Francisco-José Boigues, Salvador Llinares, Vicente D. Estruch

DESARROLLO DE UN ESQUEMA DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN ESTUDIANTES DE INGENIERIAS RELACIONADAS CON LAS CIENCIAS DE LA NATURALEZA.

Un análisis a través de la lógica Fuzzy

RESUMEN. Esta investigación tiene como objetivo caracterizar el desarrollo del esquema de la integral definida en estudiantes de ingeniería de ciencias de la tierra usando una métrica fuzzy para determinar el grado de desarrollo en los niveles *intra, inter y trans* (Piaget y García, 1984). Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia del valor *n* de la partición, como una manifestación de la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el paso al *límite* que configura el significado de la integral definida.

PALABRAS CLAVE: Comprensión, esquema, integral definida, APOs, fuzzy.

ABSTRACT. The purpose of this research is to characterize the development of the scheme for the integral as defined by earth science engineering students using fuzzy metrics in order to establish the level of development on *intra*, *inter* and *trans* levels (Piaget & García, 1984). The results demonstrate the difficulty of students to link the succession of Riemann sums with their dependence on the *n* value of the partition, as a manifestation of the relationship between the succession of Riemann sums and the step to the *limit* which forms the meaning of the defined integral.

KEY WORDS: Understanding, scheme, defined integral, APOs, fuzzy.

RESUMO. Esta pesquisa tem como objetivo caracterizar o desenvolvimento do esquema da integral definida em estudantes de engenharia de ciências da terra, usando uma métrica fuzzy para determinar o grau de desenvolvimento nos níveis *intra, inter e trans* (Piaget e García, 1984). Os resultados mostram a dificuldade dos estudantes para relacionar a sucessão de somas de Riemann com sua dependência do valor *n* da partição, como uma manifestação da relação entre a sucessão de somas de Riemann e a passagem ao *limite* que configura o significado da integral definida.

PALAVRAS CHAVE: Compreensão, esquema, integral definida, APOs, fuzzy.

RÉSUMÉ. L'objectif de ce travail de recherche consiste à interpréter la compréhension du schéma de l'intégrale définie chez les étudiants en ingénierie sciences de la nature en utilisant un espace métrique flou afin de déterminer le degré de développement aux niveaux *intra*, *inter* et *trans* (Piaget et García, 1984). Les résultats montrent que les étudiants ont du mal à faire la relation entre la succession des sommes de Riemann avec leur dépendance au paramètre *n* en tant que relation entre la succession des sommes de Riemann et le passage à la *limite* qui donne forme à la signification de l'intégrale définie.

MOTS CLÉS: Compréhension, schéma, intégrale définie, APO, méthode floue.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (3): 255-282.
Recepción: Octubre 21, 2009 / Aceptación: Septiembre 24, 2010.

1. Introducción

La investigación sobre el desarrollo de la comprensión de la noción de integral definida aporta información en el campo de la enseñanza del cálculo (Cordero, 2005), del pensamiento matemático avanzado (Rasslan y Tall, 2002), del papel que pueden jugar las matemáticas en los estudios de ingeniería y sobre el uso de la tecnología en la enseñanza (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006; Sutherland y Balacheff, 1999; Thomas y Finney, 1999). Algunas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades de los estudiantes en comprender la integral definida como el límite de una suma debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite (Orton, 1983). Otra de las características de la comprensión que ha sido identificada es la dificultad que tienen los estudiantes de relacionar las aproximaciones gráficas y analíticas (Ferrini-Mundy y Graham, 1994) o la reticencia a la hora de utilizar métodos gráficos (Dreyfus y Eisemberg, 1986; Dreyfus 1991); poniendo de manifiesto una concepción procedimental de la integral definida (Calvo, 1997; Ferrini-Mundy y Guardard 1992; Llorens y Santonja, 1997; Muñoz, 2000; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) y la formación de imágenes inapropiadas del concepto de integral (Bezuidenhout y Olivier 2000). En relación con esta característica, Davidson (1990) encontró que la manipulación de métodos numéricos de integración facilitaba la adquisición de un significado de la integral más asociado con el problema del área.

Turégano (1998) identificó tres diferentes concepciones que los estudiantes generan usando la idea del concepto imagen: primitiva, operativa y descriptiva. Con la idea primitiva de integral el estudiante sólo asociaría la integral con el área de figuras raras. Con la imagen operativa se tiende especialmente a moverse en el ámbito manipulativo algorítmico. En cambio, con la concepción descriptiva el estudiante es capaz de integrar en la definición de la integral definida diversos elementos en diferentes registros semióticos. Estos resultados refuerzan la necesidad de introducir la integral a partir de su definición geométrica, primando su génesis histórica y que la introducción a los conceptos a través de la resolución de problemas -que han estado en el origen del concepto- logre realzar la formación de éste. En esta línea, Camacho y Depool (2003a, 2003b) utilizando el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval (1993) y el modelo de competencias de Socas (2007), señalan la necesidad de distinguir entre un objeto matemático y sus representaciones para que los estudiantes puedan alcanzar una comprensión eficaz de la integral definida. Esto puede ser favorecido por el uso de actividades programadas con las utilidades que les ofrece el asistente matemático *Derive*, permitiendo un cierto progreso en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida (Camacho, Depool y Santos-Trigo, 2010). Sin embargo, aunque Camacho y Depool (1993a, 1993b) encontraron alumnos que manejaban varias representaciones semióticas, la gran mayoría tendía a moverse en un único sistema de representación.

Por otra parte, la relación entre la integral definida y la impropia fue planteada por Camacho y González-Martín (2004, 2005). Los resultados obtenidos indican que una de las dificultades de los estudiantes radica en concebir la integral definida como un área, sin acabar de precisar que para ello se requiere que la función sea positiva. Por otra parte, Thomas (1995), en su estudio sobre el teorema fundamental del cálculo, observa que los estudiantes establecen una fuerte vinculación entre los dos tipos de integrales. Ven más vinculada la integral indefinida con la definida que con la derivada. Los resultados de esta investigación indican que puede ser adecuado presentar de manera separada las dos integrales, incluso revisar la integral indefinida después de haber introducido la integral definida, prestando mayor atención a las diferencias existentes entre los dos tipos de integrales.

Los resultados de estas investigaciones señalan que la comprensión de la integral definida encierra múltiples objetos que van más allá de una mera definición formal teniendo en cuenta la necesidad de diferenciar el objeto matemático de integral definida de su representación, de relacionar la noción de sucesión y de límite con la de suma de Riemann para potenciar una comprensión que vaya más allá de la pura manipulación procedimental y considerar el desarrollo de la comprensión de la integral definida como concepto dinámico que va incorporando nuevos elementos. El objetivo de la investigación que presentamos es aportar información sobre estos aspectos de la comprensión de la integral definida y su desarrollo en el contexto específico de estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza que ven en las matemáticas una herramienta (*service mathematics*).

La cuestión de investigación planteada fue:

¿Podemos caracterizar niveles de desarrollo de la comprensión de la integral definida?

¿Se puede medir "el grado de pertenencia" de los estudiantes a uno de esos niveles de desarrollo?

2. El desarrollo de un esquema: La teoria APOS como un marco de referencia

El concepto de tríada en el desarrollo de un esquema fue introducido por Piaget y García (1984) en su intento por caracterizar el desarrollo del conocimiento asumiendo que un esquema no es algo estático (Mason y Jonston-Wilder, 2004; Trigueros, 2005). Piaget y García (1984) plantearon tres etapas que se suceden de una manera no del todo lineal para caracterizar el desarrollo de un esquema siendo el principal rasgo que las va a distinguir la capacidad para establecer relaciones entre los elementos que configuran la noción matemática. La etapa *Intra* se caracteriza por el hecho de que el estudiante no reconoce todos los elementos del esquema destacando las acciones por su carácter operacional. Se utilizan los elementos de manera aislada y a los estudiantes les resulta difícil relacionar diferentes elementos. Por su parte, la etapa *Inter* se caracteriza por el reconocimiento de relaciones entre los elementos del esquema y, por tanto, hay mayores posibilidades de potenciar la capacidad deductiva. El paso de una etapa a otra suele producirse como consecuencia de la reflexión en torno a las relaciones entre elementos del esquema. En la etapa *Trans* hay manifestaciones -durante la resolución de los problemas- de que el estudiante ha construido una estructura subyacente de manera completa. Esta estructura refleja que las relaciones descubiertas en las etapas anteriores han sido comprendidas, dotando de coherencia al esquema y capacitando al estudiante para identificar los dominios de aplicación de las propiedades (Cooley, Trigueros y Baker, 2007). La coherencia de un esquema construido por el estudiante le permite decidir cómo usar el concepto considerando las limitaciones y condicionantes. En cada uno de los niveles el estudiante reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior de manera gradual aunque no necesariamente lineal. Además, en algunas situaciones-problema, un individuo puede utilizar varios esquemas y, por tanto, el desarrollo de un esquema dependerá del desarrollo de los esquemas de las nociones que lo forman. En este sentido, para caracterizar el desarrollo de un esquema hay que identificar sus elementos y sus relaciones (Trigueros, 2005; Cooley et al., 2007; García, Llinares, Sánchez-Matamoros, 2010). Finalmente, cuando los estudiantes son capaces de considerar el esquema como un todo y realizar acciones en nuevas situaciones se puede asumir que el esquema se ha tematizado.

Desde esta perspectiva teórica es necesario detallar cuáles son los elementos y sus relaciones que configuran el esquema de una noción matemática determinando hipotéticas construcciones mentales necesarias para desarrollar el esquema.

2.1. *Una propuesta de descomposición genética para la noción de integral definida*

La descomposición genética de una noción matemática es una conjetura generada por el investigador consistente en un conjunto de construcciones mentales y de relaciones entre ellas que un estudiante debería desarrollar para construir la noción matemática. La propuesta de una descomposición genética deriva de varias fuentes (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendirf, 1997; Dubinsky, 1991; Dubinsky y Mcdonald, 2001): datos de investigaciones previas -especialmente aquellos que han usado la teoría APOS como marco de referencia, la noción como objeto matemático, significados institucionales procedentes del análisis de textos (Contreras y Ordoñez, 2006)- y la experiencia del investigador (Trigueros, 2005). La descomposición genética de una noción matemática no es única y proporciona una trayectoria posible del estudiante para la formación del concepto, sin embargo no tiene que ser representativa de todas las trayectorias posibles que pueden realizar los estudiantes.

En esta investigación generamos una descomposición genética de la integral definida desde un análisis de la evolución epistemológica del concepto de integral definida, un análisis de un conjunto de textos usados en el bachillerato tecnológico (alumnos de 18-19 años) y primer año de estudios universitarios de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza, la revisión de los resultados de las investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión de la integral definida y nuestra experiencia como docentes e investigadores. Se concibe la integral como la solución al problema clásico de área bajo una curva y se define como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. De ahí que, el esquema de la integral (esquema C de la tabla I) se va a estructurar en torno a las nociones de sucesión, límite y suma de Riemann. Para el desarrollo del esquema de integral definida los estudiantes deben tener una determinada noción de límite y de sucesión que les permita construir una sucesión de áreas de rectángulos cuyas bases se apoyan en una división o partición de un intervalo [a, b] (esquema A de la tabla I) sobre el eje OX y cuyas alturas se calcularían a través de las imágenes de la función que representa a la curva. Finalmente, el uso por parte de los estudiantes de la idea de sucesión entendida como una función dependiendo del valor de *n* de la partición aplicado a las sumas de Riemann les debería permitir construir el esquema de la integral definida. Por tanto, la descomposición genética propuesta integraba las nociones de partición de un intervalo, de sumas de Riemann y de límite de la sucesión de sumas de Riemann de manera anidada. Dicha descomposición (ver tabla I), está formada por 17 elementos y relaciones, tanto a nivel gráfico como analítico.

TABLA I

Propuesta inicial de descomposición genética de la integral definida.

ESQUEMA DE LA INTEGRAL DEFINIDA	
ESQUEMA A: *Partición* de un intervalo [a, b]	
A.0	Esquema del intervalo en la recta real.
A.1	Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.
A.2	Analíticamente tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y el último con b.
A.3	Interiorización de las acciones A1 y A2 en un proceso que implica subdividir, gráfica o analíticamente, un intervalo en una serie de subintervalos. Incluye dos elementos: · interiorización de la acción A1. · interiorización de la acción A2.
R1A	Relacionar analítica y gráficamente la idea de partición de un intervalo cualquiera entendida como proceso.
ESQUEMA B: *Sumas de Riemann* para una función continua *f(x)* en un intervalo real [*a*, *b*] y con una partición	
B.01	Esquema de área de una superficie.
B.02	Esquema de función real de variable real.
B.03=A	Esquema de partición.
B.1	Gráficamente la acción de construir rectángulos que se aproximen al área buscada siguiendo los siguientes criterios: a) Dividir el intervalo en subintervalos según la partición dada. b) Seleccionar para cada subintervalo un punto y representar su imagen según un criterio (el máximo, el mínimo y así sucesivamente). c) Dibujar los rectángulos con base en los subintervalos y tomando como alturas las imágenes seleccionadas anteriormente.
B.2	Analíticamente la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
B.3	La interiorización de los elementos B1 y B2 llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso. Incluye dos elementos: · interiorización de la acción B1. · interiorización de la acción B2.
R1B	Relacionar analítica y gráficamente la obtención de la suma de las áreas de los rectángulos para un intervalo y una partición cualquiera.
ESQUEMA C: *La integral definida* como el límite a una sucesión de Sumas de Riemann.	
C1	Esquema de sucesión.
C2	Esquema de límite de una sucesión.
C3=B	Esquema de suma de Riemann.
R1C	{C1 R C3} vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann.
R2C	{C2 R C3} vía límite de una sucesión de sumas de Riemann.

Desde esta propuesta de descomposición genética de la integral definida, la coherencia del esquema de la integral definida debe ser entendida como una medida del grado de consciencia del estudiante de la noción de sucesión de sumas de Riemann como una función del valor *n* de la partición y de la idea de límite como una estructura subyacente en el esquema de la integral definida. Esta hipótesis sobre el papel de la consciencia de los estudiantes en la aplicación de la noción de límite de una sucesión a las sumas de Riemann como un indicador de la idea de coherencia del esquema como elemento necesario para su tematización, procede de las evidencias obtenidas en el caso de la tematización del esquema de derivada (García et al., 2010).

3. Método

3.1. *Participantes y contexto*

En la investigación han participado 189 estudiantes de primer curso de escuelas de ingeniería que estaban realizando estudios relacionados con el medio ambiente o el medio rural (69 en el estudio piloto y 120 en el estudio definitivo). Todos estaban matriculados en asignaturas del tipo fundamentos matemáticos. Los estudiantes estudiaron la integral definida antes de la recogida de datos. El primer curso de ingeniería de la que proceden los estudiantes tiene carácter introductorio y en muchas ocasiones ya no estudiarán más matemáticas. Los alumnos que ingresan en estos estudios tienen una formación matemática previa muy dispar. Aunque la mayoría de los alumnos han cursado un bachillerato técnico o científico sólo aproximadamente un 42% de éstos han cursado la asignatura de matemáticas en su último curso de bachillerato, siendo su conocimiento del cálculo integral muy limitado.

3.2. *Diseño del instrumento: cuestionario y entrevista*

Los datos de esta investigación proceden de las respuestas a un cuestionario y de una entrevista posterior centrada en las justificaciones de 40 estudiantes, tomando como referencia la descomposición genética inicial. En una primera fase del estudio se diseñó y analizó un cuestionario piloto (evaluando el índice de discriminación e índice de dificultad) a partir del cual se generó el cuestionario definitivo. Este cuestionario estaba formado por 8 problemas cuya resolución pretendía que los estudiantes movilizaran los 17 elementos y relaciones identificadas en la descomposición genética de la integral definida descrita en la sección anterior.

La primera cuestión (Q1) estaba centrada en la idea de partición en el nivel numérico (A1) y la entrevista tenía como objetivo observar cómo usaban los estudiantes la idea de partición a nivel gráfico (A2) y cómo establecían una relación entre lo gráfico y lo numérico, entendidas como proceso al considerar un intervalo y una partición cualquiera (*R1A).*

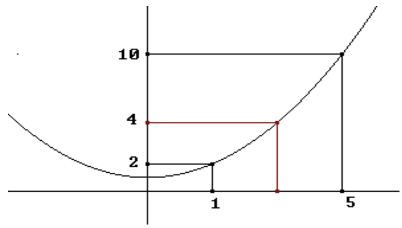
> *Q.1* Dado el intervalo [1,3], forma una partición que lo divida en 4 subintervalos de igual longitud.
> Nota: En la respuesta dar simplemente un conjunto de números ordenados de menor a mayor separados por una coma, por ejemplo 2, 2'25, 3'75, 4.

La segunda cuestión (Q2) se basa en un intervalo genérico y se les pide que generen *n* subintervalos, lo que implica una cierta generalización y por tanto el uso del elemento A3 (*Interiorización en un proceso las acciones de mostrar numéricamente un conjunto ordenado de valores y dividir gráficamente un intervalo en n partes).*

> *Q.2* Sea un intervalo I= [a, b], sea P una partición de I que lo divida en *n* partes iguales, y sea Q otra partición de I que lo divida en *n+1* partes iguales. Entonces se cumple:
>
> A> Los subintervalos generados por P son de mayor amplitud que los de Q.
> B> Los subintervalos generados por P son de menor amplitud que los de Q.
> C> Los subintervalos generados por P son de igual amplitud que los de Q.
> D> No se pueden comparar al no fijar un número determinado de partes.

La tercera cuestión (Q3) tiene como objetivo que los estudiantes usen la noción de suma de Riemann, a partir de una partición y de una función, construyendo rectángulos y sumando sus áreas (*B1: a nivel gráfico descomponer el área pedida en rectángulos de acuerdo con la partición y B2: hallar las áreas de los rectángulos).*

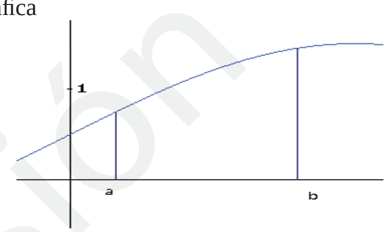
Q.3 Supongamos una función con la siguiente gráfica



Calcula S_2: es decir, la suma de Riemann dividiendo el intervalo [1, 5] en dos partes iguales y eligiendo el extremo inferior de cada intervalo para evaluar las alturas.

La cuestión cuarta (Q4) se basa en un intervalo y una función genérica y se pide establecer un número *n* de subintervalos, lo cual exige poner en juego elementos que implican una cierta generalización: e*lemento B3 -sumas de Riemann a nivel de proceso- con la interiorización de las acciones B1 -suma de Riemann gráficamente- y B2 -suma de Riemann analíticamente-.*

Q.4 Dada la siguiente gráfica



Sea S_n la suma de Riemann para una partición de [a, b] con *n* subintervalos, eligiendo el extremo superior de cada uno de ellos para evaluar las alturas. Entonces:

A> S_n > Área encerrada entre la curva y el eje OX en [a, b].
B> S_n < Área encerrada entre la curva y el eje OX en [a, b].
C> S_n = Área encerrada entre la curva y el eje OX en [a, b].
D> S_n y el Área encerrada entre la curva y el eje OX en [a, b] no se pueden comparar por las expresiones no concretas de las nociones matemáticas.

La quinta cuestión (Q5) tiene como objetivo descubrir evidencias sobre cómo los estudiantes usan sucesión y suma de Riemann y su relación (*relación entre suma de Riemann y sucesión (C1RC3) vía la construcción de una sucesión de sumas de Riemann).*

Q.5 Si calculamos con la misma gráfica que en el ejemplo anterior las sumas de Riemann S_n para una partición de [a, b] con n subintervalos eligiendo ahora el extremo inferior de cada uno de ellos para evaluar las alturas. Dado S_n que se puede calcular para n=1, n=2, n=3,.... se tiene que:

A> S_n sería una sucesión DECRECIENTE pues al aumentar n disminuye S_n.
B> S_n sería una sucesión NO ACOTADA pues S_n aumenta de manera indefinida.
C> S_n sería una sucesión CONVERGENTE pues a medida en que n aumenta nos acercaríamos a un valor.
D> Mientras no concretamos una expresión para la función y para el intervalo no podemos afirmar nada respecto a S_n.

La sexta cuestión (Q6) se centra en la relación entre sumas de Riemann (C3) y límite (C2) para la definición de la integral definida (*relación C2 R C3).*

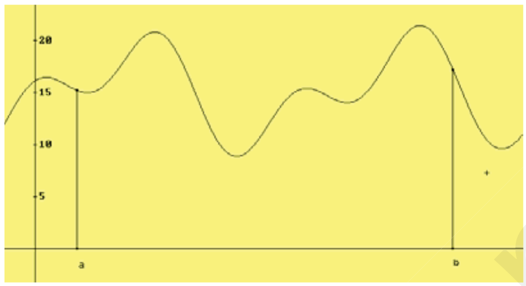
Q.6 Define la noción de integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

A> $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, siendo F(x) una primitiva de f(x), es decir, F´(x)= f(x).
B> El límite de una suma de términos cuya forma es f(x) h, siendo *h* una expresión que tiende a cero a medida que el número de sumandos crece.
C> Es la operación contraria a la derivada.
D> Ninguna de las anteriores corresponde a la definición de integral.

La cuestión Q7 tiene como objetivo observar la coherencia del esquema de la integral, identificando la capacidad del alumno para elegir los elementos apropiados de dicho esquema para resolver el problema considerando que los momentos temporales están igualmente espaciados. Más concretamente se trata de aportar evidencias sobre si los estudiantes observan una partición en la elección de los instantes del intervalo temporal $a=x_1, x_2, ..., x_n=b$ (elemento A.3 de la tabla I), si los productos $f(x_i)\cdot h$ se asocian a áreas de rectángulos cuyas sumas constituyen las sumas de Riemann (elemento B.3 de la tabla I) y, finalmente, cómo coordinan la idea de límite con la idea de sucesión de sumas de Riemann (elemento R2C de la tabla I) determinando, por tanto, las condiciones en las que es posible hacerlo con base en la situación descrita a través de la gráfica y las preguntas planteadas.

Q.7 Las temperaturas *f (x)*, durante un determinado periodo de tiempo se han recogido en la siguiente gráfica:



Se pretende hallar la temperatura media de dicho periodo siguiendo las siguientes pautas:

- se eligen una serie de momentos: $x_{1,}\, x_{2,} \ldots,\, x_n$.
- se evalúan las temperaturas en esos momentos $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$
- calculemos su media: $(f(x_1)+f(x_2)+\ldots.+f(x_n))/n$
- dada la infinidad de valores disponibles se calcula:

$$T_{media} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

- Y finalmente se realizan las siguientes transformaciones algebraicas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \frac{b-a}{b-a} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}(f(x_1)h+f(x_2)h+\ldots+f(x_n)h)$$

Siendo h=(b-a)/n y por tanto equivaldría a calcular:

A> $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

B> $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{n}dx$

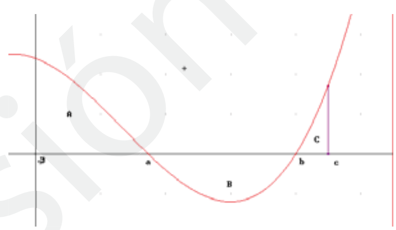
C> $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

D> Si hay una infinidad de temperaturas es imposible hallar una media.

El diseño de esta cuestión permite obtener evidencias de cómo los estudiantes construyen la sucesión de sumas de Riemann como una función dependiendo de *n* en esta situación y en qué medida pueden llegar a ser conscientes de ese hecho como una manifestación de la estructura subyacente del esquema de integral definida. Este aspecto se pone de manifiesto en el diseño de la cuestión 7 focalizando la atención sobre el papel que puede desempeñar la elección de los instantes del intervalo temporal en la determinación de la temperatura media (construcción de las particiones y de la sucesión de sumas de Riemann dependiendo del valor de *n*) y la idea de integral definida (como limite de una sucesión de sumas de Riemann).

La última cuestión (Q8) pide al estudiante crear una función, la cual puede constituir una manifestación de la tematización del esquema de integral. Para ello la cuestión planteada intenta poner de manifiesto si los estudiantes ven la idea de integral como una totalidad pudiéndole aplicar acciones y procesos sobre ella para que llegue a ser un objeto. Esta idea se contextualiza considerando la función *F(x) construida a partir de la integral.*

Q.8 Dada la gráfica de la función $f(x)$ en la que se cumple A>B> C



Si definimos

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx$$

para valores en [0, c] se tiene que su valor máximo de F(x) se alcanza

A> en x= a
B> en x= b
C> en x= c
D> en un valor comprendido en]0,a[.

En la tabla II se detallan los elementos que se espera movilizar en cada una de las cuestiones de la prueba realizada por los estudiantes.

TABLA II
Correspondencia entre las cuestiones y los elementos de los esquemas

Cuestiones	*Esquema*	*Elementos*
Q.1	Partición	A0, A1, A2 y R1A
Q.2	Partición	A3, R1A
Q.3	Suma de Riemann	B01, B02, B03, B1, B2 y R1B
Q.4	Suma de Riemann	B3
Q.5	Integral definida	C1, C3 y R1C
Q.6	Integral definida	C2, C3 y R2C
Q.7	Integral definida	Coherencia
Q.8	Integral definida	Tematización

3.3. *Selección de los estudiantes para realizar las entrevistas*

Las respuestas de los 120 estudiantes a las ocho cuestiones se valoraron de manera dicotómica (0 ó 1) para indicar la resolución correcta o no de las cuestiones. A partir de de este momento usamos dos variables definidas por el nivel de éxito de las seis primeras cuestiones (nivel de desarrollo del esquema) y por el nivel de éxito de las cuestiones siete y ocho (coherencia y tematización). La primera de las variables describía tres niveles de acierto en las seis primeras cuestiones: nivel bajo (2 puntos o menos), nivel medio (3 ó 4 puntos) y nivel alto (5 ó 6 puntos). En la segunda variable, para las cuestiones siete y ocho, fijamos tres niveles: nivel 0 (0 puntos), nivel 1 (1 punto) y nivel 2 (2 puntos). De esta manera, asociamos a cada uno de los estudiantes un par de números que reflejan el nivel de éxito en los seis primeros ítems (desarrollo del esquema) y en los dos últimos (coherencia y tematización), lo que permitió distribuir la muestra de 120 estudiantes en una matriz 3x3. Con base en esta distribución se eligieron los 40 estudiantes para ser entrevistados, siguiendo el criterio de la estratificación, buscando cubrir todos los niveles de éxito. La distribución de los 120 alumnos y el número de alumnos elegidos en cada grupo según este procedimiento quedan reflejados en la tabla III.

TABLA III
Distribución de los estudiantes según nivel de éxito

	Cuestiones 7-8: Tematización del esquema			
Cuestiones 1-6: Desarrollo del esquema	0	1	2	Totales
Bajo	56 (13)	17 (6)	5 (4)	78 (23)
Medio	7 (2)	14 (5)	2 (2)	23 (9)
Alto	-	10 (5)	9 (3)	19 (8)
Totales	63	41	16	120 (40)

(*)Entre paréntesis aparece el número de alumnos entrevistados

Antes de realizar las entrevistas, se proporcionó a cada uno de los estudiantes sus respuestas al cuestionario y después se les dejó un tiempo para que recordaran lo que habían hecho. Finalmente se les pedían las justificaciones. Las entrevistas clínicas siguieron un guión con el objetivo de indagar en las justificaciones dadas por los estudiantes y tuvieron una duración media de 45 minutos. Fueron grabadas y posteriormente transcritas para facilitar su análisis.

3.4. *Análisis*

En esta última etapa, el objetivo es obtener un valor que nos indique el grado de desarrollo del esquema de la integral definida por los estudiantes. Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) proponen promediar las puntuaciones obtenidas en los diferentes ítems de un cuestionario. Cottrill (1999) usa también la media de las puntuaciones obtenidas en cada ítem como parámetro para medir el desarrollo de la comprensión de la regla de la cadena, pero en el mismo trabajo se plantean las deficiencias del método al medir con un mismo parámetro conductas muy distintas. En concreto, se pone como ejemplo la comparación de la puntuación de dos test de cinco ítems, valorados de cero a cinco, obteniéndose los siguientes puntuaciones [3, 3, 3, 3, 3] y [5, 5, 5, 0, 0]. Estos estudiantes tienen la misma media pero reflejan comportamientos distintos. Para intentar superar estas limitaciones en nuestra investigación usamos la lógica fuzzy o borrosa, que permite una caracterización más precisa de los niveles de desarrollo.

Cada respuesta a un ítem del cuestionario junto con la transcripción de la parte de entrevista correspondiente fue analizada considerando las manifestaciones de uso de los diferentes elementos y relaciones del esquema de integral definida en los diferentes ítems. A cada uno de los elementos y relaciones usados por los estudiantes les fue asignado un grado de desarrollo con cuatro niveles (0; 0.25; 0.50; 0.75; y 1) según las características puestas de manifiesto durante la resolución del problema y las justificaciones dadas. Siguiendo este procedimiento fue posible asignar a cada estudiante un 17-tupla en la que cada valor indicaba el grado de desarrollo de cada uno de los 17 elementos considerados en la descomposición genética y puestos de manifiesto durante la resolución y justificación de las cuestiones. A partir de este momento el objetivo fue obtener un valor que nos indicara el grado de desarrollo del esquema de la integral definida. Para determinar dicho grado de desarrollo usamos una métrica fuzzy.

3.5. *Aplicando una medida usando la lógica fuzzy para determinar el desarrollo del esquema de integral definida en los estudiantes*

Los conceptos de conjunto fuzzy y topología fuzzy (Chang, 1968; Zadeh, 1965), han proporcionado un nuevo enfoque en la caracterización de la comprensión. Un conjunto fuzzy se define matemáticamente mediante la asignación a cada elemento de un universo de referencia de un valor real en el intervalo [0,1] que representa su grado de pertenencia a dicho conjunto. Esta idea introduce la noción de "borrosidad" a la pertenencia a un conjunto y permite modelizar muchos fenómenos reales en los que los objetos no tienen un criterio totalmente definido de pertenencia. En el caso del estudio del desarrollo del esquema de integral definida por estudiantes de ingeniería, la función de pertenencia puede indicarnos en qué medida un estudiante ha desarrollado el esquema de integral definida teniendo en cuenta la manera en la que el estudiante resuelve un conjunto de problemas.

Kramosil y Michalek (1975) abordan desde la perspectiva fuzzy la distancia entre objetos. En esta investigación hemos usado la noción de espacio métrico fuzzy de George y Veeramani (1994), considerando la métrica fuzzy estándar inducida por la métrica euclídea, *d*, sobre el conjunto *X*, que viene dada por

$$F_d : (x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

La métrica o distancia fuzzy, F_d , puede interpretarse como una valoración de la distancia euclídea, $d(x,y)$, en términos cualitativos. Si $d(x,y) = 0$, entonces se tiene que $F_d = 1$ lo que se interpreta como "cercanía extrema". Por otra parte, a medida que $d(x,y)$ se hace grande, F_d se va acercando a cero, es decir se tiende a la "extrema lejanía", valor que se alcanza en el límite cuando $d(x, y)$ tiende a $+\infty$, sea cual sea el valor de $t > 0$. Esta definición hace depender el valor de la métrica fuzzy de un parámetro "t" contextual que permite considerar la incertidumbre que caracteriza el contexto del análisis. En esta situación, dado un espacio métrico en $X \subset \Re^n$, si consideramos un elemento arbitrario pero fijo, $x_0 \in X$ (en el caso del estudio del desarrollo del esquema de integral este elemento seria la 17-tupla vinculada a un estudiante que ha contestado correctamente a todas las cuestiones propuestas) y fijamos un valor $t > 0$, entonces, a partir de la siguiente función

$$\mu(x) = F_d(x_0, x, t) = \frac{t}{t + d(x_0, x)},$$

podemos construir un conjunto fuzzy, $A = \{x \in X,\ \mu(x)\}$, siendo $\mu(x)$ la función de pertenencia. En nuestra investigación esto significa que cada estudiante tiene asociado un vector de R^n $(n=17)$ que indica el grado de desarrollo de los diferentes elementos de la descomposición genética según han sido determinados a través de la manera en la que los estudiantes han resuelto los ítems del cuestionario.

Además, en esta investigación hemos seguido una serie de fases con el objetivo de determinar y refinar el valor de t, para, posteriormente, hallar el grado de pertenencia de un estudiante al conjunto fuzzy definido como "grado de adquisición del esquema de la integral definida". En cada fase hemos determinado el nivel de pertenencia al conjunto fuzzy "los alumnos han adquirido el esquema…" para cada uno de los tres esquemas considerados en la descomposición genética (partición, A; suma de Riemann, B, e integral definida, C). Para ello, en cada caso hemos supuesto que un alumno, Q, con todo cero en los elementos del esquema, podría comprender los elementos previos (prerrequisitos) de cada uno de los esquemas, de manera que a su vez podría entender lo que le pedía el problema para iniciar su resolución. En este caso debería tener un grado de pertenencia inferior o igual a 0.25 (supuesto que permite calcular un valor para el parámetro "t" en cada esquema). Este supuesto viene apoyado por la forma en la que han sido elegidos los estudiantes para realizar las entrevistas, de manera que todos los alumnos habían demostrado conocer los prerrequisitos considerados para poder iniciar la resolución de los problemas. Así obteníamos un valor de "t" para cada uno de los esquemas considerados (partición, suma de Riemann e integral definida) ($t \leq 0.66$; $t \leq 0.74$; $t \leq 0.57$). Para unificar la contextualización y medir el nivel de comprensión correspondiente a todos y cada uno de los esquemas, consideraremos el mínimo de los tres valores ($t = 0.57$). Desde el punto de vista del desarrollo del esquema de la integral definida esto significa asumir que podríamos discriminar diferentes niveles del esquema de la integral definida como resultado.

4. RESULTADOS

La tabla IV (ver página siguiente) recoge los resultados de aplicar la métrica fuzzy para t = 0.57 a los datos procedentes del grupo de los 40 estudiantes entrevistados. La primera columna (AL) indica el estudiante participante en las entrevistas. Las columnas A0, A1, A2, A3 y A1R muestran el grado de desarrollo de los diferentes elementos y relaciones del esquema de partición (A). La columna A indica la valoración fuzzy realizada mediante la medida $\mu(x)$ para el esquema partición. A continuación se repite la organización para el resto de los esquemas, siendo la columna B el grado de desarrollo del esquema de la suma de Riemann (B), y la columna C el grado de desarrollo del esquema integral definida. En esta tabla, la columna B03 = esquema de la partición (A) y la columna C3 = la columna B, por la definición de la descomposición genética realizada. Esta tabla integra dos tipos de información. Por una parte, el grado de desarrollo de cada uno de los elementos y relaciones considerados en la descomposición genética, puesta de manifiesto por la manera en la que los estudiantes resolvieron los problemas y justificaron sus acciones durante la entrevista. Por otra parte, el grado de desarrollo de cada unos de los esquemas de partición, suma de Riemann e Integral definida dado por la métrica fuzzy.

4.1. *Características de la comprensión del esquema de integral definida*

Según los resultados obtenidos, los elementos con menor puntuación en el esquema de partición de un intervalo han sido la realización de n particiones de un intervalo genérico [a, b]) con 0,68 de media (A3) y la relación entre lo realizado gráfica y analíticamente (R1A= 0,65). Con la noción de partición, algunos estudiantes necesitaron aclaraciones para determinar la amplitud de cada subintervalo [$h= (b\text{-}a) / n$], lo cual indica que los elementos definidos como procesos implican una mayor dificultad para estos estudiantes.

Respecto al esquema suma de Riemann (B), se observa un descenso significativo en el desarrollo de cada elemento tanto en el nivel gráfico como analítico. Así, el 32% ($n = 13$) de los estudiantes tienen dificultades para comprender la idea de suma de Riemann a nivel gráfico (B1) obteniendo una asignación igual o menor a 0,25; y el 52% ($n = 24$) manifestó dificultades con la suma de Riemann a nivel analítico (B2). Por otra parte se puso de manifiesto la dificultad de relacionar la realización gráfica y analítica de las suma de Riemann (R1B) ya que solo el 10% (4 estudiantes) tuvieron una puntuación de 1 en dicha relación. Las figuras 1 y 2 ejemplifican algunas de estas dificultades. La dificultad

TABLA IV

Resultados de la medida fuzzy con *t=0'57 para el esquema partición de un intervalo (A), el esquema suma de Riemann (B) y el esquema Integral definida (C)*

	ESQUEMA A (Partición de un intervalo)						ESQUEMA B (Suma de Riemann)								ESQUEMA C (Integral definida)					
AL.	A0	A1	A2	A3	R1A	A	B01	B02	B03=A	B1	B2	B3	R1B	B	C1	C2	C3=B	R1C	R2C	C
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0	0,25	0	0,25	1	1	0,25	0	0,24	0,28
2	1	0,5	0,75	0,75	1	0,48	1	1	0,48	0,75	0,5	0,75	0,5	0,38	1	1	0,38	0,25	0	0,29
3	1	1	0,75	0,5	0,75	0,48	1	1	0,48	0,75	0,5	1	0	0,31	1	1	0,31	0,75	0	0,32
4	1	1	0,5	1	0,75	0,5	1	1	0,50	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
5	1	1	0,25	0,75	0,5	0,38	1	1	0,38	1	0,25	0,25	0,25	0,28	1	1	0,28	0	0	0,26
6	1	1	0,75	1	1	0,7	1	1	0,70	0,25	0	0,25	0	0,24	1	1	0,24	0	0	0,26
7	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0,25	0	0,23	1	1	0,23	0,25	0	0,28
8	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0,25	0	0,23	1	1	0,23	0,25	0	0,28
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,5	0,5	0,5	0,5	0,36	1	1	0,36	0,75	0	0,32
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	1	0	0,29	1	1	0,29	0,5	0	0,30
11	1	1	0,75	1	0,75	0,62	1	1	0,62	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
12	1	0,75	0,25	0,25	0,5	0,32	1	1	0,32	0	0	0,25	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,5	0,5	0,5	0	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
14	1	0,75	0,5	1	0,75	0,48	1	1	0,48	0,5	0,5	0,75	0	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1	1	1	1	1	1,00	0,75	0	0,36
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00
17	1	1	1	1	0,75	0,7	1	1	0,70	0,5	0,5	0,25	0,25	0,3	1	1	0,30	0	0	0,27
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	0,75	0,5	0,33	1	1	0,33	0,5	0	0,30
19	1	1	0,75	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0,5	0,5	0,5	0,25	0,32	1	1	0,32	0,25	0	0,29
20	1	1	0,75	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
21	1	1	0,25	0,25	0	0,28	1	1	0,28	0,5	0	0,5	0	0,25	1	1	0,25	0,25	0	0,28
22	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	0,75	0,5	0,75	0,48	1	1	0,48	0,25	0,25	0,33
23	1	0,75	0,5	0	1	0,33	1	1	0,33	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
24	1	0,5	0	0	0	0,24	1	1	0,24	0	0	0	0	0,21	1	1	0,21	0	0	0,26
25	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
26	1	0,5	1	1	1	0,53	1	1	0,53	0,5	0,25	0,75	0	0,28	1	1	0,28	0	0	0,26
27	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	1	0,75	0,25	0,42	1	1	0,42	1	0	0,33
28	1	1	1	0,75	1	0,70	1	1	0,70	0,75	0,75	0,75	0,75	0,49	1	1	0,49	0,75	0,5	0,43
29	1	1	1	1	0,75	0,70	1	1	0,70	1	1	0,75	1	0,59	1	1	0,59	1	0,25	0,40
30	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	0	0,36
31	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1,00	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0	0,26
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	0,75	0,75	0,62	1	1	0,62	1	0,5	0,48
33	1	1	0,75	1	0,25	0,42	1	1	0,42	0,5	0	0	0,25	0,24	1	1	0,24	0	0,25	0,28
34	1	0,75	0,75	0,25	0,5	0,37	1	1	0,37	0,25	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,25	0,28
35	1	0,75	1	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0,75	0,5	0,75	0,75	0,42	1	1	0,42	0,75	0,75	0,46
36	1	0,75	1	1	1	0,7	1	1	0,70	0,75	0,75	0,75	0,75	0,49	1	1	0,49	1	1	0,53
37	1	0,75	1	0,25	0,75	0,41	1	1	0,41	0,25	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,25	0,28
38	1	0,75	1	0,75	0,75	0,57	1	1	0,57	0	0	0	0	0,22	1	1	0,22	0	0,5	0,29
39	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,37	1	1	0,37	1	1	0,75	0,75	0,43	1	1	0,43	0,75	0,5	0,42
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1,00	1	1	1	0,5	0,43	1	1	0,43	0,5	0,25	0,35
Suma=	40	37,3	30,5	27	25,8	26,60	40	40	26,60	21,5	14,8	18,5	11,75	147	40	40	14,69	13,5	6,49	13,2
Media	1	0,93	0,76	0,68	0,65	0,67	1	1	0,67	0,54	0,37	0,46	0,29	0,37	1	1	0,37	0,34	0,16	0,33

de generar a nivel gráfico las sumas de Riemann se manifestó bien porque los rectángulos que dibujaban no se corresponden con lo especificado para cada subintervalo (ver Figura 1).

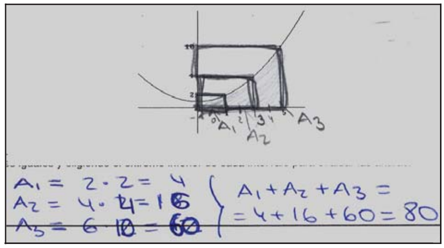


Figura 1. Construcciones incorrectas de rectángulos en las sumas de Riemann

O bien porque los estudiantes identificaban directamente la suma de Riemann con el área encerrada entre la curva y el eje *OX* (ver figura 2).

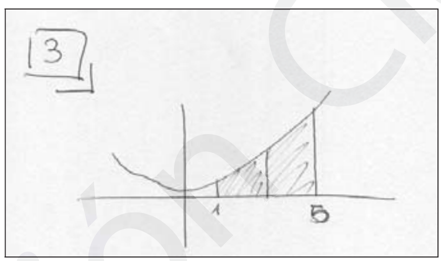


Figura 2. Ejemplo en el que se identifica suma de Riemann con el área buscada

En relación con el esquema de integral definida (C), los datos indican que la construcción usando el límite de una sucesión de sumas de Riemann (R2C en la descomposición genética) fue mucho más difícil de conseguir por los estudiantes (media de 0,16) que el esquema de integral definida vía la construcción de una sucesión se sumas de Riemann (R1C) que obtuvo una media de 0,34. Estos datos indican que los estudiantes fueron capaces de construir una sucesión de sumas que tiende al área encerrada entre la curva y el eje *OX*, destacándose la noción de sucesión como una colección de valores que se van acercando al área buscada. Lo que ha resultado más difícil es observar construcciones de sucesiones de sumas de Riemann que estén en función del número de elementos de la partición (*n*), manifestando, por tanto, una construcción vía el límite de la sucesión de sumas de Riemann. Estos datos muestran la mayor dificultad de ver en el límite la operación necesaria para dar el paso desde unos cálculos aproximativos al cálculo exacto del área.

4.2. *Características y asignación a los niveles de desarrollo del esquema de integral definida*

Las valoraciones obtenidas a partir de la métrica fuzzy para los tres esquemas considerados (partición, suma de Riemann e Integral de Riemann) recogidas en la tabla I, permite caracterizar cuantitativamente el nivel de desarrollo del esquema de integral definida (C) en los estudiantes. Las medidas fuzzy obtenidas para el esquema de integral definida varían de 0.26 a 1. Para establecer esta medida fuzzy hay que tener en cuenta el supuesto de que los estudiantes tienen una comprensión del esquema de sucesión (C1) y de limite (C2) que les permitía intentar la resolución de los problemas, de ahí que en la columnas C1 y C2 se hayan colocado un 1. A partir de este supuesto, el esquema de integral definida se construye a partir de la comprensión de la idea de suma de Riemann (C3 = B) y de cómo los estudiantes son capaces de relacionar la idea de límite y la idea de sucesión con la idea de suma de Riemann. Así, un estudiante hipotético con una puntuación x = (1, 1, 0.33, 0.5, 0) o y = (1, 1, 0.33, 0, 0.5) para el esquema de integral definida (C) indica que es capaz de usar la idea de sucesión ó de límite de una sucesión para intentar resolver los problemas propuestos sobre la integral definida, siendo capaz de identificar la suma de Riemann a nivel gráfico y analítico pero teniendo ciertas dificultades para construir la sucesión de sumas de Riemann (R1C) y aplicar la idea de límite a la sucesión de sumas de Riemann (R2C) y así asignarles el valor del área bajo la curva. Un estudiante con estas características define el umbral entre el nivel *intra* e *inter* de desarrollo del esquema de integral definida al ser capaz de usar e identificar elementos del esquema pero teniendo dificultades para establecer todas las relaciones. La medida fuzzy en este supuesto sería

$$\mu(y) = F_d(y, x_0, 0.57) = \frac{0.57}{0.57 + \sqrt{2\cdot(1-1)^2 + (1-0.33)^2 + (1-0.5)^2 + (1-0)^2}} = 0.304$$

De ahí que cualquier estudiante con una valoración inferior a 0.304 tenga dificultades en establecer algún tipo de relación y, por tanto, estaría en el nivel i*ntra*. En la tabla I observamos que hay 26 alumnos con una valoración fuzzy menor de 0.304, mostrando por lo tanto un nivel de desarrollo *intra*.

Por otra parte, un estudiante que empieza a establecer algún tipo de relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el área bajo la curva de la función (R1C) habiendo manifestaciones de la construcción de la idea de integral definida como área bajo la curva de la función a partir de la idea de limite de una sucesión de sumas de Riemann (R2C) puesto de manifiesto por una puntuación de (1, 1, 0.33, 0,5, 0.5), define el umbral entre el nivel *inter* y *trans* de desarrollo del esquema. La medida fuzzy en ese supuesto sería

$$\mu(y) = F_d(y, x_0, 0.57) = \frac{0.57}{0.57 + \sqrt{2\cdot(1-1)^2 + (1-0.33)^2 + 2(1-0.5)^2}} = 0.369$$

Según los datos de la tabla I, hay ocho estudiantes con una medida menor o igual que 0.369 (y mayor que 0.304) indicando que tienen un nivel *inter* de desarrollo del esquema de la integral definida.

Finalmente, hay seis estudiantes con una medida fuzzy superior a 0.369, indicando que fueron capaces de construir todos los elementos del esquema suma de Riemann y además, de establecer las dos relaciones previstas en la descomposición genética. Se trata de estudiantes que muestran en la resolución de las cuestiones la vinculación entre el área bajo la curva y el límite de una sucesión de suma de Riemann, o su aproximación a través de una sucesión finita de sumas de Riemann. Estas medidas indican que estos estudiantes tienen un nivel *trans* de desarrollo del esquema de integral definida. Los resultados de esta asignación de los niveles de desarrollo se recogen en la tabla V.

TABLA V

Número de estudiantes por etapa de desarrollo

Etapa	INTRA	INTER	TRANS
Número de estudiantes	26	8	6

4.3. *Sobre la Coherencia y la tematización del esquema*

La cuestión Q7, relativa a un problema de temperaturas medias, pretendía analizar qué elementos del esquema usaban los alumnos y poner de manifiesto la estructura interna entre los elementos considerados en el esquema usada por el estudiante para decidir en qué medida la situación de las temperaturas medias y las cuestiones planteadas podían ser resueltas con la idea de la integral definida. De esta manera, la forma en la que los estudiantes resolvían el problema y las justificaciones que dieron durante la entrevista nos permitía tener evidencias de la coherencia del esquema. La valoración media en este problema fue de 0.11 y solamente dos estudiantes alcanzaron un grado de resolución igual o superior a 0.5. El resto de los estudiantes, o dejaron la respuesta en blanco o daban con la respuesta correcta al identificar la expresión $1/(b-a)$. En este problema los estudiantes tuvieron muchas dificultades para identificar la suma que aparecía en la cuestión como una suma de Riemann.

En cambio para la cuestión Q8 la media es más alta que en la anterior, 0.26, pero sigue siendo baja respecto a las otras valoraciones. Aquí encontramos a nueve estudiantes que razonaron correctamente, aunque necesitaron muchas aclaraciones del entrevistador, en particular sobre el significado de la función construida a partir de la integral. El contexto eminentemente gráfico de la cuestión puede ser una de las razones para que los estudiantes tuvieran más éxito en su resolución.

5. DISCUSIÓN

Esta investigación tenía como objetivo caracterizar el desarrollo del esquema de la integral definida por estudiantes de ingeniería de ciencias ambientales y de la tierra, y usar la métrica fuzzy para determinar el grado de desarrollo de este esquema con base en los niveles *intra, inter y trans*. Los resultados obtenidos están vinculados a la descomposición genética del esquema de integral definida que fue conjeturada al inicio de la investigación y generada a partir de la revisión de la literatura, el análisis de libros de textos usados en las escuelas de ingeniería y estudios de bachillerato (significado institucional), el análisis epistemológico del concepto (desarrollo histórico) y la experiencia como profesores de los autores de la investigación.

Los resultados obtenidos muestran la dificultad que tienen los estudiantes en establecer relaciones entre el límite de una sucesión de sumas de Riemann y la idea de área bajo una curva, aunque los estudiantes podían manejar la idea de suma de Riemann. La dificultad de los estudiantes para relacionar la sucesión de sumas de Riemann con su dependencia del valor *n* de la partición (como una manifestación de la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el paso al *límite* que configura el significado de la integral definida) es coherente con las conclusiones obtenidas por McDonald, Mathews, y Strobel (2000), quienes encontraron que los estudiantes construían dos objetos cognitivos diferentes en relación con la sucesión. Por una parte, un objeto como un listado de números que denominó *seqlist* y por otra parte, otro objeto que sería una función, cuyo dominio pertenece al conjunto de los naturales, que llamó *seqfunc.* En sus conclusiones indicaba que el objeto *seqlist* era mucho más fácil de desarrollar que el *seqfunc*. Nuestros resultados indican que la gran mayoría de los estudiantes emplean el concepto de sucesión como listado de elementos más que como una función, dependiendo de *n*, de cara a relacionarla con la sumas de Riemann, situándose de esta manera en los niveles *intra e inter* del desarrollo del esquema y teniendo muchas dificultades en llegar al nivel *trans*.

Por otra parte, el uso de la métrica fuzzy nos permite aportar algunas consideraciones sobre la noción de tematización de un esquema (Cooley et al., 2007). Los estudiantes analizados han sido capaces de construir un objeto sobre la integral definida (tematización), con diferentes niveles de desarrollo, mostrando dificultades para establecer la coordinación entre la idea de sucesión y de límite de una sucesión cuando se aplican al caso de las sumas de Riemann.

5.1. *Características del desarrollo del esquema de integral definida: la coordinación entre sucesión, límite de una sucesión y sumas de Riemann*

Los datos obtenidos en nuestro estudio han puesto de manifiesto que, siguiendo las construcciones previstas en la descomposición genética, al menos 6 de los 40 estudiantes fueron capaces de establecer la noción de la integral definida como el límite de una sucesión de sumas de Riemann. Además, este modo de construir la integral estaría de acuerdo con el contenido encontrado en el análisis de textos que reflejarían el significado institucional que se esperaría que alcanzasen estudiantes de disciplinas relacionadas con la ingeniería del medio ambiente y las ciencias de la naturaleza en lo que respecta a la integral definida. Este resultado apoya algunas conclusiones de investigaciones relacionadas con la comprensión de la integral (Orton, 1983; Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001), que sugieren un tratamiento más intensivo de las sucesiones y su límite, previamente a abordar el estudio de las sumas de Riemann, para logar una comprensión significativa de la integral definida. En este sentido, Czarnocha et al. (2001) concluye que la comprensión de la integral pasa por coordinar el esquema visual de la suma de Riemann con el de límite de una sucesión.

En nuestra investigación, las mayores dificultades que hemos observado se refieren a la capacidad de los estudiantes de establecer relaciones. Así, en el esquema suma de Riemann (B) sólo 4 estudiantes de 40, es decir el 10%, se les asignó un grado de adquisición 1 en la relación entre suma de Riemann a nivel gráfico y a nivel numérico (B1 R B2). En el esquema C, para las relaciones que se debían establecer entre el esquema de suma de Riemann (C3) y los esquemas de sucesión (C1) y de límite (C2), sólo a 6 de 40 alumnos se les asignó un grado de adquisición 1 en la relación C1 R C3 y solo 2 en la C2 R C3. Las sucesiones son vistas más como un listado de números que como una expresión dependiente de *n* (número de particiones). Esta es una cuestión que puede tener su importancia a la hora de acometer problemas que tengan como finalidad la identificación de una suma de términos con una integral definida. En este caso, habría que reforzar las acciones que asocian a determinadas sumas una integral definida; por ejemplo el ítem planteado por Bezuidenhout (2000) también recogido en algunos libros de texto analizados,

$$\textit{Calcular} \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}$$

mismo que pasa por identificar la expresión objeto del límite como una suma de Riemann para $f(x) = x^2$ y la partición $\{0, 1/n, 2/n,..., (n-1)/n\}$ del intervalo $[0,1]$ (ver figura 3),

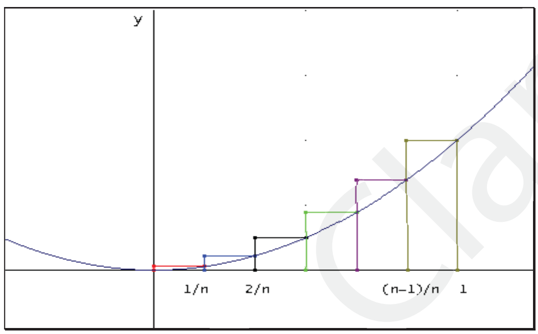


Figura 3. Sumas de Riemann

cuya solución viene dada mediante el paso al límite que constituye el cálculo de una integral definida.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

El análisis de las respuestas a la cuestión Q7 de nuestro cuestionario ha evidenciado los enormes problemas que han tenido los estudiantes para identificar la suma que aparecía al calcular el promedio de temperaturas, correspondientes a unos determinados instantes, con una suma de Riemann. Ningún estudiante obtuvo una valoración 1 y sólo a un estudiante se le valoró con 0.75.

En cualquier caso, construir una sucesión como una lista de números puede considerarse suficiente para crear una sucesión de sumas de Riemann que permita deducir que, en la medida en que aumenta el número de particiones, obtenemos mejores aproximaciones al área encerrada entre la curva y el eje *OX*, y por tanto los estudiantes puedan establecer, como se observa en nuestros resultados, la relación entre suma de Riemann y sucesión.

Finalmente abordamos la cuestión de las dificultades observadas al tener que utilizar los estudiantes la noción de límite en la construcción de la integral. El esquema que los alumnos tienen sobre el límite de una sucesión condiciona el poder introducir la relación entre la sucesión de sumas de Riemann y el límite de una sucesión. Un significado de límite de una sucesión, con un marcado acento en las acciones de hallar límites de expresiones algebraicas que representan el término general de una sucesión, podría ofrecer una explicación a las dificultades para introducir el límite en la construcción de la integral y, por tanto, justificar la tendencia a considerar la integral como una suma infinita de rectángulos de amplitud cada vez más pequeña. Finalmente, para introducir la relación entre sucesión de sumas de Riemann y límite, puede ser necesario establecer una mayor conexión entre el límite de una sucesión y la suma de Riemann (Czarnocha et al., 2001). Aunque esto no significa tener que usar la definición clásica de ε-δ de Weierstrass.

Con base en las reflexiones anteriores, introducimos los siguientes elementos en la descomposición genética:

(a) Plantear las particiones y las sumas de Riemann, con expresiones algebraicas que completen los aspectos gráficos y numéricos.
(b) Introducir, como elemento propio del esquema, el elemento límite de una sucesión como el valor que permite el paso de una aproximación al valor exacto.
(c) Un mayor desarrollo de la idea de función.

La investigación realizada está limitada a estudiantes que consideran las matemáticas, fundamentalmente, como una herramienta de trabajo en sus campos respectivos, más que como una disciplina básica importante para su formación. Esta es la característica esencial de aquellos estudiantes que eligen estudios de ingeniería relacionados con el medio ambiente y las ciencias de la naturaleza. Por tanto, las conclusiones deberán limitarse a este tipo de estudiantes. Sin embargo, los resultados plantean una serie de cuestiones para nuevas investigaciones; por ejemplo:

(a) La propuesta final de descomposición genética establece unos elementos que los estudiantes deben construir ¿cómo podemos hacer uso de los asistentes matemáticos (CAS) para favorecer las construcciones de dichos elementos cognitivos?
(b) La lógica fuzzy nos ha permitido establecer una metodología para valorar el grado de desarrollo en la comprensión de la integral. En dicha metodología juega un papel fundamental el parámetro contextual *t*, que admite diversos valores en función de las referencias consideradas:

¿permiten los refinamientos de los valores de *t* realizar valoraciones con base en escenarios diferentes?, ¿cuáles son las potencialidades y limitaciones del parámetro contextual *t?*

(c) Los subniveles o la tematización como recursos teóricos para identificar conductas diferentes en un determinado nivel ¿podrían ser sustituidas por el grado de desarrollo valorado mediante la métrica fuzzy?

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior 16* (4), 399-431.

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000). Student's conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). Hiroshima, Japan: Hiroshima University.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales.* Tesis de Maestría no publicada. Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Camacho, M. y Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática 15(3),* 119-140.

Camacho, M. & Depool, R. (2003b). Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and learning 5, 1-16.*

Camacho, M. & González-Martín, A. (2004). What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International journal of mathematical education in science and technology 35(1),* 73-89.

Camacho M. y González-Martín, A. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de "integral impropia": algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias 23(1),* 81-96.

Camacho, M., Depool, R. & Santos-Trigo, M. (2010). Students' Use of Derive Software in Comprehending and Making Sense of Definite Integral and Area Concepts. In F. Hitt, D. Holton & P. W. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. VII CBMS Issues in Mathematics education (16),* (pp. 29-61). Providence, RI: American Mathematical Society.

Chang, C.L. (1968). Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 24 (1),* 182-190.

Contreras, A. y Ordoñez. L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(1),* 65-84.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema Thematization: A Framework and an Example. *Journal for Research in Mathematics Education 38(4),* 370-392.

Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions.* Doctoral dissertation, Purdue University.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3),* 265-286.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 297-304). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Davidson, N. (1990). *Cooperative learning in Mathematics: A handbook for teachers.* Menlo Park, CA: Innovative Learning, Addison-Wesley.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1986). On visual versus analytical thinking in Mathematics. *Proceedings of the 10th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158). London, UK: University of London, Institute of Education.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical thinking,* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. & Mcdonald, M. A. (2001). Apos: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level,* (pp.275-282). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de reprèsentation sémiotique et fonctionnement cognitif de le penseé. *Annales de Didactique et de Sciencie Cognitives 5,* 37-65.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future* (pp.237-274). Rotterdam/Taipei, The Netherlands: Sense Publishers.

Ferrini-Mundy, J. & Gaudard, M. (1992). Preparation or pitfall in the study of college Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education 23(1),* 56-71.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives, and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics Learning: : Preliminary Analyses and Results, MAA Notes Number 33* (pp.31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

García, M., Llinares, S. & Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*. doi: 10.1007/s10763-010-9227-2.

George, A. & Veeramani, P.V. (1994). On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems 64,* pp. 395-399.

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education 22(3),* 237-251.

Kramosil, J. & Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika 11 (1976),* 621-633.

Llorens, J. L. y Santonja, F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas 5(1/2),* 61-76.

Mason J. H. & Jonston-Wilder, S. J. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routhledge Falmer.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. & Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. IV CBMS Issues in Mathematics education (8),* (pp. 77-102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3 (2),* 131-170.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics 14,* 1-18.

Piaget, J. y García R. (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (2da ed.). México: Siglo veintiuno editores.

Rasslan, S. & Tall, D. (2002). Definitions and Imagens for the Definite Integral Concept. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (vol. 4, pp.89-96). Norwich, UK: University of East Anglia.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática 11*, 19-52.

Sutherland, R. & Balacheff, N. (1999). Didactical Complexity of Computacional Environments for the Learning of Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 4 (1),* 1-26.

Thomas, K. (1995). *The fundamental theorem of calculus: An investigation into students' constructions.* (Doctoral dissertation). Available from Dissertation Purdue University database. (UMI No. 9622774)

Thomas, G. y Finney, R. (1999). *Cálculo con geometría analítica* (6ª ed.) (Vol. 1). Madrid, España: Addison-Wesley Iberoamericana.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17(1),* 5-31.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias 16(2),* 233-249.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. Inform. *Control 8, 338-353.*

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education 27(4)*, 435-457.

Autores:

Francisco-José Boigues. Universidad Politécnica de Valencia, España; fraboipl@mat.upv.es

Salvador Llinares. Universidad de Alicante, España; sllinares@ua.es

Vicente D. Estruch. Universidad Politécnica de Valencia, España; vdestruc@mat.upv.es