Departamento de Análisis Matemático

Teoria de la Medida. Examen. Mayo 2011

Ejercicio 1. Sea $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0,r)|$ es continua.

(c) Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.

(d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de A, $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$, tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 2.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesi'on decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E)$. Mostrar que

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la funci'on $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto infinito no numerable y sea $\mathcal{M}$ la colección de todos los $E \subset X$ tales que E o E^c es a lo sumo numerable; pongamos

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es numerable} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es numerable} \end{cases}.$$

Demostrar que $(X,\mathcal{M},\mu)$ es un espacio de medida.

Ejercicio 4. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, demostrar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones.

i) Si f es una funcion medible, entonces f^+ y f^- son medibles.

ii) Si f es tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible, entonces f medible.

iii) Si $|f|$ es una funcion medible, entonces f es medible.

Ejercicio 5. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $\left|\int_E f dx\right| = \int_E |f| dx$, entonces $f \geq 0$ c.p.t.(E) o $f \leq 0$ c.p.t.(E).