Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

TEORIA DE ESTRUCTURAS

Ingeniería Geológica

PROBLEMAS DE EXAMEN

Curso 2010/11

Elaborados por los profesores:

Luis Bañón Blázquez (PCO)
Fco. Borja Varona Moya (PCO)
Salvador Esteve Verdú (ASO)

PRÓLOGO

La presente publicación recoge los ejercicios de exámenes realizados en el curso 2010/11, correspondientes a la asignatura "Teoría de Estructuras", impartida en la titulación de Ingeniería Geológica.

La Ingeniería de Estructuras es una rama de gran interés para el ingeniero geólogo, ya que posibilita la materialización de soluciones técnicas viables planteadas por muchos problemas de origen geológico-geotécnico.

Esperamos que esta recopilación sea de provecho como material de apoyo para preparar la asignatura a todos vosotros. Así mismo, aprovechamos para pediros que si encontráis alguna errata en las soluciones planteadas nos lo hagáis saber para corregirlo en futuras ediciones.

Alicante, a 1 de septiembre de 2011

Los profesores de la asignatura

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 1 de 2	**EJERCICIO PRÁCTICO 1**	
Convocatoria: **C1 – Diciembre 2010**	Fecha: **27.11.2010**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo eval.: **30%**

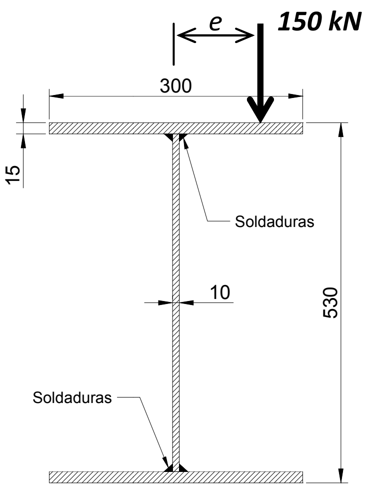
PROBLEMA 1.A

El siguiente perfil de acero estructural S 275 (E = 210000 MPa, f_y = 275 N/mm²) está sometido a una carga de 150 kN. Se pide:

a) Determinar la distribución analítica de tensiones tangenciales ocasionadas por el cortante en dicha sección, relizando un esquema acotado de las mismas. **(1,5 puntos)**

b) Determinar la máxima excentricidad *e* de la carga que provoca el agotamiento de la pieza, obteniendo asimismo la distribución acotada de tensiones tangenciales generada por el momento torsor asociado. **(1,0 puntos)**

c) Para dicho valor de *e*, determinar la distribución total de tensiones ocasionada por la sobrecarga, indicando el punto o puntos de agotamiento de la sección. **(0,5 puntos)**



cotas en mm

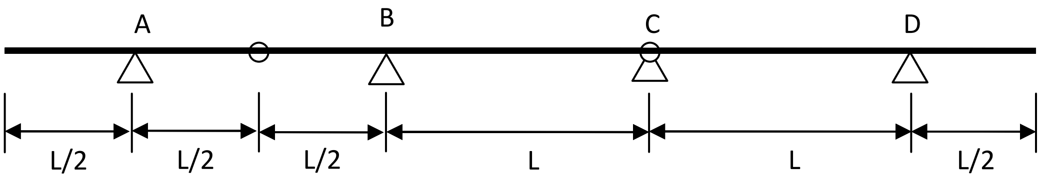
PROBLEMA 1.B

De la siguiente viga, se pide determinar justificadamente:

a) Líneas de influencia acotadas de flectores y cortantes en el centro del vano BC **(1,0 puntos)**

b) Línea de influencia acotada de reacciones en el apoyo C **(0,5 puntos)**

c) Considerando L = 10 m., plantear la distribución pésima de una sobrecarga de 10 kN/m.l que actúa conjuntamente con una carga puntual de 50 kN que puede desplazarse a lo largo del tramo AB, de manera que se produzca la máxima reacción en el apoyo C, indicando el valor de la misma deducido de la propia línea de influencia **(0,5 puntos)**



SOLUCIÓN EJERCICIO 1

PROBLEMA 1.A

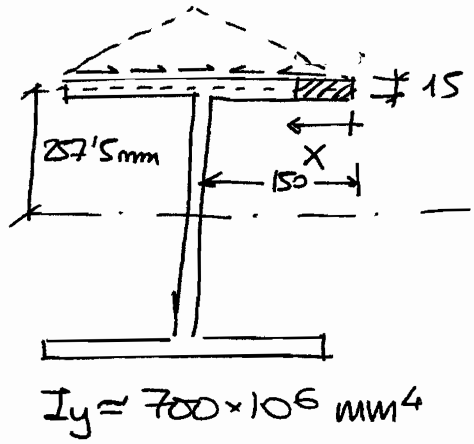
(a) Para la determinación de las tensiones tangenciales generadas por el esfuerzo cortante, planteamos el T^a de Colignon para secciones de pared delgada en alas y alma:

- Tensiones en alas:

$$\tau(x) = \frac{15 \times 257{,}5 \cdot 150 \cdot 10^3}{700 \times 10^6 \times 15} =$$

$$= 55{,}2 \times 10^{-3} \cdot x \quad [N/mm^2]$$

Para $x = 150 \rightarrow \tau_{f,máx} = 8'3\ N/mm^2$

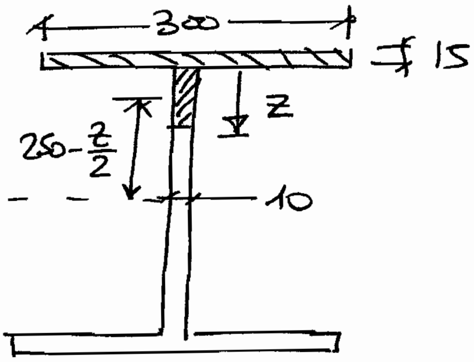


- Tensiones en el alma:

$$\tau(z) = \frac{[300 \times 15 \times 257{,}5] \cdot 150 \cdot 10^3}{700 \times 10^6 \times 10} +$$

$$+ \frac{10 \cdot z \cdot \left(250 - \frac{z}{2}\right) \cdot 150 \cdot 10^3}{700 \cdot 10^6 \times 10} =$$

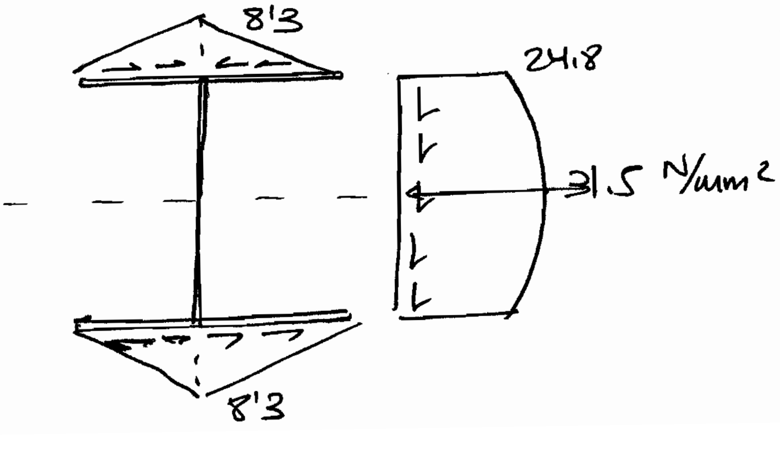
$$= 24{,}8 + 53{,}57 \cdot 10^{-3} z - 1'071 \cdot 10^{-4} z^2$$



Para $z = 250 \rightarrow \tau_{w,max} = 31{,}5\ N/mm^2$

" $z = 0 \rightarrow \tau_{w,min} = 24{,}8\ N/mm^2$

- Luego la distribución acotada será:



(b) Con el fin de obtener el máximo torsor T que resiste la sección, debe obtenerse previamente el margen de tensiones tangenciales del que dispone ésta hasta su agotamiento. Por ello, aplicamos el criterio de Von Mises:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y \text{, con } \tau = \tau_v + \tau_t \text{ y } \sigma = 0$$

quedando:

$$\tau_v + \tau_t \leq \frac{f_y}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tau_t \leq \frac{f_y}{\sqrt{3}} - \tau_v = 159 - \tau_v \; (N/mm^2)$$

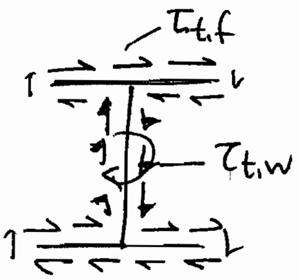
- Por otro lado, la distribución de τ en secciones abiertas de pared delgada se rige por la expresión:

$$\tau_t = \frac{M_T}{I_T} \cdot t = \frac{V \cdot e}{I_t} \cdot t \text{, con } I_t = \frac{1}{3} \sum t_i^3 \cdot l_i$$

Calculamos I_t:

$$I_t = \frac{1}{3}\left[2 \times 300 \times 15^3 + 500 \times 10^3\right] = 841.667 \text{ mm}^4$$

sustituyendo $V = 150 \cdot 10^3$ N, encontramos las siguientes expresiones en alas y alma:



$$\tau_{t,f} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot e_f}{841667} \cdot 15 = 2{,}67 \cdot e_f$$

$$\tau_{t,w} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot e_w}{841667} \cdot 10 = 1{,}78 \cdot e_w$$

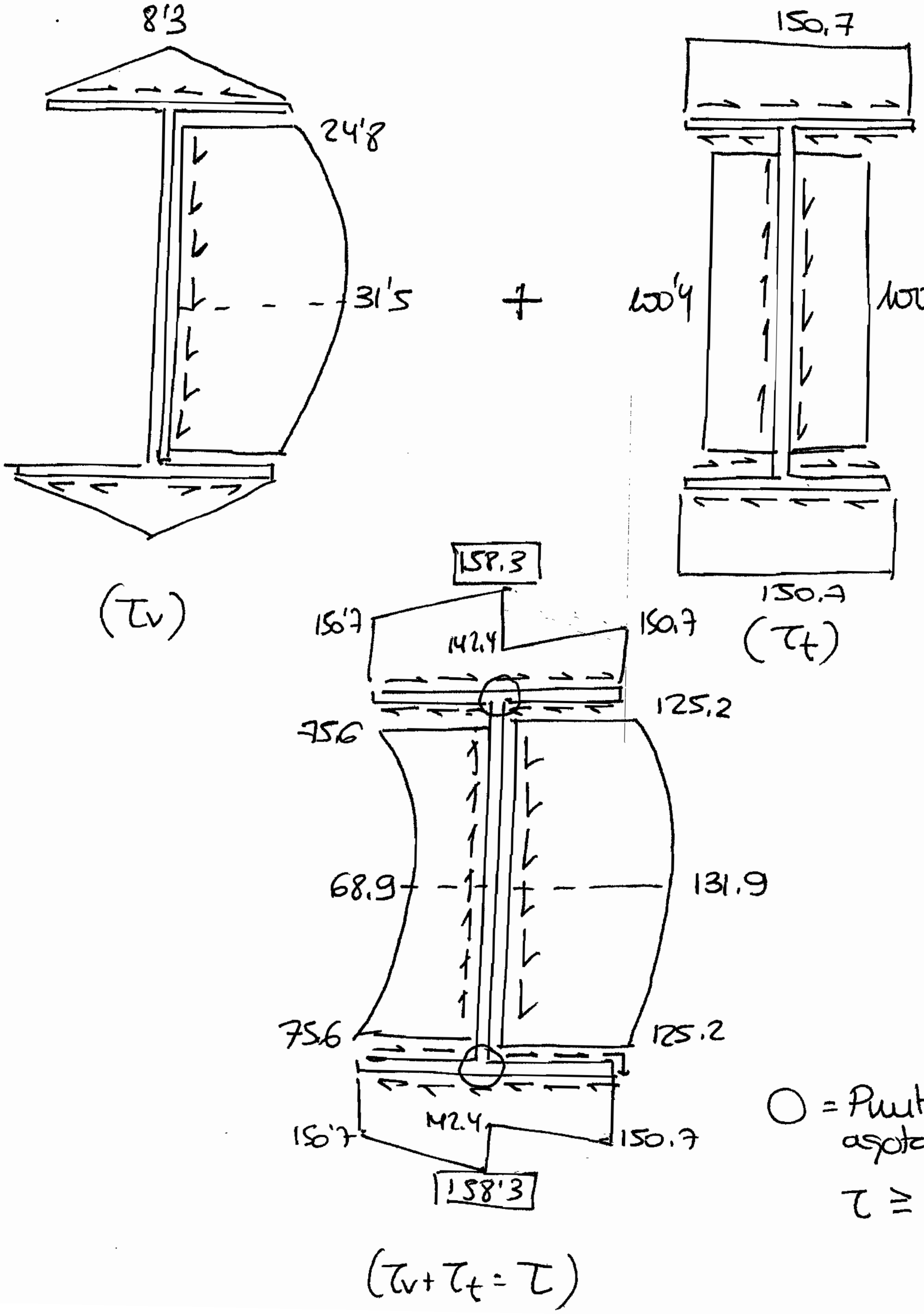
- Sustituyendo en la expresión de Von Mises para cada caso:

$$\tau_{t,f} = 2{,}67 e_f \leq 159 - 8{,}3 \rightarrow e_f \leq 56{,}44 \text{ mm}$$

$$\tau_{t,w} = 1{,}78 e_f \leq 159 - 31{,}5 \rightarrow e_w \leq 71{,}63 \text{ mm.}$$

- Luego el menor de los valores de e ($e_f = 56{,}4$ mm) será el que provoque antes que $\sigma_{co} = f_y$ y se agote la sección.

c) El punto donde ocurre el agotamiento de la pieza es la intersección entre alas y alma, generándose los siguientes diagramas de tensiones tangenciales en $\frac{N}{mm^2}$:

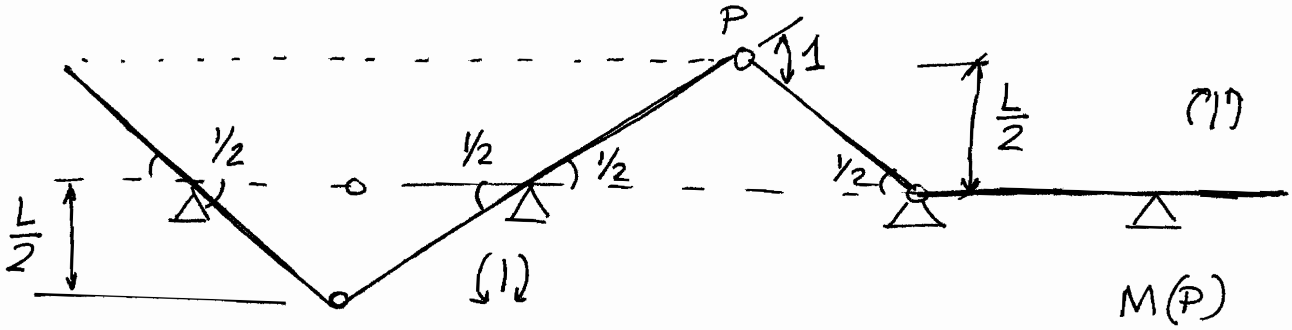


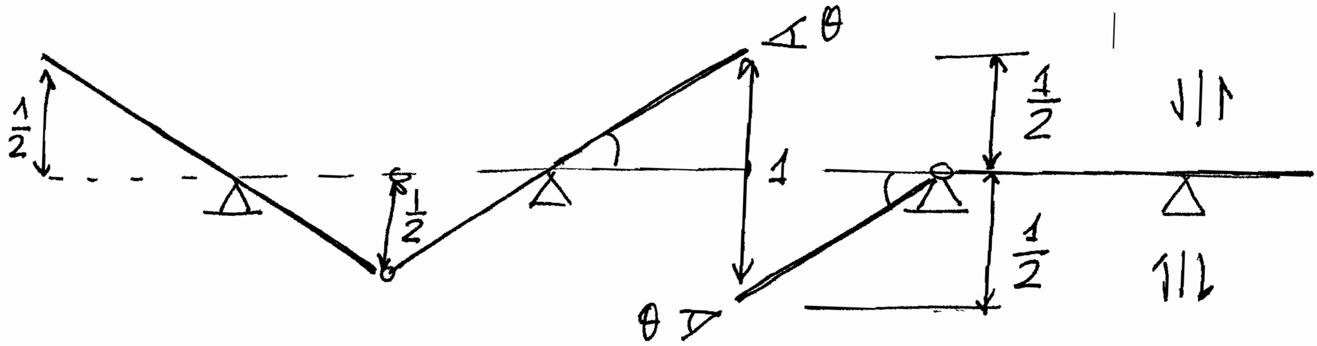
○ = Puntos de agotamiento

$\tau \geq \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$

PROBLEMA 1.B

a) líneas de influencia de flectores y cortantes en el centro del vano BC:

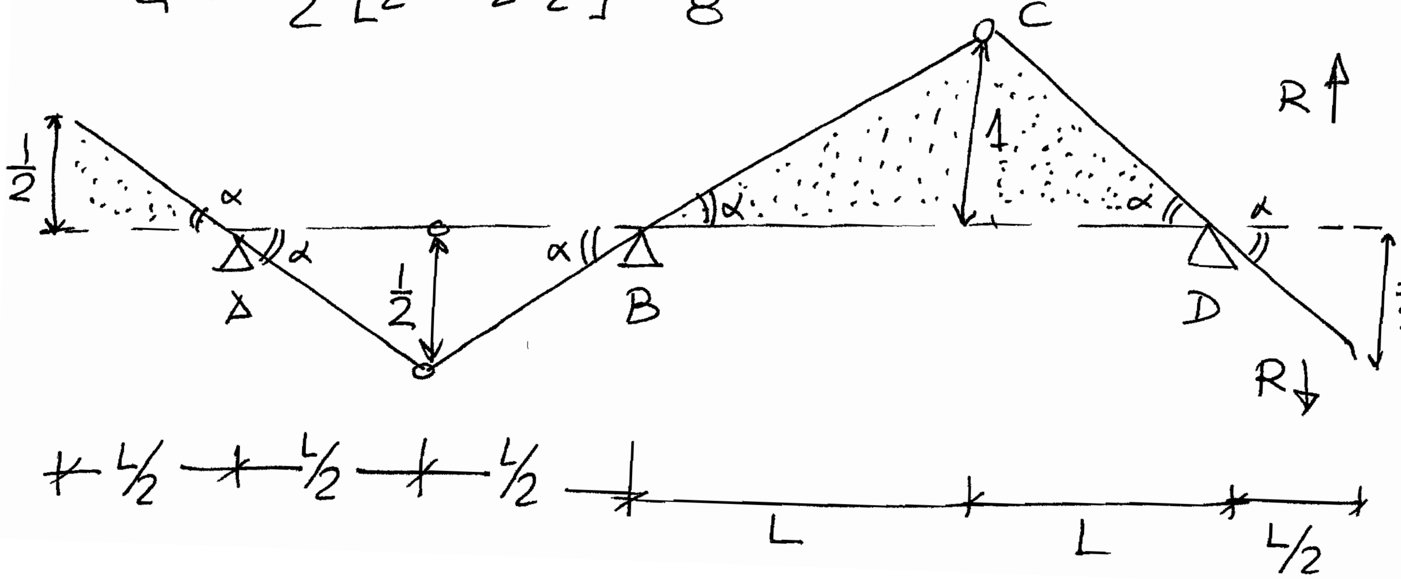




b) línea de influencia de reacciones en el apoyo C:

$$\sum A^{+} = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2L\cdot 1\right] = \frac{9L}{8}$$

$$\sum A^{-} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot L + \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\right] = \frac{3L}{8}$$



c) Para obtener la distribución pésima de la carga distribuida, considerando la carga puntual en el tramo AB, hay que valorar la máxima reacción ocasionada.

Los parámetros a emplear son:

$$L = 10\ m;\ q = 10\ kN/m.l.;\ P = 50\ kN\ [A \leftrightarrow B]$$

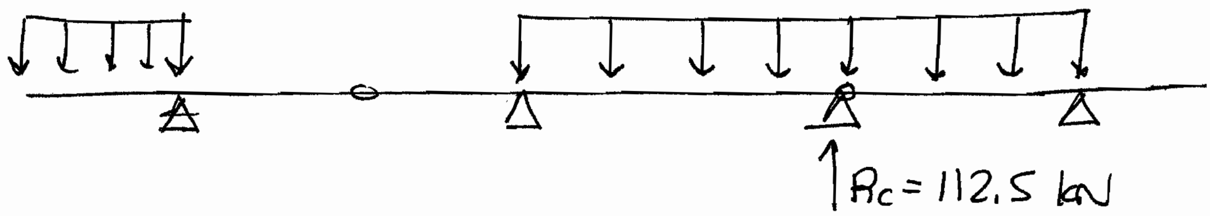
- Máxima reacción positiva (P situada en A ó B):

$$R^+ = q\sum A^+ = 10 \times \frac{9 \times 10}{8} = \underline{112'5\ kN}$$

- Máxima reacción negativa (P en centro de vano AB):

$$R^- = q\sum A^- + \frac{P}{2} = 10 \times \frac{3 \times 10}{8} + \frac{50}{2} = \underline{62,5\ kN}$$

∘ Luego la máxima reacción ocasionada será para la siguiente distribución:

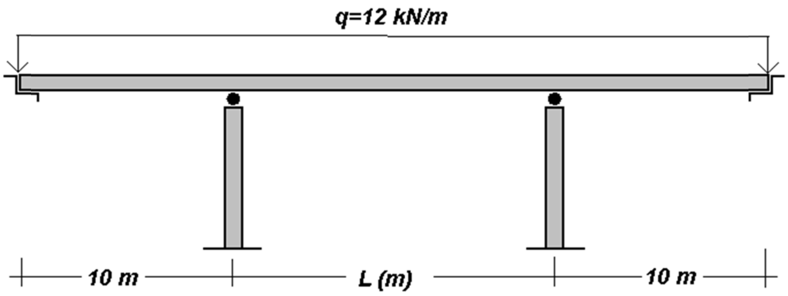


Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 2 de **2**	**EJERCICIO PRÁCTICO 2**	
Convocatoria: **C1 – Diciembre 2010**	Fecha: **27.11.2010**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo eval.: **30%**

PROBLEMA 2

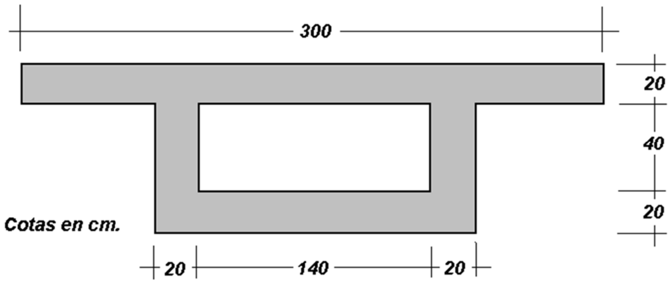
La pasarela de la figura se proyecta para salvar un barranco en cierto municipio. El vano central tiene una longitud indeterminada, y la carga sobre la pasarela es de 12 kN/m.



Se pide:

a) Calcular la longitud del vano para que no exista reacción en los apoyos extremos (estribos). **(1,5 puntos)**

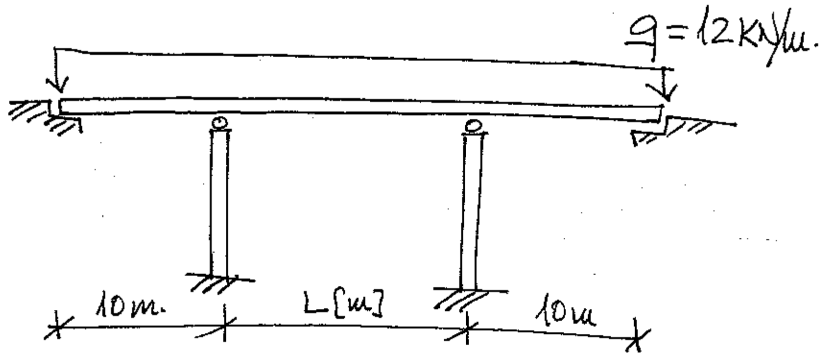
b) Suponiendo que dicha longitud toma el valor ***L = 26,70 m***, calcular el giro en los apoyos centrales y la flecha en el centro de la pasarela. **NO** considerar las reacciones de los estribos. **(2,0 puntos)**



c) Si la pasarela tiene la sección indicada en la figura anterior y la longitud del apartado *b)*, calcular las máximas tensiones normales que aparecen en la sección central de la pasarela. **(0,75 puntos)**

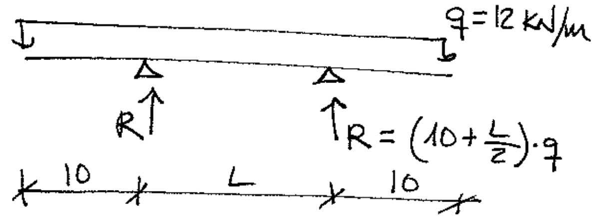
d) En caso de que quisiéramos mejorar las propiedades resistentes de la sección central de la pasarela mediante pretensado, justifica cualitativamente (sin efectuar ningún cálculo) dónde debería aplicarse el mismo para reducir las tracciones, y su influencia en el resto de la viga. **(0,75 puntos)**

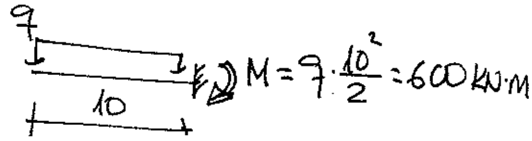
Datos: E = 20.000 N/mm^2



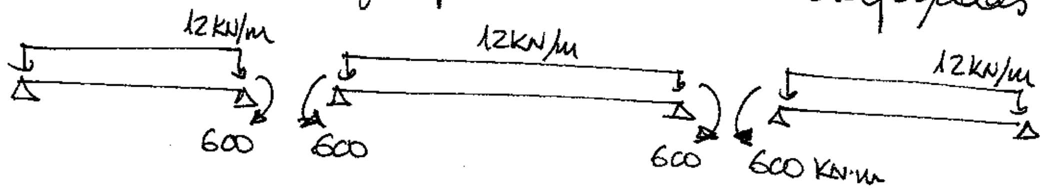
a) LONGITUD DEL VANO L PARA QUE NO HAYA REACCIÓN EN LOS ESTRIBOS

→ Si no hay reacción en los estribos, se comporta como una viga biapoyada, y además conocemos el momento en los apoyos:

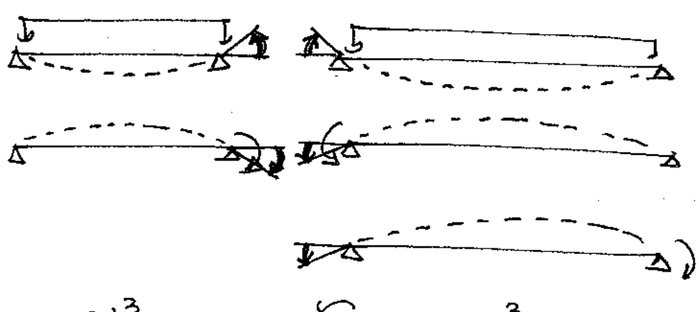




→ Si resolvemos la viga por medio de las biapoyadas:



→ En cualquiera de los apoyos centrales $\theta_{izq} = \theta_{der}$



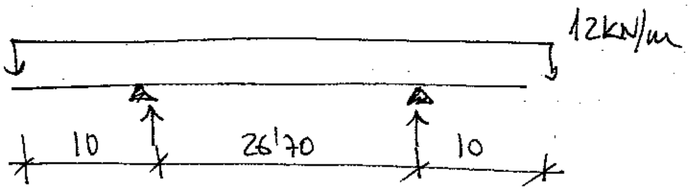
$$\theta_{izq} = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M\cdot L}{3EI} \qquad \theta_{der} = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{ML}{3EI} + \frac{ML}{6EI}$$

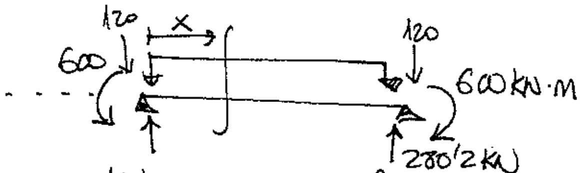
$$\frac{12\cdot 10^3}{24\cancel{EI}} - \frac{600\cdot 10}{3\cancel{EI}} = \frac{-12\cdot L^3}{24\cancel{EI}} + \frac{600\cdot L}{3\cancel{EI}} + \frac{600\cdot L}{6\cancel{EI}}$$

$$-1500 = -0'5L^3 + 300\cdot L$$

Ordenando $L^3 - 600L - 3000 = 0 \longrightarrow \boxed{L \sim 26'70\,m.}$

0| CALCULAR EL GIRO EN LOS APOYOS Y LA FLECHA EN EL CENTRO DEL VANO SI $L = 26'70\,m$. DESPRECIAR LA REACCIÓN DE LOS ESTRIBOS





$$M(x) = -600 + 160'2 \cdot x - 6x^2$$

⊛ $$\theta_{apoyo} = \frac{M \cdot L}{3EI} + \frac{M \cdot L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI} = \frac{600 \cdot 26'7}{3\,EI} + \frac{600 \cdot 26'7}{6EI} - \frac{12 \cdot 26'7^3}{24EI}$$

$$\boxed{\theta_{apoyo} = -\frac{1507}{EI}}$$

⊛ FLECHA EN EL CENTRO

$$f_{centro} = f_{apoyo} + \theta_{apoyo}(x_1 - x_2) + \int_{apoyo}^{centro} \frac{M(x)\,(x_B - x)}{EI}$$

$$f_{centro} = 0 - \frac{1507}{EI}\left(\frac{26'7}{2}\right) + \int_0^{13'35} \frac{(-600 + 160'2x - 6x^2)(13'35 - x)}{EI}\,dx$$

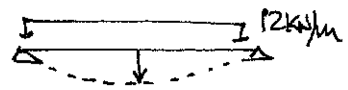
$$f_{centro} = 0 - \frac{20118'45}{EI} + \frac{1}{EI}\int_0^{13'35} (6x^3 - 240'3x^2 + 2738'67x - 8010)\,dx$$

$$f_{centro} = -\frac{20118'45}{EI} + \frac{1}{EI}\left[6 \cdot \frac{13'35^4}{4} - \frac{240'3 \cdot 13'35^3}{3} + 2738'67 \cdot \frac{13'35^2}{2} - 8010 \cdot 13'35\right]$$

$$\boxed{f_{centro} = -\frac{20118'45}{EI} - \frac{5881'56}{EI} = -\frac{26.020}{EI}}$$

→ Si utilizamos biapoyadas:

$$f_1 \uparrow = \frac{M \cdot L^2}{8EI} = \frac{600 \cdot 26'7^2}{8EI} = \frac{53466'75}{EI}$$



$$f_2 \downarrow = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{79408}{EI}$$

$$f_{TOTAL} \downarrow = f_2 - f_1 \simeq \frac{25.942}{EI}$$ (aprox. lo mismo)

→ SUSTITUYENDO $E = 20.000\ N/mm^2 \sim 20 \cdot 10^6\ kN/m^2$

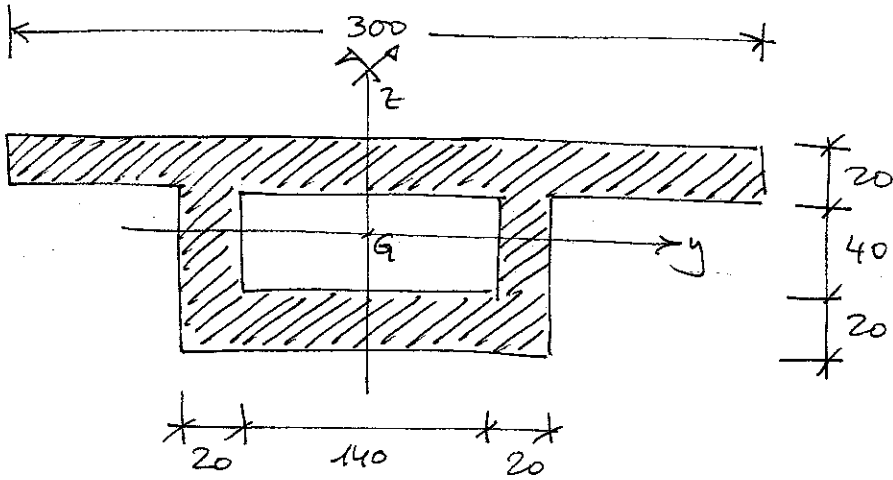
$I = 0'0871\ m^4$

$EI = 2.117.400\ kN \cdot m^2$

$$\boxed{\theta_{AP} = 8'65 \cdot 10^{-4}\ RAD} \qquad \boxed{f_{centro} \downarrow = 14'92\ mm}$$

c]

Cotas en cm.

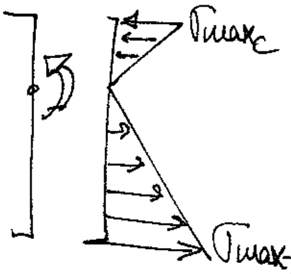


$$z_G = \frac{300\cdot 20\cdot(70) + 2\times 20\cdot 60\cdot(30) + 140\cdot 20\cdot(10)}{300\cdot 20 + 2\times 20\cdot 60 + 140\cdot 20} = 46'43\,\text{cm}.$$

$$I_y = \left[\frac{300\cdot 20^3}{12} + 300\cdot 20\,(70-46'43)^2\right] + 2\cdot\left[\frac{20\cdot 60^3}{12} + 20\cdot 60\cdot(16'43)^2\right] + \left[\frac{140\cdot 20^3}{12} + 140\cdot 20\cdot(36'43)^2\right]$$

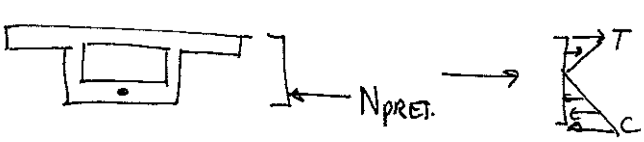
$$I_y = 8.710.476\,\text{cm}^4 = 0'\underline{0871\,\text{m}^4}$$

→ En el centro de la viga $M = \underline{469'335\,\text{kNm}}$.



$$\boxed{\sigma_{max_T} = \frac{M}{I}\cdot y_{INF} = \frac{469'335}{0'0871}\cdot 0'4643 = \underline{\underline{2502\,\text{kN}/\text{m}^2}}}$$

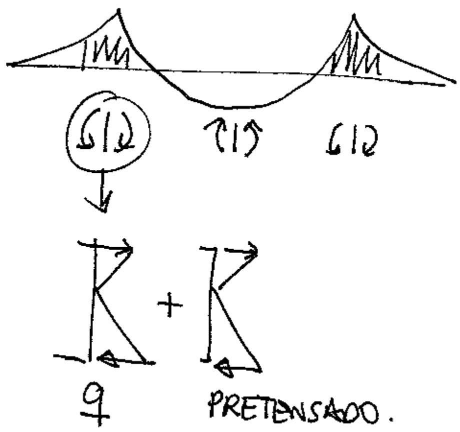
d] SI QUISIERAMOS MEJORAR EL ESTADO TENSIONAL (ES DECIR, REDUCIR LAS TENSIONES MÁXIMAS), DEBERÍAMOS APLICAR EL ESFUERZO DE PRETENSADO EN LA ZONA INFERIOR:



PRODUCIRÍA UNAS TENSIONES QUE SE OPONDRÍAN A LAS ACTUANTES, POR LO QUE REDUCIRÍAMOS LAS TENSIONES MÁXIMAS.

d) (CONTINUACIÓN).

→ ESE ESFUERZO DE COMPRESIÓN, EN LAS ZONAS PRÓXIMAS A LOS APOYOS DE LAS PILAS (ZONAS CON MOMENTOS NEGATIVOS), SERÍAN CONTRAPRODUCENTES, YA QUE AUMENTARÍAN LAS TENSIONES:



→ COMO POSIBLE SOLUCIÓN PODRÍAMOS DISEÑAR UN PRETENSADO CON DIRECTRIZ VARIABLE, QUE COMPRIMIERA LA PARTE INFERIOR EN EL CENTRO DE LA VIGA Y LA ZONA SUPERIOR DE LA SECCIÓN EN LAS ZONAS LATERALES. NO OBSTANTE, ESE DISEÑO QUEDA FUERA DE LOS OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA.

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departament d'Enginyeria de la Construcció, Obres Públiques i Infraestructura Urbana
Departamento de Ingeniería de la Construcción, Obras Públicas e Infraestructura Urbana

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

INGENIERÍA GEOLÓGICA

CURSO 2010/2011

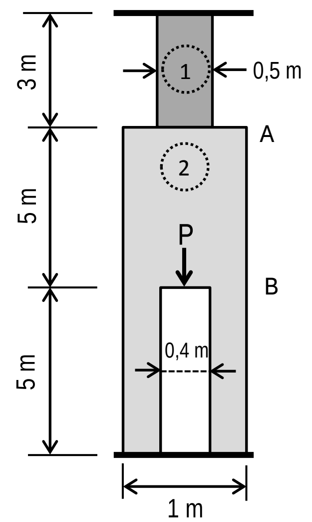
PRUEBA DE INCENTIVACIÓN (03/05/2011). Valor total: 1,0 puntos

NOTA: Cada uno de los ejercicios se realizará en hojas separadas

1. El soporte compuesto de la figura, de 50 cm. de ancho, está sometido a un incremento de temperatura uniforme de 30ºC. Se pide:

- **a.** Determinar los esfuerzos inducidos por dicho incremento de temperatura, así como las tensiones inducidas en la pieza **(0,20 puntos)**
- **b.** El valor de la máxima carga P que puede soportar el conjunto de la estructura, indicando la zona donde se produciría el agotamiento del soporte de superarse dicho valor **(0,20 puntos)**
- **c.** El desplazamiento vertical de la sección B para el conjunto de ambas acciones **(0,10 puntos)**

PARÁMº.	Mat. 1	Mat. 2
E (MPa)	20.000	30.000
α (ºC^{-1})	$10\cdot10^{-6}$	$12\cdot10^{-6}$
σ_{adm} (N/mm²)	25	30



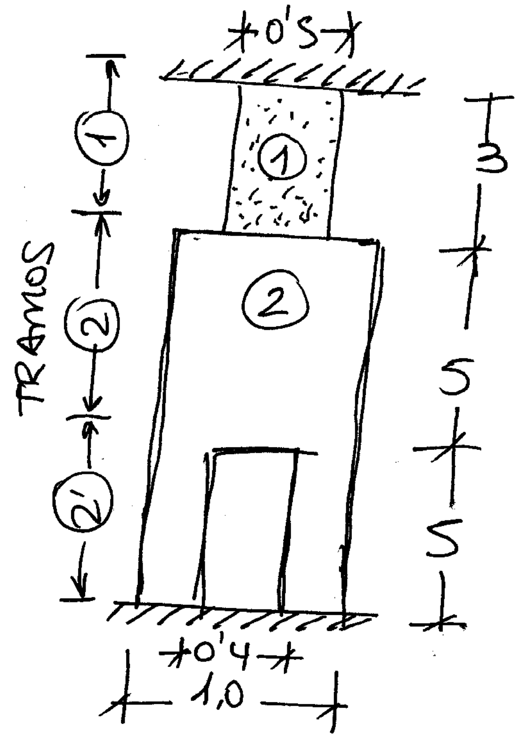
SOLUCIÓN EJERCICIO 1

(a) En primer lugar, obtenemos los términos de sección de la pieza en cada tramo:

$A_1 = 0.5 \times 0.5 = 0{,}25\ m^2$
$E_1 = 20000\ MPa$
$\alpha_1 = 10 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$

$A_2 = 1.0 \times 0{,}5 = 0{,}50\ m^2$
$E_2 = 30000\ MPa$
$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$

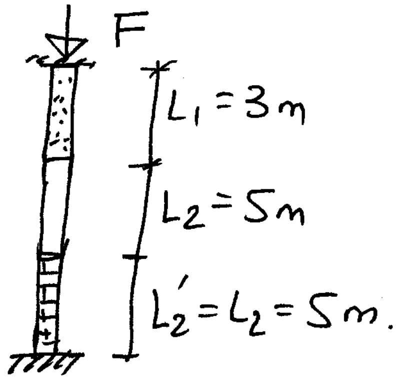
$A_2' = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}30\ m^2$
$E_2' = 30000\ MPa$
$\alpha_2' = 12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$



- Aplicando $\Delta T = 30°C$, los esfuerzos inducidos en la pieza serán los siguientes:

$$|\Delta L_T| = |\Delta L_F|$$

$$\Delta L_T = \sum_i \alpha_i L_i \Delta T_i \ ; \quad \Delta L_F = F \sum_i \frac{L_i}{E_i A_i}$$



- Sustituyendo valores:

$$\Delta L_T = [10 \cdot 3000 + 12 \cdot 10000] \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 4{,}5\ mm$$

$$\Delta L_F = \left[\frac{3000}{20000 \cdot 0{,}25} + \frac{5000}{30000 \cdot 0{,}50} + \frac{5000}{30000 \cdot 0'30}\right] \cdot F = 1{,}49 F\ [mm/MN]$$

$$F = \frac{4'5\ mm}{1{,}49\ mm/MN} = 3{,}02\ MN = \underline{\underline{3020\ kN}}$$

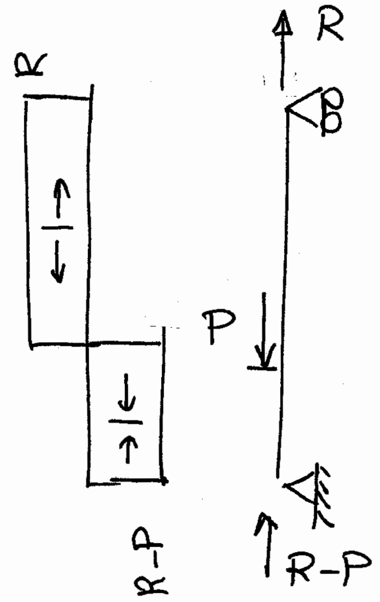
- Las tensiones inducidas en cada tramo serán $\sigma_T = \dfrac{F}{A_i}$:

$$\sigma_{1T} = \frac{-3020 \cdot 10^{-3}}{0{,}25} = -12{,}1\ N/mm^2 \ ; \quad \sigma_{2T} = \frac{-3020 \cdot 10^{-3}}{0{,}50} = -6{,}04\ N/mm^2$$

$$\sigma_{2T}' = \frac{-3020 \cdot 10^{-3}}{0{,}30} = -10{,}1\ N/mm^2$$

(b) Al aplicar la carga P sobre la pieza, aparecerá la siguiente ley de axiles, condicionando el alargamiento nulo de la pieza:

$$\Delta L = 0 \rightarrow \sum_i \frac{N_i L_i}{E_i A_i} = 0$$



es decir, tendremos:

$$\left[\frac{3000}{20000\cdot 0'25} + \frac{5000}{30000\cdot 0'5}\right] R +$$

$$+ \left[\frac{5000}{30000\cdot 0'30}\right](R-P) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0'933 R + 0,556 (R-P) = 0$$

- Por otro lado, debe satisfacerse la condición de no agotamiento de la pieza, siendo el tramo más desfavorable el (2') por estar más solicitado a compresión (en los otros se compensa parcialmente la compresión por ΔT con la tracción ocasionada por P), con lo cual planteamos:

Tramo (2') $\rightarrow \sigma_{adm2'} \leq \sigma_{2'T} + \dfrac{R-P}{A_{2'}}$ (tomando $\sigma < 0$ en compresión)

así, tendremos dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$-30 = -10,1 + \frac{R-P}{0'30}\cdot 10^{-3} \quad [kN]$$

$$0'933R + 0,556R - 0,556P = \underline{1,489}\,R - 0,556P = 0$$

de donde resolvemos y despejamos $\boxed{P = 9528 \text{ kN}}$; $R = 3557$ kN

- Las tensiones generadas en cada tramo serán:

$$\sigma_1 = \sigma_{1T} + \sigma_{1P} = \frac{-3,02 + 3,56}{0,25} = 2,16 \text{ MPa} < \sigma_{adm1} = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{2T} + \sigma_{2P} = \frac{-3'02 + 3,56}{0,50} = 1,08 \text{ MPa} < \sigma_{adm2} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2'} = \sigma_{2'T} + \sigma_{2'P} = \frac{-3,02 - 5,97}{0,30} = 29,96 \simeq 30 \text{ MPa} \simeq \sigma_{adm,2'} \checkmark$$

(c) El desplazamiento vertical del punto B corresponderá al efecto producido por el aumento de temperatura, junto a los esfuerzos inducidos y aplicados directamente sobre la pieza, es decir:

$$mov\ B = \Delta L^{2'}_{\Delta T} + \Delta L^{2'}_{F} + \Delta L^{2'}_{P} = 1.8 - 1.68 - 3{,}31 = \boxed{-3.19\ mm}$$

$$\Delta L^{2'}_{\Delta T} = \alpha_{2'} \cdot L_{2'} \cdot \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 5000\ mm \cdot 30°C = 1.8\ mm$$

$$\Delta L^{2'}_{F} = \frac{F \cdot L_{2'}}{E_{2'} A_{2'}} = \frac{-3020 \cdot 10^{3} \cdot 5000}{30000 \cdot (600 \cdot 500)} = -1.68\ mm$$

$$\Delta L^{2'}_{P} = (R-P) \cdot \frac{L_{2'}}{E_{2'} A_{2'}} = \frac{-5971 \cdot 10^{+3} \cdot 5000}{30000\ (600 \cdot 500)} = -3{,}31\ mm.$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departament d'Enginyeria de la Construcció, Obres Públiques i Infraestructura Urbana
Departamento de Ingeniería de la Construcción, Obras Públicas e Infraestructura Urbana

TEORÍA DE ESTRUCTURAS

INGENIERÍA GEOLÓGICA

CURSO 2010/2011

PRUEBA DE INCENTIVACIÓN (03/05/2011). Valor total: 1,0 puntos

NOTA: Cada uno de los ejercicios se realizará en hojas separadas

2. La barra AB de la estructura representada a continuación (Fig. a) se fabrica con un tubo cuadrado de acero de 3 mm de espesor de pared y 60 mm de lado. Sabiendo que la tensión admisible del material es 250 MPa, determinar la máxima tensión equivalente de Von Mises en la barra y determinar, en kN, el máximo valor de la carga P que puede aplicarse en el punto C, despreciando el peso propio de las barras y con un coeficiente de seguridad de 1,50.

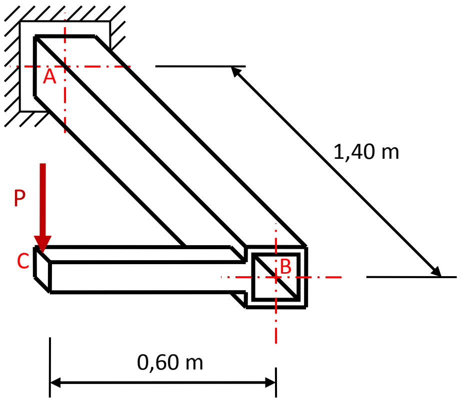


Fig. a

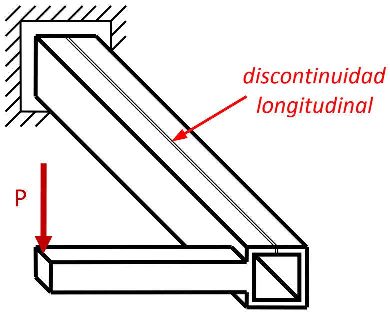


Fig. b

La barra AB se fabrica plegando una chapa de 3 mm en forma de tubo cuadrado y ejecutando posteriormente un cordón de soldadura longitudinal. Si, por accidente, no se ejecutase dicho cordón y quedase una discontinuidad longitudinal (Fig. b), ¿resistiría la estructura la misma carga P determinada anteriormente? Justificar la respuesta y calcular, si procediera, el valor máximo de P que soportaría la estructura.

EJERCICIO 2

Propiedades de la sección:

$$A = 684 \text{ mm}^2 \qquad I_y = 371412 \text{ mm}^4$$

El cortante y el torsor son constantes a lo largo del tramo AB, pero el flector crece linealmente y el máximo se produce en la sección de arranque A. Si la carga *P* se expresa en kN, entonces:

$$M_y = 1{,}4\cdot10^6\cdot P \text{ mmN} \qquad V_z = 1000\cdot P \text{ N} \qquad M_x = T = 6\cdot10^5\cdot P \text{ mmN}$$

Tensiones debidas a M_y en la sección de arranque:

$$\sigma_{\max} = \pm\frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y} = \pm\frac{1{,}4\cdot10^6\cdot P\cdot 30}{371412} = 113{,}1\cdot P \text{ MPa}$$

Tensiones debidas a V_z en la sección de arranque:

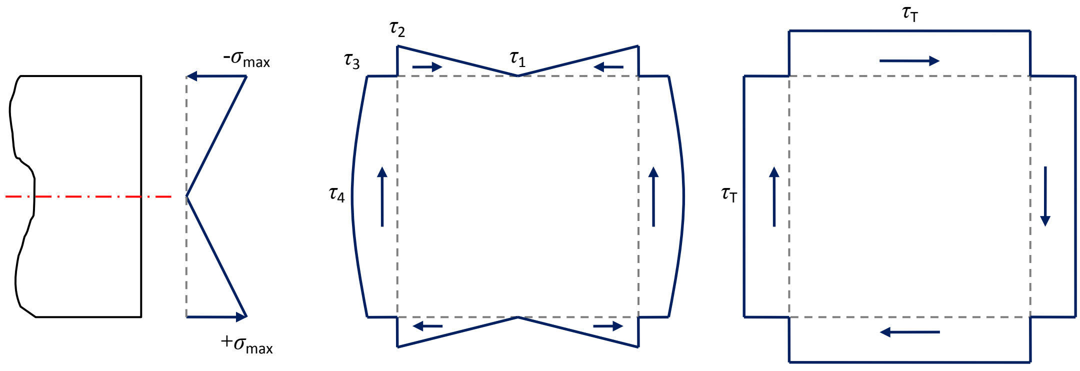
$$\tau_1 = \frac{V_z\cdot S_1}{e\cdot I_y} = \frac{1000\cdot P\cdot 0}{3\cdot 371412} = 0$$

$$\tau_2 = \tau_3 = \frac{V_z\cdot S_{2,3}}{e\cdot I_y} = \frac{1000\cdot P\cdot 30\cdot 3\cdot 28{,}5}{3\cdot 371412} = 2{,}302\cdot P \text{ MPa}$$

$$\tau_4 = \frac{V_z\cdot S_4}{e\cdot I_y} = \frac{1000\cdot P\cdot(30\cdot 3\cdot 28{,}5 + 27\cdot 3\cdot 13{,}5)}{3\cdot 371412} = 3{,}283\cdot P \text{ MPa}$$

Tensiones debidas al torsor *T* en la sección de arranque:

$$\tau_T = \frac{T}{2\cdot\Omega\cdot e} = \frac{6\cdot10^5\cdot P}{2\cdot 57^2\cdot 3} = 30{,}78\cdot P \text{ MPa}$$



La máxima tensión tangencial se produce a mitad de altura de la pared lateral izquierda del tubo y vale $(3{,}283 + 30{,}78)\cdot P = 34{,}06\cdot P$ MPa. Pero en esa posición la tensión normal es 0. La tensión equivalente de Von Mises será:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{0 + 3\cdot(34{,}06\cdot P)^2} = 59\cdot P \text{ MPa}$$

La máxima tensión normal se produce en las paredes superior e inferior y la máxima tensión tangencial concomitante se produce en las esquinas de la izquierda, tanto en la pared superior como en la inferior, y vale $(2{,}302 + 30{,}78)\cdot P = 33{,}08\cdot P$ MPa. La tensión equivalente de Von Mises valdrá:

$$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{\left(113{,}1\cdot P\right)^2+3\cdot\left(33{,}08\cdot P\right)^2}=126{,}8\cdot P\,\text{MPa}$$

Esta última posición es la más desfavorable y es la que condiciona el diseño. Así pues:

$$\sigma_{VM}\le\frac{\sigma_{adm}}{C.S.}\quad;\quad 126{,}8\cdot P\le\frac{250}{1{,}5}\quad;\quad P\le 1{,}314\,\text{kN}$$

Si la soldadura longitudinal no se ejecuta, el perfil deja de ser de sección cerrada y ello se traduce en un incremento notable de la tensión tangencial producida por el torsor. La tensión tangencial debida al cortante no cambia, porque la discontinuidad está en una posición en la que la τ valía 0. Tampoco se modifica el momento de inercia I_y y la distribución de tensiones normales no cambia. En cualquier caso, la tensión tangencial total aumenta y la P resistida por la estructura será inferior a la determinada anteriormente.

Los cálculos anteriores son válidos, a excepción del correspondiente a la tensión tangencial producida por el torsor T. Para secciones abiertas, se tiene que:

$$\tau_{T,j}=\frac{T\cdot e_j}{\frac{1}{3}\cdot\sum b_i\cdot e_i^3}=\frac{6\cdot10^5\cdot P\cdot 3}{\frac{1}{3}\cdot240\cdot3^3}=833{,}3\cdot P\,\text{MPa}$$

La máxima tensión equivalente de Von Mises se produce en las mismas posiciones que en el caso anterior, pero valdrá:

$$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{\left(113{,}1\cdot P\right)^2+3\cdot\left(2{,}302\cdot P+833{,}3\cdot P\right)^2}=1451{,}7\cdot P\,\text{MPa}$$

Por lo tanto, la máxima P será:

$$\sigma_{VM}\le\frac{\sigma_{adm}}{C.S.}\quad;\quad 1451{,}7\cdot P\le\frac{250}{1{,}5}\quad;\quad P\le 0{,}1148\,\text{kN}$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 1 de 2	**EJERCICIO PRÁCTICO 1**	
Convocatoria: **C3 – Junio 2011**	Fecha: **14.06.2011**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo evaluable: **30%**

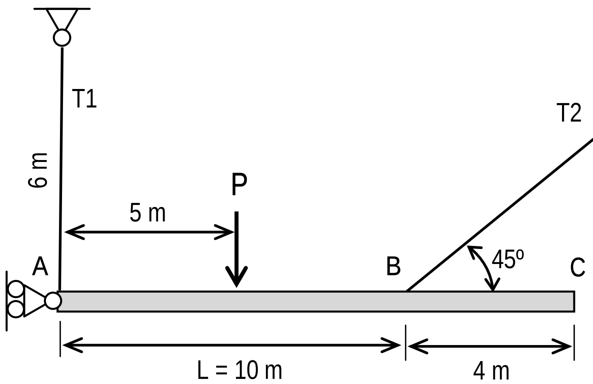
PROBLEMA 1.A

1. Dada la estructura de la figura, compuesta por una barra horizontal indeformable a flexión ($E \cdot I \approx \infty$) de 14 m. de longitud, unida a dos tirantes T1 y T2, cuyas características mecánicas se adjuntan, determinar:

   a) El valor de la máxima carga P que puede soportar el conjunto de la estructura **(1,0 punto)**

   b) La deformación producida en la barra, así como en cada uno de los tirantes para dicho valor de P **(0,5 puntos)**

   c) El desplazamiento horizontal y vertical de los puntos A, B y C al someter al conjunto a la carga hallada en el anterior apartado **(1,0 puntos)**

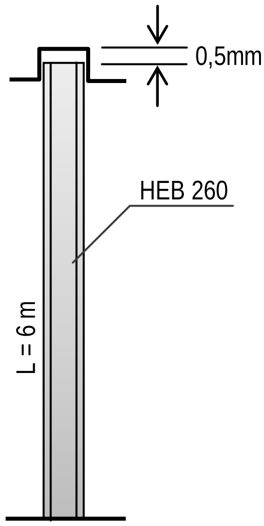


PARAM.	BARRA	T1	T2
A (mm²)	10.000	300	600
E (MPa)	120.000	210.000	180.000
f_y (N/mm²)	≈ ∞	275	235

PROBLEMA 1.B

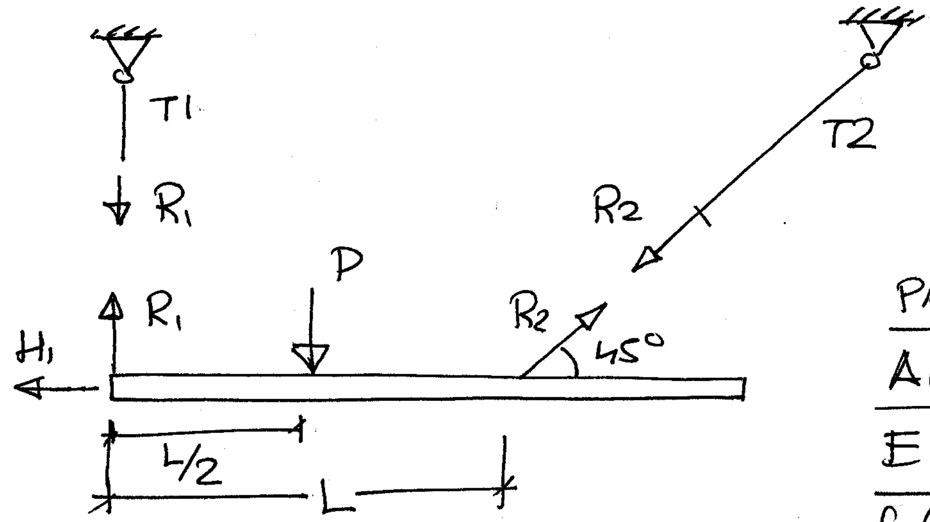
El soporte de la figura está formado por un perfil HEB 260 de acero S 275 (f_y = 275 N/mm², E = 210000 MPa) empotrado en su base y de 6 m. de altura. En su extremo superior, el perfil ajusta perfectamente en un cajeado, presentando una ligera holgura de 0,5 mm hasta su tope superior. El coeficiente de dilatación térmica del material es de $12 \cdot 10^{-6}$ ºC^{-1}

Se pide determinar el incremento de temperatura que provocaría el fallo de dicho elemento, indicando además la causa del mismo. **(2,5 puntos)**



SOLUCIÓN EJERCICIO 1.A

– El esquema estructural es el siguiente:



PARÁM.	T1	T2
A (mm^2)	300	600
E (MPa)	210000	180000
f_y (N/mm^2)	275	235

(a) $R_1 = R_2 \operatorname{sen} 45° = \dfrac{P}{2}$, luego:

$$R_2 = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

- Cálculo de la resistencia de cada tirante:

$$N_{pl,T1} = A_{T1} \cdot f_{y,T1} = 300 \times 275 = 82500 \text{ N} = \underline{82'5 \text{ kN}}$$

$$N_{pl,T2} = A_{T2} \cdot f_{y,T2} = 600 \times 235 = 141000 \text{ N} = \underline{141 \text{ kN}}$$

- Por condición de diseño, debe cumplirse que $N_{pl,Ti} \geq R_i$, luego:

$$R_1 = \frac{P}{2} \leq N_{pl,T1} \Rightarrow P \leq 2 \times 82,5 = \boxed{165 \text{ kN}}$$

$$R_2 = \frac{P}{\sqrt{2}} \leq N_{pl,T2} \Rightarrow P \leq \sqrt{2} \times 141 = 199 \text{ kN} \simeq \underline{200 \text{ kN}}$$

luego $\underline{P = 165 \text{ kN}}$ es la máxima carga soportada por la estructura, debido al agotamiento del tirante T1.

* Para dicho valor de P, $R_2 = \dfrac{165}{\sqrt{2}} = \underline{116,7 \text{ kN}}$

$$R_1 = \underline{82,5 \text{ kN}}$$

(b) Las deformaciones producidas en los distintos elementos serán las siguientes:

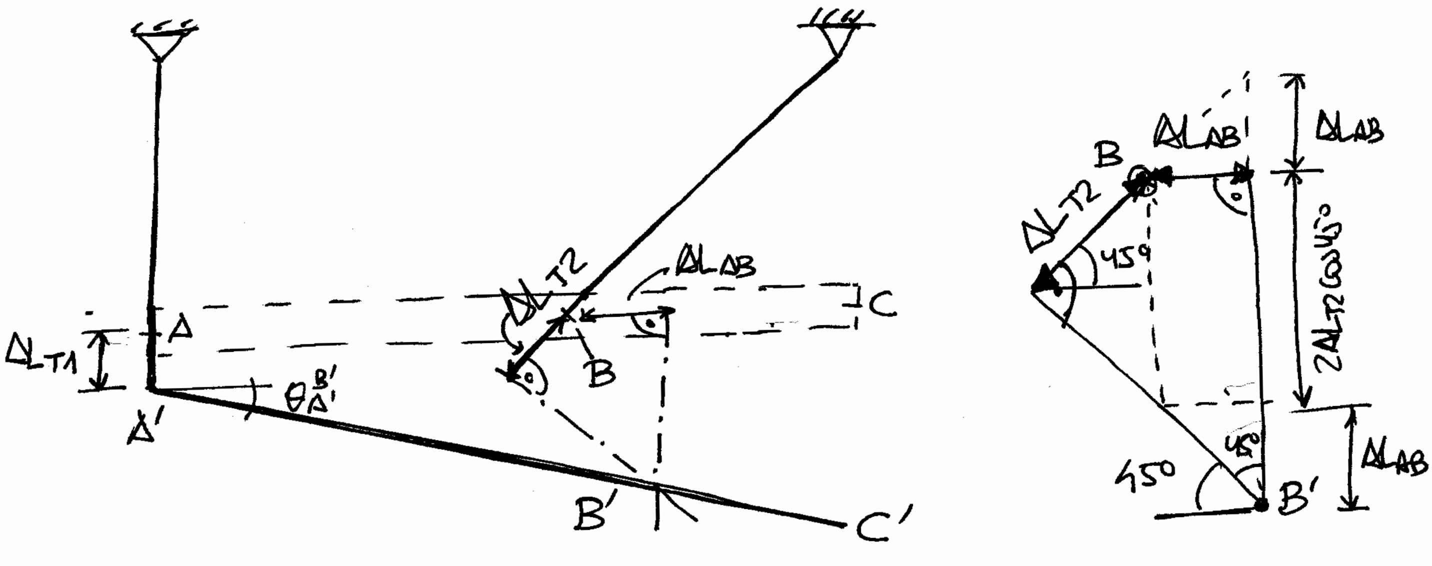
- Tirante T1 ⇒ $\Delta L_{T1} = \dfrac{N_{T1} \cdot L_{T1}}{E_{T1} \cdot A_{T1}} = \dfrac{82500 \cdot 6000}{210000 \cdot 300} = \underline{7{,}86 \text{ mm}}$

- Tirante T2 ⇒ $\Delta L_{T2} = \dfrac{N_{T2} \cdot L_{T2}}{E_{T2} \cdot A_{T2}} = \dfrac{116700 \cdot 6000\sqrt{2}}{180000 \cdot 600} = \underline{9{,}17 \text{ mm}}$

- Barra Tramo AB ⇒ $\Delta L_{AB} = \dfrac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{E_B \cdot A_B} = \dfrac{82500 \cdot 10000}{120000 \cdot 10000} = \underline{0{,}69 \text{ mm}}$

  Con $N_{AB} = R_2 \cos 45° = \dfrac{P}{2} = \underline{82'5 \text{ kN}}$ (Tracción)

(c) Con las anteriores deformaciones calculadas, el movimiento de los puntos A, B y C será el siguiente:



mov A = $\Delta L_{T1} = 7{,}86$ mm. (↓)

mov B $\begin{cases} \text{Vert} \rightarrow V_B = 2 \cdot \Delta L_{T2} \cdot \cos 45° + \Delta L_{AB} = 12{,}97 + 0{,}69 = \underline{13{,}66 \text{ mm}} \ (\downarrow) \\ \text{Hz} \rightarrow U_B = \Delta L_{AB} = 0{,}69 \text{ mm} \ (\rightarrow) \end{cases}$

mov C $\begin{cases} \text{Vert} \rightarrow V_C = L_{A'C'} \cdot \theta_{A'}^{B'} + V_A = 14000 \dfrac{13.66 - 7.86}{10000} + 7{,}86 = 8{,}11 + 7{,}86 = 15{,}98 \ (\downarrow) \\ \text{Hz} \rightarrow U_C = U_B = 0{,}69 \text{ mm} \ (\rightarrow) \end{cases}$

EJERCICIO 1.B

- Perfil HEB-260 ($A = 118\ cm^2$):
  - $I_y = 14920\ cm^4$
  - $W_y = 1150\ cm^3$
  - $i_y = 11,24\ cm$
  - $I_z = 5130\ cm^4$
  - $W_z = 395\ cm^3$
  - $i_z = 6,59\ cm$.

- Al existir una holgura de 5 mm, el perfil dilatará libremente hasta cubrirla, momento en que comenzará a entrar en carga.

- Para obtener la carga máxima que soportará el perfil, debemos realizar un análisis a pandeo de la pieza, obteniendo el coeficiente χ. Si $\chi < 1.0$, el fallo se producirá por pandeo, mientras que si $\chi = 1.0$, el elemento fallará por agotamiento plástico de la sección frente a compresión simple.

- Procedemos a obtener χ:
  - Coeficientes β en ambos ejes $\Rightarrow \beta_y = \beta_z = 0,5$
    (la estructura se empotra en sus dos extremos, en las dos direcciones principales de pandeo)
  - Dado que $\beta_y = \beta_z$, comprobaremos únicamente el eje débil (de menor inercia) $\rightarrow I_z = 5130\ cm^4 < I_y$
  - En dicho eje de pandeo, la curva europea a adoptar es:

Tabla 6.2 CTE DB-SE-A $\rightarrow$ Perfil laminado en I $\rightarrow \dfrac{h}{b} = \dfrac{260}{260} = 1 < 1'2 \rightarrow$ $t < 100$ mm, S 275, Eje z-z $\rightarrow \boxed{\text{CURVA "C"}}$

- Calculamos $\bar{\lambda}_{K,z}$:

$$\bar{\lambda}_{K,z} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{CR,z}}} = \sqrt{\frac{11800 \cdot 275}{11,81 \cdot 10^6}} = \underline{0'524}$$

siendo $N_{CR,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{K,z}} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 5130 \cdot 10^4}{(0{,}5 \cdot 6000)^2} = 11{,}81 \cdot 10^6$ N

- Entrando en la curva C de pandeo con $\bar{\lambda}_{K,z} = 0'524$, obtendremos el valor de χ_z:

$$\bar{\lambda}_{K,z} = 0'524 \rightarrow \boxed{\text{CURVA C}} \rightarrow \chi_z = 0{,}83 \begin{cases} 0{,}84 \ (\bar{\lambda}_K = 0'5) \\ 0{,}79 \ (\bar{\lambda}_K = 0'6) \end{cases}$$

- Por tanto, el fallo se producirá por pandeo en régimen elástico ($\chi_z < 1'0$), para un valor de axil N_d igual a:

$$N_d = N_{b,Rd} = \chi_z \cdot A \cdot f_y = 0{,}83 \cdot 11800 \cdot 275 = \underline{2693 \text{ kN}}$$

- Ahora sólo resta aplicar dicho axil al que provocará un ΔT equivalente en el soporte.
- Para ello, debemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\Delta L_1 = 0'5 \text{mm} = \alpha \cdot \Delta T_1 \cdot L = 12 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta T_1 \cdot 6000$$

$$\frac{N_d \cdot \cancel{L}}{E \cdot A} = \alpha \cdot \Delta T_2 \cdot \cancel{L} \rightarrow \alpha \Delta T_2 = \frac{N_d}{EA} = \frac{2693 \cdot 10^3}{210000 \cdot 11800}$$

el valor total de ΔT será:

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{\Delta L_1}{\alpha L} + \frac{N_d}{\alpha E A} = 6{,}94 + 90{,}56 = \underline{\underline{97'5 \,^\circ C}}$$

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 2 de 2	**EJERCICIO PRÁCTICO 2**	
Convocatoria: **C3 – Junio 2011**	Fecha: **14.06.2011**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo evaluable: **30%**

PROBLEMA 2.A

Demostrar las expresiones que permiten obtener el valor del giro de la tangente a la deformada en A y la flecha vertical en el punto B de la viga representada en la Fig. 1. **(2,0 puntos)**

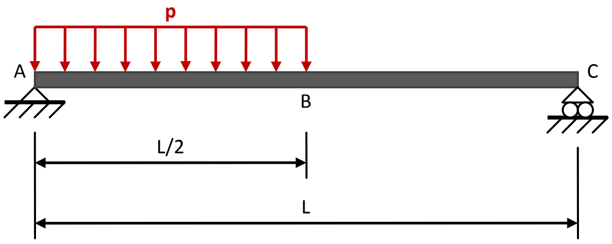


Fig. 1

PROBLEMA 2.B

a) Emplear las expresiones demostradas en el problema anterior para determinar, en la viga representada en la Fig. 2, el valor de la carga **q** para el cual se produce contacto en el apoyo central. **(1,0 punto)**

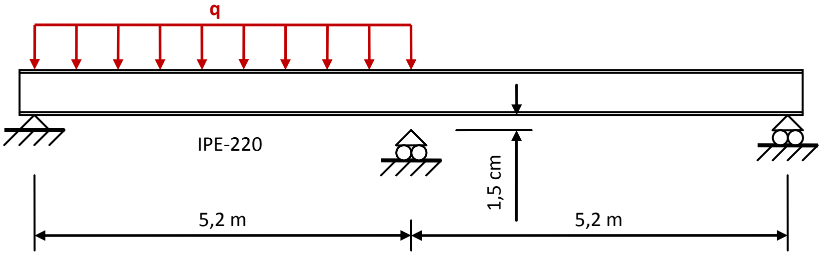
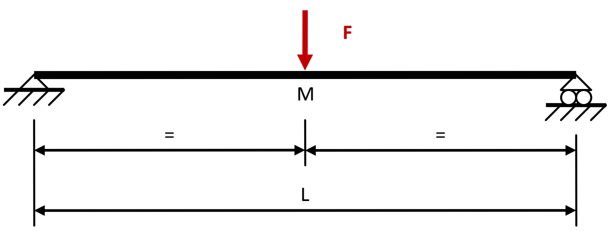


Fig. 2

b) Si la carga **q** se incrementase en un 50% respecto del valor determinado en el apartado anterior, obtener los diagramas de esfuerzos flectores y cortantes, acotando la posición y valor de los máximos y mínimos. **(2,0 puntos)**

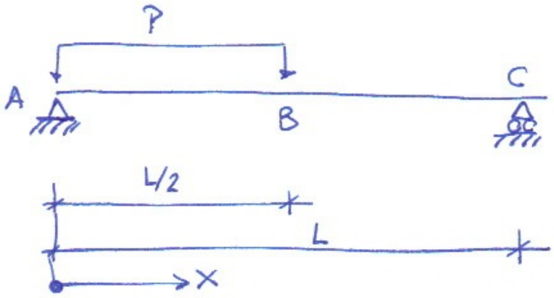
Datos adicionales:

- La viga del problema 2.B está fabricada con un acero de módulo E = 210 GPa y el momento de inercia del perfil laminado IPE-220 es 2770 cm^4.
- Ayuda para el problema 2.B:



$$f_M = \frac{F\,L^3}{48\,E\,I}$$

Problema 2.A



$$\Sigma F_V = 0 \longrightarrow V_A + V_C = p \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow -p \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} + V_C \cdot L = 0$$

$$V_C = \frac{p \cdot L}{8} \qquad V_A = \frac{3pL}{8}$$

Ley de flectores en tramo AB: $(x \leq L/2)$

$$M(x) = \frac{3pL}{8} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2$$

Ley de flectores en tramo BC: $(L/2 \leq x \leq L)$

$$M(x) = \frac{3pL}{8} \cdot x - \left(p \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{L}{4}\right) = -\frac{pL}{8} \cdot x + \frac{pL^2}{8}$$

$$v_C = v_A + \theta_A \cdot (x_C - x_A) + \frac{M_{Y\text{-}Y}^{\text{desde } C}[M(x)]}{E \cdot I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 0 + \theta_A \cdot L + \frac{1}{EI} \cdot \int_C^A M(x) \cdot (x - x_C) \cdot dx \Rightarrow \theta_A = -\frac{\int_C^B M(x)(x-x_C)dx + \int_B^A M(x)(x-x_C)dx}{E \cdot I \cdot L}$$

$$\theta_A = -\frac{\int_L^{L/2} \left(-\frac{pL}{8}x + \frac{pL^2}{8}\right)(x-L)\,dx + \int_{L/2}^{0} \left(\frac{3pL}{8}x - \frac{p}{2} \cdot x^2\right) \cdot (x-L)\,dx}{E \cdot I \cdot L}$$

$$u = \frac{x}{L} \qquad du = \frac{dx}{L} \qquad dx = L \cdot du$$

$$\theta_A = -\frac{pL^4 \int_1^{0,5} \left(-\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}\right)(u-1) \cdot du + pL^4 \cdot \int_{0,5}^{0} \left(\frac{3}{8}u - \frac{u^2}{2}\right)(u-1)\,du}{E \cdot I \cdot L} =$$

$$\theta_A = -\frac{pL^4}{EI \cdot L} \cdot \left(5{,}208333 \cdot 10^{-3} + 18{,}2292 \cdot 10^{-3}\right) = -0{,}0234375 \cdot \frac{pL^3}{EI} =$$

$$= -\frac{3pL^3}{128EI}$$

$$\vartheta_B = \vartheta_A + \theta_A \cdot (x_B - x_A) + \frac{\int_B^A M(x)\,(x-x_B)\,dx}{EI}$$

$$\vartheta_B = 0 + \frac{-3pL^3}{128 E \cdot I} \cdot \frac{L}{2} + \frac{1}{EI} \cdot \int_{L/2}^{0} \left(\frac{3pL}{8}x - \frac{p}{2}x^2 \right)\left(x - \frac{L}{2}\right) dx$$

$$u = \frac{x}{L} \qquad du = \frac{dx}{L} \qquad dx = L \cdot du$$

$$\vartheta_B = -\frac{3pL^3}{128EI} \cdot \frac{L}{2} + \frac{pL^4}{EI} \cdot \int_{0,5}^{0} \left(\frac{3}{8}u - \frac{u^2}{2} \right) \cdot \left(u - \frac{1}{2}\right) du$$

$$= -\frac{3pL^3}{128EI} \cdot \frac{L}{2} + \frac{pL^4}{EI} \cdot \frac{1}{192} = \underline{\underline{\frac{-5pL^4}{768 \cdot E \cdot I}}}$$

Problema 2.B

a) Aplicación numérica de la expresión anterior

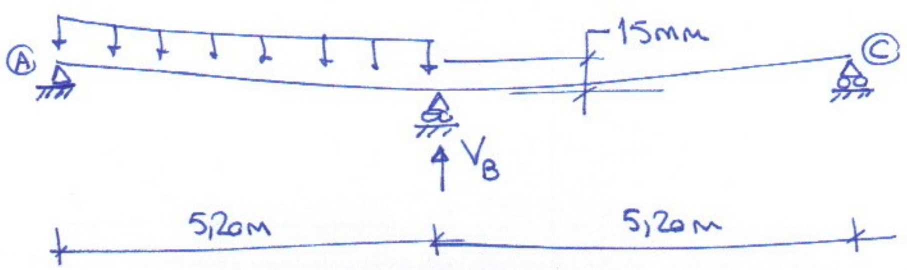
$p = q = ¿?$ $\qquad I = 2770 \cdot 10^4\ mm^4$

$E = 210000\ N/mm^2$ $\qquad L = 10{,}4\ m = 10400\ mm$

Se producirá contacto cuando $\vartheta_{punto\ medio} = -15\ mm$

$$-15\,mm = \frac{-5 \cdot q \cdot 10400^4}{768 \cdot 210000 \cdot 2770 \cdot 10^4} \Rightarrow \boxed{q = 1{,}1456\ \frac{N}{mm} = 1{,}1456\ \frac{kN}{m}}$$

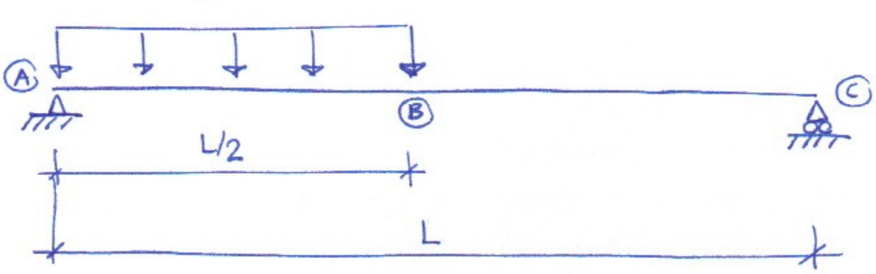
b) Para un valor de $q > 1{,}1456\ \frac{kN}{m}$, la viga es hiperestática ...



(I) Se isostatiza la viga:

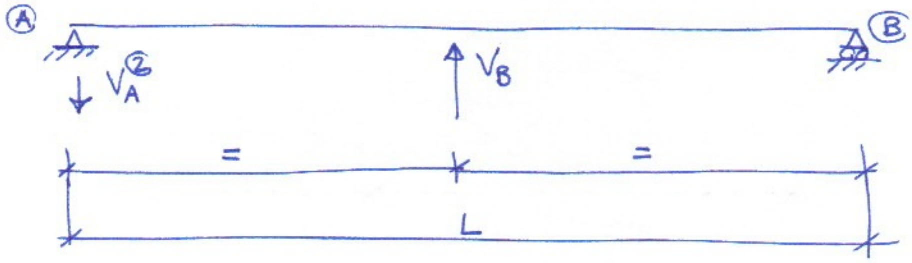
q → conocida: $150\% \cdot 1{,}1456 \frac{kN}{m} = 1{,}7184 \frac{kN}{m}$

①



$$V_A^{①} = \frac{3q \cdot L}{8} \qquad \vartheta_B^{①} = - \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{768 \cdot E \cdot I}$$

②



$$V_A^{②} = -\frac{1}{2} V_B \qquad \vartheta_B^{②} = + \frac{V_B \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

porque es opuesta a $V_A^{①}$

(II) Ecuación de compatibilidad: $\vartheta_B = \vartheta_B^{①} + \vartheta_B^{②} = -15\,mm$

$$- \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{768 \cdot E \cdot I} + \frac{V_B \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} = - \frac{L^3}{768 \cdot E \cdot I} \cdot \left(5 \cdot q \cdot L - 16 \cdot V_B\right) = -15\,mm$$

$$5 \cdot q \cdot L - 16 \cdot V_B = 59573$$

$$-16 \cdot V_B = -29784$$

→ $V_B = 1861{,}5\ N$

$V_B = 1{,}862\ kN$

$$V_A = \frac{3qL}{8} - \frac{1}{2} \cdot V_B = 5771{,}0\ N = 5{,}771\,kN$$

Ley del tramo AB: $(x \leq 5,2 m)$

$$M(x) = 5{,}771 \cdot x - 0{,}8592 \cdot x^2 \rightsquigarrow \text{máx en } x_o \ldots \; M_{máx} = 9{,}69 \text{ mkN}$$

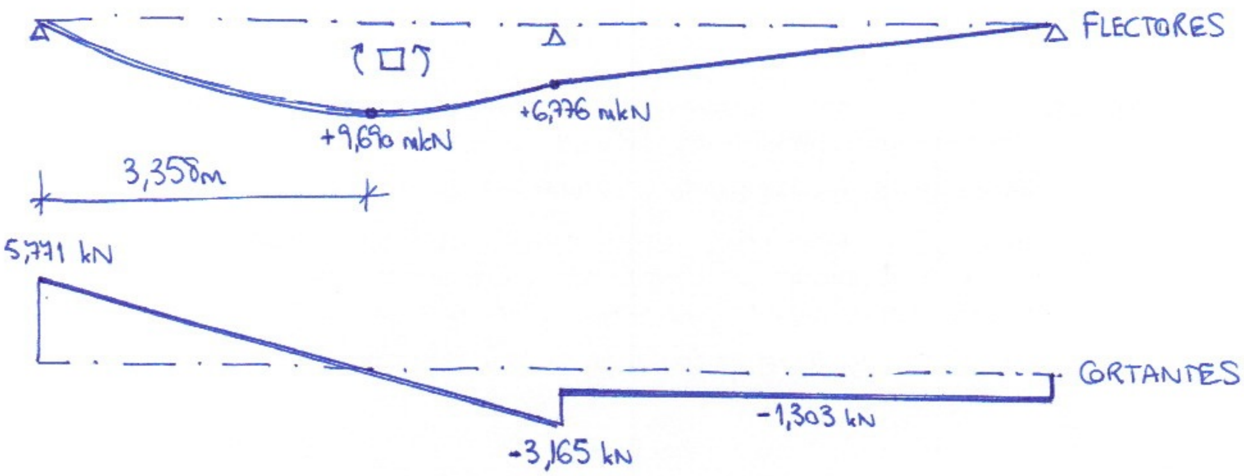
$$V(x) = 5{,}771 - 1{,}7184 \cdot x \rightsquigarrow \text{se anula en } x_o = 3{,}358 \text{ m}$$

Ley del tramo BC: $(5{,}2m \leq x \leq 10{,}4m)$

$$M(x) = 5{,}771 \cdot x - 8{,}936 \cdot (x - 2{,}7) + 1{,}862 \cdot (x - 5{,}2) =$$

$$= -1{,}303 \cdot x + 14{,}445$$

$$V(x) = -1{,}303$$



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 1 de 2	**EJERCICIO PRÁCTICO 1**	
Convocatoria: **C4 – Julio 2011**	Fecha: **12.07.2011**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo evaluable: **30%**

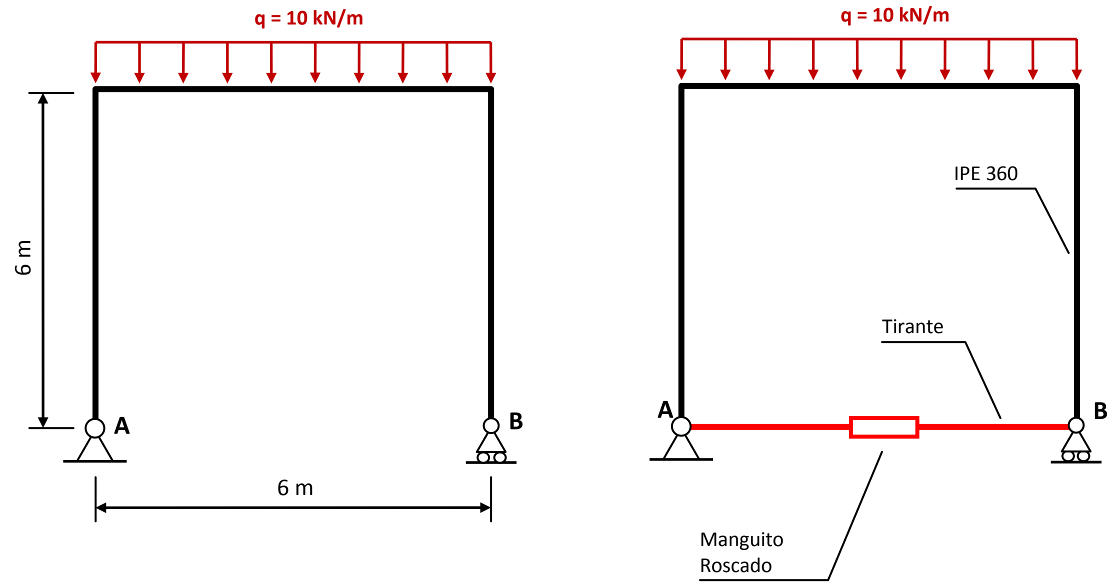
PROBLEMA 1

El pórtico de la figura forma parte del sostenimiento provisional de una excavación subterránea. Si para su construcción empleamos perfiles de acero estructural ($E = 210$ GPa) de la serie IPE y límite elástico $f_y = 275$ N/mm², se pide:

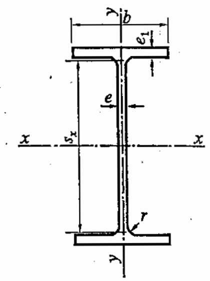
a) Determinar el perfil IPE a emplear exclusivamente por criterios de resistencia de secciones, sin considerar los posibles efectos de inestabilidad en elementos comprimidos. Suponer de forma simplificada que el cortante es absorbido uniformemente por el alma, siendo el valor de $\tau_w = V/A_w$ **(1,5 puntos)**

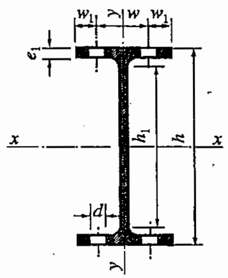
b) Suponiendo el empleo de un perfil **IPE 360**, determinar el movimiento horizontal del apoyo B. **(2,0 puntos)**

c) En caso de incorporar un tirante del mismo tipo de acero y sección circular, provisto de un manguito roscado, determinar la sección del tirante y el recorrido de roscado necesarios para para impedir el movimiento horizontal del apoyo B. **(1,5 puntos)**



DOBLE T PERFIL EUROPEO (IPE)



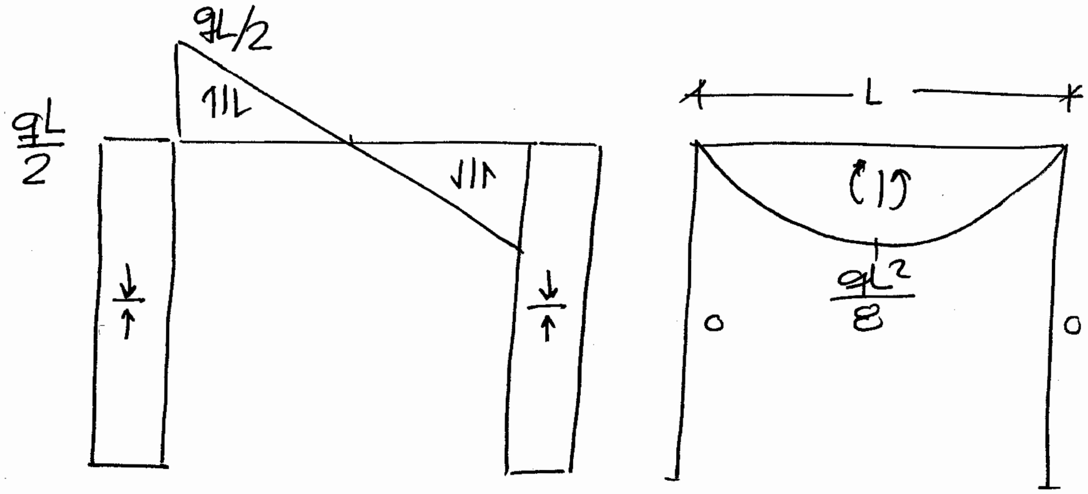


A = Área de la sección
I = Momento de inercia
W = Módulo resistente
$i = \sqrt{\dfrac{I}{A}}$ = Radio de giro
S_x = Momento estático de media sección
$s_x = \dfrac{I_x}{S_x}$ = Distancia entre los centros de compresión y tracción
η = Rendimiento
u = Perímetro

IPE	Dimensiones (mm)						Sección	Peso	Referido al eje x-x			Referido al eje y-y			w	w_1	$\varnothing d$	S_x	s_x	$\eta =$	u	IPE
	h	b	e	e_1	r_1	h_1	A cm²	P kg/m	I_x cm⁴	W_x cm³	i_x cm	I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	mm	mm	mm	cm³	cm	W_x/P	m²/m	
80	80	46	3,8	5,2	5	59	7,64	6,00	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	25	10,5	6,4	11,6	6,90	3,34	0,328	80
100	100	55	4,1	5,7	7	74	10,3	8,10	171	34,2	4,07	15,9	5,79	1,24	30	12,5	8,4	19,7	8,68	4,22	0,400	100
120	120	64	4,4	6,3	7	93	13,2	10,4	318	53,0	4,90	27,7	8,65	1,45	35	14,5	8,4	30,4	10,5	5,11	0,475	120
140	140	73	4,7	6,9	7	112	16,4	12,9	541	77,3	5,74	44,9	12,3	1,65	40	16,5	11	44,2	12,3	6,00	0,551	140
160	160	82	5,0	7,4	9	127	20,1	15,8	869	109	6,58	68,3	16,7	1,84	44	19	13	61,9	14,0	6,89	0,623	160
180	180	91	5,3	8,0	9	146	23,9	18,8	1.320	146	7,42	101	22,2	2,05	48	21,5	13	83,2	15,8	7,78	0,698	180
200	200	100	5,6	8,5	12	159	28,5	22,4	1.940	194	8,26	142	28,5	2,24	52	24	13	110	17,6	8,69	0,768	200
220	220	110	5,9	9,2	12	177	33,4	26,2	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	58	26	17	143	19,4	9,62	0,848	220
240	240	120	6,2	9,8	15	190	39,1	30,7	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	65	27,5	17	183	21,2	10,6	0,922	240
270	270	135	6,6	10,2	15	219	45,9	36,1	5.790	429	11,2	420	62,2	3,02	72	31,5	21	242	23,9	11,9	1,041	270
300	300	150	7,1	10,7	15	248	53,8	42,2	8.360	557	12,5	604	80,5	3,35	80	35	23	314	26,6	13,2	1,159	300
330	330	160	7,5	11,5	18	271	62,6	49,1	11.770	713	13,7	788	98,5	3,55	85	37,5	25	402	29,3	14,5	1,254	330
360	360	170	8,0	12,7	18	298	72,7	57,1	16.270	904	15,0	1.040	123	3,79	90	40	25	510	31,9	15,8	1,353	360
400	400	180	8,6	13,5	21	331	84,5	66,3	23.130	1.160	16,5	1.320	146	3,95	95	42,5	28	654	35,4	17,4	1,467	400
450	450	190	9,4	14,6	21	378	98,8	77,6	33.740	1.500	18,5	1.680	176	4,12	100	45	28	851	39,7	19,3	1,605	450
500	500	200	10,2	16,0	21	426	116	90,7	48.200	1.930	20,4	2.140	214	4,31	110	45	28	1.100	43,9	21,3	1,744	500
550	550	210	11,1	17,2	24	467	134	106	67.120	2.440	22,3	2.670	254	4,45	115	47,5	28	1.390	48,2	23,1	1,877	550
600	600	220	12,0	19,0	24	514	156	122	92.080	3.070	24,3	3.390	308	4,66	120	50	28	1.760	52,4	25,1	2,015	600

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

a) Las leyes de esfuerzos de la pieza analizada serán:



- Dado que q = 10 kN/m, los esfuerzos máximos serán los siguientes

$$N_{máx} = \frac{qL}{2} = \frac{10 \times 6}{2} = 30 \text{ kN}$$

$$V_{máx} = N_{máx} = 30 \text{ kN}$$

$$M_{máx} = \frac{qL^2}{8} = \frac{10 \times 6^2}{8} = 45 \text{ m·kN}.$$

- Dado que en ningún punto se dan los 3 esfuerzos máximos, pero dos de ellos (V, M) interaccionan entre sí, dimensionaremos el perfil IPE para dos hipótesis diferentes:

• $N_{máx} \rightarrow f_y \geq \frac{N_{máx}}{A_{IPE}} \rightarrow A_{IPE} \geq N_{máx}/f_y = 30 \cdot 10^3/275 = 109\ mm^2$ (IPE-80) $A = 764\ mm^2$

• $M_{máx}, V_{máx} \rightarrow \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y = 275\ N/mm^2$

$$\sigma = \frac{M_{máx}}{W_{IPE}} = \frac{45 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{W_{IPE}}, \quad \tau = \frac{V_{máx}}{A_W} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ N}}{h \cdot t_w}$$

predimensionando para $\tau = 0$, tenemos

$$W_{IPE} \geq \frac{M_{máx}}{f_y} = \frac{45 \cdot 10^6 \text{ N.mm}}{275 \text{ N/mm}^2} = 163636 \text{ mm}^3 \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{IPE-200} \\ W_y = 194000\end{array}}$$

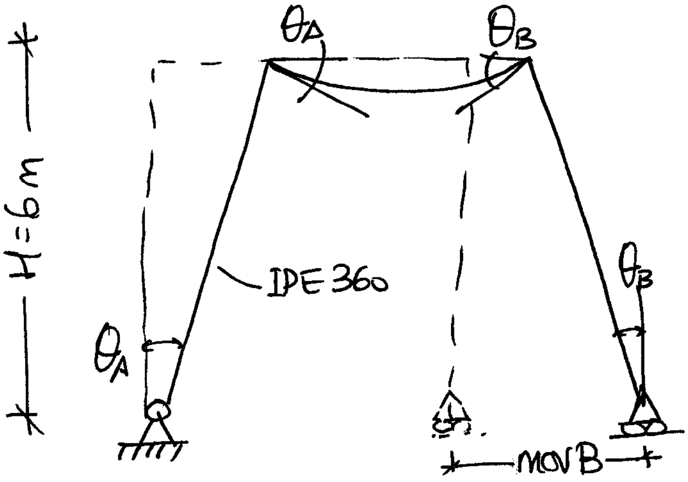
- Ahora comprobamos con dicho perfil IPE-200 para el conjunto de esfuerzos:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\left(\frac{45\cdot 10^6}{194000}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{30\cdot 10^3}{200\cdot 5{,}6}\right)^2} = 236{,}55\ N/mm^2 < f_y = 275\ N/mm^2$$

- Con lo cual aseguramos la resistencia de todos los puntos de la pieza, aunque en ninguno de ellos coincidan los máximos esfuerzos ($M_{máx}$, $V_{máx}$), que es la hipótesis analizada.

- Por tanto, el dimensionamiento del pórtico se realizará con perfiles IPE-200.

b) Al ser un pórtico isostático, el movimiento del punto B es relativamente sencillo de calcular, al no haber momentos en los elementos verticales:



$$\theta_A = \theta_B = \theta = \frac{1}{2}\int_A^B \frac{M(x)\,dx}{EI}$$

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$\theta = \frac{1}{2EI}\left[\frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6}\right]_0^L = $$

$$= \frac{qL^3}{24EI}$$

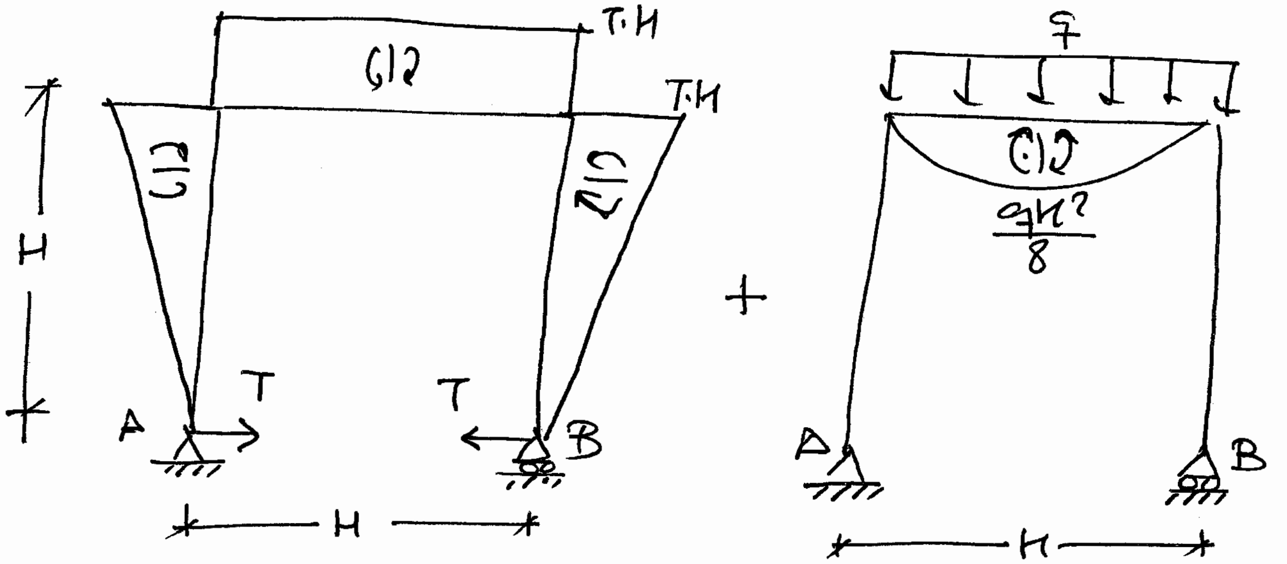
Luego:

$$movB = 2\cdot\theta\cdot H = 2\cdot\frac{10\times 6^3}{24\cdot 210\cdot 10^6\cdot 1'627\cdot 10^{-4}}\cdot 6000\ mm = \underline{31'6\ mm}$$

Para un IPE-360 $\Rightarrow$ $I_y = 16270\cdot 10^4\ mm^4 = 1'627\cdot 10^{-4}\ m^4$

$E = 210\ GPa = 210\cdot 10^6\ kPa\ (kN/m^2)$

c) Al colocar el tirante y roscar el manguito, conseguimos que el movimiento del apoyo B sea nulo, de forma que:



- Por tanto, para hallar la tensión T la condición a aplicar es que $\delta_B = 0$

$$\delta_B = \delta_B^+ + \delta_B^- = 31'6\ mm - \frac{1080\cdot T}{EI}\cdot 10^9 = 0$$

$$\delta_B^- = -\frac{2}{EI}\left[\frac{H}{2}\cdot H T\cdot H + \frac{1}{2}\, T\cdot H^2\cdot\frac{2H}{3}\right] = -\frac{2T}{EI}\left[H^3/2 + H^3/3\right] =$$

$$= \frac{-5TH^3}{3EI} = \frac{-1080T}{3EI}\cdot 10^9\ [N, mm]$$

despejando T:

$$T = \frac{31'6\cdot 3EI}{1080\cdot 10^9} = 3000\ N = 3\ kN$$

- Por tanto, el tirante soportará un axil de $T = 3000$ N, y su sección necesaria será:

$$\frac{T}{A_T} \leq f_y \rightarrow A_t \geq T/f_y = 3000/275 = 10,9\ mm^2$$

$$\phi = \sqrt{\frac{4A_t}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\times 10'9}{\pi}} = 3{,}72\ mm \rightarrow \boxed{\phi = 4\ mm}$$

- Para obtener el valor del roscado, simplemente calculamos el alargamiento del tirante sometido a dicho axil :

$$\Delta L_T = \frac{T \cdot L}{E \cdot A} = \frac{3000 \times 6000}{2'1 \cdot 10^6 \times \frac{\pi 4^2}{4}} = \underline{6,82 \text{ mm}} = \Delta L_{roscado}$$

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

7502	TEORÍA DE ESTRUCTURAS	
PARTE: 2 de 2	**EJERCICIO PRÁCTICO 2**	
Convocatoria: **C4 – Julio 2011**	Fecha: **12.07.2011**	Valor: **5,0 puntos**
Curso: **2010/2011**	Tiempo: **90 min**	Mínimo evaluable: **30%**

PROBLEMA 2.1

Una bandeja de plástico recibe cierta carga *p* y se apoya en un perfil de acero UPE-240, tal cual se muestra en la Fig.1. Determinar el valor de *B* para que el perfil no trabaje a torsión. **(2,5 Puntos)**

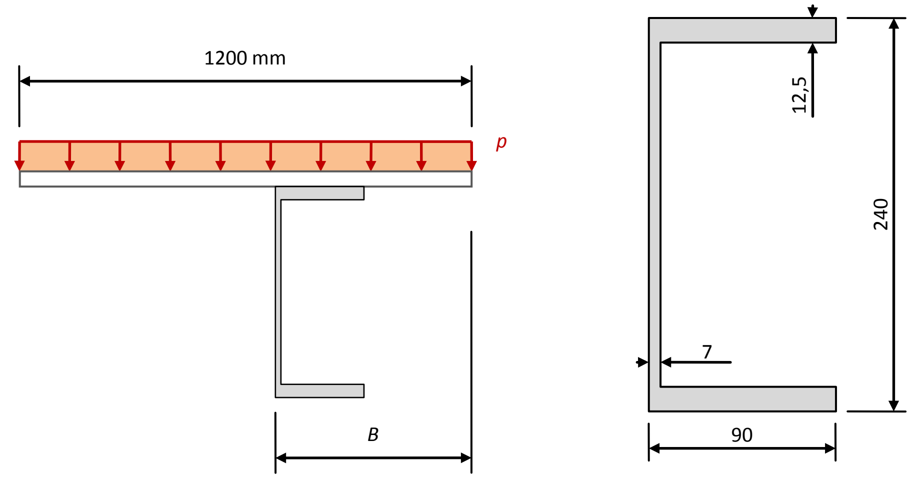
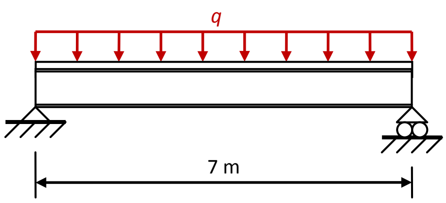


Fig. 1

PROBLEMA 2.2

Una viga simplemente apoyada de 7 m de largo se construye con una sección mixta de dos materiales distintos (ver Fig. 2). Los datos de los materiales se recogen en dicha figura. Determinar el valor de la máxima carga *q* que puede aplicarse sobre la viga. **(2,5 Puntos)**



Datos de los materiales:

- Material 1:
  - Módulo de elasticidad E_1 = 27 GPa
  - Tensión admisible a compresión: 20 MPa
  - Tensión admisible a tracción: 2 MPa
- Material 2:
  - Módulo de elasticidad E_2 = 210 GPa
  - Tensión admisible: 200 MPa (a tracción y a compresión)

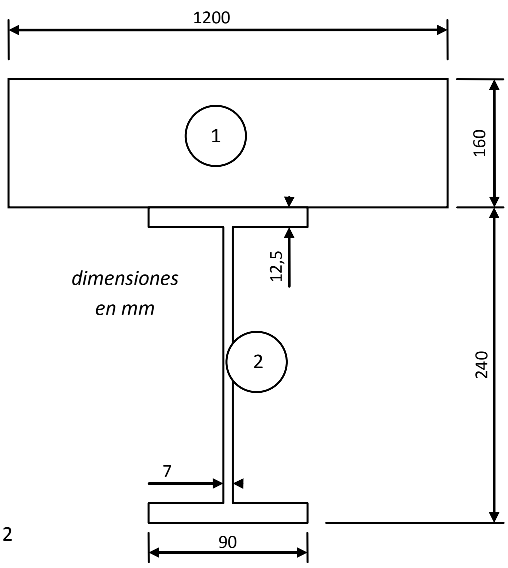
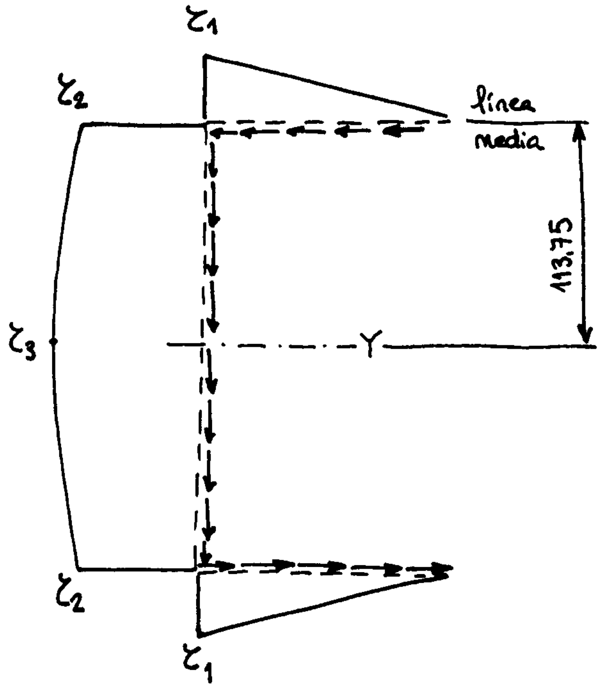


Fig. 2

[1] Cálculo del centro de esfuerzos cortantes bajo una carga genérica de valor V_Z (cortante paralelo al eje Z, fruto de una carga gravitatoria)

$t_w = 7$ mm $\quad t_f = 12{,}5$ mm $\quad h = 240$ mm $\quad b = 90$ mm

$A = 3755 \text{ mm}^2 \qquad I_Y = 3{,}494 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

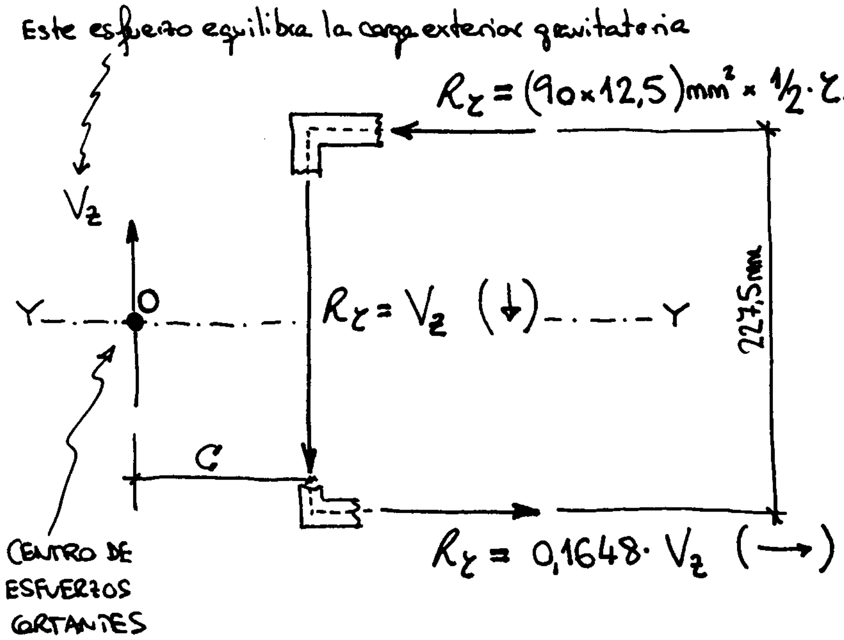


$$\tau_1 \simeq \frac{V_z \cdot (90 \cdot 12{,}5 \cdot 113{,}75)}{I_Y \cdot 12{,}5} = 2{,}930 \cdot 10^{-4} \cdot V_z$$

$$\tau_2 \simeq \tau_1 \cdot \frac{12{,}5}{7} = 5{,}232 \cdot 10^{-4} \cdot V_z$$

$$\tau_3 \simeq \frac{V_z \cdot \left(90 \cdot 12{,}5 \cdot 113{,}75 + 107{,}5 \cdot 7 \cdot \frac{107{,}5}{2}\right)}{I_Y \cdot 7} =$$

$$= 6{,}831 \cdot 10^{-4} \cdot V_z$$

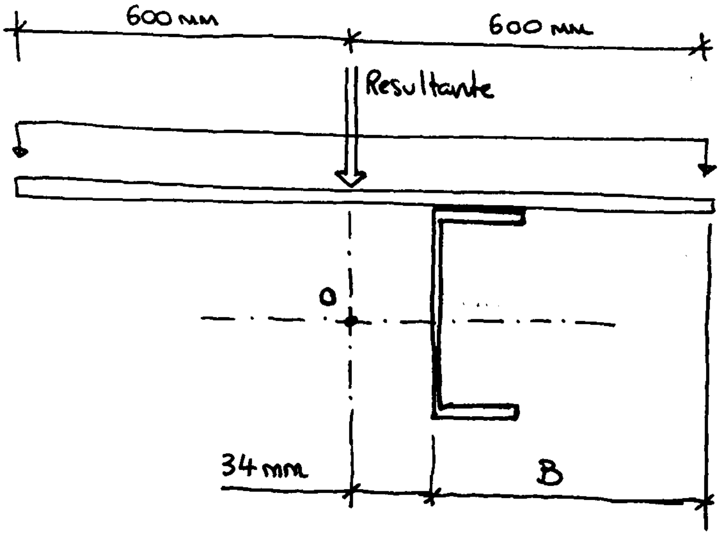


Condición para que no se produzcan torsiones:

$$V_z \cdot C = 0{,}1648 \cdot V_z \cdot 227{,}5 \text{ mm}$$

$$C = 37{,}49 \text{ mm}$$

Distancia de O hasta la cara exterior del perfil: $C - \dfrac{t_w}{2} = 33{,}99 \simeq 34$ mm



La resultante debe pasar por el centro de esfuerzos cortantes.

Luego $B = 600 - 34 = \underline{\underline{566 \text{ mm}}}$

[2] Momento máximo producido por la carga q: $M_{MÁX} = \dfrac{q \cdot L^2}{8} = 6{,}125 \cdot q$ (en m·kN)

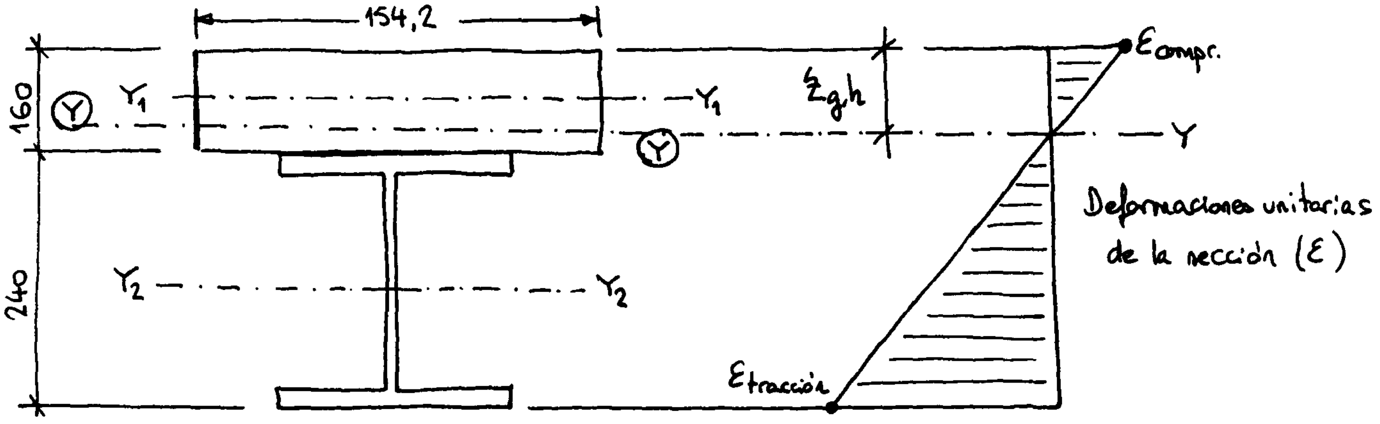
(siendo L = 7 m)

(q en kN/m)

Como se trata de una sección mixta, debe homogeneizarse:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{210 \text{ GPa}}{27 \text{ GPa}} = 7{,}78$$

Sección homogeneizada: el ancho del material 1 se divide por n



Propiedades de la sección (1): $A_1 = 154{,}2 \cdot 160 = 24672 \text{ mm}^2$

$I_{Y_1} = 154{,}2 \cdot \dfrac{160^3}{12} = 5{,}263 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$] tras la homogeneización

Propiedades de la sección (2): $A_2 = 3755 \text{ mm}^2$

$I_{Y_2} = 3{,}494 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

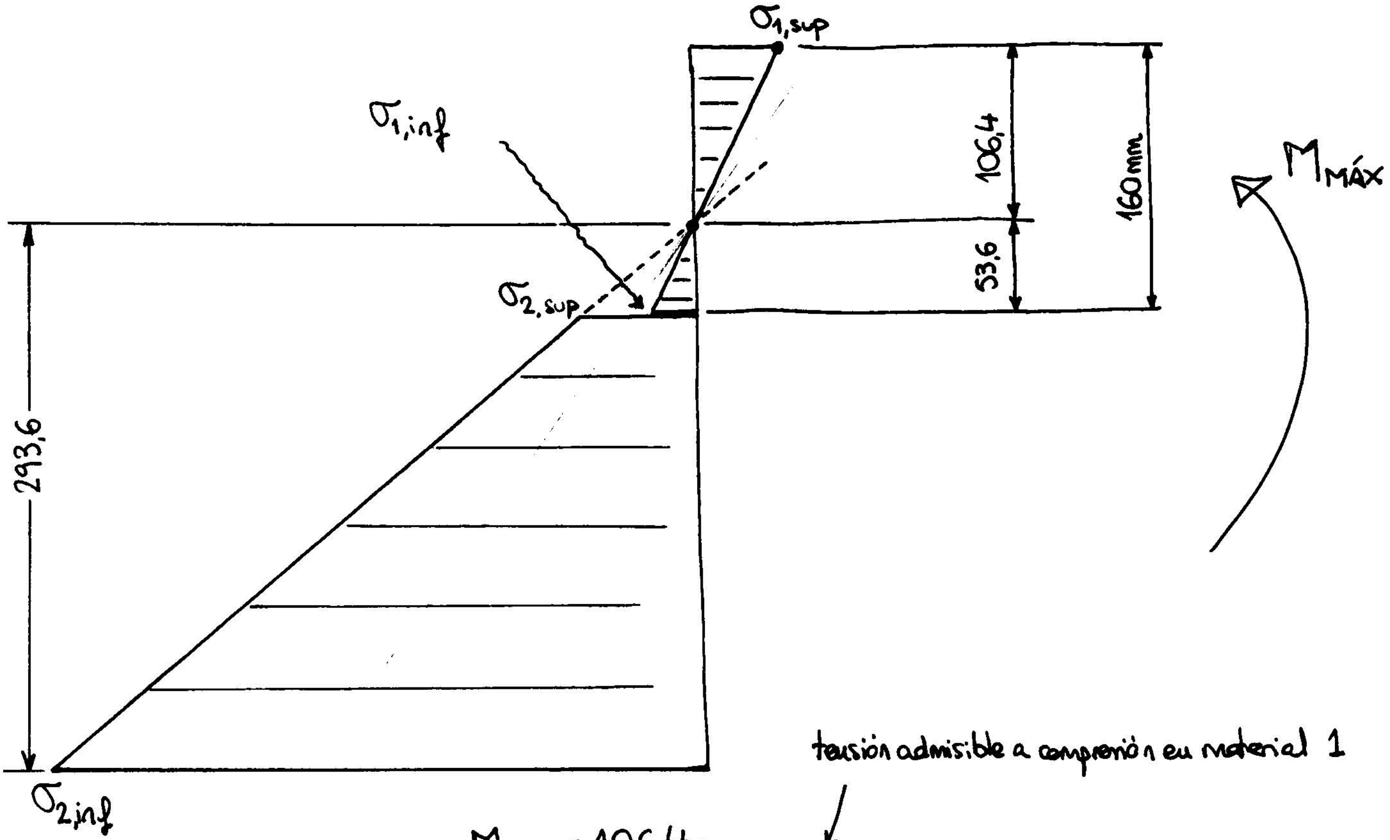
Centro de gravedad de la sección mixta: $z_{g,h} = \dfrac{A_1 \cdot \frac{160}{2} + A_2 \cdot \left(160 + \frac{240}{2}\right)}{A_1 + A_2} = 106{,}4 \text{ mm}$

Momento de inercia de la sección mixta homogeneizada:

$$I_{Y,h} = I_{Y_1} + A_1 \cdot \left(\frac{160}{2} - z_{g,h}\right)^2 + I_{Y_2} + A_2 \cdot \left(160 + \frac{240}{2} - z_{g,h}\right)^2 =$$

$$= 2{,}179 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Distribución de tensiones en la sección mixta:



tensión admisible a compresión en material 1

$$|\sigma_{1,sup}| = \frac{M_{MÁX} \cdot 106{,}4\text{mm}}{n \cdot I_{Y,h}} \leq 20 \text{ MPa} \rightsquigarrow M_{MÁX} \leq 318{,}7 \text{ m·kN}$$

$$|\sigma_{1,inf}| = \frac{M_{MÁX} \cdot 53{,}6\text{mm}}{n \cdot I_{Y,h}} \leq 2 \text{ MPa} \rightsquigarrow M_{MÁX} \leq 63{,}26 \text{ m·kN}$$

$$|\sigma_{2,inf}| = \frac{M_{MÁX} \cdot 293{,}6}{I_{Y,h}} \leq 200 \text{ MPa} \rightsquigarrow M_{MÁX} \leq 148{,}4 \text{ m·kN}$$

El valor más restrictivo es el correspondiente al agotamiento del material 1 a tracción:

$$6{,}125 \cdot q \leq 63{,}26 \text{ m·kN} \Longrightarrow \boxed{q \leq 10{,}33 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}}}$$