



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departament de Física, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal

FONAMENTS FÍSICS DE L'ENGINYERIA I

Grau en Enginyeria en So i Imatge
Escola Politècnica Superior

RESUMS DELS TEMES

Curs 2010-2011

Augusto Beléndez Vázquez



Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 1.- CINEMÀTICA

• Introducció

La mecànica s'ocupa de les relacions entre els moviments dels sistemes materials i les causes que els produeixen. La mecànica es divideix en tres parts: *cinemàtica*, que estudia el moviment sense preocupar-se de les causes que el produeixen; *dinàmica*, que estudia el moviment i les seues causes, i *estàtica*, que estudia les forces i l'equilibri dels cossos.

• Posició, velocitat i acceleració

Per a descriure el moviment d'una partícula, el primer pas és establir un sistema de coordenades o *sistema de referència*. El *vector de posició* \mathbf{r} situa un objecte respecte de l'origen d'un sistema de referència i, en general, és funció del temps. En coordenades cartesianes:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Quan una partícula es mou, l'extrem del vector \mathbf{r} descriu una corba que es denomina trajectòria. Si s és l'espai recorregut per la partícula al llarg de la trajectòria, s serà funció del temps t i la funció $s = f(t)$ rep el nom de *lleï horària del moviment*.

El *vector desplaçament* $\Delta \mathbf{r}$ és el canvi del vector de posició entre dos punts P_1 i P_2 :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

La *velocitat mitjana* \mathbf{v}_m d'una partícula és el desplaçament del punt durant un interval de temps Δt , dividit per aquest interval de temps:

$$\mathbf{v}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

La *velocitat instantània* \mathbf{v} és el valor límit de la velocitat mitjana quan l'interval de temps tendeix a zero. Es compleix:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$$

El vector velocitat instantània és tangent a la trajectòria de la partícula en cadascun dels seus punts.

L'acceleració *mitjana* \mathbf{a}_m d'un punt material és el canvi de la velocitat durant un interval de temps Δt , dividit per l'interval de temps:

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$$

L'acceleració *instantània* \mathbf{a} és el valor límit de l'acceleració mitjana quan l'interval de temps tendeix a zero:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$$

L'acceleració instantània \mathbf{a} es pot descompondre en dos vectors, un normal a la trajectòria denominat acceleració normal o centrípete, \mathbf{a}_N , i un altre tangent a la trajectòria, que rep el nom de *acceleració tangencial*, \mathbf{a}_T . Aquestes components es coneixen com a *components intrínseques de l'acceleració*:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_T$$

\mathbf{a}_T té en compte el canvi en el mòdul del vector velocitat, $v = |\mathbf{v}|$ i \mathbf{a}_N té en compte el canvi en la direcció del vector velocitat \mathbf{v} :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad a_N = \frac{v^2}{r}$$

en què r és el *radi de curvatura* de la trajectòria de la partícula en cadascun dels seus punts. Es compleix:

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

• Moviments rectilinis

Un moviment rectilini es caracteritza perquè la trajectòria és una línia recta, i l'espai recorregut coincideix amb el mòdul del vector desplaçament. A més, el radi de curvatura és infinit i no té acceleració normal.

En un *moviment rectilini uniforme*, la velocitat és constant i, per tant, l'acceleració és nul·la. Si el moviment té lloc al llarg de l'eix X , es compleixen les relacions:

$$a(t) = 0 \quad v(t) = v = \text{cte.} \quad x(t) = x_0 + vt$$

En un *moviment rectilini uniformement accelerat* l'acceleració és constant i es compleix:

$$a(t) = a = \text{cte.} \quad v(t) = v_0 + at \quad x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

• Moviments circulars

Un moviment circular és un moviment pla en el qual la trajectòria és una circumferència de radi R . L'espai recorregut s pot posar-se en funció de l'angle θ en la forma:

$$\theta = s/R$$

La *velocitat angular* ω és la variació de θ amb el temps t :

$$\omega = d\theta/dt$$

Es verifica la relació:

$$\omega = v/R$$

L'acceleració *angular* α és la variació de la velocitat angular ω amb el temps t :

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$$

Es compleix:

$$\alpha = a_T/R$$

Pot assignar-se un vector $\boldsymbol{\omega}$ a la velocitat angular ω i un altre $\boldsymbol{\alpha}$ a l'acceleració angular α . En tots dos casos els vectors són perpendiculars a la trajectòria circular de la partícula i es compleixen les relacions:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

en què \mathbf{r} és el vector que va des del centre de la circumferència a la posició de la partícula.

En un *moviment circular uniforme* l'acceleració angular és nul·la i la velocitat angular és constant. Això implica que no hi ha acceleració tangencial (el mòdul de \mathbf{v} també és constant) i que l'acceleració normal és constant en ser-ho v i el radi R . Esverifiquen les relacions:

$$\alpha(t) = 0 \quad \omega(t) = \omega = \text{cte.} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

En un *moviment circular uniformement accelerat*, l'acceleració angular és constant. L'acceleració tangencial és constant, però no ho és l'acceleració normal. Es compleix:

$$\alpha(t) = \alpha = \text{cte.} \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

• Composició de moviments. Tir parabòlic

Un altre exemple de moviment pla és el *moviment d'un projectil* que es llança amb velocitat constant v_0 , forma un angle α amb l'eix X i es veu afectat per l'acceleració de la gravetat g al llarg de l'eix Y . La trajectòria és una paràbola i el moviment és la superposició d'un moviment rectilini uniforme en l'eix X i un moviment rectilini uniformement desaccelerat en l'eix Y . El temps de vol, t , l'altura màxima, h , i l'abast, d , són:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

l'equació de la trajectòria, $y(x)$, és:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 2.- DINÀMICA

• Introducció

La dinàmica és la part de la mecànica que estudia la relació entre el moviment i les causes que el produeixen, és a dir, les forces. El moviment d'un cos és un resultat directe de les seues interaccions amb els altres cossos que l'envolten i aquestes interaccions es descriuen convenientment mitjançant el concepte de força. La massa d'un cos és una mesura de la resistència de l'objecte a canviar de velocitat.

• Lleis de Newton

Les lleis de Newton són lleis fonamentals de la natura i constitueixen la base de la mecànica.

Primera llei de Newton (Llei de la inèrcia): Si un cos en un sistema inercial no està sotmès a l'acció de cap força, o es troba en repòs o bé té moviment rectilini i uniforme.

Segona llei de Newton (equació fonamental de la dinàmica): La força neta que actua sobre un cos F és la causa de la seua acceleració a :

$$F = ma$$

Tercera llei de Newton (principi d'acció i reacció): Si un cos A exerceix una força F_{AB} (acció) sobre un cos B, llavors el cos B exerceix sobre A una força F_{BA} (reacció) de la mateixa intensitat i direcció, però de sentit contrari:

$$F_{AB} = - F_{BA}$$

Les forces d'acció reacció actuen en cossos diferents. Les lleis de Newton només són vàlides en un sistema de referència inercial, és a dir, un sistema de referència per al qual un objecte en repòs roman en repòs si no hi ha força neta que hi actue a sobre. Qualsevol sistema de referència que es moga amb velocitat constant relativa a un sistema inercial és també un sistema de referència inercial. Un sistema lligat a la Terra és aproximadament un sistema de referència inercial.

• Força deguda a la gravetat. Pes

La llei de la gravitació universal va ser enunciada per Newton i permet obtenir la força amb la qual s'atrauen dos cossos de masses m_1 i m_2 separats per una distància r :

$$F_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

en què $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ és la constant de la gravitació universal i \mathbf{u}_r és el vector unitari en la direcció del vector \mathbf{r} que uneix les dues masses. La força gravitatòria sempre és atractiva. La massa caracteritza dues propietats diferents d'un objecte, la seua resistència a canviar de velocitat (massa inercial) i la seua interacció gravitatòria amb altres objectes (massa gravitatòria). Els experiments demostren que totes dues són proporcionals i amb l'elecció del sistema d'unitats realitzada, les dues són iguals. Si suposem la Terra esfèrica de ràdio R i massa M , un cos de massa m situada sobre la superfície terrestre serà atret per una força $F = GMm/R^2$, i, segons la segona llei de Newton, aquesta massa està sotmesa a una acceleració g :

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

que és l'acceleració de la gravetat. El *pes* \mathbf{P} d'un cos és la força exercida per la Terra sobre el cos:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

• Aplicació de les lleis de Newton a la resolució de problemes

El procediment per a resoldre un problema de mecànica és:

(i) Fer un dibuix del sistema i identificar l'objecte (o objectes) als

quals s'aplicarà la segona llei de Newton. En el dibuix usarem vectors que representen les forces que hi apareixen.

(ii) Dibuixar un diagrama puntual que incloga els eixos de coordenades per a descompondre els vectors en els seus components. Aquests diagrames han d'estar dibuixats de manera que els càlculs següents se simplifiquen. Normalment, això s'aconsegueix posant tants eixos com siga possible al llarg de les direccions de les forces, o situant un eix en la direcció de l'acceleració, si aquesta direcció és coneguda.

(iii) Usant el diagrama puntual, escriure les components de la segona llei de Newton en funció de les quantitats conegudes i desconegudes, i resoldre aquestes equacions per a cadascuna de les quantitats desconegudes en funció de les conegudes. Finalment, substituir els valors numèrics de les quantitats conegudes (incloent-hi les seues unitats) i calcular cadascuna de les desconegudes.

• Moment lineal i moment angular

El *moment lineal* o quantitat de moviment \mathbf{p} d'una partícula de massa m que es mou amb una velocitat \mathbf{v} és:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Tenint en compte la relació $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, la segona llei de Newton es pot escriure:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

La *lleï de conservació del moment lineal* indica que en tot sistema aïllat, és a dir, no sotmès a forces externes, el moment lineal es conserva.

L'*impuls mecànic* d'una força \mathbf{J} es defineix com:

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

El canvi en la quantitat de moviment d'un objecte induït per una única força impulsora aplicada a l'objecte està donat per:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{J}$$

El *moment angular* \mathbf{L} d'una partícula de massa m respecte d'un punt O és:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

en què \mathbf{r} és el vector amb origen en el punt O i final en la posició de la partícula, i $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ és el moment lineal de la partícula. També es pot escriure:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

que indica que \mathbf{L} és perpendicular al vector velocitat. Derivant l'equació $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ respecte del temps, s'obté:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

és a dir, la variació del moment angular d'una partícula és igual al moment de la força total que actua sobre la partícula.

La *lleï de conservació del moment angular* assenyala que si el moment de la força total que actua sobre una partícula és nul ($\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$), el moment angular roman constant:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = cte.$$

Si el moment angular roman constant, la trajectòria de la partícula està confinada en un pla.

Perquè es complisca $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$ és necessari que:

(i) $\mathbf{F} = 0$ (partícula lliure)

(ii) \mathbf{F} i \mathbf{r} siguen dos vectors paral·lels (força central).

Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 3.- TREBALL I ENERGIA

• Introducció

El treball i l'energia es troben entre els conceptes més importants de la física, i també en la nostra vida diària. En física, una força realitza treball quan actua sobre un objecte que es mou a través d'una distància i existeix una component de la força al llarg de la línia del moviment. Íntimament associat al concepte de treball apareix el concepte d'energia. Quan un sistema realitza treball sobre un altre, es transfereix energia entre els dos sistemes. Hi ha moltes formes d'energia. L'energia cinètica està associada al moviment d'un cos. L'energia potencial és energia associada amb la configuració d'un sistema, tal com la distància de separació entre un cos i la Terra. L'energia tèrmica està associada al moviment aleatori de les molècules dins d'un sistema i està íntimament relacionada amb la temperatura. Una de les lleis fonamentals de la natura és la llei de la conservació de l'energia. Si l'energia d'un sistema es conserva, la seua energia total no canvia, encara que alguna part d'aquesta energia pot ser que canvie de forma o naturalesa.

• Treball y potència

El treball W fet per una força \mathbf{F} que actua sobre un cos mentre que aquest es mou seguint una trajectòria, està definit per la integral:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

En el cas senzill d'una força constant i un desplaçament $\Delta \mathbf{r}$ en línia recta, el treball està donat pel producte escalar:

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

Per a una força variable en una dimensió (per exemple, al llarg de l'eix X):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) \cdot dx$$

La unitat en el SI del treball és el joule (J).

La potència P és la rapidesa amb què una força fa un treball:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

La potència d'una força \mathbf{F} fent un treball sobre un objecte amb velocitat \mathbf{v} és:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

En el SI la potència es mesura en watts (W).

• Energia cinètica. Teorema de l'energia cinètica

L'energia cinètica E_c d'un cos de massa m que es mou amb velocitat v és:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

L'energia cinètica és l'energia associada amb el moviment. El teorema de l'energia cinètica estableix que el treball fet per la força resultant que actua sobre un cos és igual al canvi en l'energia cinètica del cos:

$$W = \frac{1}{2} m v_{final}^2 - \frac{1}{2} m v_{inicial}^2 = E_{c,final} - E_{c,inicial}$$

és a dir:

$$W = \Delta E_c$$

• Fuerzas conservativas y energía potencial

Una força és *conservativa* si el treball que fa al llarg d'una trajectòria tancada és nul. També es diu que el treball és independent del camí seguit i depèn únicament de l'estat inicial i final.

El treball fet pel pes d'un cos prop de la superfície de la Terra és:

$$W = -mg(y_2 - y_1)$$

i és independent de la trajectòria que connecta els punts inicial i final. Aquesta força és conservativa.

L'energia potencial E_p és una energia que depèn només de la posició. Dos exemples d'energia potencial són l'energia potencial gravitatòria:

$$E_p = mgy$$

i l'energia elàstica de compressió o elongació d'una molla:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Per a una força conservativa, el treball W i l'energia potencial E_p estan relacionats mitjançant l'equació:

$$W = -\Delta E_p$$

i la força \mathbf{F} i l'energia potencial E_p estan relacionades mitjançant l'equació:

$$\mathbf{F} = -\text{grad} E_p = \nabla E_p$$

que en el cas unidimensional s'escriu:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

El moviment d'un objecte es pot representar mitjançant una gràfica de l'energia potencial. Sobre aquesta gràfica es poden identificar els punts d'equilibri.

• Conservació de l'energia mecànica

La suma de les energies cinètica i potencial d'un sistema es denomina *energia mecànica* E :

$$E = E_c + E_p$$

Si no hi ha forces externes que fan treball sobre el sistema i totes les forces internes són conservatives, l'energia mecànica total del sistema roman constant:

$$E = E_c + E_p = \text{cte.}$$

és a dir, entre dos estats inicial 1 i final 2:

$$E_{c,1} + E_{p,1} = E_{c,2} + E_{p,2}$$

L'energia total del sistema E_{sist} és la suma dels seus diversos tipus d'energia. Una forma de transferir energia (absorbida o cedida) d'un sistema és intercanviar treball amb l'exterior. Si aquesta és l'única font d'energia transferida, la llei de conservació de l'energia s'expressa:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist}$$

W_{ext} és el treball fet sobre el sistema per les forces externes i ΔE_{sist} és la variació de l'energia total del sistema. Aquest és el teorema treball-energia.

Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 4.- CALOR I TEMPERATURA

• Introducció

Se sol dir que la temperatura és una mesura del grau de calor o fred dels cossos, però aquesta definició no és vàlida des del punt de físic. Quan un cos s'escalfa o es refreda, canvien algunes de les seues propietats físiques: La majoria dels sòlids i líquids es dilaten quan s'escalfen, si s'escalfa un conductor elèctric varia la seua resistència, etc. Una propietat física que varia amb la temperatura es denomina *propietat termomètrica* i un canvi d'aquesta propietat indica que s'ha modificat la *temperatura* de l'objecte.

• Equilibri tèrmic i principi zero de la termodinàmica

Dos sistemes en contacte estan *en equilibri tèrmic* quan les seues propietats ja no canvien amb el temps. Perquè dos sistemes estiguen en contacte han d'estar separats per una *paret diatèrmica* que facilite la seua interacció tèrmica. Una *paret adiabàtica* no permet aquesta interacció: cada sistema està aïllat de l'altre i cadascun pot romandre en el seu estat d'equilibri. El *principi zero de la termodinàmica* estableix que dos sistemes que estan en equilibri tèrmic amb un tercer ho estan també entre si. El concepte de temperatura està relacionat amb l'estat d'equilibri tèrmic de dos sistemes, ja que estaran en equilibri tèrmic si tenen la mateixa temperatura.

• Termòmetres i l'escala de temperatures del gas ideal

Per a establir una escala de temperatura s'usa una *propietat termomètrica*. Els termòmetres de gas tenen la propietat que tots concorden entre si en el mesurament de qualsevol temperatura sempre que la densitat del gas utilitzat en el termòmetre siga molt baixa. La temperatura del gas ideal es defineix mitjançant un límit amb gasos reals diluïts en un *termòmetre de gas a volum constant*. L'escala de temperatures s'ajusta assignant al punt triple de l'aigua la temperatura 273.16 K. En aquest estat coincideixen el punt de fusió, el punt d'ebullició i el punt de sublimació, i té lloc a una pressió de vapor de 610 Pa i a una temperatura de 0.01° C. Es defineix la temperatura del gas ideal mitjançant:

$$T = 273.16 K \frac{p}{p_3}$$

en què p és la pressió del gas en el termòmetre quan està en equilibri tèrmic amb el sistema del qual es vol mesurar la temperatura i p_3 és la pressió quan el termòmetre està en un bany d'aigua-gel-vapor al punt triple.

• Llei dels gasos ideals

L'equació dels gasos ideals és:

$$pV = nRT$$

en què p és la pressió, V el volum, n el nombre de mols, T la temperatura absoluta i R la constant dels gasos ideals, el valor numèric dels quals depèn de les unitats de la resta de magnituds físiques que apareixen en l'equació. En unitats del SI amb p en Pa, V en m³, n en mol i T en K:

$$R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Si p s'expressa en atmosferes (atm) i V en litres (l)

$$R = 0.082 \text{ l atm mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

• Dilatació tèrmica

La majoria de les substàncies s'expandeixen o es dilaten quan augmenten la temperatura i es contrauen quan aquesta disminueix.

(i) *Dilatació lineal*: El canvi ΔL de la longitud L_0 d'un objecte quan canvia la temperatura en ΔT és:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

En què α és el coeficient de dilatació lineal de la substància.

(ii) *Dilatació superficial*: El canvi ΔS de la superfície S_0 d'un objecte quan canvia la temperatura en ΔT ve donat per:

$$\Delta S = \gamma S_0 \Delta T$$

en què γ és el coeficient de dilatació superficial de la substància. Per a una substància isotropa es compleix que $\gamma = 2\alpha$.

(iii) *Dilatació cúbica*: El canvi ΔV del volum V_0 d'un objecte quan canvie la temperatura en ΔT és:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

en què β és el coeficient de dilatació cúbica o d'expansió de volum. Per a una substància isotropa es compleix que $\beta = 3\alpha$. L'aigua presenta una expansió tèrmica anòmala entre 0°C i 4°C, ja que es contrau quan augmenta la temperatura.

• Quantitat de calor: capacitat calorífica i calor específica

Si es fica una cullereta freda en una tassa de cafè calent, la cullera s'escalfa i el cafè es refreda per a acostar-se a l'equilibri tèrmic. La interacció que causa aquests canvis en la temperatura és bàsicament una transferència d'energia d'una substància a una altra. La transferència d'energia que es dona exclusivament per una diferència de temperatura es diu *flux de calor* o *transferència de calor*, i de l'energia transferida se'n diu *calor*. Usem el símbol Q per a la quantitat de calor.

La **caloria** és la quantitat de calor necessària per a elevar la temperatura d'1 g d'aigua de 14.5°C a 15.5°C. La relació entre el joule i la caloria és: 1 cal = 4.186 J.

La quantitat de calor dQ subministrada a un sistema de massa m i el canvi de temperatura produït dT estan relacionats, a través de la *calor específica* c que depèn del material:

$$dQ = mc dT \quad c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

La quantitat de calor Q necessària per a elevar la temperatura d'una massa m de cert material de T_1 a T_2 és aproximadament proporcional al canvi de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ i a la massa m del material

$$Q = mc\Delta T$$

Si es coneix el nombre de mols n es parla de *capacitat calorífica molar* C :

$$dQ = nC dT \quad C = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$$

en què $n = m/M$, i M és la massa molecular. Es pot escriure:

$$Q = nC\Delta T$$

Per als sòlids s'acostuma a treballar amb calors específiques i capacitats calorífiques molars a pressió constant (c_p i C_p), mentre que per als gasos se sol usar a volum constant (c_V i C_V).

• Calorimetria, canvis de fase i calor latent

La calor necessària per a fondre una substància sòlida és:

$$Q_f = mL_f$$

en què L_f és la *calor latent de fusió*. Per a l'aigua a pressió atmosfèrica $L_f = 333.5 \text{ kJ/kg} = 80 \text{ cal/g}$. La calor necessària per a vaporitzar un líquid és:

$$Q_v = mL_v$$

en què L_v és la *calor latent de vaporització*. Per a l'aigua a pressió atmosfèrica $L_f = 2257 \text{ kJ/kg} = 540 \text{ cal/g}$. En igualtat de condicions, tot canvi de fase es produeix a una temperatura determinada, i mentre s'està produint un canvi de fase no varia la temperatura del sistema.

• Propagació de la calor per conducció

La calor Q és l'energia transferida entre un sistema i el seu entorn, a causa únicament d'una diferència de temperatura entre aquest sistema i alguna part del seu entorn. El flux de calor persisteix fins que s'igualen les temperatures. En el procés de propagació de la calor per *conducció*, la calor es transmet entre dos sistemes a través d'un medi d'acoblament. Si el medi que separa els sistemes que estan a temperatures T_1 i T_2 té longitud L i secció S , en l'estat estacionari (T ja no canvia amb el temps) la calor que passa a través d'una secció transversal per unitat de temps (corrent tèrmic, $H = Q/t$) és:

$$H = kS \frac{T_2 - T_1}{L}$$

en què k és la *conductivitat tèrmica* del medi. Es defineix la *resistència tèrmica* del medi, R , com:

$$R = \frac{L}{kS}$$

i $H = \Delta T/R$. Per a una paret composta en l'estat estacionari, la seua resistència tèrmica equivalent és la suma de les resistències tèrmiques de les parets components si tenen la mateixa superfície.

El corrent tèrmic H per a condicions no estacionàries i per a diverses geometries es calcula com:

$$H = -kS \frac{dT}{dx}$$

que es coneix com a *lleï de Fourier*. dT/dx és el gradient de temperatura i H és el corrent de calor instantània a través d'un element d'àrea S . El signe negatiu indica que la calor flueix des de les temperatures altes a les baixes.

• Propagació de la calor per convecció i radiació

En la propagació per *convecció* hi ha transferència de calor d'un lloc a un altre per un moviment real de la substància calenta que dóna lloc a corrents de convecció macroscòpiques, que poden aparèixer en fluids en el camp gravitatori amb una densitat que varia amb la temperatura (convecció natural). La convecció es pot forçar també amb l'ús de ventiladors.

En la calor transferida per *radiació*, la potència radiada P per una superfície ve donada per la lleï de Stefan-Boltzmann:

$$P = e\sigma ST^4$$

en què e és l'emissivitat i $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ és la constant de Stefan-Boltzmann. Tots els objectes emeten energia des de les seues superfícies quan estan calentes i la radiació tèrmica és un tipus de radiació electromagnètica.

En tots els mecanismes de propagació de la calor, si la diferència de temperatura entre el cos i el seu entorn és petita, la velocitat de refredament del cos és aproximadament proporcional a la diferència de temperatura (*lleï de refredament de Newton*).

Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 5.- TERMODINÀMICA

• Treball

El treball és una transferència d'energia entre un sistema i el seu entorn deguda al moviment d'alguna part de l'entorn. El treball realitzat per un fluid sobre el seu entorn és:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

El treball realitzat per un sistema és positiu quan es transfereix energia des del sistema a l'exterior (entorn).

Treball en sistemes gasosos (processos reversibles):

(a) *Procés isocor* (volum constant, $dV = 0$): $W = 0$.

(b) *Procés isobàric* (pressió constant, $dp = 0$):

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$$

(c) *Procés isoterm* (temperatura constant, $dT = 0$), per a un gas ideal $pV = nRT$ i si T és constant $p_1V_1 = p_2V_2$:

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

(d) *Procés adiabàtic* ($Q = 0$), per a un gas ideal $pV^\gamma = ct.$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad pV^\gamma = p_1V_1^\gamma \Rightarrow p = \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{p_1V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(V_1/V_2 \right)^{\gamma-1} \right]$$

• Funcions d'estat i equacions d'estat

Les *variables d'estat* p, V, T i n per a una substància estan lligades entre si a través d'una equació matemàtica que es denomina *equació d'estat*. Per exemple, per a un gas ideal:

$$pV = nRT$$

en què $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} = 2 \text{ cal}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ es la constant universal de los gases. Un estat d'equilibri d'un sistema es pot representar mitjançant un punt en el diagrama p - V . Els *processos quasiestàtics* són aquells en què el sistema passa a través d'una successió d'estats d'equilibri, i es poden representar mitjançant corbes en un diagrama p - V .

• Primer principi de la Termodinàmica. Energia interna

La relació entre l'energia transferida entre un sistema i el seu entorn i el canvi d'energia interna O del sistema és:

$$\Delta U = Q - W$$

La calor Q cedida al sistema i el treball W que aquest fa depenen dels detalls del procés; no obstant això, l'energia interna és una funció d'estat: el canvi d'energia interna $\Delta U = U_f - U_i$ depèn només dels estats inicial (i) i final (f), i no del procés realitzat per a anar de l'un a l'altre. En l'equació del primer principi el conveni de signes és el següent: $Q > 0$ si se cedeix calor al sistema des de l'exterior i $W > 0$ si el sistema realitza treball sobre l'exterior.

• Algunes aplicacions del primer principi

(a) *Procés isocor* ($V = ct.$): el treball és nul ($W = 0$), i aplicant el primer principi:

$$\Delta U = Q - W = Q$$

(b) *Procés isobàric* ($p = ct.$): Es poden donar tots dos tipus de transferència d'energia entre el sistema i el seu entorn, calor Q i treball W .

(c) *Procés adiabàtic* ($Q = 0$): $\Delta U = Q - W = -W$

(d) *Procés isotèrmic* ($T = ct.$): un exemple de procés isotèrmic és una canvi de fase.

(i) *Expansió lliure d'un gas ideal*: Si es té un recipient amb dos atuells, en un dels quals hi ha un gas ideal i en l'altre s'ha fet el buit. Les dues cambres estan separades i el recipient aïllat de l'exterior. S'obri la clau de pas entre els dos atuells i el gas s'expandeix lliurement fins que s'igualen les pressions dels dos recipients. En l'expansió lliure s'observa que no canvia la temperatura del gas i, per tant $Q = 0$. El sistema tampoc fa treball sobre el seu entorn $W = 0$; per tant, l'energia interna no canvia $\Delta U = 0$. Com que la pressió i el volum del gas han canviat, U no és funció ni de p ni de V , però com que la temperatura roman constant, es pot concloure que *l'energia interna d'un gas ideal depèn només de la temperatura, $U(T)$* . Com a volum constant tenim $dU = dQ = nC_vdT$ i U només depèn de T , a pressió constant també serà $dU = nC_vdT$.

(f) *Procés cíclic*: Els estats inicial i final coincideixen. Com que O és una funció d'estat, en un cicle $\Delta U = 0$.

• Capacitats calorífiques dels gasos

Capacitats calorífiques per a un gas ideal monoatòmic:

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$$

Capacitats calorífiques per a un gas ideal diatòmic:

$$C_V = \frac{5}{2}R \quad C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$$

L'equació:

$$C_p - C_V = R$$

rep el nom de *relació de Meyer*. Un gas ideal que realitza un *procés adiabàtic* quasiestàtic experimenta canvis de pressió i volum que satisfan l'equació:

$$pV^\gamma = ct.$$

amb $\gamma = C_p/C_V$. Per a gasos ideals monoatòmics $\gamma = 5/3 = 1.67$, i per a gasos ideals diatòmics $\gamma = 7/5 = 1.40$.

• Màquines tèrmiques i segon principi de la Termodinàmica

Segons l'expressió de *Kelvin-Planck* del segon principi de la termodinàmica, no és possible un cicle en el qual s'extraiga calor d'un focus a una única temperatura i es convertisca completament en treball.

• Rendiment de les màquines tèrmiques i frigorífiques

Si una màquina tèrmica extrau calor Q_C d'un focus calent, realitza un treball W i cedeix calor Q_F a un focus fred, el seu rendiment η és:

$$\eta = \frac{W}{Q_C} = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = \frac{Q_C - |Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C}$$

El rendiment d'una màquina frigorífica és:

$$\eta = \frac{Q_F}{|W|}$$

1. Una expansió isoterma quasiestàtica que absorbeix calor del focus calent a temperatura T_C .
2. Una expansió adiabàtica quasiestàtica fins a una temperatura més baixa T_F .
3. Una compressió isoterma quasiestàtica que cedeix calor a un focus fred a temperatura T_F .
4. Una compressió adiabàtica quasiestàtica fins a l'estat original (temperatura T_C).

El rendiment del cicle de Carnot és:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

és el límit superior del rendiment de les màquines reals que operen entre aquestes dues temperatures. Segons el *teorema de Carnot*, totes les màquines tèrmiques reversibles que operen entre dues temperatures, T_C i T_F , tenen el mateix rendiment i no hi ha cap màquina que opere entre aquestes temperatures amb rendiment superior a aquesta.

• Temperatura termodinàmica

El quocient entre les temperatures absolutes de dos focus ve definit pel quocient entre les calors que aquests cedeixen i absorbeixen quan una màquina efectua un cicle de Carnot entre aquests focus:

$$\frac{T_F}{T_C} = \frac{|Q_F|}{Q_C}$$

La temperatura termodinàmica T d'un sistema ve definida com:

$$T = 273.16 \frac{|Q|}{|Q_3|} \text{ K}$$

en què Q i Q_3 són els intercanvis de calor que tenen lloc en un cicle de Carnot que opera entre el sistema i aigua en el seu punt triple.

• Entropia

L'entropia és una variable d'estat. La diferència d'entropia entre dos estats pròxims ve donada per:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$

en què dQ_{rev} és la calor lliurada al sistema en un procés reversible que connecte aquests estats. La variació d'entropia d'un sistema pot ser positiva o negativa. La diferència d'entropia entre dos estats d'un sistema ve donada per:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

en què la integral és vàlida per a qualsevol procés reversible que connecte els dos estats. L'entropia és una mesura del desordre d'un sistema.

• Càlcul de variacions d'entropia en diversos processos

Quan un sistema experimenta un procés, el canvi d'entropia només depèn dels estats inicial i final, ja que és una funció d'estat. Així, en un procés real, siga reversible o irreversible, per a calcular l'entropia s'utilitza un procés reversible que connecte els estats inicial i final, tenint en compte que el procés reversible només s'utilitza per al càlcul.

(i) *Canvi de fase*: Per exemple, per a la fusió d'un sòlid com el gel, el procés és irreversible, però imaginem un procés reversible que consistisca a utilitzar un focus amb una

temperatura insignificantment més elevada que la del sòlid, cedint calor de forma reversible en el punt de fusió del gel. La calor absorbida pel gel és $Q_f = mL_f$, i com que la temperatura no canvia:

$$\Delta S = S_{liq} - S_{sól} = \int_i^f \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ_{rev} = \frac{Q_{rev}}{T} = \frac{mL_f}{T}$$

(ii) *Canvi de temperatura*: Per exemple, si s'escalfa aigua a pressió constant, s'usa un procés reversible amb focus amb temperatures insignificantment més altes que la de l'aigua::

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_p dT}{T} = mc_p \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = mc_p \ln \frac{T_f}{T_i}$$

(iii) *Canvi de volum*: Per exemple per a l'expansió lliure (procés irreversible) d'un gas ideal ($Q = 0$, $W = 0$, $\Delta U = 0$, $\Delta T = 0$), s'imagina un procés reversible isoterm entre dos estats (V_i, T) i (V_f, T). D'acord amb el primer principi:

$$dQ = dU + pdV = 0 + pdV = pdV$$

i com $pV = nRT$,

$$\frac{dQ}{T} = \frac{pdV}{T} = \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} = \frac{nRdV}{V}$$

$$\Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRdV}{V} = nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

• Entropia i segon principi

El canvi de l'entropia de l'univers és igual a la suma dels canvis d'entropia d'un sistema i del seu entorn. Segons l'expressió de l'entropia del segon principi, en qualsevol procés l'entropia de l'univers o augmenta (si el procés és irreversible) o roman constant (si el procés és reversible).

L'augment d'entropia d'un sistema aïllat en un procés irreversible està relacionat amb la pèrdua de l'oportunitat que aquest sistema té per a fer treball ($W_{perdut} = T\Delta S$). Els processos irreversibles passen d'estats més ordenats a estats més desordenats. L'entropia està relacionada amb la probabilitat: un sistema altament ordenat té una baixa probabilitat i baixa entropia.

Funaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 6.- CAMP ELÈCTRIC

• Introducció

Les primeres observacions de l'atracció elèctrica van ser fetes pels grecs antics. Aquests van observar que si es fregava l'ambre, aquest atraïa petits objectes com brins o plomes. Certament, la paraula *elèctric* procedeix del vocable grec assignat a l'ambre, *elektron*.

Naturalesa elèctrica de la matèria. Càrrega elèctrica

La càrrega elèctrica és una propietat fonamental de la matèria. Hi ha dos tipus de càrrega: positiva i negativa. Dos cossos amb el mateix tipus de càrrega es repel·leixen, mentre que si tenen diferent tipus de càrrega, s'atrauen entre si.

Quantització i conservació de la càrrega elèctrica

La càrrega elèctrica apareix sempre com a múltiple d'una càrrega fonamental o quàntum elèctric, el valor del qual és:

$$e = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C}$$

que és la càrrega de l'electró, en valor absolut.

En tots els processos observats en la natura, la càrrega neta o total d'un sistema aïllat roman constant.

• Llei de Coulomb: Força elèctrica entre càrregues puntuals

La llei de Coulomb expressa la força elèctrica \mathbf{F} que exerceix una càrrega puntual q sobre una altra càrrega puntual q' :

$$\mathbf{F} = K \frac{qq'}{r^2} \mathbf{u}_r$$

en què \mathbf{r} és el vector que amb origen en q i final en q' i $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$. K és la constant:

$$K = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ N C}^{-2} \text{ m}^2$$

Aquesta força és de tipus invers del quadrat de la distància, és atractiva entre càrregues de signe diferent i repulsiva entre càrregues del mateix signe.

• Campo elèctric

Camp elèctric d'una càrrega puntual

Hi ha un camp elèctric en qualsevol regió en què una càrrega elèctrica experimenta una força, la qual es deu a la presència d'altres càrregues en aquesta regió. El camp elèctric \mathbf{E} produït per una distribució de càrrega és la força \mathbf{F} exercida per la distribució sobre una partícula de prova dividida pel valor de la càrrega q de la partícula de prova:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Per a una càrrega puntual:

$$\mathbf{E} = K \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r$$

en què \mathbf{u}_r és un vector unitari que va de la càrrega q al punt on s'avalua el camp \mathbf{E} .

Principi de superposició

Per a calcular el camp elèctric creat per un sistema de càrregues puntuals se sumen els camps elèctrics que crearien cadascuna de les càrregues del sistema per separat.

Línies del camp elèctric

Les característiques espacials d'un camp elèctric poden il·lustrar-se amb línies de força o línies de camp elèctric, que són tangents en cada punt a la direcció de \mathbf{E} en aquest punt.

Les línies de camp elèctric parteixen de les càrregues positives i

van a parar a les càrregues negatives. Un camp uniforme té la mateixa intensitat, direcció i sentit en tots els punts de l'espai i es representa per línies de camp rectilínies, paral·leles i equidistants.

Camp elèctric creat per una distribució contínua de càrrega

Per a una distribució contínua de càrrega (en volum, superfície o línia) el camp elèctric es calcula mitjançant

$$\mathbf{E} = K \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Com a exemple d'aplicació es pot obtenir el camp creat per un anell i per un disc en punts dels seus eixos o el camp creat per un segment rectilini en punts de la seua mediatriu.

Movimiento de cargas en un campo eléctrico

Moviment de càrregues en un camp elèctric

Si la força elèctrica és l'única que afecta una partícula de massa m i càrrega q , la segona llei de Newton dona per a l'acceleració $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$. Quan una partícula es mou en un camp elèctric uniforme, el seu moviment és descrit per la cinemàtica del moviment sota acceleració constant. Particular té interès estudiar el moviment d'una càrrega que entra en una regió en què hi ha un camp elèctric uniforme perpendicular al vector velocitat de la càrrega.

• Energia potencial elèctrica i potencial elèctric

La força elèctrica entre dues càrregues està dirigida al llarg de la línia que uneix les dues càrregues i depèn de la inversa del quadrat de la seua separació, el mateix que la força gravitatòria entre dues masses. Com la força gravitatòria, la força elèctrica és conservativa. Hi ha, per tant, una funció energia potencial associada amb la força elèctrica. Si se situa una càrrega de prova en un camp elèctric, la seua energia potencial és proporcional a aquesta càrrega. L'energia potencial per unitat de càrrega és una funció de la posició en l'espai de la càrrega i es denomina potencial elèctric.

La força elèctrica és conservativa. L'energia *potencial* d'una partícula de prova en el camp creat per diverses partícules fixes q_i està donada per:

$$E_p = Kq \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(prenent l'origen d'energies potencials en l'infinit).

El *potencial elèctric* d'una càrrega q es defineix com:

$$V = \frac{E_p}{q} \quad E_p = qV$$

En el SI, el potencial s'expressa en volts (V):

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

Potencial elèctric d'una càrrega puntual

Per a una càrrega puntual (amb origen de potencials en l'infinit):

$$V = K \frac{q}{r}$$

Per a un sistema de partícules carregades (amb origen de potencials en l'infinit):

$$V = K \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Potencial elèctric d'una distribució contínua de càrrega

Per a una distribució contínua de càrrega:

$$V = K \int \frac{dq}{r}$$

Aplicant aquesta equació es pot calcular el potencial, per exemple, d'un anell carregat en el seu eix.

Diferència de potencial

La diferència de potencial ΔV entre dos punts 1 i 2 està relacionada amb el treball W fet pel camp elèctric

$$W = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = q(V_1 - V_2) = -q\Delta V$$

Tenim:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

La diferència de potencial $V_1 - V_2$ és el valor negatiu del treball per unitat de càrrega fet pel camp elèctric sobre una càrrega de prova positiva quan aquesta es desplaça del punt 1 al punt 2. La diferència de potencial ΔV és també el treball positiu per unitat de càrrega que cal fer contra el camp elèctric per a desplaçar la càrrega d'1 a 2.

• Relació entre el potencial elèctric i el camp elèctric

Es compleix aquesta relació entre el camp elèctric \mathbf{I} i el potencial elèctric V :

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Les línies del camp elèctric assenyalen el sentit en el qual disminueix el potencial. Si es coneix l'expressió de \mathbf{E} , es pot obtenir el potencial V en un punt P per mitjà de la integral de línia $d\mathbf{E}$:

$$V = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Si es coneix V , el camp \mathbf{E} es pot determinar per mitjà del gradient de V :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

Si el camp elèctric és constant en direcció (per exemple, la de l'eix X):

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Si el potencial només depèn del mòdul de r (és a dir, de r):

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

Superfícies equipotencials

Les superfícies que tenen el mateix potencial elèctric en els seus punts, és a dir, $V = \text{constant}$, es coneixen com a *superfícies equipotencials*. Les línies de camp són perpendiculars a les superfícies equipotencials. Per a una càrrega puntual les superfícies equipotencials són superfícies esfèriques concèntriques amb la càrrega.

• Flux del camp elèctric. Llei de Gauss

Es defineix el flux del camp elèctric a través d'una superfície S com la integral de superfície del vector camp elèctric estesa a tota la superfície:

$$\Phi_E = \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

Quan es calcula el flux a través d'una superfície tancada, a aquesta se la denomina *superfície gaussiana*. Les línies de camp poden ser utilitzades per a visualitzar el flux a través de la superfície. El flux total pot ser positiu, negatiu o zero. Quan és positiu, el flux és ixent i quan és negatiu, és entrant.

La *llei de Gauss* estableix que el flux elèctric a través d'una superfície tancada és igual a la càrrega elèctrica neta tancada dins de la superfície dividida per ϵ_0 :

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \int_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Càlcul del camp elèctric mitjançant la llei de Gauss

La llei de Gauss pot ser utilitzada per a calcular el camp elèctric produït per distribucions de càrrega que tinguen una alta simetria com a línies infinites, plans o esferes. El pas crucial d'aquest procés és la selecció de la superfície gaussiana.

• Propietats dels conductors

Experimentalment es comprova que determinades substàncies tenen la propietat de permetre el moviment de càrregues elèctriques a través seu, mentre que altres impedeixen aquest flux. Les primeres reben el nom de *conductors* i les del segon tipus *aïllants* o *dielèctrics*. Són conductors els metalls i els seus aliatges, les solucions aquoses d'àcids, bases i sals, etc. De tots aquests només es consideraran els conductors metàl·lics, els quals estan formats per ions positius que ocupen posicions fixes per a donar lloc a la xarxa cristal·lina i els electrons que s'han després dels àtoms metàl·lics circulen de manera lliure i desordenada a l'interior del conductor per a donar lloc a una espècie de "gas d'electrons" que és el responsable dels fenòmens de conducció elèctrica.

Propietats generals dels conductors en equilibri electrostàtic

- El camp elèctric a l'interior d'un conductor en equilibri electrostàtic és nul.
- La càrrega elèctrica neta d'un conductor en equilibri electrostàtic es troba sobre la seua superfície.
- El camp elèctric en la superfície d'un conductor en equilibri electrostàtic és normal a la superfície.
- La superfície d'un conductor en equilibri electrostàtic és una superfície equipotencial.

Camp elèctric en les proximitats d'un conductor en equilibri electrostàtic

El camp elèctric en punts molt pròxims a la superfície d'un conductor és perpendicular a la seua superfície i val:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

que es coneix com a *teorema de Coulomb*. Aquest és el camp creat per tota la càrrega del conductor i es pot considerar suma del camp creat per un petit disc d'àrea dS i el creat per la resta el conductor. El camp E_1 creat per un petit disc en punts pròxims és:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

així doncs, el camp E_2 creat per la resta de les càrregues superficials del conductor és llavors:

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

de manera que $E = E_1 + E_2$.

Conductors en un camp elèctric

Quan se situa un conductor en un camp elèctric s'ha d'anul·lar el camp en el seu interior perquè s'arribi a l'equilibri electrostàtic. Això dona lloc a una reordenació de les càrregues del conductor de manera que creen un camp elèctric a l'interior del conductor que compense el camp aplicat.

Ruptura dielèctrica i efecte de puntes

Molts materials no conductors s'ionitzen en camps elèctrics molt alts i es converteixen en conductors. Aquest fenomen es denomina *ruptura dielèctrica* i el límit dielèctric d'un aïllant és el valor màxim del camp elèctric, E_{max} , que pot haver-hi en aquest material sense que es produïska la seua ruptura dielèctrica. Aquest valor del camp també es coneix com a *resistència dielèctrica*. Quan ocorre la *ruptura dielèctrica*, les molècules del material s'ionitzen i el material comença a conduir. En un material gasós com l'aire $E_{max} \approx 3 \times 10^6$ V/m aquest efecte va

acompanyat d'una emissió lluminosa deguda a la recombinació dels electrons amb les molècules ionitzades, fenomen que es coneix com a *descàrrega en arc*.

Quan un conductor té forma no esfèrica, la seua superfície és equipotencial però la densitat superficial de càrrega i el camp elèctric justament en l'exterior del conductor varien d'un punt a un altre. El camp elèctric és més intens en els punts propers a les regions del conductor de menor radi de curvatura (*efecte de puntes*). Si el conductor té puntes de radi de curvatura molt petit, la ruptura del dielèctric que l'envolta pot produir-se amb potencials relativament baixos. Els parallamps extrauen la càrrega d'un núvol pròxim abans que el potencial del núvol arribe a un valor destructivament gran.

• Capacitat

Un conductor que té una càrrega Q i un potencial V , té una capacitat:

$$C = \frac{Q}{V}$$

• Condensadors

Un condensador és un dispositiu elèctric utilitzat en els circuits per a emmagatzemar càrrega i energia elèctrica. Està format per dues plaques conductores amb una diferència de potencial ΔV entre les dues. La capacitat d'un condensador és:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

En el SI, la capacitat es mesura en farads ($1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$). La capacitat depèn del disseny geomètric del condensador i de la naturalesa del dielèctric que hi ha entre les seues plaques o armadures. Per a un condensador de làmines planoparal·leles amb buit entre les plaques:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Condensadors en sèrie i en paral·lel

La capacitat equivalent d'un conjunt de condensadors connectats és la capacitat d'un únic condensador que, quan s'utilitza en lloc del conjunt, produeix el mateix efecte extern. La capacitat equivalent de diversos condensadors en **sèrie** és:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_i (1/C_i)}$$

Per a diversos condensadors en **paral·lel** la capacitat equivalent del sistema es calcula mitjançant l'equació:

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$$

• Energia electrostàtica

L'energia d'un condensador és l'energia potencial de les càrregues que hi ha en les seues plaques:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

Quan s'associa aquesta energia amb el camp elèctric, la **densitat d'energia** u_E en l'espai ocupat pel camp (en el buit) és:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

En un medi material n'hi ha prou de substituir ϵ_0 per ϵ . L'energia elèctrica total U en un volum \mathcal{V} es calcularà mitjançant la integral:

$$U = \int_{\mathcal{V}} u_E d\mathcal{V}$$

• Dielèctrics

Propietats electrostàtiques dels dielèctrics

Quan s'introdueix un dielèctric entre les armadures d'un condensador en què hi havia el buit entre les plaques, la capacitat augmenta de manera que:

$$C = \epsilon_r C_0$$

mentre que la diferència de potencial i el camp elèctric disminueixen:

$$V = V_0/\epsilon_r \quad E = E_0/\epsilon_r$$

Hi ha dielèctrics apolars i polars. En els primers, les seues molècules no tenen moment dipolar elèctric, mentre que en els segons, les molècules tenen un moment dipolar elèctric permanent.

Quan es col·loca un dielèctric apolar en un camp elèctric, els seus àtoms o molècules es converteixen en dipols elèctrics que s'orienten en la direcció del camp elèctric. Si el dielèctric és polar, els seus moments dipolars permanents s'orienten paral·lels al camp exterior.

Quan els dipols elèctrics d'una substància s'alineen de manera espontània (substàncies *ferroelèctriques*) o a causa de l'acció d'un camp elèctric extern, diem que la substància està *polaritzada*.

Un dielèctric polaritzat té càrregues sobre la seua superfície, i llevat que la polarització siga uniforme, també en el seu volum. Aquestes *càrregues de polarització*, però, estan congelades en el sentit que estan lligades als àtoms o molècules i no tenen llibertat de moviment en el dielèctric. En un conductor, les càrregues sí que són capaces de moure's amb llibertat i es denominen *càrregues lliures*.

Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 7.- CORRENT ELÈCTRIC

• Introducció

Un conductor és un material en el qual algunes de les partícules carregades es poden moure lliurement; aquestes partícules són els portadors de càrrega del conductor. Per exemple, podem pensar en un metall com una estructura de ions positius localitzats en posicions de xarxa fixes, i entre aquests es distribueixen els electrons lliures. La càrrega del conjunt dels electrons lliures és igual i oposada a la càrrega del conjunt dels ions, i en resulta un material neutre. Els electrons lliures es poden moure entre la xarxa de ions, i constitueixen els portadors de càrrega en el metall.

• Corriente y movimiento de cargas. Densidad de corriente

Un *corrent elèctric* consisteix en un flux de partícules carregades. La intensitat I del corrent elèctric caracteritza la càrrega que flueix a través d'un element de circuit:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El sentit del corrent correspon amb el sentit de la velocitat d'arrossegament \mathbf{v} dels portadors de càrrega positius. En el SI la intensitat I s'expressa en amperes (A). La *densitat de corrent* \mathbf{j} és el flux de càrrega en un punt interior d'un medi conductor:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$$

en què n és el nombre de portadors de càrrega per unitat de volum i \mathbf{v} és la velocitat de desplaçament o arrossegament dels portadors de càrrega que és constant, ja que els successius xocs dels portadors de càrrega en el metall amb els ions de la xarxa fan que la seua velocitat de desplaçament siga de mitjana constant. Si \mathbf{j} és uniforme, el seu mòdul j ve donat per::

$$j = \frac{I}{S}$$

i en el cas general:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Per conveni es pren com a sentit del corrent elèctric el dels portadors de càrrega positius. En el cas en el qual els portadors de càrrega siguen negatius, el sentit del corrent és contrari al sentit de moviment dels portadors de càrrega negatius.

• Llei d'Ohm. Conductivitat, resistivitat i resistència

Per a un conductor a temperatura constant, la llei d'Ohm estableix que el quocient entre la diferència de potencial V que hi ha entre dos punts d'un conductor i el corrent elèctric I que circula pel conductor és una constant coneguda com a *resistència elèctrica*, R :

$$\frac{V}{I} = R \quad \Rightarrow \quad V = RI$$

En aquest cas es diu que el conductor és òhmic. En el SI, la resistència R s'expressa en ohms (Ω).

Per a un conductor de longitud l i secció S , la llei d'Ohm es pot escriure en la forma:

$$j = \frac{l}{RS} E = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$$

en què $\sigma = 1/\rho$ és la *conductivitat* del material i ρ és la seua *resistivitat*. σ s'expressa en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Es compleix:

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

Per als metalls, la resistivitat augmenta quan augmenta la temperatura. La llei d'Ohm es pot escriure de forma general:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

i la velocitat d'arrossegament per als electrons s'escriu:

$$\mathbf{v} = -\frac{\sigma}{en} \mathbf{E}$$

• Resistències en sèrie i en paral·lel

Per a resistències connectades en sèrie, la resistència equivalent es calcula mitjançant:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

i per a resistències connectades en paral·lel:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

• Aspectes energètics del corrent elèctric. Llei de Joule

Per a mantenir un corrent elèctric és necessari un subministrament d'energia, ja que les càrregues han de ser accelerades pel camp elèctric. L'energia per unitat de temps o potència requerida per a mantenir un corrent s'obté com a $P = IV$. En el SI, la potència P s'expressa en watts (W). Per a conductors que obeeixen la llei d'Ohm $V = RI$, per tant:

$$P = IV = IR^2 I = \frac{V^2}{R} \quad (\text{ley de Joule})$$



Fonaments Físics de l'Enginyeria I

Tema 8.- PRINCIPIS FÍSICS DELS SEMICONDUCTORS

• Tipus de sòlids

Hi ha diferents tipus d'enllaços entre els àtoms, no obstant això, per a sistematitzar-ne l'estudi es recorre a dos tipus límits d'enllaç: (a) iònic (es forma entre un metall i un no metall) i (b) covalent (es forma entre no metalls). No hi ha substàncies radicalment iòniques o covalent, ja que aquests dos tipus són casos límits.

Des d'un punt de vista macroscòpic, un sòlid és una substància rígida o elàstica, és a dir, una substància que té un comportament elàstic sota la influència tant de forces hidrostàtiques com d'esforços i tensions.

Atenent a la seua estructura, es poden dividir els sòlids en amorfs i cristal·lins. També es poden classificar els sòlids atenent al tipus predominant d'enllaç entre els àtoms o ions que constitueixen els cristalls. Hi podem considerar cinc tipus: covalents, iònics, amb enllaços d'hidrogen, moleculars i metàl·lics.

• Bandes d'energia. Conductors, aïllants i semiconductors

El concepte de *banda d'energia* és de gran ajuda per a entendre diverses propietats dels sòlids, com la conductivitat elèctrica.

Quan els àtoms s'uneixen entre si per a donar lloc a un sòlid, els seus nivells externs d'energia s'encavallen i donen lloc a bandes. En el zero absolut, els aïllants i els semiconductors tenen una banda de valència plena separada per una banda prohibida d'energia d'una banda de conducció buida.

En els conductors, les bandes d'energia ocupades, de valència i de conducció (bandes permeses), estan separades per bandes prohibides que no poden ser ocupades.

Solament les bandes parcialment plenes poden donar lloc a corrents elèctrics en un sòlid quan s'aplica un camp elèctric. En el llenguatge de la teoria de bandes la diferència entre conductors i aïllants radica, doncs, en el fet que hi haja bandes parcialment ocupades o no.

El silici i el germani tenen la mateixa estructura externa que el carboni, raó per la qual podem esperar un diagrama de bandes d'energia molt similar al del diamant. No obstant això, com que l'energia de separació E_G entre les bandes de valència i conducció és petita, resulta possible que, si augmenta la temperatura, alguns electrons de la banda de valència adquirisquen prou energia per a saltar a la banda de conducció; això permet l'establiment d'un corrent elèctric en aplicar un camp elèctric, com succeeix en un conductor. Per això reben el nom de *semiconductors*.

La distinció entre aïllant i semiconductor rau únicament en el valor de E_G . A la temperatura ambient, E_G val 1.12

eV per al Si i 0.72 eV per al Ge. En un semiconductor hi ha dos tipus de portadors de corrent, els electrons i els buits, en què el corrent total és la suma dels deguts a cada tipus de portador.

• Semiconductors intrínsecs i extrínsecs

En els semiconductors purs (intrínsec), la conducció té lloc per mitjà d'electrons que estan presents sols a causa del material cristal·lí pur (per exemple, Ge o Si) i no a causa d'elements estranys. L'única possibilitat que hi haja conducció és comunicar als electrons una energia igual o major que E_G —que els fa passar a la banda de conducció—, cosa que es pot aconseguir mitjançant excitació tèrmica o lluminosa.

Mitjançant l'operació d'afegir a un semiconductor pur quantitats minúscules, d'una part per milió aproximadament, de substàncies estranyes adequades o impureses (àtoms diferents), és possible que els semiconductors presenten conductivitat elèctrica per a un rang de temperatures major (semiconductors extrínsecs). Aquesta operació rep el nom de *dopatge*. Així doncs, les propietats elèctriques d'un semiconductor poden canviar de manera dràstica per l'addició de petites concentracions d'impureses donadores. D'aquesta manera s'obté un semiconductor tipus *n*; o amb impureses receptores, s'obté un semiconductor tipus *p*.

• Equació del semiconductor i neutralitat elèctrica

Equació del semiconductor

Si n i p són les concentracions d'electrons lliures i buits en un semiconductor, respectivament. Quan en un semiconductor intrínsec, per excitació tèrmica, un electró abandona la banda de valència i deixa darrere seu un buit, el nombre d'electrons lliures és igual al de buits

$$n = p = n_i = p_i$$

en què n_i i p_i són les concentracions intrínseques de portadors. En general, per a qualsevol semiconductor, els processos de generació de parells electró-buit i de recombinació són continus, i per a cada temperatura s'arriba a un equilibri en el qual el producte np és constant. Es compleix

$$n \cdot p = n_i^2 = p_i^2 = cte. \text{ (per a } T \text{ i } E_G \text{ fixes)}$$

Aquesta equació rep el nom d'equació del semiconductor o llei d'acció de masses, és essencial en l'estudi de semiconductors i dispositius semiconductors i és vàlida per a semiconductors intrínsecs i extrínsecs in equilibri tèrmic.

Fora de l'equilibri, és a dir, quan n i p estan governades en el dispositiu per condicions externes, no es compleix l'equació anterior.

Condicció de neutralitat elèctrica

Si el semiconductor està dopat, la llei d'acció de masses no és suficient per a determinar la concentració de portadors. A més, cal afegir-hi una relació que lligue aquestes concentracions amb la densitat d'impureses donadores o acceptores. Aquesta expressió ve donada per la *condició de neutralitat elèctrica*:

$$[\text{càrregues positives}] = [\text{càrregues negatives}]$$

Si denotem N_a la concentració d'impureses acceptores i N_d la concentració d'impureses donadores (en nombre d'àtoms per unitat de volum), la condició de neutralitat elèctrica s'escriu:

$$p + N_d = n + N_a$$

la qual queda suficientment explicada si es consideren els punts següents: (a) El semiconductor és elèctricament neutre, si damunt seu no actua cap camp extern. (b) En afegir les densitats d'impureses donadores i acceptores es tenen electrons i buits addicionals. (c) Totes les impureses donadores i acceptores estan ionitzades.

• Fenòmens de transport en semiconductors

En un semiconductor poden aparèixer fenòmens de transport de càrregues deguts tant a l'aplicació de camps elèctrics com a l'existència de gradients de concentració de portadors, és a dir, quan aquesta concentració depèn del punt del material semiconductor.

Els fenòmens de transport són molt variats, de manera que únicament considerarem els següents

- La conducció elèctrica deguda al transport de càrrega originat per l'aplicació d'un camp elèctric uniforme.
- La conducció elèctrica deguda a la difusió de càrrega originada per l'existència d'un gradient de portadors.
- L'efecte Hall, en el qual l'aplicació d'un camp magnètic dóna lloc a un camp elèctric (és a dir, una diferència de potencial).

Com que en un semiconductor hi ha dos tipus de portadors de càrrega (electrons i buits), en l'expressió corresponent al corrent de desplaçament (o arrossegament) apareixen dos termes, l'un a causa dels electrons i l'altre a causa dels buits:

$$\vec{J} = e(n\mu_n + p\mu_p)\vec{E}$$

de manera que la conductivitat d'un semiconductor és:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

• Dispositius semiconductors

La unió d'un semiconductor de tipus p amb un semiconductor de tipus n forma un díode d'uníó ($p-n$) que és la base per a la fabricació de dispositius semiconductors com el díode i el transistor. Aquests dispositius tenen un paper fonamental en l'electrònica contemporània.

Un díode conté una unió $p-n$, mentre que un transistor d'uníó bipolar conté dues unions $p-n$ que poden ser $p-n-p$ o bé $n-p-n$.