ΔEA
Docencia en Estadística Aplicada

Contrastes para los parámetros de una población Normal. Varianzas desconocidas

Ejercicios Tema 5 (Resuelto)

1. Problema 5

El tamaño medio de la gorgonia blanca (*Eunicella verrucosa*) es de 12 cm. Se realiza un muestreo midiendo 6 individuos en una zona muy frecuentada por buceadores obteniendo los valores *8, 11, 9, 7, 10, 9*.

Suponiendo que la variable sigue una distribución Normal, ¿se ajustan los individuos muestreados a la media poblacional?

1.1. Resolución

1.1.1. Planteamiento del contraste

Tal y como se pregunta en el ejercicio, se debe comprobar si la muestra obtenida de gorgonia blanca se comporta conforme al tamaño medio de la población (μ) para dicha especie. Para ello, y puesto que se conoce la media poblacional μ, se puede comprobar mediante un *contraste para los parámetros de una población*. Por otro lado, debido a la naturaleza de la variable (datos cuantitativos continuos), se puede desarrollar el contraste para una *población Normal*, en este caso para la *varianza de la población σ desconocida* al no disponer de su valor.

1.1.2. Planteamiento de la hipótesis

Sea X la variable aleatoria tamaño de los individuos de gorgonia observado, y sabiendo según el enunciado del ejercicio que se quiere conocer si dichos individuos se ajustan a la media de la población, se trata de un contraste bilateral con objeto de contrastar si μ es igual o no a la media de la población de 12cm (μ_0). Por tanto las hipótesis quedan definidas como:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \text{La variable observada se ajusta a la media poblacional} \\ H_1 : \text{La variable observada no se ajusta a la media poblacional} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \beta \\ \rightarrow \alpha = 0.05 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu = \mu_0 & \rightarrow H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 & \rightarrow H_1 : \mu \neq 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \beta \\ \rightarrow \alpha = 0.05 \end{array}$$

1.1.3. Estadístico de contraste

Dado que la varianza de la población σ es desconocida, se aplica como estadístico la `t` de Student que habrá que conparar con el correspondiente punto crítico:

$$t_{expt} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}}$$

$$P_c = t_{teo} = t_{n-1,\alpha}$$

1.1.4. Desarrollo del contraste

Para comenzar con el desarrollo del contraste previamente se tienen que analizar los requisitos necesarios para poder llevarlo a cabo. En este caso, se debe comprobar que la variable X se ajusta a una distribución Normal dado que se asume para este tipo de contrastes que la distribución muestral de la media muestral es $\bar{x} \approx N\left(\mu; \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. La normalidad se puede analizar a partir de un contraste de normalidad como el de Kolmogorov-Smirnof. No obstante, en el ejercicio ya se dice y por tanto no es necesario realizarlo.

Los datos que necesitamos conocer y estimar para desarrollar el contraste son:

$$\begin{aligned} n &= 6 \\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i &= 9 \\ S_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) &= 1.414 \end{aligned}$$

a) Región de aceptación

Dado que se trata de un test bilateral, la región de aceptación dentro de la cual debe estar la media de la muestra para no rechazar H_0 se define como:

$$\bar{x} \in \left(\mu_0 - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, \mu_0 + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

Y desarrollando tenemos que:

$$\begin{aligned} 9 &\in \left(12 - t_{5,0.025}\frac{1.414}{\sqrt{6}}, 12 + t_{5,0.025}\frac{1.414}{\sqrt{6}}\right) \\ 9 &\in (12 - 2.5706 \cdot 0.577, 12 + 2.5706 \cdot 0.577) \\ 9 &\notin (10.516, 13.484) \Rightarrow \text{SE RECHAZA } H_0 \end{aligned}$$

b) Estadístico experimental

Como el contraste es bilateral, se debe comparar el estadístico experimental t_{expt} en valor absoluto con el punto crítico t_{teo} de la cola de la derecha. Para ello se obtienen dichos valores:

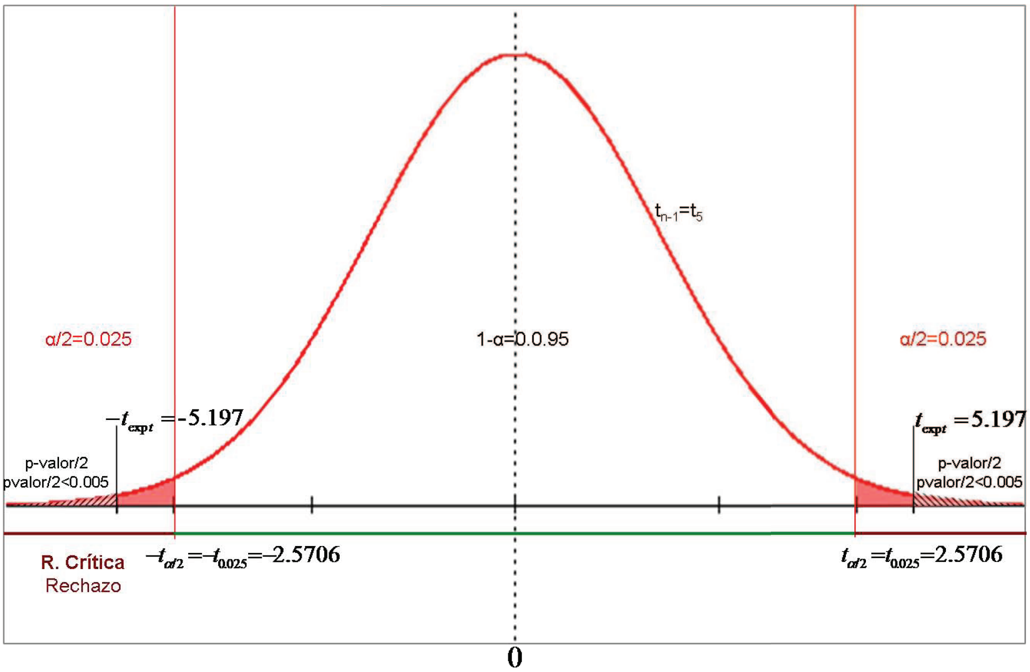
$$\begin{aligned} |t_{expt}| &= \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{9 - 12}{1.414/\sqrt{6}}\right| = 5.197 \\ t_{teo} &= t_{n-1,\alpha/2} = t_{6-1,0.025} = 2.5706 \\ |t_{expt}| &= 5.197 > 2.5706 = t_{5,0.025} \Rightarrow \text{SE RECHAZA } H_0 \end{aligned}$$

b) P-valor

EL p-valor aproximado obtenido a partir de las tablas de la t de Student se puede obtener de:

$$\begin{aligned} p - valor/2 &= P\left(t_{n-1} > t_{expt}\right) \Rightarrow p - valor/2 = P\left(t_5 > 5.197\right) \\ p - valor/2 &< 0.005 \Rightarrow \text{ Y despejando } \Rightarrow p - valor < 0.01 \Rightarrow \text{SE RECHAZA } H_0 \end{aligned}$$

1.1.5. Representación gráfica del contraste



1.1.6. Conclusión biológica

En base al contraste y el p-valor obtenido se puede concluir que hay evidencia estadística lo suficientemente fuerte en contra de H_0 como para poder rechazarla a cualquier nivel de significación habitual.

Por tanto, hay evidencia estadística suficiente como para poder concluir que el tamaño medio de *Eunicella verrucosa* es diferente al tamaño promedio para la población de esta misma especie y por tanto se debe suponer que o bien la muestra seleccionda no es lo suficientemente representativa para dicha especie en la zona de estudio escogida (en cuyo caso se debería volver a muestrear) o, si es lo suficientemente representativa de la zona de estudio, se debe tratar de analizar qué es lo que puede estar ocurriendo para que su comportamiento sea el detectado (posibles impactos que provocan dicha diferencia u otros factores que alteran dicho tamaño).