ECONOMETRIA I.
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico
Universidad de Alicante. Curso 2011/12

GUIÓN TEMA 2. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES MCO

Bibliografía apartados 2.1, 2.2 y 2.3:
Greene, 6.6.1, 6.6.3 y 6.6.4
A. Fernández Gallastegui, 2.2 , 3.5 y 3.7
J.M. Wooldridge. Epígrafes 2.5, 3.3 (hasta pág. 95), 3.4, 3.5 y Apéndice E.2

2.1 PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL ESTIMADOR MCO DE β.

En el tema 1 obtuvimos el estimador MCO de β. En este apartado estudiaremos las propiedades estadísticas del estimador MCO de β y en el epígrafe siguiente obtendremos un estimador de σ^2 y estudiaremos las propiedades estadísticas del estimador MCO de σ^2.

Propiedades estadísticas de $\widehat{\beta}$.

- – $\widehat{\beta}$ es un estimador lineal, es decir $\widehat{\beta}$ es una función lineal de Y.
  – Bajo las hipótesis básicas 1 a 4, $\widehat{\beta}$ es un estimador insesgado de β, es decir $E\left[\widehat{\beta}\right] = \beta$.

  Demos

  $$\widehat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

  y por tanto

  $$E\left[\widehat{\beta}\right] = \beta + (X'X)^{-1}X'E\left[u\right] \underset{\text{puesto que } E[u]=0}{=} \beta$$

  Nótese que el estimador MCO es insesgado con independencia de que se verifique o no el supuesto 5.

– Bajo las hipótesis básicas del MRL, $Var\left[\widehat{\beta}\right] = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$.

Demos

$$\begin{aligned}
Var\left[\widehat{\beta}\right] &= E\left\{\left[\widehat{\beta} - E\left[\widehat{\beta}\right]\right]\left[\widehat{\beta} - E\left[\widehat{\beta}\right]\right]'\right\} = E\left\{\left[\widehat{\beta} - \beta\right]\left[\widehat{\beta} - \beta\right]'\right\} \\
&= E\left\{\left[(X'X)^{-1}X'u\right]\left[(X'X)^{-1}X'u\right]'\right\} = (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1} = \\
&\underset{\text{Ya que } E(uu')=\sigma^2 I_T}{=} \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}
\end{aligned}$$

– **Teorema de Gauss-Markov**. Bajo las hipótesis básicas del MRL, el estimador MCO de β es óptimo entre la familia de estimadores lineales e insesgados. Es decir, no es posible encontrar otro estimador de β que siendo lineal e insesgado tenga una varianza menor que el estimador MCO.

2.2 ESTIMACIÓN DE σ^2 Y PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DEL ESTIMADOR.

- Como ya vimos en el tema anterior, el vector de residuos MCO es la diferencia entre los valores de la variable dependiente y los valores estimados de la misma: $e = Y - X\widehat{\beta} = Y - \widehat{Y}$. Los residuos pueden interpretarse como la estimación del vector de errores, u.

- El vector de residuos MCO, e, es una transformación lineal de u

  – Demos

  $$e = Y - X\widehat{\beta} = MY \underset{\text{ya que } MX=0}{=} Mu$$

  siendo $M = I_T - X(X'X)^{-1}X'$. M es una matriz singular, simétrica $(M = M')$ e idempotente $(MM = M)$.

- $E\left[e\right] = 0$.

  Demos

  $$E[e] = E[Mu] = ME[u] \underset{\text{ya que } E[u]=0}{=} 0$$

- $Var(e) = \sigma^2 M$

  Demos

  $$Var(e) = E\{[Mu]\,[Mu]'\} = E[Muu'M] = ME[uu']M \underset{\text{ya que } E[uu']=\sigma^2 I_T}{=} \sigma^2 MM = \sigma^2 M$$

- $\widehat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{T-k}$ es un estimador insesgado de σ^2.

  Demos

  Sabemos que
  $$e'e = (Mu)'(Mu) = u'Mu$$

  Se puede demostrar que
  $$E\left[e'e\right] = E\left[u'Mu\right] = \sigma^2(T-k)$$

  Si definimos
  $$\widehat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{T-k}$$
  $$E(\widehat{\sigma}^2) = E\left(\frac{e'e}{T-k}\right) = \frac{E\left[e'e\right]}{T-k} = \frac{\sigma^2(T-k)}{T-k} = \sigma^2$$

- También podemos escribir $e'e$ como $e'e = (Y-X\widehat{\beta})'(Y-X\widehat{\beta}) = Y'Y-\widehat{\beta}'X'Y$

2.3 MATRIZ DE VARIANZAS ESTIMADA Y ERRORES ESTÁNDAR

- Hemos visto que bajo las hipótesis 1 a 5
  $$Var\left[\widehat{\beta}\right] = \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}$$
  esta matriz es desconocida ya que σ^2 es desconocida. Para saber la fiabilidad $\widehat{\beta}$ y poder hacer inferencia es importante disponer de un estimador de su varianza. Se define la matriz de varianzas estimada de $\widehat{\beta}$ como
  $$\widehat{Var\left[\widehat{\beta}\right]} = \widehat{\sigma}^2\left(X'X\right)^{-1}$$

En el tema 3 veremos cómo contrastar hipótesis sobre el vector de parámetros β utilizando $\widehat{\beta}$ y $\widehat{Var\left[\widehat{\beta}\right]}$. Nótese que si no se verifica la hipótesis 5, $Var\left[\widehat{\beta}\right] \neq \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$ y por tanto $\widehat{\sigma}^2 \left(X'X\right)^{-1}$ no sería un estimador apropiado de la varianza de $\widehat{\beta}$.

- Se definen los errores estándar como las raices cuadradas de los elementos de la diagonal principal de la matriz $\widehat{Var\left[\widehat{\beta}\right]}$. Es decir

$$SE(\widehat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{\sigma}^2 \left(X'X\right)^{-1}_{jj}} \quad j = 1, .., k$$

donde $\widehat{\beta}_j$ es el elemento j del vector $\widehat{\beta}$ y $\left(X'X\right)^{-1}_{jj}$ es el elemento (j, j) de la matrix $\left(X'X\right)^{-1}$. $SE(\widehat{\beta}_j)$ es un estimador de la desviación típica de $\widehat{\beta}_j$.

Nota: Si cambiamos las unidades de medida de alguna o algunas de las variables explicativas y/o de la variable dependiente cada uno de los errores estándar variará en la misma proporción que el valor estimado del parámetro correspondiente.

2.4. DISTRIBUCIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS ASOCIADAS A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

En este apartado estudiaremos algunos resultados básicos que serán de utilidad para obtener la distribución de los estimadores $\hat{\beta}$ y $\hat{\sigma}^2$ y para realizar contrastes de hipótesis sobre los parámetros bajo la hipótesis de normalidad de los errores (Hipótesis 6 del Tema 1).

Bibliografía apartado 2.4:
Greene, 3.4.1, 3.4.2, y 3.10
A. Gallastegui.: apéndice 4.A.
J.M. Wooldridge: apéndice B.5

Propiedad de la distribución normal multivariante

Si X es un vector $n \times 1$, $X \sim N\left[\mu, \Sigma\right]$, A es una matriz $r \times n$ $(r \leq n)$ no aleatoria y b es un vector $r \times 1$ no aleatorio, entonces:

(i) $AX + b \sim N\left[A\mu + b, A\Sigma A'\right]$

(ii) En particular $\Sigma^{-1/2}(X-\mu) \sim N[0, I_n]$

Definición 1 (chi-cuadrado con 1 grado de libertad): Si $Z \sim N[0,1]$, entonces $Z^2 \sim \chi^2_1$

Definición 2 (chi-cuadrado con n grados de libertad): Si $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ son n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) como $N[0,1]$, entonces $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2_n$.

Definición 3 (t de Student con n grados de libertad): Si Z y X son variables aleatorias independientes $Z \sim N[0,1]$ y $X \sim \chi^2_n$ entonces

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}} \sim t_n$$

Definición 4 (F de Snedecor con n y m grados de libertad): Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes $X_1 \sim \chi^2_n$ y $X_2 \sim \chi^2_m$ entonces

$$\frac{\frac{X_1}{n}}{\frac{X_2}{m}} \sim F_{n,m}$$

Teorema 1. (Suma de chi-cuadrados): Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución $X_1 \sim \chi^2_{n_1}$ y $X_2 \sim \chi^2_{n_2}$, entonces $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$

Teorema 2. Si $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ son n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) como $N[0,\sigma^2]$, entonces $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Z_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$

Teorema 3: Distribución de formas cuadráticas de matrices idempotentes en vectores normales estandarizados.

Sea X un vector aleatorio de dimensión n tal que $X \sim N(0, I_n)$, A una matriz $n \times n$ simétrica e idempotente, entonces

$$X'AX \sim \chi^2_J$$

donde $J = rg(A) = tr(A)$

Teorema 4: Independencia de dos formas cuadráticas con matrices idempotentes en un mismo vector normal estandarizado

Sea $X \sim N(0, I_n)$ y A y B dos matrices $n \times n$ idempotentes tales que $AB = 0$, entonces, las dos formas cuadráticas $X'AX$ y $X'BX$ son independientes.

Ejemplo: Sea $X \sim N(0, I_n)$ y A y B dos matrices $n \times n$ idempotentes de rango n_A y n_B, respectivamente. Utilizando el Teorema 3

$$\begin{aligned} X'AX &\sim \chi^2_{n_A} \\ X'BX &\sim \chi^2_{n_B} \end{aligned}$$

Si $AB = 0$, utilizando el Teorema 4, $X'AX$ y $X'BX$ son independientes y por tanto

$$\frac{(X'AX)/n_A}{(X'BX)/n_B} \sim F_{n_A, n_B}$$

Teorema 5: Independencia de una función lineal y una forma cuadrática idempotente de un vector normal estandarizado

Sea $X \sim N(0, I_n)$ y sea L una matriz $r \times n$ y A una matriz $n \times n$ idempotente tales que $LA = 0$, entonces la función lineal LX y la forma cuadrática $X'AX$ son independientes.

Ejemplo: Sea $X \sim N(0, I_n)$, A una matriz $n \times n$ idempotente de rango n_A y L un vector $n \times 1$ tal que $L'L = 1$. Como $X \sim N(0, I_n) \Rightarrow L'X \sim N(0, L'L) = N(0, 1)$ y $X'AX \sim \chi^2_{n_A}$. Si $L'A = 0$, utilizando el Teorema 5, $L'X$ y $X'AX$ son independientes y por tanto

$$\frac{L'X}{\sqrt{(X'AX)/n_A}} \sim t_{n_A}$$

Teorema 6: Distribución de formas cuadráticas de matrices de rango completo en vectores normales

Sea X un vector $n \times 1$, $X \sim N[\mu, \Sigma]$, entonces $(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \sim \chi^2_n$

2.5. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES MCO CON ERRORES NORMALES

Bibliografía apartado 2.5:
Greene, 3.10.2, 6.6.3,
A. Gallastegui.: 4.2.
J.M. Wooldridge, 4.1

Bajo la hipótesis adicional 6 de normalidad de los errores, se puede calcular la distribución exacta de los estimadores $\hat{\beta}$ y $\hat{\sigma}^2$. Nótese que la media y la varianza de $\hat{\beta}_{MCO}$ se obtuvieron en el tema 2 sin necesidad de imponer la hipótesis adicional 6, aunque obviamente la distribución de $\hat{\beta}$ sin esta hipótesis adicional es desconocida.

Si el modelo satisface las hipótesis básicas 1 a 6:

- $\widehat{\beta}$ sigue una distribución normal ya que $\widehat{\beta}$ es una función lineal de u ($\widehat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$). En concreto

$$\underset{k\times 1}{\widehat{\beta}} \sim N\left(\underset{k\times 1}{\beta}, \sigma^2 \underset{k\times k}{(X'X)^{-1}}\right) \tag{0.1}$$

- La distribución marginal de cada elemento del vector $\widehat{\beta}$ es también normal:

$$\widehat{\beta}_j \sim N\left[\beta_j, \sigma^2 (X'X)^{-1}_{jj}\right] \text{ para } j = 1, ..., k$$

  donde $\widehat{\beta}_j$ es el elemento j del vector $\widehat{\beta}$, β_j es el elemento j del vector β y $(X'X)^{-1}_{jj}$ es el elemento (j, j) de la matriz $(X'X)^{-1}$.

- $Y = X\beta + u \sim N(X\beta, \sigma^2 I_T)$, ya que Y es la suma de un vector no aleatorio $X\beta$ y un vector normal u.

- $\hat{Y} = X\widehat{\beta} \sim N(X\beta, \sigma^2 X(X'X)^{-1}X')$, ya que $\widehat{Y}$ es una transformación lineal de $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\beta}$ se distribuye como una normal como se ha visto en la expresión (0.1)

- $$\frac{\widehat{\sigma}^2 (T-k)}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-k)}$$

  Demostración

  Dado que

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{(T-k)} \Rightarrow \frac{\widehat{\sigma}^2 (T-k)}{\sigma^2} = \frac{e'e}{\sigma^2}$$

  y lo que tenemos que demostrar es que

$$\frac{e'e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-k)}$$

  Sabemos que

$$\frac{e'e}{\sigma^2} = \frac{u'Mu}{\sigma^2} = \left(\frac{u}{\sigma}\right)' M \left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

  Puesto que $\left(\frac{u}{\sigma}\right) \sim N(0, I_T)$ y M es una matriz idempotente de rango $T-k$, utilizando el Teorema 3,

$$\frac{e'e}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(T-k)}$$

- $\hat{\beta}$ y $\widehat{\sigma}^2$ son independientes entre sí.

  Demostración

  Nótese que

$$\frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)}{\sigma} = (X'X)^{-1}X'\left(\frac{u}{\sigma}\right) \rightarrow \qquad \text{función lineal del vector normal estandarizado } \left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

$$\frac{\widehat{\sigma}^2(T-k)}{\sigma^2} = \left(\frac{u}{\sigma}\right)' M \left(\frac{u}{\sigma}\right) \rightarrow \qquad \text{forma cuadrática con matriz idempotente } M \text{ en el vector normal estandarizado } \left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

  Entonces, puesto que $(X'X)^{-1}X'M = 0$, utilizando el Teorema 5

$$\frac{\widehat{\sigma}^2(T-k)}{\sigma^2} \text{ y } \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)}{\sigma} \text{ son independientes} \Longleftrightarrow \widehat{\sigma}^2 \text{ y } \hat{\beta} \text{ son independientes}$$