Departamento de Fundamentos del Análisis Económico. Universidad de Alicante. Curso 2011/12

ECONOMETRÍA I

Hoja de problemas del Tema 1

1.- Considere el modelo de regresión simple: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$. Para la siguiente muestra de tamaño 5

Y_t :	0	3	10	1	15
X_t :	-2	2	5	-1	6

a) Calcule el estimador MCO de β_1 y β_2.

b) Verifique numéricamente que la suma de los residuos MCO es cero.

c) Dibuje en un gráfico los valores observados y los valores estimados de Y.

2- Analice si son ciertas las afirmaciones siguientes:

a) Si se ajusta por MCO un modelo en el que $T = k$ y el rango$(X) = T = k$, entonces la matriz $\mathbf{X}$ es invertible y la suma cuadrática residual del modelo es 0.

b) Con la notación habitual que empleamos en el MRL, $\mathbf{Y}, \widehat{\mathbf{Y}}, \mathbf{u}, \mathbf{e}$ son variables aleatorias, mientras que $\beta, \widehat{\beta}, \mathbf{X}, \sigma^2, \widehat{\sigma}^2$ no son variables aleatorias.

c) Estamos interesados en estimar el efecto marginal de X_{3t} sobre Y_t en el modelo $Y_t = \beta_1 + \beta_2(\ln X_{2t})^2 + \beta_3^2 X_{3t} + u_t$. Dado que este modelo no es lineal en los parámetros, no podríamos estimar por MCO dicho efecto.

d) Considere el modelo de regresión

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t, \qquad t = 1, 2, .., T \qquad (1)$$

que verifica los supuestos básicos del modelo de regresión lineal. Si estimamos por MCO el modelo de regresión de Y_t sobre X_{2t} y X_{3t} sin incluir la constante, la suma de los residuos será cero si $\beta_1 = 0$.

3.- Considere el modelo de regresión simple $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$ en el que $E(u_t) = \alpha_1 \neq 0$. Demuestre que el modelo siempre puede reecribirse con la misma pendiente y distinto término constante de forma que el nuevo término de error tenga media cero.

4.- Considere la función de consumo lineal estimada utilizando una muestra de ingresos (inc) y consumos ($cons$) anuales (ambos medidos en dólares) para una muestra de 100 familias

$$\begin{aligned} \widehat{cons}_t &= -124.84 + 0.853 inc_t \\ T &= 100, \qquad R^2 = 0.692 \end{aligned}$$

a) Interprete la pendiente de esta ecuación.

b) ¿Cuál es la predicción del consumo de una familia cuyos ingresos son de $30,000$ dolares?.

c) Suponga que utilizando la misma muestra medimos ahora el ingreso y el consumo de las familias en miles de dólares. Calcule los nuevos parámetros estimados del modelo y el R^2

5.- En base a una muestra de 935 individuos para los que se observa el salario mensual ($wage$) en dólares y el resultado de un test de inteligencia (IQ) se han obtenido las siguientes estimaciones MCO:

$$\begin{array}{ll}
\widehat{wage_t} = 117 + 8.3IQ_t & (1) \\
\widehat{wage_t} = -2628 + 778.5\ln(IQ_t) & (2) \\
\ln(\widehat{wage_t}) = 5.9 + 0.0088IQ_t & (3) \\
\ln(\widehat{wage_t}) = 2.94 + 0.83\ln(IQ_t) & (4)
\end{array}$$

a) ¿Cuál de estos modelos supone que el aumento de un punto en el test de inteligencia IQ cambia $wage$ en una cantidad constante en dólares? En base a ese modelo, calcule la variación esperada en el salario ante un aumento de 10 puntos en el resultado del test.

b) ¿Cuál de estos modelos supone que el aumento de un punto en el test de inteligencia IQ tiene siempre el mismo efecto porcentual sobre $wage$? En base a ese modelo, calcule la variación porcentual esperada en el salario ante un aumento de 10 puntos en el resultado del test.

c) Compare los resultados obtenidos en los apartados anteriores para un invididuo cuyo salario mensual coincide con el salario medio en la muestra (el salario medio en la muestra es 958 dólares).

d) ¿Cuál de estos modelos supone que el aumento de un 1% en el test de inteligencia IQ tiene siempre el mismo efecto porcentual sobre $wage$? En base a ese modelo, calcule la variación porcentual esperada en el salario ante un aumento del 10 por ciento en el resultado del test. En este modelo, obtenga el incremento salarial que experimentará un individuo que tenga el salario medio y el resultado de IQ medio de la muestra (e.d. con un salario de 958 dólares y un resultado en el test de inteligencia de 101) ante un aumento del 10% en el resultado del test. Compare este resultado con el obtenido en el apartado b) para dicho individuo.

6.- En base a una muestra de 722 individuos para los que se observa el nivel de educación en años ($educ$), el número de hermanos ($sibs$), el nivel de educación en años del padre ($feduc$) y el nivel de educación en años de la madre ($meduc$) se han obtenido los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\widehat{educ_t} &= 10.36 - 0.094sibs_t + 0.131meduc_t + 0.210feduc_t \\
T &= 722, \qquad R^2 = 0.214
\end{aligned}$$

a) ¿Tiene $sibs$ el efecto esperado? ¿Por qué? Si mantenemos $meduc$ y $feduc$ fijos, cuanto tiene que aumentar $sibs$ para reducir en un año el número de años de educación estimado?.

b) Interprete los coeficientes estimados de $meduc$ y $feduc$.

c) Supongamos que el individuo A no tiene hermanos y que tanto su padre como su madre tienen 12 años de educación. El individuo B tampoco tiene hermanos y su padre y su madre tienen 16 años de educación. ¿Cuál es la diferencia estimada entre A y B en años de educación?.

7.- Considere el siguiente modelo que relaciona el tiempo dedicado a dormir y el dedicado a trabajar, junto a otros factores que afectan el sueño:

$$sleep_t = \beta_1 + \beta_2 totwrk_t + \beta_3 educ_t + \beta_4 age_t + u_t$$

donde el tiempo dedicado a dormir ($sleep$) y el tiempo total de trabajo ($totwrk$) se miden en minutos por semana y el nivel de educación ($educ$) y la edad (age) se miden en años.

a) Si los adultos substituyen tiempo de sueño por trabajo, ¿cuál será el signo esperado de β_2?

b) Utilizando una muestra de 706 individuos se han obtenido los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \widehat{sleep}_t &= 3638.25 - 0.148 totwrk_t - 11.13 educ_t + 2.2 age_t \\ T &= 706, \qquad R^2 = 0.113 \end{aligned}$$

Si alguien trabaja cinco horas más por semana ¿en cuantos minutos se estima que disminuirá $sleep$?.

c) Suponga que utilizando la misma muestra medimos ahora $sleep$ y $totwrk$ en horas a la semana. Calcule los nuevos parametros estimados del modelo y el R^2

8.- El salario inicial mediano de los recién titulados en derecho en universidades de Estados Unidos se determina por:

$$\log(salary_t) = \beta_1 + \beta_2 LSAT_t + \beta_3 GPA_t + \beta_4 \log(libvol_t) + \beta_5 \log(cost_t) + \beta_6 rank_t + u_t$$

donde $salary$ es salario inicial mediano de los alumnos que se graduan ese año, $LSAT$ es la mediana de los resultados del test y GPA la nota media en la universidad para ese mismo grupo de alumnos, $libvol$ es el número de volúmenes de la biblioteca de la facultad de derecho, $cost$ es el coste anual de estudiar en la facultad de derecho y $rank$ es la posición que la facultad de derecho ocupa en el ranking de facultades de derecho de Estados Unidos (siendo $rank = 1$ el mejor).

a) Explique por qué cabe esperar que $\beta_6 \leq 0$.

b) ¿Qué signo cabe esperar para los demás parámetros de pendiente?.

c) Utilizando una muestra de 136 facultades de derecho se han obtenido los siguientes resultados:.

$$\begin{aligned} \log(\widehat{salary}) &= 8.34 + 0.0047 LSAT + 0.0248 GPA + 0.095 \log(libvol) \\ &\quad + 0.38 \log(cost) - 0.0033 rank \\ T &= 136, \qquad R^2 = 0.842 \end{aligned}$$

¿Cuál es la diferencia esperada en el salario mediano entre facultades en las que la nota mediana GPA difiere en un punto?.

d) Interprete el valor estimado del coeficiente de $\log(libvol)$.

e) ¿Sería más recomendable ir a una facultad de derecho con un ranking mejor? ¿En cuanto se ve afectado el salario inicial por una diferencia de 20 puestos en el ranking?.

9.- En un estudio que relaciona la nota media universitaria con el tiempo dedicado a diversas actividades, se distribuye una encuesta entre un grupo de estudiantes en la que se les pregunta cuantas horas a la semana emplean en cuatro actividades: estudiar, dormir, trabajar y ocio. Cualquier actividad debe incluirse en una de las cuatro categorías, de forma que las cuatro actividades suman 168 horas para cada estudiante:

a) En el modelo

$$GPA_t = \beta_1 + \beta_2 study_t + \beta_3 sleep_t + \beta_4 work_t + \beta_5 leisure_t + u_t$$

¿tiene sentido mantener fijos $sleep$ (sueño), $work$ (trabajo) y $leisure$ (ocio), y modificar $study$ (estudio)?

b) Explique por qué este modelo viola el supuesto 2 de que la matriz X tiene rango k.

c) ¿Cómo se podría reformular el modelo para que los parámetros tengan una interpretación útil y se satisfaga el supuesto 2.

10.- Se desea estudiar la relación entre dos variables Y y X para lo cual disponemos de 12 observaciones. Se realiza la estimación de cuatro modelos, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
(1) &: \; Y_t = 17.5 + e_t \\
(2) &: \; X_t = 25.0 + \bar{e}_t \\
(3) &: \; Y_t = \gamma_2 X_t + u_t \\
(4) &: \; Y_t = \delta_1 + \delta_2 X_t + v_t
\end{aligned}$$

a) Determine el estimador de MCO de $\gamma_2, \delta_1, \delta_2$ sabiendo que $\sum X_t Y_t = 7500, \sum X_t^2 = 10000$.

b) Sabiendo que $\sum Y_t^2 = 6000$, determine el valor de los coeficientes de determinación (R^2) en todos los modelos y razone las posibles relaciones que pueden existir entre los coeficientes de determinación de los cuatro modelos.