Tema 5

Inversión

Inversión

- Los bienes de inversión obligan a gastar hoy para obtener ganancias en el futuro
- Vamos a estudiar cómo se valoran los pagos futuros
- Por ejemplo, la promesa de recibir 1 euro dentro de un año no vale 1 euro hoy
- No sólo por el riesgo (esto lo dejamos de lado por ahora)

Descuento

- Aún cuando no haya ningún riesgo, la mayoría de las personas prefiere el euro hoy
- Decimos que el **valor presente** (o **valor actual**) del pago de 1 euro en el futuro es menor que un euro
- Los pagos futuros los **descontamos**
- Una razón es el arbitraje

Arbitraje

- Supongamos que un individuo está dispuesto a pagar 10,000 euros hoy a cambio de 10,000 euros en un año
- Podríamos ganar dinero vendiéndole esa promesa hoy (por 10,000). Con esos 10,000 podemos comprar deuda pública
- En un año tenemos los 10,000 más los intereses

Valor presente neto

- Una corriente de pagos A_0, A_1, …

$$VPN = A_0 + \frac{A_1}{1+r_1} + \frac{A_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{A_2}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} + \dots$$

- Bono perpetuo: el mismo pago siempre
- Tipo de interés fijo r

$$v = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} - 1 = \frac{1}{r}$$

Hipoteca

- Pagamos 1 euro por periodo, n periodos:

$$VPN = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(VPN + 1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

$$VPN(1+r) = VPN + 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \Rightarrow VPN = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Hipoteca

- Si pagamos 1 euro al mes durante 360 meses (30 años) a un interés del 0.5% mensual, el valor presente es:

$$\frac{1}{0.005}\left(1 - \frac{1}{(1.005)^{360}}\right) = 166.79$$

- Si pedimos 100,000 euros, pagaremos cada mes 100.000/166.79 = 599.55 euros

Valor de un premio

- 1 millón al año durante 20 años

$$VP = 1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{19}} = 1 + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{19}}\right)$$

r	3%	4%	5%	6%	7%	10%
VP (miles)	15,324	14,134	13,085	12,158	11,336	9,365

Precio de un bono

- Un bono de cupón cero no paga intereses durante su vida. Lo hace íntegramente en el vencimiento
- Su precio es inferior al valor nominal
- Se venden al descuento. Por ejemplo, un bono de 10,000 euros a un año se vende hoy a 9,615.39 (=10,000/1.04) euros
- El tipo de interés es el 4%

Precio de un bono

- Un bono que paga 10,000 euros dentro de 10 años:

$$\text{Precio} = VPN = \frac{10000}{(1+r)^{10}}$$

- El precio del bono varía de forma inversa con el tipo de interés

Criterio de decisión

- Supongamos un proyecto de inversión que requiere invertir la cantidad *C* hoy y nos genera un cierto rendimiento en el futuro
- Elegimos un tipo de interés razonable y calculamos el VPN
- Llevamos adelante el proyecto de inversión si VPN > 0

Criterio de decisión

- El valor presente neto es:

$$VPN = -C + \frac{R_1}{1+r} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + \frac{R_3}{(1+r)^3} + ...$$

- Los problemas son:
  - Estimar los valores de C, R_1, R_2, etc.
  - Identificar un tipo de interés apropiado
- El tipo de interés debe reflejar el riesgo de la inversión

Ejemplo

- Una empresa está considerando invertir en una mina
- La empresa ha estimado que en los 4 primeros años gastará 4 millones de euros por año sin obtener ingresos
- A partir del quinto año los gastos serán de 2 millones anuales y obtendrá unos ingresos anuales de 6 millones durante los siguientes 40 años

Ejemplo

- La empresa usa un tipo de interés del 18%
- El VPN de la fase de inversión es:

$$VPN = -4 + \frac{-4}{1.18} + \frac{-4}{(1.18)^2} + \frac{-4}{(1.18)^3} = -12.697$$

- En cada uno de los siguientes años a partir del 5 la ganancia neta es de 4 millones por año

Ejemplo

- El VPN de esta corriente de pagos es:

$$\frac{4}{(1.18)^4} + \frac{4}{(1.18)^5} + \frac{4}{(1.18)^6} + \ldots + \frac{4}{(1.18)^{43}} =$$

$$= \frac{4}{(1.18)^3}\frac{1}{0.18}\left(1 - \frac{1}{(1.18)^{40}}\right) = 13.5071$$

- Vemos que la inversión es escasamente rentable al 18%

Otros criterios

- Otro método consiste en calcular la tasa interna de rendimiento (TIR)
- Es la tasa de descuento que resuelve la ecuación VPN = 0. En el ejemplo anterior la TIR es 0.189061
- Se lleva a cabo el proyecto si la TIR es suficientemente grande
- Problemas: multiplicidad de soluciones, o ninguna solución

Otros criterios

- Otro criterio es el de ver cuántos años deben pasar hasta que el proyecto genere ingresos netos positivos
- Problemas: un proyecto puede dar ingresos positivos pronto, pero puede que no sean muy grandes
- Puede ser interesante si la empresa está en riesgo de bancarrota y necesita dinero urgentemente

Otros criterios

- En general el método más usado es el del valor presente neto
- El método del VPN no es muy útil cuando la decisión es si realizar un proyecto ya o hacerlo más adelante (retrasarlo)
- Es decir, cuando la decisión es si hacerlo ahora o esperar, necesitamos utilizar otro tipo de criterio

Inversión con incertidumbre

- El método estándar es computar el VPN de los valores esperados de los ingresos y gastos
- Además hay que usar un tipo de interés ajustado para compensar por el riesgo
- Por ejemplo, en las prospecciones petrolíferas el riesgo es muy alto

Prospección petrolífera

- En el Golfo de México, la mitad de las prospecciones no llegan a ser explotadas porque la empresa obtiene información adicional
- De las que se explotan, en la mitad de los casos no se encuentra petróleo
- Por tanto, la probabilidad de obtener petróleo a priori es de sólo 1/4

Prospección petrolífera

- Supongamos que una concesión cuesta medio millón de euros y que la inversión inicial es de un millón
- Si se obtiene petróleo (con ¼ de probabilidad) produce 1 millón de euros durante 20 años
- Por tanto, el **valor esperado** de los ingresos es de 250,000 por año

Prospección petrolífera

- Supongamos que la tasa de interés relevante es del 18%
- En el año 0 gastamos 1.5 millones y del año 1 al 20 ingresamos 0.25 millones (en valor esperado)
- El VPN de este proyecto es de -0.162 millones de euros
- El riesgo es demasiado grande

Prospección petrolífera

- En el ejemplo del petróleo hay otro tipo de riesgo
- La razón es que el precio del petróleo fluctúa
- El petróleo que extraemos y vendemos hoy no está disponible en el futuro
- ¿Es mejor extraer y vender hoy o es mejor esperar y hacerlo más adelante?

Ejemplo

- Tenemos que decidir si invertimos o no la cantidad C (constante)
- Si lo hacemos, obtenemos $V \sim U[0,1]$
- Suponemos $C < 1$
- La regla óptima es hacer la inversión si V está por encima de un cierto valor, es decir, si $V \geq V_0$
- Con la regla del VPN, $V_0 = C$

Ejemplo

- Ahora tenemos en cuenta la posibilidad de esperar e invertir en el siguiente periodo dada la regla $V \geq V_0$
- Llamamos al valor de esperar $J(V_0)$. Si el valor de V excede V_0, ganamos V-C. En caso contrario, posponemos la inversión al siguiente periodo
- La tasa de descuento es r

Ejemplo

- El valor $J(V_0)$ debe cumplir:

$$J(V_0) = (1 - V_0)\left(\frac{1+V_0}{2} - C\right) + V_0\left(\frac{1}{1+r} J(V_0)\right)$$

- Con probabilidad $(1-V_0)$ se produce $V \geq V_0$
- El valor esperado de V-C es:

$$\frac{1+V_0}{2} - C$$

Ejemplo

- Con probabilidad V_0 ocurre que $V < V_0$ por lo que esperamos. En el siguiente periodo ganamos $J(V_0)$
- Resolvemos la expresión para $J(V_0)$:

$$J(V_0) = \frac{(1 - V_0)\left(\frac{1+V_0}{2} - C\right)}{1 - \frac{V_0}{1+r}}$$

Ejemplo

- Vemos que J'(C) > 0 y que J'(1) < 0
- Hay un máximo entre C y 1. En particular, la solución óptima es:

$$V_0 = (1+r) - \sqrt{r^2 + 2r(1-C)} \geq C$$

- Si r = 0, $V_0 = 1$. No se pierde nada esperando a obtener el mayor valor posible

Ejemplo

- Si r $\rightarrow \infty$, $V_0 \rightarrow C$. Cuando no valoramos el futuro, merece la pena invertir si el ingreso supera los costes
- Vemos que la regla del VPN sólo es correcta cuando no valoramos el futuro
- Recordar que invertir hoy destruye la opción de invertir mañana

Ejemplos numéricos

- En general vemos que V_0 está muy por encima de C
- Incluso cuando r es muy alto, la regla se desvía del VPN
- Si C = 0.25, con r = 0.1 tenemos $V_0 = 0.7$
- Si C = 0, el VPN es siempre positivo. No obstante, como la inversión se hace una única vez, con r = 0.1 es óptimo esperar ya que $V_0 = 0.64$

Extracción de recursos

- La cantidad de petróleo es fija. Por lo tanto, a medida que el petróleo se vaya agotando, su precio será tremendamente elevado. ¿Es cierto?
- No. De acuerdo a la **regla de Ramsey**, los precios de los bienes cuya oferta es fija deben crecer a la tasa 1+r, donde r es el tipo de interés

Extracción de recursos

- La intuición es sencilla. Supongamos que el precio del bien hoy es 100 y que r = 0.1
- Si esperamos que el año próximo el precio sea 120, ¿qué harán los propietarios del recurso? ¿Venderán hoy o esperarán al año próximo?
- ¿Qué efecto tendrá en el precio hoy?

Condición de no arbitraje

- Por lo tanto, $p_{t+1} = (1+r)p_t$
- Si, por el contrario, $p_{t+1} > (1+r)p_t$ entonces es mejor NO extraer hoy el petróleo
- El petróleo en el subsuelo produce un rendimiento mayor que el de otros activos
- El rendimiento del petróleo es $(p_{t+1}-p_t)/p_t$ y el del otro activo es r

Extracción de recursos

- La oferta fija de un recurso es *R*
- La demanda tiene elasticidad constante ε
- Q_t es la cantidad que se consume en *t*
- Por la condición de no arbitraje, el precio debe crecer con el tipo de interés:

$$aQ_0^{-1/\varepsilon}(1+r)^t = p(Q_0)(1+r)^t = p(Q_t) = aQ_t^{-1/\varepsilon}$$

Extracción de recursos

- Por lo tanto: $Q_t = Q_0(1+r)^{-t\varepsilon}$
- Usando la restricción de recursos:

$$R = (Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots) =$$
$$= Q_0(1 + (1+r)^{-\varepsilon} + (1+r)^{-2\varepsilon} + \ldots) = \frac{Q_0}{1-(1+r)^{-\varepsilon}}$$

- De ahí obtenemos el consumo inicial Q_0. A partir de ahí va disminuyendo de forma geométrica

Extracción de recursos

- A pesar de que la cantidad del recurso es fija, los mercados se comportan como si fuese infinita
- La razón es que siempre se acaba encontrando un sustituto para cada producto
- El carbón como sustituto de la madera, el petróleo del carbón, etc.

Recursos renovables

- Queremos ver cuál es el momento óptimo de cortar un árbol
- Nos interesa el volumen de madera. Cuando el árbol tiene t años es $b(t)$. El precio de la madera es p
- Como el tiempo es una variable continua, vamos a usar la fórmula del interés continuo

Interés continuo

- Si invierto 1 euro en un activo con interés r que paga una vez al año, en T años tengo
  $$(1+r)^T$$
- Si paga $r/12$ al mes, tras T años tengo
  $$(1+r/12)^{12T}$$
- Si paga $r/365$ al día, tras T años tengo
  $$(1+r/365)^{365T}$$

Interés continuo

- Si paga r/n, n veces al año, tras T años tengo:
  $$(1+r/n)^{nT}$$
- Cuando $n \to \infty$, tenemos el tipo de interés continuo o instantáneo:
  $$\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^{nT} = e^{rT}$$
- Si se trata de actualizar tenemos que multiplicar por e^{-rT}

Recursos renovables

- Maximizamos la función $pe^{-rt}b(t)$
- La condición de primer orden es:
  $$r = b'(t^*)/b(t^*)$$
- En la izquierda tenemos el tipo de interés continuo y a la derecha la tasa de crecimiento del volumen de madera
- Suponiendo $b'(t) > 0$ y $b''(t) < 0$, el término de la derecha decrece con t

Recursos renovables

- Para t < t*, la tasa de crecimiento de la madera es superior a r. No es rentable cortarlo aún
- De otra forma, la tasa a la que crece el dinero invertido en el árbol es mayor que a la que crecería en el activo alternativo (r)

Recursos renovables