Vectors lliscants

José Joaquín Rodes Roca, Juan Carlos Moreno Marín, Tarsicio Beléndez Vázquez i David Israel Méndez Alcaraz
Curs 2006-2007

Departament de Física, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal

Universitat d'Alacant

1. Objectius

En aquest bloc temàtic es pretén incidir en els aspectes següents que són fonamentals per al seguiment del curs:

• Magnituds físiques.

• Dimensionalitat i unitats.

• Homogeneïtat de les expressions que descriuen lleis físiques.

• Indeterminació dels càlculs numèrics en la ciència experimental.

• Càlcul vectorial.

• Propietats dels vectors lliscants.

• Sistemes de vectors equivalents (reducció d'un sistema de vectors).

• Moment d'un vector o d'un sistema de vectors lliscants.

• Torçor d'un sistema de vectors lliscants.

2. Aplicacions

Els aspectes esmentats anteriorment són de gran interès per al desenvolupament d'altres capítols d'aquest primer quadrimestre. Concretament s'aplicarà en:

• Anàlisi les situacions d'equilibri en general.

• Equilibri d'estructures arquitectòniques.

• Elasticitat d'elements resistents.

• Problemes d'hidrostàtica.

• Unitats, magnituds i homogeneïtat d'expressions, en tota l'assignatura.

3. Resum teòric

En totes les ciències experimentals, cal tenir-hi en compte que els **nombres** tenen un **significat científic** (en el nostre cas, físic) i aporten informació addicional, al marge del valor numèric. Per tant, la primera anàlisi que cal fer és si la **solució matemàtica té sentit físic o no.**
Una altra qüestió no menys important és que les operacions matemàtiques no es poden fer alegrement, ja que poden alterar el significat físic d'allò que s'està fent (cosa que vulgarment es generalitza amb la frase "**l'oli i l'aigua no es mesclen**").

3.1. Magnituds i unitats

Es pot considerar que una **magnitud física** és qualsevol ens de la naturalesa que siga susceptible de ser mesurat. Atenent el nombre de paràmetres necessaris per a definir una magnitud, es poden classificar en:

• **Magnituds escalars**: un sol nombre és prou per a identificar-la, com per exemple, la massa, l'energia, el temps, la temperatura...

• **Magnituds vectorials**: es necessiten dos o tres nombres per a tenir-les totalment determinades, com per exemple, la velocitat, la força, el camp elèctric...

• **Magnituds tensorials**: es necessiten 3N quantitats per a determinar el tensor, on N=0, 1, 2, 3... n'és l'ordre. Alguns exemples són el moment d'inèrcia, el tensor de tensions, la permitivitat del medi...

A més, tota magnitud física té un patró de comparació que permet establir la unitat de mesura. En el nostre cas, s'utilitzarà el Sistema Internacional d'Unitats (SI) (encara que en alguns exemples serà aconsellable utilitzar el Sistema Tècnic).

Magnitud	**Unitat**	
	NOM	SÍMBOL
Longitud	metre	**m**
Massa	kilogram	**kg**
Temps	segon	**s**
Intensitat de corrent elèctric	ampere	**A**
Temperatura termodinàmica	kelvin	**K**
Quantitat de substància	mol	**mol**
Intensitat lluminosa	candela	**cd**

Quadre 1: Unitats bàsiques del Sistema Internacional d'Unitats (SI). Les magnituds físiques que es poden trobar en la Mecànica es poden expressar en funció de tres magnituds bàsiques únicament: longitud (L), massa (M) i temps (T). Per exemple, la força tindria l'equació dimensional següent: $[F] = L \cdot M \cdot T^{-2}$, per tant, el N en unitats bàsiques del SI ve donat per $m \cdot kg \cdot s^{-2}$.
En tota ciència experimental cal tenir clar que els resultats numèrics tenen una indeterminació o error associat a les dades físiques, al model físic utilitzat en la resolució d'un problema o a l'arredoniment d'operacions intermèdies. En general, es pot considerar que el **resultat final** ha de tenir **quatre xifres significatives**, si el resultat comença per un u, i tres en la resta de casos.

EXEMPLES RESOLTS

1. El valor de π és 3,141592654. Quin és el valor amb 4 xifres significatives?
La solució s'obté arredonint per excés la quarta xifra significativa. Si tenim en compte que la següent és cinc, per tant: **3,142.**

2. Els enginyers que estudien ones de xoc solen expressar la velocitat en mil·límetres per microsegon (*mm/µs*). Suposeu que la velocitat d'un front d'ona és de 8 mm/*µs*, determineu aquesta velocitat en m/s.
Tenint en compte que 1 mm equival a 10^{-3}m i que 1µs equival a 10^{-6}s, resulta que 8 mm/µs = $8 \cdot 10^{-3}/10^{-6}$ m/s = 8000 m/s = ***8 km/s.***

3. Si la Terra es considera com una esfera homogènia, la velocitat d'un satèl·lit en òrbita circular, on R_E és el radi de la Terra i r és el radi de l'òrbita, és

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot R_E^2}{r}}$$

Si totes les magnituds vénen expressades en el SI, quines són las unitats de v? Si el radi terrestre fa 6.370 km i el radi de l'òrbita 6.670 km, és a dir, 300 km sobre la superfície terrestre, quin és el valor de v amb tres xifres significatives?
Evidentment, si totes les magnituds s'expressen en el SI, el resultat final ha de tenir unitats del SI. Per tant, les unitats de v serien de $m \cdot s^{-1}$. Tanmateix, la comprovació rigorosa es farà mitjançant l'equació que relaciona totes les magnituds. És a dir,

$$[v] = \sqrt{\frac{m \cdot s^{-2} \cdot m^2}{m}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = m \cdot s^{-1}$$

D'altra banda, substituint els valors del problema en l'equació, el valor de la velocitat amb tres xifres significatives és:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot \left(6370 \cdot 10^3\right)^2}{6670 \cdot 10^3}} = 7720\ m \cdot s^{-1}$$

4. Es defineix la unitat astronòmica (UA) com la distància mitjana de la Terra al Sol, el valor de la qual és de $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. El parsec (pc) és la longitud radial des de la qual una unitat astronòmica de longitud d'arc subtendeix un angle d'1 segon. L'any llum és la distància que recorre la llum en un any.

a) Quants parsecs són una unitat astronòmica?
b) Quants metres són un parsec?
c) Quants metres són un any llum?
d) Quantes unitats astronòmiques són un any llum?
e) Quants anys llum són un parsec?

Com que la longitud d'un arc és el producte del radi per l'angle expressat en radiants, n'hi ha prou d'expressar el segon en radiants per a obtenir la relació entre les unitats astronòmiques i el parsec:

$$1'' = \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}\ rad$$

Per tant:

$$1\ UA = \frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1\ pc \approx 4{,}85 \cdot 10^{-6}\ \ pc$$

$$1\,pc = 206.265 UA = 206.265 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \approx 3{,}08 \cdot 10^{16}\ m$$

$$1 any\ llum = 2{,}998 \cdot 10^{8} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 9{,}45 \cdot 10^{15}\ m$$

$$1 any\ llum \approx \frac{9{,}45 \cdot 10^{15}}{1{,}496 \cdot 10^{11}} \approx 63200\ UA$$

$$1\,pc \approx \frac{3{,}08 \cdot 10^{16}}{9{,}45 \cdot 10^{15}} \approx 3{,}26\ anys\ llum$$

5. Quina combinació de la força i una altra magnitud física té les dimensions de la potència?

Considerant que la potència és el treball per unitat de temps, les seues unitats en el SI seran J/s. A més, el treball té dimensions de força per distància, N · m, en el SI. Per tant, la potència es pot expressar com a N · m/s. És a dir, que si es multiplica una **força** *per una* **velocitat***, el resultat té dimensions de potència.*

3.2. Anàlisi vectorial

Resulta obvi que les magnituds vectorials tenen un paper important tant en la Física com en la Tècnica. Entre aquestes destacarem, per la importància que tenen en aquest curs, la **força** i el **moment d'una força**. Aquestes magnituds són fonamentals per al desenvolupament de la professió d'un/a enginyer/a o arquitecte/a. Per aquesta raó, és estrictament necessari que es coneguen les operacions i propietats algebraiques dels vectors. A continuació es defineixen les característiques que es consideren més importants:

• Dos vectors lliures són iguals si tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit.

• Diem que un vector $\vec{u}$ és unitari quan el seu mòdul és la unitat.

• Un vector $\vec{A}$ es podrà expressar en coordenades cartesianes com a $\vec{A}$ = (A_x, A_y, A_z) o en un sistema de referència cartesià mitjançant els unitaris $\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$.

• El mòdul d'un vector $\vec{A}$ es pot calcular a partir de les seues coordenades segons l'expressió $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

• Tot vector forma un angle amb cada un dels eixos cartesians. Els cosinus d'aquests angles s'anomenen **cosinus directors**. Es poden calcular de la manera següent:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|},\ \cos\beta = \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|},\ \cos\gamma = \frac{A_z}{\left|\vec{A}\right|}$$

• Es pot construir un vector unitari a partir d'un vector $\vec{A}$ qualsevol de la manera següent:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \left(\frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}, \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|}, \frac{A_z}{\left|\vec{A}\right|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

És a dir, que els cosinus directors no són més que les coordenades d'un vector unitari en la direcció del primer.

• Es verifica la relació $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

• Es defineix el producte escalar de dos vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ com el producte dels seus mòduls pel cosinus de l'angle que formen. Anal·líticament, l'expressió és $\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\alpha$, $0 \le \alpha \le \pi$. Algunes de les propietats més importants són:

1. A partir de les components dels vectors també es pot calcular el producte escalar com a: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$.
2. El producte escalar d'un vector por ell mateix és igual al quadrat del mòdul d'aquest vector.
3. Si el producte escalar de dos vectors no nuls és zero, llavors els vectors són perpendiculars entre si.
4. El producte escalar d'un vector per un unitari qualsevol es pot interpretar geomètricament com la projecció del primer sobre el segon.

• El producte vectorial de dos vectors, $\vec{A}\times\vec{B}$, és un altre vector, $\vec{C}$, les característiques del qual són:

1. El mòdul es calcula a partir de l'expressió:
$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot sen\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi.$$
2. La direcció és perpendicular al plànol que determinen els vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

3. La regla del llevataps o del caragol dóna el sentit: el sentit de gir del primer vector cap al segon ens donarà el sentit d'avançament del caragol, que coincidirà amb el sentit del producte vectorial $\vec{C}$.

4. Coneixent les components dels vectors que componen el producte vectorial, el càlcul es pot fer a partir de l'expressió:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

5. Si el producte vectorial de dos vectors no nuls val zero, significa que els vectors són paral·lels o antiparal·lels.

6. El mòdul del producte vectorial representa el valor de l'àrea del paral·lelogram que formen els vectors components d'aquest producte.

• El producte mixt de tres vectors, $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ expressat també com a $\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]$ es pot obtenir a partir de les seues coordenades:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

Geomètricament, el mòdul del producte mixt de tres vectors representa el volum del paral·lelepípede les arestes del qual són els tres vectors que es consideren.

En la resolució dels problemes d'aquest bloc s'utilitzen un conjunt de fórmules i teoremes que es poden resumir en:

Teorema dels sinus dels angles. Per a un triangle qualsevol, prenent els costats del triangle com els vectors que s'hi associen, la relació que es compleix és la següent:

$$\frac{\left|\vec{A}\right|}{sen\,\alpha}=\frac{\left|\vec{B}\right|}{sen\,\beta}=\frac{\left|\vec{C}\right|}{sen\,\gamma}$$

Teorema del cosinus de l'angle. Per a un triangle no rectangle, permet calcular el valor d'un costat d'un triangle qualsevol, coneixent els altres dos costats i l'angle que formen. L'expressió és:

$$\left|\vec{C}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2-2\cdot\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\gamma$$

Equacions de la recta en l'espai. Conegudes les coordenades d'un punt de la recta, P_1 (x_1, y_1, z_1), i les components d'un vector director $\vec{A}$ = (A_x, A_y, A_z), podem calcular un punt genèric de la recta, P(x, y, z):

• Equació vectorial: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\cdot\vec{A},\quad \lambda\in R$

• Equació paramètrica: $\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot A_x \\ y = y_1 + \lambda \cdot A_y \\ z = z_1 + \lambda \cdot A_z \end{cases}$

• Equació contínua: $\dfrac{x - x_1}{A_x} = \dfrac{y - y_1}{A_y} = \dfrac{z - z_1}{A_z}$

Equacions del plànol en l'espai. Si es coneixen les coordenades d'un punt P i un vector perpendicular al plànol, un punt genèric d'aquest ha de complir:

• Equació vectorial: $\vec{A} \cdot \overrightarrow{OP} = \left|\vec{A}\right| \cdot \vec{u}_{\vec{A}} \cdot \overrightarrow{OP}$ = *constant*

• Equació general: $x \cdot A_x + y \cdot A_y + z \cdot A_z = C$.

Si es coneixen tres punts del plànol, l'equació general es pot obtenir a partir de la igualtat:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Distàncies i angles. A continuació hi ha un resum de les expressions que s'han d'aplicar en cada cas.

• La distància des d'un punt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ a un pla d'equació $\vec{A} \cdot \overrightarrow{OP} = C$ es calcularia així:

$$d(P_0, \pi) = \frac{\left|\vec{A} \cdot \overrightarrow{OP_0} - C\right|}{\left|\vec{A}\right|}$$

• La distància des d'un punt $P_1(x_1,y_1,z_1)$ a una recta d'equació $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{A}$, on P_0 és un punt qualsevol d'aquesta, es calcula com a:

$$d(P_1, r) = \left|\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) \times \vec{u}_{\vec{A}}\right|$$

• La distància mínima entre dues rectes que es creuen en l'espai es determina a partir de la línia perpendicular comuna a les dues rectes. Coneixent les equacions vectorials de les rectes, la distància es pot trobar segons l'expressió següent:

$$d(r_1, r_2) = \left|\left(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right) \cdot \vec{u}_{\vec{A} \times \vec{B}}\right|$$

• L'angle que formen dues rectes o dos plans es calcula a partir de la mateixa expressió. Sols canvia el significat dels vectors: en el cas de les rectes es refereix als vectors directors de cada una d'aquestes, mentre que per als plans es refereix als vectors característics de cada un d'aquests:

$$\theta = arc\cos \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|}$$

• L'angle que forma una recta amb un pla s'obté a partir de l'expressió següent:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - arc\cos\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|}$$

EXEMPLES RESOLTS

1. La magnitud d'una força, $\vec{F}$, és de 8 kN. Si la línia d'acció de la força passa pels punts (3, 7) i (7, 2), unitats en metres, determina les components de la força.

Tenint en compte que tot vector es pot expressar com el producte del seu mòdul per l'unitari en la direcció d'aquest vector:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right|\cdot\vec{u}_{\vec{F}}$$

Considerant el sentit de la força en l'ordre en què es donen els punts, l'unitari serà:

$$\vec{u}_{\vec{F}} = \frac{(7-3, 2-7)}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{41}}\cdot(4,-5)$$

Per tant:

$$\vec{F} = \frac{8}{\sqrt{41}}\cdot(4,-5)\ kN$$

2. Utilitzant el producte vectorial, determina les components d'un vector unitari que siga perpendicular als vectors $\vec{A} = 3\cdot\vec{i} - 10\vec{j}$ i $\vec{B} = -6\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$.

Un vector perpendicular al plànol que determinen els vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$ està determinat pel seu producte vectorial.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -10 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = (-20,-6,-18)$$

Així doncs, l'unitari en la direcció perpendicular serà:

$$\vec{u}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{760}}\cdot(-20,-6,-18) = \frac{1}{\sqrt{190}}\cdot(-10,-3,-9)$$

3. Si A(3, 1, 0), B(0, 1, -4) i C(5, 0, -2) són tres punts de l'espai, determina l'angle que formen la recta que passa per A i B amb la recta que passa per A i C.

L'angle que formen les rectes serà el mateix que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. Per tant, si trobem les coordenades dels dos vectors, mitjançant el seu producte escalar podem determinar l'angle que formen.

$$\overrightarrow{AB} = (0-3, 1-1, -4-0) = (-3, 0, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-3, 0-1, -2-0) = (2, -1, -2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|}=\frac{(-3)\cdot 2+0\cdot(-1)+(-4)\cdot(-2)}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

L'angle és

$$\theta=arc\cos\frac{2}{15}=82{,}3^{\circ}$$

4. Una superfície plana triangular es vol subjectar mitjançant un cable. Calcula la longitud de cable mínima necessària per a fer-ho, suposant que en el sistema de referència triat les coordenades dels vèrtexs són A(3, 0, 0), B(0, 5, 0) i C(0, 0, 4), mentre que les del punt de subjecció són P(9, 6, 5), expressades en metres.

A partir de la definició de distància d'un punt a un plànol

$$d(P,\pi)=\vec{AP}\cdot\vec{u}_{\perp}$$

n'hi ha prou de construir el vector $\vec{AP}$ *i trobar el vector característic del pla per a determinar la distància demanada. L'equació general del pla es pot obtenir a partir de*

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 20\cdot x+12\cdot y+15\cdot z-60=0$$

D'aquesta manera, si se substitueix en l'expressió anterior, la distància demanada serà

$$\vec{AP}=(6,\,6,\,5)\,;\quad \vec{u}_{\perp}=\frac{(20,12,15)}{\sqrt{20^2+12^2+15^2}}$$

$$d(P,\,\pi)=(6,\,6,\,5)\cdot\frac{(20,12,15)}{\sqrt{769}}=\frac{267}{\sqrt{769}}\approx 9{,}63\ m$$

Una altra manera d'efectuar el càlcul és a partir de l'equació general del pla. Si substituïm les coordenades del punt P en l'equació del pla i es divideix pel mòdul del vector característic del pla, s'obté també el valor de la distància

$$d(P,\,\pi)=\frac{|20\cdot 9+12\cdot 6+15\cdot 5-60|}{\sqrt{20^2+12^2+15^2}}\approx 9{,}63\ m$$

5. Sobre un automòbil actuen tres forces, en un pla XY. Si els valors de dues forces són $\left|\vec{F}_1\right|$= 150 N, que formen un angle de 23º amb l'eix OX, i $\left|\vec{F}_2\right|$= 250 N, que forma 25º amb la força anterior, calcula la força que forma un angle de -37º respecte de l'eix OX, perquè la resultant sols tinga component x i el valor en mòdul d'aquesta resultant.

El primer pas per a resoldre aquest exercici consisteix a calcular les components x i y de cada una de les forces.

$$F_{1x}=150\cdot\cos 23^{\circ}\approx 138{,}1\ N$$

$$F_{2x}=150\cdot\cos 48^{\circ}\approx 167{,}3\ N$$

$$F_{3x}=\left|\vec{F}_3\right|\cdot\cos(-37^{\circ})\ N$$

$$F_{1y}=150\cdot sen\,23^{\circ}\approx 58{,}6\ N$$

$$F_{2y}=150\cdot sen\,48^{\circ}\approx 185{,}8\ N$$

$$F_{3y}=\left|\vec{F}_3\right|\cdot sen(-37^{\circ})\ N$$

Perquè el vehicle es desplace en la direcció de l'eix OX, s'ha de complir que la component en la direcció de l'eix OY siga zero. Per tant:

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 58{,}6 + 185{,}8 + sen(-37°) \cdot \left|\vec{F}_3\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{F}_3\right| \approx 406 \ N$$

A més, la resultant coincidirà amb el valor de la seua component x, per tant:

$$\left|\vec{R}\right| = R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \approx 630 \ N$$

3.3. Vectors lliscants

En aquest apartat es destaca que les forces o càrregues tenen un caràcter de vectors lliscants, d'on es podrà aplicar tota l'anàlisi vectorial estudiada. El més important és saber que per a tenir determinat un vector lliscant, cal conèixer-ne les components i les coordenades d'un punt d'aplicació.

Donat un vector lliscant i un punt qualsevol P de l'espai, es defineix el **moment del vector $\vec{F}$ respecte del punt P** a

$$\vec{M}_P\vec{F} = \overrightarrow{PA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Un sistema de vectors lliscants es pot reduir, utilitzant propietats dels vectors, a dos vectors que constitueixen allò que s'anomena **torçor del sistema**. Aquests vectors són la **resultant general** i el **moment resultant** respecte a un punt donat. Aquests elements de reducció es calculen

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i} \times \vec{F}_i$$

Si descomponem el moment resultant en dues components, una que tinga la direcció de la resultant i una altra que tinga la direcció perpendicular, es pot demostrar que hi ha un conjunt de punts en què la component perpendicular és nul·la. Aquests punts formen una recta que es diu **eix central del sistema**. A més, en aquests punts es compleix que el moment respecte als punts que pertanyen a l'eix central és mínim. Per tant, es pot definir l'eix central d'un sistema com:

1. El lloc geomètric dels punts respecte dels quals el vector moment és paral·lel a la resultant.

2. El lloc geomètric dels punts en què el vector moment resultant és mínim.

La determinació de l'eix central es pot fer mitjançant l'equació del camp de moments següent:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_E + \overrightarrow{AE} \times \vec{R} = \vec{m} + \overrightarrow{AE} \times \vec{R}$$

on A és un punt qualsevol i E un punt de l'eix central. El **teorema de Varignon generalitzat** estableix que si un sistema de vectors lliscants té el moment mínim nul, el moment d'aquest sistema de vectors respecte d'un punt qualsevol coincideix amb el moment de la resultant respecte d'aquest mateix punt, si suposem que la resultant actua sobre l'eix central. Aquest teorema s'aplica a sistemes de vectors coplanaris, paral·lels o concurrents. Els invariants d'un sistema de vectors lliscants són la resultant, **primer**

invariant, i el mòdul del moment mínim, **segon invariant**. Aquests dos invariants permeten establir una classificació d'un sistema de vectors lliscants.

EXEMPLES RESOLTS

1. Calculem el moment respecte al punt $P_2(5, 3,-7)$ d'un vector de mòdul 3, que està aplicat en el punt $P_1(2, 3, 0)$ i forma angles de 30º i 60º amb els eixos OX i OY, respectivament.

En primer lloc determinarem el vector. Com que coneixem els angles que forma amb els eixos, mitjançant els cosinus directors podem determinar el vector unitari en la direcció del vector de mòdul 3.

$$\vec{u}_d = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\vec{d} = 3\cdot\vec{u}_d = \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

D'altra banda, el vector $\overrightarrow{P_2P_1} = (-3\ , 0\ , 7)$ *i el moment respecte al punt* P_2 *serà:*

$$\vec{M}_{P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 7 \\ \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{-21}{2}, \frac{21\cdot\sqrt{3}}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

2. Els vèrtexs d'un triangle són A (3, 1, 4), B (-1, 3, 8) i C (2, 4, 1). Es demana:

a) Direcció de la bisectriu de l'angle del vèrtex A
b) Àrea del triangle
c) Altura del triangle corresponent al costat AB
d) Valor de la mitjana del costat AB
e) Torçor del sistema format pels vectors de posició dels vèrtexs del triangle
f) Equació de l'eix central

La bisectriu es pot determinar a partir de la suma dels vectors unitaris de les direccions $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$. *Les components dels vectors són:*

$$\overrightarrow{AB} = (-4,2,4); \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 6; \quad \overrightarrow{AC} = (-1,3,-3); \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{19}$$

Per tant, la direcció demanada estarà donada per:

$$\vec{u}_{\overrightarrow{AB}} + \vec{u}_{\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{6}\cdot(4,2,4) + \frac{1}{\sqrt{19}}\cdot(-1,3,-3) = \left(\frac{-2\cdot\sqrt{19}-3}{3\cdot\sqrt{19}}, \frac{\sqrt{19}+9}{3\cdot\sqrt{19}}, \frac{2\cdot\sqrt{19}-9}{3\cdot\sqrt{19}}\right)$$

Tenint en compte que l'àrea del triangle, A, està relacionada directament amb el mòdul del producte vectorial dels vectors que el formen:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-18,-16,-10)$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{18^2+16^2+10^2}\approx 13{,}04\ u^2$$

L'**altura del triangle corresponent al costat AB**, *H, s'obté com la distància del punt C a la recta determinada pels punts A i B. Per tant,*

$$H=d(C,r_{AB})=\left|\vec{AC}\times\vec{u}_{\vec{AB}}\right|$$

$$\vec{AC}\times\vec{u}_{\vec{AB}}=\frac{1}{3}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & -3\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot(9,8,5)$$

$$H=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9^2+8^2+5^2}\approx 4{,}35\ u$$

Com que la **mitjana del costat AB** *és la recta que passa pel punt mitjà de AB i el vèrtex C, trobarem aquest punt M_{AB} i el vector $\vec{MC}$ i expressarem la recta en forma contínua.*

$$M_{AB}=\frac{A+B}{2}=\frac{(2,\,4,\,12)}{2}=(1,\,2,\,6)$$

El vector director de la recta és $\vec{MC}$ = (1, 2, -5) i la seua equació en forma contínua serà:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{-5}$$

El **torçor del sistema** *format pels vectors de posició dels vèrtexs del triangle estarà donat per:*

$$\vec{R}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=(3,\,1,\,4)+(-1,\,3,\,8)+(2,\,4,\,1)=(4,\,8,\,13)$$

*El moment resultant serà zero perquè és un sistema de vectors concurrents en l'origen, és a dir, l'origen pertany a l'eix central ja que el moment resultant coincideix amb el moment mínim. Per tant, $\vec{M}_0=\vec{m}=\vec{0}$. A partir de l'equació del camp de moments i la condició de paral·lelisme entre resultant i moment respecte d'un punt de l'eix central, l'*__equació de l'eix central__ *és:*

$$\vec{M}_E=\vec{M}_O+\vec{EO}\times\vec{R}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -x & -y & -z\\ 4 & 8 & 13\end{vmatrix}=(8\cdot z-13\cdot y,\,13\cdot x-4\cdot z,\,4\cdot y-8\cdot x)$$

$$\frac{8\cdot z-13\cdot y}{4}=\frac{13\cdot x-4\cdot z}{8}=\frac{4\cdot y-8\cdot x}{13}$$

$$\left.\begin{array}{r}13\cdot x+26\cdot y-20\cdot z=0\\ 32\cdot x-185\cdot y+104\cdot z=0\end{array}\right\}$$

3. El moment mínim d'un sistema és el vector (1, 1, 1), l'eix central passa pel punt (1, 2, 1), i el mòdul de la resultant és 6. Determina el moment principal d'aquest sistema.

Com que la resultant és paral·lela a l'eix central, tindrà la mateixa direcció que el vector moment mínim. Per consegüent, si multipliquem el mòdul de la resultant per l'unitari en la direcció d'aquest vector, hi trobarem les components de la resultant.

$$\vec{u}_R=\frac{(1,\,1,\,1)}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{R} = 6 \cdot \frac{(1,\,1,\,1)}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot (1,\,1,\,1)$$

El moment principal s'obté a partir de l'equació del camp de moments:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_E + \vec{OE} \times \vec{R} = (1,\,1,\,1) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(1 + 2 \cdot \sqrt{3},\,1,\,1 - 2 \cdot \sqrt{3}\right)$$

4. Un sistema de forces reduït a l'origen de coordenades ha donat una resultant general $\vec{R} = (0,\,0,\,4)\,kg$ i un moment resultant $\vec{M}_O = (0,\,0,\,4)\ kg \cdot m$. A aquest sistema li afegim una nova força $\vec{F}_1$ = (0, 0, 1) kg, aplicada en A(0, 5, 2) i una altra $\vec{F}_2$ de mòdul desconegut, aplicada en B(-2, 1, 2), sobre una recta de cosinus directors

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\,0,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcula la distància mínima entre l'eix central d'aquest sistema i el del primitiu, sabent que el nou eix central té per cosinus directors

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\,0,\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

D'acord amb les dades del problema, la nova resultant és:

$$\vec{R}_2 = (0,\,0,\,4) + (0,\,0,\,1) + \left(-\left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},\,0,\,\left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},\,0,\,5 + \left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ kg$$

El mòdul de la resultant serà:

$$\left|\vec{R}_2\right| = \sqrt{\frac{\left|\vec{F}_2\right|^2}{2} + \left(5 + \left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ \ kg$$

Tenint en compte que l'eix central i la resultant tenen direccions paral·leles:

$$\cos\alpha = \frac{R_{2x}}{\left|\vec{R}_2\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-\left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{\left|\vec{F}_2\right|^2}{2} + \left(5 + \left|\vec{F}_2\right| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

Resolent aquesta equació s'arriba a determinar el valor del mòdul de la força desconeguda:

$$\left|\vec{F}_2\right| = \frac{-5}{\sqrt{2}}\ kg \Rightarrow \vec{F}_2 = \left(\frac{5}{2},\,0,\,\frac{-5}{2}\right)\ kg$$

$$\vec{R}_2 = \left(\frac{5}{2},\,0,\,\frac{5}{2}\right)\ kg$$

Per a determinar el moment resultant del nou sistema, es calculen els moments de cada una de les forces afegides:

$$\vec{M}_{\vec{F}_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (5,\,0,\,0)\ kg \cdot m$$

$$\vec{M}_{\vec{F}_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{-5}{2},\, 0,\, \frac{-5}{2} \right)\ kg \cdot m$$

$$\vec{M}_{\vec{O}_2} = (0,\, 0,\, 4) + \vec{M}_{\vec{F}_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2} = \left(\frac{5}{2},\, 0,\, \frac{3}{2} \right)\ kg \cdot m$$

Per a determinar la distància entre dues rectes aplicarem l'expressió:

$$d(r_1, r_2) = \left| \left(\overrightarrow{OE}_2 - \overrightarrow{OE}_1 \right) \cdot \vec{u}_{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2} \right|$$

Per tant, hem de determinar un punt de cada eix central. Si calculem en el sistema primitiu el moment mínim, $\vec{m} = \left(\vec{M}_O \cdot \vec{u}_{\vec{R}_1} \right) \cdot \vec{u}_{\vec{R}_1}$*, es pot comprovar que s'obté el mateix valor que el moment resultant. Això implica que els punts de l'eix central tindran coordenades x i y nul·les. D'aquesta forma, es pot prendre com* $\overrightarrow{OE}_1$ *= (0, 0, 0). Mitjançant l'equació del camp de moments per a l'eix central del sistema final:*

$$\vec{M}_{E_2} = \left(\frac{5}{2},\, 0,\, \frac{3}{2} \right) - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2},\, 0,\, \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{5}{2} \cdot y,\, \frac{5}{2} \cdot z - \frac{5}{2} \cdot x,\, \frac{-5}{2} \cdot y \right)\ kg \cdot m$$

De la condició de paral·lelisme entre el moment respecte d'un punt pertanyent a l'eix central i la resultant del sistema:

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot y}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2} \cdot x - \frac{5}{2} \cdot z}{0} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \cdot y}{\frac{5}{2}}$$

D'on tenim que s'obté que x = z i y =1/5, és a dir, que el punt que ens faltava $\overrightarrow{OE}_2 = \left(0,\, \frac{1}{5},\, 0 \right)$*. L'últim factor que ens falta per determinar és:*

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = (0,\, 10,\, 0) \Rightarrow \vec{u}_{\vec{R}_1 \times \vec{R}_2} = (0,\, 1,\, 0)$$

$$d(r_1,\, r_2) = \left| \left(0,\, \frac{1}{5},\, 0 \right) \cdot (0,\, 1,\, 0) \right| = \frac{1}{5}\ m$$

5. El sistema de vectors $\vec{S}_i$ és tal que: és paral·lel a l'eix OZ; el seu moment principal val (6, -3, 2); el mòdul del moment resultant del sistema, respecte a la intersecció de l'eix central amb el pla OXY, és 2/3 del mòdul de la resultant. Calcula el torçor del sistema i l'equació de l'eix central.

Com que la resultant i l'eix central tenen direccions paral·leles, l'única component distinta de zero serà la de l'eix z. És a dir, $\vec{R} = (0,\, 0,\, R_z)$*. Aplicant l'equació del camp de moments:*

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O - \overrightarrow{OE} \times \vec{R} = (6,\ -3,\ 2) - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{vmatrix} = (6 - R_z \cdot y,\ -3 + R_z \cdot x,\ 2)$$

$\vec{M}_E$ i $\vec{R}$ són paral·lels, per tant:

$$\frac{6 - y \cdot R_z}{0} = \frac{-3 + x \cdot R_z}{0} = \frac{2}{3}$$

D'ací es dedueix que les dues primeres components del moment són nul·les, i així el seu mòdul serà igual a 2. D'acord amb l'enunciat de l'exercici: $\vec{M}_E = \frac{2}{3} \cdot R_z = 2$ *. És a dir, que* $R_z = 3$ *i un punt de l'eix central serà E(1, 2, 0). Per tant:*

Torçor ≡ { $\vec{R}$ = (0, 0, 3); $\vec{M}_O$ = (6, −3, 2)}

Eix central ≡ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3}$

4. Bibliografia

Aquest primer bloc es pot consultar/estudiar en els capítols 1, 2 i 3 de la primera referència; 1, 2, 3 i 4 de la segona; 1 i apèndix D de la tercera o 1 i apèndixs A i B de l'última.

Referències

[1] Durá Doménech, A. i Vera Guarinos, J.: *Fundamentos Físicos de las Construcciones Arquitectónicas* (volum I, Publicacions de la Universitat d'Alacant, 1999.

[2] Riley, W. F. i Sturges, L. D.: *Ingeniería Mecánica: estàtica*, Reverté (Barcelona), 1996.

[3] Tipler, P. A.: *Física para la ciencia y la tecnología* (2 toms), Reverté (Barcelona), 1999.

[4] Douglas C. Giancoli: *Física, principios con aplicaciones* (quarta edició), Prentice-Hall Hispanoamericana, 2001.