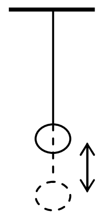
SOLUCIONES PROBLEMAS FÍSICA.

TEMA 2. OSCILACIONES Y ONDAS



1. Una pesa de 0,50 kg se cuelga de un cordón de goma de longitud 40 cm y radio 1,0 mm. Si el módulo de Young de esta goma es $3{,}0\cdot10^6$ N/m^2, calcula a) el alargamiento del cordón al colgar la pesa, b) la constante elástica del sistema y c) el período de las oscilaciones verticales de la pesa que tienen lugar cuando se desplaza ésta de su posición de equilibrio.

a) $\Delta L = \dfrac{F\cdot L_0}{S\cdot Y} = \dfrac{mg\cdot L_0}{\pi R^2\cdot Y} = \dfrac{0{,}5\cdot 9{,}8\cdot 0{,}40}{\pi\left(10^{-3}\right)^2\cdot 3\cdot 10^6} = 0{,}21\,m$

b) $F = \dfrac{S\cdot Y}{L_0}\Delta L \longrightarrow K = \dfrac{S\cdot Y}{L_0} = \dfrac{\pi R^2\cdot Y}{L_0} = \dfrac{\pi\cdot\left(10^{-3}\right)^2\cdot 3\cdot 10^6}{0{,}4} = 24\,\dfrac{N}{m}$

c) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}50}{24}} = 0{,}91\,s$

2. Se cuelga un cuerpo de masa 50 g del extremo de un muelle de constante elástica 3,2 N/m, se alarga 4,0 cm y se suelta. a) Calcula la frecuencia de la oscilación y su período. b) Escribe la expresión del desplazamiento, respecto a la posición de equilibrio, en función del tiempo empleando unidades del Sistema Internacional. ¿Cuánto vale la fase inicial? c) Calcula la posición después de 11 s. d) ¿Cuántas oscilaciones se han completado en ese tiempo?

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0{,}050}{3{,}2}} = 0{,}78\,s; \quad \upsilon = \dfrac{1}{T} = 1{,}27\,Hz$

b) La ecuación del movimiento del cuerpo es la de un movimiento armónico simple cuya amplitud es 0,040 m y su frecuencia angular es $\omega = 2\pi\nu = 8{,}0\dfrac{rad}{s}$. Por lo tanto: $y(t) = 0{,}04\,cos\left(8{,}0t + \varphi_0\right)$. La velocidad del cuerpo será la derivada temporal de la expresión anterior $v(t) = -0{,}32\cdot sen\left(8{,}0t + \varphi_0\right)$. Hay que determinar la fase inicial. Para tiempo cero el cuerpo se encuentra en la posición $y(0)=0,04\,m$ y la velocidad es nula, entonces se tiene que $\left.\begin{array}{r} cos(\varphi_0)=1 \\ sen(\varphi_0)=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \varphi_0=0$. Luego: $y(t)=0,04\,cos(8,0t)$

c) $y(11)=0,04\,cos(8,0{\cdot}11)=0,040\,m$

d) El periodo es el tiempo que tarda en producirse una oscilación, luego:

$$n=\frac{t}{T}=\frac{11}{0,78}=14 \ oscilaciones$$

3. Un cuerpo de masa 1,0 kg está unido a un resorte de constante elástica 2,0·10^2 N/m. Se separa 3,0 cm de su posición de equilibrio y se abandona sin velocidad inicial. Calcula su a) posición y b) velocidad en los instantes en que son iguales su energía cinética y potencial.

a) Como sus energías cinética y potencial son iguales se deduce que:

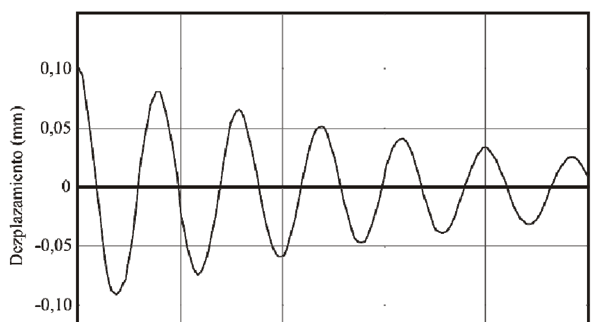
$$E=E_c+E_p \xrightarrow{E_c=E_p} E=2E_p \longrightarrow \frac{1}{2}Ks_{max}^2=2\frac{1}{2}Ks^2 \longrightarrow s=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}s_{max}=\pm\frac{3,0}{\sqrt{2}}=\pm 2,1\,cm$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} s=s_{max}\,cos(\omega t+\varphi_0) \\ v=-s_{max}\omega sen(\omega t+\varphi_0) \end{array}\right\} \rightarrow s^2+\frac{v^2}{\omega^2}=s_{max}^2 \rightarrow v=\pm\omega\sqrt{s_{max}^2-s^2}=$$

$$=\pm\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{s_{max}^2-s^2}=\pm\sqrt{\frac{200}{1}}\sqrt{0,03^2-0,021^2}=\pm 0,30\frac{m}{s}$$

4. Se estudia el movimiento de una columna de acero empotrada entre dos puntos, al someterla a un fuerte golpe. Para ello se observa el desplazamiento de un punto de la columna respecto a su posición de equilibrio a medida que pasa el tiempo, tal como se muestra en la figura. a) ¿Qué tipo de movimiento tiene dicho punto? Razona la respuesta. De la



gráfica puede determinarse que la amplitud inicial del movimiento es de 0,10 mm, que su período es de 16 ms y que en cada período la amplitud del movimiento decae un 20%. b) Calcula la fase inicial y escribe la expresión del desplazamiento del punto en función del tiempo. c) Calcula la posición del punto cuando han transcurrido 10,25 períodos y cuando han transcurrido 20,5 períodos.

a) La gráfica representa un movimiento oscilatorio amortiguado. El resultado es como el del movimiento armónico simple salvo que la amplitud de las oscilaciones disminuye exponencialmente con el tiempo. La ecuación que representa dicho movimiento oscilatorio es: $s(t)=s_{max}e^{-\mu t}\cos(\omega t+\delta)$, donde la frecuencia angular ($\omega = 2\pi/T$)está relacionada con la frecuencia propia del sistema según la relación $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}$.

b) Para tiempo cero se tiene: $s(0)=s_{max}\cos\delta = s_{max}\longrightarrow \cos\delta = 1 \longrightarrow \delta = 0$. Luego: $s(t)=s_{max}e^{-\mu t}\cos(\omega t)$

Además, se indica que cuando pasa un tiempo de 0,016 s la amplitud se hace un 20% más pequeña. Es decir:

$$s(0{,}016)=0{,}80s_{max}\longrightarrow s_{max}e^{-0{,}016\mu}\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}016}\cdot 0{,}016\right)=0{,}80s_{max}$$

$$\downarrow$$

$$e^{-0{,}016\mu}=0{,}8\longrightarrow -0{,}016\mu = \ln(0{,}8)\longrightarrow \mu=\frac{\ln(0{,}8)}{-0{,}016}=14\,s^{-1}$$

La ecuación de movimiento será:

$$s(t)=0{,}10e^{-14t}\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}016}t\right) \quad \text{t en segundos y s en milímetros}$$

c) $t=10{,}25T=0{,}164\,s\longrightarrow s(0{,}164)=0{,}10\cdot e^{-14\cdot 0{,}164}\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}016}0{,}164\right)=0$

$$t=20{,}5T=0{,}328s\longrightarrow s(0{,}328)=0{,}10\cdot e^{-14\cdot 0{,}328}\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}016}0{,}328\right)=-10^{-3}\,mm$$

5. Un objeto de 2,0 kg oscila sujeto a un muelle de constante elástica 400 N/m. La constante de amortiguamiento es 15 N·s/m y la fuerza impulsora tiene una amplitud de 10 N y una frecuencia angular de 7,5 rad/s. a) Calcula la amplitud de las oscilaciones. b) Si se varía la

frecuencia de la fuerza impulsora, ¿para qué valor de la frecuencia angular se produce la resonancia? c) ¿Cuál será la amplitud de las oscilaciones en la resonancia? d) Calcula la amplitud de la oscilación en los casos de los apartados (a) y (c) si se desprecia el amortiguamiento.

a) De nuevo, como en el ejercicio anterior, se tiene un movimiento amortiguado y forzado, cuya ecuación de movimiento es: $s(t) = s_{max} \, cos(\omega t + \delta)$. Siendo ω la frecuencia de la fuerza impulsora y la amplitud viene dada por: $s_{max} = \dfrac{F_{max}}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}}$ con ω_0 la frecuencia natural del sistema.

El valor de la frecuencia natural viene dada por:

$$K = m\omega_0^2 \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{400}{2}} = 14,1\frac{rad}{s}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$s_{max} = \frac{10}{\sqrt{2,0^2\left(7,5^2 - 14,1^2\right)^2 + 15^2 \cdot 7,5^2}} = 0,032\,m$$

b) La resonancia se produce cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del sistema, es decir $\omega_{res} = 14,1\dfrac{rad}{s}$.

c) En resonancia, la amplitud de las oscilaciones viene dada por:

$$s_{max} = \frac{F_{max}}{\gamma\omega_{res}} = \frac{10}{15 \cdot 14,1} = 0,047\,m$$

d) Si se desprecia el amortiguamiento, $\gamma = 0$. Por lo tanto,

Caso a) $s_{max} = \dfrac{F_{max}}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{4\left(7,5^2 - 14,1^2\right)^2}} = 0,035\,m$

Caso c) $s_{max} = \infty$

6. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda es, utilizando unidades SI, $y(x,t) = 0,03 \cos(2,2\,x - 3,5\,t)$. a) ¿En qué dirección se propaga la onda y cuál es su velocidad? b) Determina la frecuencia, período y longitud de onda. c) ¿Cuáles son el desplazamiento y la velocidad máximos de cualquier segmento de la cuerda?

a) La onda se propaga en el sentido positivo del eje X. La velocidad de la onda puede determinarse de la siguiente forma. Si observamos la función de onda, deducimos que $k = 2,2\,m^{-1};\quad \omega = 3,5\frac{rad}{s}$, luego: $u = \frac{\omega}{k} = \frac{3,5}{2,2} = 1,6\frac{m}{s}$

b) $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 0,56\,Hz;\, T = \frac{1}{\nu} = 1,8\,s;\, \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2,9\,m$

c) El desplazamiento máximo es la amplitud: $y_{max} = 0,03\,m$. La velocidad de un punto de la cuerda será la derivada respecto al tiempo de la función de onda,

$$v(x,t) = 0,03\cdot 3,5\cdot sen(2,2x - 3,5t) = 0,11\cdot sen(2,2x - 3,5t)$$

cuyo valor máximo es $v_{max}(x,t) = 0,11\frac{m}{s}$

7. Un hilo de acero que tiene 0,70 m de longitud y una masa de 5,0 g se tensa entre dos soportes mediante una fuerza de 500 N. a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda? b) ¿Cuántos milisegundos tardará un pulso en ir de un soporte al otro al golpear uno de los soportes con un martillo? c) ¿En qué porcentaje hay que variar la tensión de la cuerda para disminuir la velocidad de las ondas en un 20%? d) ¿Se podría conseguir la misma disminución de la velocidad variando la masa del cable de acero? En caso afirmativo, razona si el hilo debería ser de mayor o menor grosor.

a) La velocidad de la onda viene dada por: $u = \sqrt{\frac{F}{\lambda_m}} = \sqrt{\frac{F\cdot L}{m}} = \sqrt{\frac{500\cdot 0,70}{5\cdot 10^{-3}}} = 270\frac{m}{s}$

b) $L = u\cdot t \longrightarrow t = \frac{L}{u} = \frac{0,70}{270} = 2,6\cdot 10^{-3}\,s$

c) Se desea que la nueva velocidad sea: $u' = 0,8\cdot u$. Es decir:

$$\sqrt{\frac{F'}{\lambda_m}} = 0,8\cdot\sqrt{\frac{F}{\lambda_m}} \longrightarrow F' = 0,64F \longrightarrow \Delta F = \left|\frac{F'-F}{F}\right|\times 100 = 36\%$$

d) Si ya que con ello variamos la densidad lineal. Si se desea disminuir la velocidad tendremos que aumentar la masa, y por lo tanto el grosor de la cuerda.

$$\sqrt{\frac{F\cdot L}{m'}} = 0,8\cdot\sqrt{\frac{F\cdot L}{m}} \longrightarrow m' = \frac{1}{0,64}m \longrightarrow \Delta m = \left|\frac{m'-m}{m}\right|\times 100 = 56\%$$

8. Un hilo de acero de diámetro 0,35 mm y longitud 50 cm se sujeta entre dos soportes y se estira aplicando una fuerza de 10 N. Calcula a) el alargamiento del hilo y b) la fuerza máxima que se puede aplicar antes de que el hilo se rompa. c) Calcula la velocidad de las ondas transversales que se propagan a lo largo del hilo cuando se pulsa en las condiciones correspondientes al apartado a). Datos para el acero: Módulo de Young = $20\cdot10^{10}$ N/m^2. Tensión de ruptura =$5{,}2\cdot10^{8}$ N/m^2. Densidad = 7,8 g/cm^3

a) Apliquemos la relación entre la tensión aplicada y el alargamiento:

$$\frac{F}{S}=Y\frac{\Delta l}{l}\longrightarrow \Delta l=\frac{4F\cdot l}{\pi D^2 Y}=\frac{4\cdot 10\cdot 0{,}5}{\pi\cdot\left(0{,}35\cdot10^{-3}\right)^2 20\cdot10^{10}}=2{,}6\cdot10^{-4}\ m$$

b) A partir del concepto de tensión de ruptura:

$$T_{ruptura}=\frac{F_{max}}{S}\longrightarrow F_{max}=T_{ruptura}\frac{\pi D^2}{4}=5{,}2\cdot10^{8}\frac{\pi\cdot\left(0{,}35\cdot10^{-3}\right)^2}{4}=0{,}5\cdot10^{2}\ N$$

c) $u=\sqrt{\dfrac{F}{\lambda_m}}=\sqrt{\dfrac{F\cdot L}{m}}=\sqrt{\dfrac{F\cdot L}{\rho\cdot V}}=\sqrt{\dfrac{4F}{\rho\pi\cdot D^2}}=\sqrt{\dfrac{4\cdot 10}{7800\pi\left(0{,}35\cdot10^{-3}\right)^2}}=120\dfrac{m}{s}$

9. a) Utilizando análisis dimensional, obtén la fórmula de la velocidad de propagación del sonido en un fluido suponiendo que depende de su módulo de compresibilidad B y su densidad ρ_m. b) Obtén por el mismo procedimiento la velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda tensa suponiendo que depende de la fuerza F con la que está tensada, de su densidad lineal de masa λ_m y de su sección transversal S.

a)

$$[u]=[B]^{\alpha}[\rho_m]^{\beta}\longrightarrow LT^{-1}=\left(\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{M}{L^3}\right)^{\beta}=M^{\alpha+\beta}L^{-\alpha-3\beta}T^{-2\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=0\\ -\alpha-3\beta=1\\ -2\alpha=-1\end{array}\right\}\longrightarrow \alpha=\frac{1}{2}\longrightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$

esto quiere decir que: $u\propto B^{\frac{1}{2}}\rho_m^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{B}{\rho_m}}$

b)

$$[u]=[F]^{\alpha}[\lambda_m]^{\beta}\longrightarrow LT^{-1}=\left(MLT^{-2}\right)^{\alpha}\left(\frac{M}{L}\right)^{\beta}=M^{\alpha+\beta}L^{\alpha-\beta}T^{-2\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\beta=0\\ -\alpha-\beta=1\\ -2\alpha=-1\end{array}\right\}\longrightarrow \alpha=\frac{1}{2}\longrightarrow \beta=-\frac{1}{2}$$

esto quiere decir que: $u\propto F^{\frac{1}{2}}\lambda_m^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{F}{\lambda_m}}$