Index

Index

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Consideremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

Convergencia casi por todo

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles de dominio X y f es también una función medible de dominio X, se dice que $\boldsymbol{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}$ **converge** $\boldsymbol{c.p.t(\mu)}$ a f si $\mu(\{x \in X : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}) = 0$.

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Consideremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

Convergencia casi por todo

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles de dominio X y f es también una función medible de dominio X, se dice que $\boldsymbol{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}}$ **converge** $\boldsymbol{c.p.t(\mu)}$ a f si $\mu(\{x \in X : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}) = 0$.

Convergencia casi uniforme

Una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que **converge casi uniformemente** a la función medible f, si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ y $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en A^c.

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Proposición

Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f casi uniformemente, entonces $f_n \to f$ $c.p.t.(\mu)$.

Convergencia casi por todo y convergencia casi uniforme

Proposición

Si la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f casi uniformemente, entonces $f_n \to f$ $c.p.t.(\mu)$.

Teorema de Egoroff

Si $\boldsymbol{\mu(X) < \infty}$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles, que converge $c.p.t(\mu)$ a una función f, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi uniformemente a f.

Convergencia en medida

Convergencia en medida

Convergencia en medida

Una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que **converge en medida** a la función medible f (pondremos $f_n \to^{\mu} f$) si para todo $\varepsilon > 0$, es

$$\lim_n \mu(\{x \in X : |\, f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0,$$

o lo que es lo mismo si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\sigma > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ implica que $\mu(\{x \in X : |\, f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \sigma$.

Convergencia en medida

Convergencia en medida

- $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$ no implica $f_n \to^{\mu} f$.

Convergencia en medida

- $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$ no implica $f_n \to^{\mu} f$.
- $f_n \to^{\mu} f$ no implica $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$.

Convergencia en medida

- $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$ no implica $f_n \to^{\mu} f$.
- $f_n \to^{\mu} f$ no implica $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$.

Proposición

Si f_n converge a f casi uniformemente en X, entonces $f_n \to^{\mu} f$.

Convergencia en medida

- $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$ no implica $f_n \to^{\mu} f$.
- $f_n \to^{\mu} f$ no implica $f_n \to f$ $c.p.t(\mu)$.

Proposición

Si f_n converge a f casi uniformemente en X, entonces $f_n \to^{\mu} f$.

Proposición

Si $\boldsymbol{\mu(X) < \infty}$ y $f_n \to f$ $c.p.t.(X)$, entonces $f_n \to^{\mu} f$.

Fundamental en medida

Fundamental en medida

Fundamental en medida

Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles complejas, es **fundamental en medida** si, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Fundamental en medida

Fundamental en medida

Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles complejas, es **fundamental en medida** si, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \longrightarrow 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Proposición

Si $f_n \longrightarrow^{\mu} f$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es fundamental en medida.

Fundamental en medida

Fundamental en medida

Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles complejas, es **fundamental en medida** si, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$.

Proposición

Si $f_n \to^{\mu} f$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es fundamental en medida.

Teorema de Riesz

Si una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones medibles complejas es fundamental en medida, entonces

i) Existe alguna subsucesión $\{f_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ casi uniformemente convergente a una función medible f.

ii) $f_n \to^{\mu} f$.