 0,014 | 0,106 | 0,461 |
| 2,8 | 0,462 | 0,557 | -0,033 | 0,014 | -0,038 | 0,014 | 0,107 | 0,462 |
| 2,9 | 0,463 | 0,555 | -0,031 | 0,014 | -0,037 | 0,014 | 0,107 | 0,463 |
| 3 | 0,464 | 0,553 | -0,030 | 0,014 | -0,036 | 0,014 | 0,107 | 0,464 |

## VIGA 3 VANOS DESIGUALES: carga repartida en vano central.




**Reacciones**

$$\mathbf{R_A = R_D} = \frac{-k^3}{2+3k} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{qL}$$

$$\mathbf{R_B = R_C} = \frac{4+6k+k^2}{2+3k} \cdot \frac{k}{4} \cdot \mathbf{qL}$$

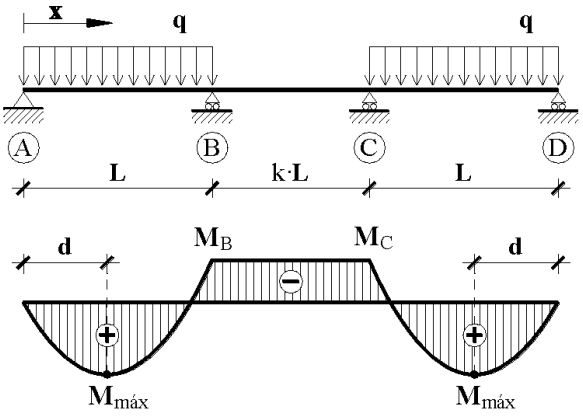
**Flectores**

$$\mathbf{M_B = M_C} = \frac{-k^3}{2+3k} \cdot \frac{1}{4} \cdot \mathbf{qL^2}$$

$$\mathbf{M_{máx}} = \frac{2+k}{2+3k} \cdot \frac{k^2}{8} \cdot \mathbf{qL^2}$$

| k | Reacciones | | Flectores | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbf{R_A = R_D}$ ($\times$ q·L) | $\mathbf{R_B = R_C}$ ($\times$ q·L) | $\mathbf{M_B = M_C}$ ($\times$ q·L²) | $\mathbf{M_{máx}}$ ($\times$ q·L²) |
| 0,5 | -0,009 | 0,259 | -0,009 | 0,022 |
| 0,6 | -0,014 | 0,314 | -0,014 | 0,031 |
| 0,7 | -0,021 | 0,371 | -0,021 | 0,040 |
| 0,8 | -0,029 | 0,429 | -0,029 | 0,051 |
| 0,9 | -0,039 | 0,489 | -0,039 | 0,062 |
| 1 | -0,050 | 0,550 | -0,050 | 0,075 |
| 1,1 | -0,063 | 0,613 | -0,063 | 0,088 |
| 1,2 | -0,077 | 0,677 | -0,077 | 0,103 |
| 1,3 | -0,093 | 0,743 | -0,093 | 0,118 |
| 1,4 | -0,111 | 0,811 | -0,111 | 0,134 |
| 1,5 | -0,130 | 0,880 | -0,130 | 0,151 |
| 1,6 | -0,151 | 0,951 | -0,151 | 0,169 |
| 1,7 | -0,173 | 1,023 | -0,173 | 0,188 |
| 1,8 | -0,197 | 1,097 | -0,197 | 0,208 |
| 1,9 | -0,223 | 1,173 | -0,223 | 0,229 |
| 2 | -0,250 | 1,250 | -0,250 | 0,250 |
| 2,1 | -0,279 | 1,329 | -0,279 | 0,272 |
| 2,2 | -0,310 | 1,410 | -0,310 | 0,295 |
| 2,3 | -0,342 | 1,492 | -0,342 | 0,319 |
| 2,4 | -0,376 | 1,576 | -0,376 | 0,344 |
| 2,5 | -0,411 | 1,661 | -0,411 | 0,370 |
| 2,6 | -0,448 | 1,748 | -0,448 | 0,397 |
| 2,7 | -0,487 | 1,837 | -0,487 | 0,424 |
| 2,8 | -0,528 | 1,928 | -0,528 | 0,452 |
| 2,9 | -0,570 | 2,020 | -0,570 | 0,481 |
| 3 | -0,614 | 2,114 | -0,614 | 0,511 |

## VIGA 3 VANOS DESIGUALES: carga repartida en vanos extremos.




**Reacciones**

$$R_A = R_D = \frac{2 + 5k + 2k^2}{4 + 8k + 3k^2} \cdot \frac{3}{4} \cdot qL$$

$$R_B = R_C = \frac{10 + 17k + 6k^2}{4 + 8k + 3k^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot qL$$

**Flectores**

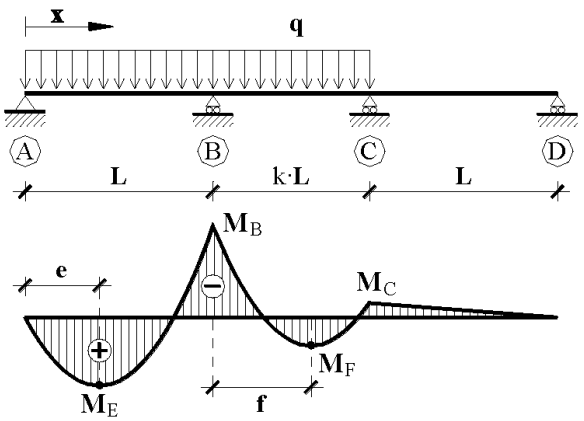
$$M_B = M_C = \frac{-(2+k)}{4+8k+3k^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot qL^2$$

$$M_{máx} = \frac{9}{32} \cdot \left( \frac{2+5k+2k^2}{4+8k+3k^2} \right)^2 \cdot qL^2$$

$$\text{con} \quad d = \frac{2 + 5k + 2k^2}{4 + 8k + 3k^2} \cdot \frac{3L}{4}$$

| k | Reacciones | | Flectores | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_A = R_D$ ($\times qL$) | $R_B = R_C$ ($\times qL$) | $M_B = M_C$ ($\times qL^2$) | $M_{máx}$ ($\times qL^2$) | $d$ ($\times L$) |
| 0,5 | 0,429 | 0,571 | -0,071 | 0,092 | 0,429 |
| 0,6 | 0,434 | 0,566 | -0,066 | 0,094 | 0,434 |
| 0,7 | 0,439 | 0,561 | -0,061 | 0,096 | 0,439 |
| 0,8 | 0,443 | 0,557 | -0,057 | 0,098 | 0,443 |
| 0,9 | 0,447 | 0,553 | -0,053 | 0,100 | 0,447 |
| 1 | 0,450 | 0,550 | -0,050 | 0,101 | 0,450 |
| 1,1 | 0,453 | 0,547 | -0,047 | 0,103 | 0,453 |
| 1,2 | 0,455 | 0,545 | -0,045 | 0,104 | 0,455 |
| 1,3 | 0,458 | 0,542 | -0,042 | 0,105 | 0,458 |
| 1,4 | 0,460 | 0,540 | -0,040 | 0,106 | 0,460 |
| 1,5 | 0,462 | 0,538 | -0,038 | 0,107 | 0,462 |
| 1,6 | 0,463 | 0,537 | -0,037 | 0,107 | 0,463 |
| 1,7 | 0,465 | 0,535 | -0,035 | 0,108 | 0,465 |
| 1,8 | 0,466 | 0,534 | -0,034 | 0,109 | 0,466 |
| 1,9 | 0,468 | 0,532 | -0,032 | 0,109 | 0,468 |
| 2 | 0,469 | 0,531 | -0,031 | 0,110 | 0,469 |
| 2,1 | 0,470 | 0,530 | -0,030 | 0,110 | 0,470 |
| 2,2 | 0,471 | 0,529 | -0,029 | 0,111 | 0,471 |
| 2,3 | 0,472 | 0,528 | -0,028 | 0,111 | 0,472 |
| 2,4 | 0,473 | 0,527 | -0,027 | 0,112 | 0,473 |
| 2,5 | 0,474 | 0,526 | -0,026 | 0,112 | 0,474 |
| 2,6 | 0,474 | 0,526 | -0,026 | 0,113 | 0,474 |
| 2,7 | 0,475 | 0,525 | -0,025 | 0,113 | 0,475 |
| 2,8 | 0,476 | 0,524 | -0,024 | 0,113 | 0,476 |
| 2,9 | 0,477 | 0,523 | -0,023 | 0,114 | 0,477 |
| 3 | 0,477 | 0,523 | -0,023 | 0,114 | 0,477 |

## VIGA 3 VANOS DESIGUALES: carga repartida en 2 vanos contiguos.




**Reacciones**

$$R_A = \left(\frac{3+7k+3k^2}{4+8k+3k^2} - \frac{k^3}{2\cdot(2+3k)}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot qL$$

$$R_B = \left(\frac{2+13k+18k^2+6k^3}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{k} + \frac{4+6k+k^2}{2+3k}\cdot k\right)\cdot\frac{qL}{4}$$

$$R_C = \left(\frac{4+6k+k^2}{2+3k}\cdot k - \frac{(1+k)(2+k)}{4+8k+3k^2}\cdot\frac{1}{k}\right)\cdot\frac{qL}{4}$$

$$R_D = \left(\frac{1}{4+8k+3k^2} - \frac{k^2}{2+3k}\right)\cdot\frac{k}{4}\cdot qL$$

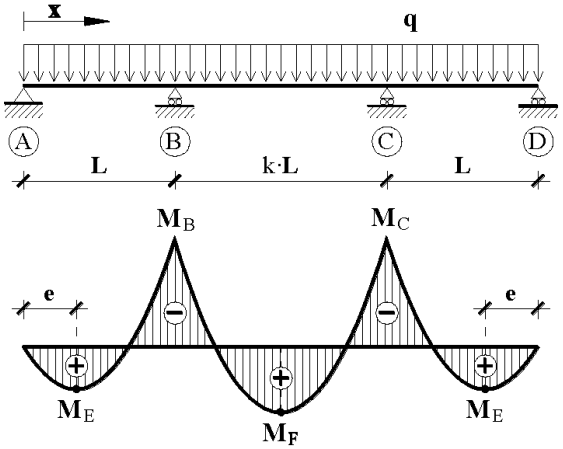
**Flectores:**

$$M_B = -\left(\frac{k^3}{2+3k} + \frac{2(1+k)}{4+8k+3k^2}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot qL^2 \quad ; \qquad M_C = \left(\frac{k}{4+8k+3k^2} - \frac{k^3}{2+3k}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot qL^2$$

$$M_E = \frac{R_A{}^2}{2q} \quad \text{con} \quad e = \frac{R_A}{q} \quad ; \qquad M_F = \frac{(R_A+R_B)^2}{2q} - LR_B \quad \text{con} \quad f = \frac{R_A+R_B}{q} - L$$

| k | Reacciones | | | | Flectores | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_A$ ($\times qL$) | $R_B$ ($\times qL$) | $R_C$ ($\times qL$) | $R_D$ ($\times qL$) | $M_B$ ($\times qL^2$) | $M_C$ ($\times qL^2$) | $M_E$ ($\times qL^2$) | e ($\times L$) | $M_F$ ($\times qL^2$) | f ($\times L$) |
| 0,5 | 0,405 | 1,045 | 0,045 | 0,005 | -0,095 | 0,005 | 0,082 | 0,405 | 0,007 | 0,450 |
| 0,6 | 0,405 | 1,055 | 0,139 | 0,001 | -0,095 | 0,001 | 0,082 | 0,405 | 0,011 | 0,460 |
| 0,7 | 0,402 | 1,080 | 0,223 | -0,005 | -0,098 | -0,005 | 0,081 | 0,402 | 0,019 | 0,482 |
| 0,8 | 0,398 | 1,114 | 0,301 | -0,013 | -0,102 | -0,013 | 0,079 | 0,398 | 0,029 | 0,512 |
| 0,9 | 0,392 | 1,154 | 0,376 | -0,022 | -0,108 | -0,022 | 0,077 | 0,392 | 0,040 | 0,546 |
| 1 | 0,383 | 1,200 | 0,450 | -0,033 | -0,117 | -0,033 | 0,073 | 0,383 | 0,053 | 0,583 |
| 1,1 | 0,373 | 1,250 | 0,523 | -0,046 | -0,127 | -0,046 | 0,070 | 0,373 | 0,068 | 0,623 |
| 1,2 | 0,361 | 1,304 | 0,595 | -0,060 | -0,139 | -0,060 | 0,065 | 0,361 | 0,083 | 0,665 |
| 1,3 | 0,348 | 1,360 | 0,668 | -0,076 | -0,152 | -0,076 | 0,060 | 0,348 | 0,099 | 0,708 |
| 1,4 | 0,332 | 1,420 | 0,742 | -0,094 | -0,168 | -0,094 | 0,055 | 0,332 | 0,116 | 0,753 |
| 1,5 | 0,315 | 1,482 | 0,816 | -0,113 | -0,185 | -0,113 | 0,050 | 0,315 | 0,133 | 0,798 |
| 1,6 | 0,296 | 1,547 | 0,891 | -0,134 | -0,204 | -0,134 | 0,044 | 0,296 | 0,152 | 0,843 |
| 1,7 | 0,276 | 1,614 | 0,967 | -0,157 | -0,224 | -0,157 | 0,038 | 0,276 | 0,171 | 0,890 |
| 1,8 | 0,253 | 1,683 | 1,044 | -0,181 | -0,247 | -0,181 | 0,032 | 0,253 | 0,192 | 0,937 |
| 1,9 | 0,229 | 1,755 | 1,123 | -0,207 | -0,271 | -0,207 | 0,026 | 0,229 | 0,213 | 0,984 |
| 2 | 0,203 | 1,828 | 1,203 | -0,234 | -0,297 | -0,234 | 0,021 | 0,203 | 0,235 | 1,031 |
| 2,1 | 0,176 | 1,904 | 1,284 | -0,264 | -0,324 | -0,264 | 0,015 | 0,176 | 0,258 | 1,079 |
| 2,2 | 0,146 | 1,981 | 1,367 | -0,294 | -0,354 | -0,294 | 0,011 | 0,146 | 0,281 | 1,127 |
| 2,3 | 0,115 | 2,060 | 1,451 | -0,327 | -0,385 | -0,327 | 0,007 | 0,115 | 0,306 | 1,175 |
| 2,4 | 0,082 | 2,141 | 1,537 | -0,361 | -0,418 | -0,361 | 0,003 | 0,082 | 0,331 | 1,224 |
| 2,5 | 0,048 | 2,224 | 1,624 | -0,397 | -0,452 | -0,397 | 0,001 | 0,048 | 0,357 | 1,272 |
| 2,6 | 0,012 | 2,309 | 1,713 | -0,434 | -0,488 | -0,434 | 0,000 | 0,012 | 0,384 | 1,321 |
| 2,7 | -0,026 | 2,396 | 1,803 | -0,473 | -0,526 | -0,473 | 0,000 | -0,026 | 0,412 | 1,370 |
| 2,8 | -0,066 | 2,484 | 1,895 | -0,514 | -0,566 | -0,514 | 0,002 | -0,066 | 0,440 | 1,419 |
| 2,9 | -0,107 | 2,575 | 1,988 | -0,556 | -0,607 | -0,556 | 0,006 | -0,107 | 0,470 | 1,468 |
| 3 | -0,150 | 2,667 | 2,083 | -0,600 | -0,650 | -0,600 | 0,011 | -0,150 | 0,500 | 1,517 |

## VIGA 3 VANOS DESIGUALES: carga repartida en todos los vanos.




**Reacciones**

$$R_A = R_D = \left( \frac{3\cdot(2+5k+2k^2)}{4+8k+3k^2} - \frac{k^3}{2+3k} \right) \cdot \frac{qL}{4}$$

$$R_B = R_C = \left( \frac{10+17k+6k^2}{4+8k+3k^2} + \frac{k\cdot(4+6k+k^2)}{2+3k} \right) \cdot \frac{qL}{4}$$

**Flectores**

$$M_B = M_C = -\left( \frac{k^3}{2+3k} + \frac{2+k}{4+8k+3k^2} \right) \cdot \frac{1}{4} \cdot qL^2$$

$$M_E = \left( \frac{3\cdot(2+5k+2k^2)}{4+8k+3k^2} - \frac{k^3}{2+3k} \right)^2 \cdot \frac{qL^2}{32} \quad \text{con} \quad e = \left( \frac{3\cdot(2+5k+2k^2)}{4+8k+3k^2} - \frac{k^3}{2+3k} \right) \cdot \frac{L}{4} \quad ; \quad e=0 \text{ con } k=2{,}669$$

$$M_F = \left( \frac{(2+k)^2}{2} - \frac{10+17k+6k^2}{4+8k+3k^2} - \frac{k\cdot(4+6k+k^2)}{2+3k} \right) \cdot \frac{1}{4} \cdot qL^2 \quad ; \quad M_F=0 \text{ con } k=0{,}840$$

| k | Reacciones | | | | Flectores | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R_A$ ($\times qL$) | $R_B$ ($\times qL$) | $R_C$ ($\times qL$) | $R_D$ ($\times qL$) | $M_B$ ($\times qL^2$) | $M_C$ ($\times qL^2$) | $M_E$ ($\times qL^2$) | e ($\times L$) | $M_F$ ($\times qL^2$) |
| 0,5 | 0,420 | 0,830 | 0,830 | 0,420 | -0,080 | -0,080 | 0,088 | 0,420 | -0,049 |
| 0,6 | 0,420 | 0,880 | 0,880 | 0,420 | -0,080 | -0,080 | 0,088 | 0,420 | -0,035 |
| 0,7 | 0,418 | 0,932 | 0,932 | 0,418 | -0,082 | -0,082 | 0,087 | 0,418 | -0,021 |
| 0,8 | 0,414 | 0,986 | 0,986 | 0,414 | -0,086 | -0,086 | 0,086 | 0,414 | -0,006 |
| 0,9 | 0,408 | 1,042 | 1,042 | 0,408 | -0,092 | -0,092 | 0,083 | 0,408 | 0,009 |
| 1 | 0,400 | 1,100 | 1,100 | 0,400 | -0,100 | -0,100 | 0,080 | 0,400 | 0,025 |
| 1,1 | 0,390 | 1,160 | 1,160 | 0,390 | -0,110 | -0,110 | 0,076 | 0,390 | 0,041 |
| 1,2 | 0,378 | 1,222 | 1,222 | 0,378 | -0,122 | -0,122 | 0,072 | 0,378 | 0,058 |
| 1,3 | 0,365 | 1,285 | 1,285 | 0,365 | -0,135 | -0,135 | 0,066 | 0,365 | 0,076 |
| 1,4 | 0,349 | 1,351 | 1,351 | 0,349 | -0,151 | -0,151 | 0,061 | 0,349 | 0,094 |
| 1,5 | 0,332 | 1,418 | 1,418 | 0,332 | -0,168 | -0,168 | 0,055 | 0,332 | 0,113 |
| 1,6 | 0,313 | 1,487 | 1,487 | 0,313 | -0,187 | -0,187 | 0,049 | 0,313 | 0,133 |
| 1,7 | 0,292 | 1,558 | 1,558 | 0,292 | -0,208 | -0,208 | 0,043 | 0,292 | 0,153 |
| 1,8 | 0,269 | 1,631 | 1,631 | 0,269 | -0,231 | -0,231 | 0,036 | 0,269 | 0,174 |
| 1,9 | 0,245 | 1,705 | 1,705 | 0,245 | -0,255 | -0,255 | 0,030 | 0,245 | 0,196 |
| 2 | 0,219 | 1,781 | 1,781 | 0,219 | -0,281 | -0,281 | 0,024 | 0,219 | 0,219 |
| 2,1 | 0,191 | 1,859 | 1,859 | 0,191 | -0,309 | -0,309 | 0,018 | 0,191 | 0,242 |
| 2,2 | 0,161 | 1,939 | 1,939 | 0,161 | -0,339 | -0,339 | 0,013 | 0,161 | 0,266 |
| 2,3 | 0,130 | 2,020 | 2,020 | 0,130 | -0,370 | -0,370 | 0,008 | 0,130 | 0,291 |
| 2,4 | 0,097 | 2,103 | 2,103 | 0,097 | -0,403 | -0,403 | 0,005 | 0,097 | 0,317 |
| 2,5 | 0,063 | 2,188 | 2,188 | 0,063 | -0,438 | -0,438 | 0,002 | 0,063 | 0,344 |
| 2,6 | 0,026 | 2,274 | 2,274 | 0,026 | -0,474 | -0,474 | 0,000 | 0,026 | 0,371 |
| 2,7 | -0,012 | 2,362 | 2,362 | -0,012 | -0,512 | -0,512 | - - - | - - - | 0,399 |
| 2,8 | -0,052 | 2,452 | 2,452 | -0,052 | -0,552 | -0,552 | - - - | - - - | 0,428 |
| 2,9 | -0,093 | 2,543 | 2,543 | -0,093 | -0,593 | -0,593 | - - - | - - - | 0,458 |
| 3 | -0,136 | 2,636 | 2,636 | -0,136 | -0,636 | -0,636 | - - - | - - - | 0,489 |