

TEMA 2.

RESOLUCIÓN NUMERICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Introducción
2. Nomenclatura
3. Planteamiento del Problema
4. Métodos Directos
5. Normas de Vectores y Matrices
6. Métodos iterativos
7. Resumen
8. Programación en Matlab®

1. Introducción

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales aparece como una parte importante en cualquier campo de la ciencia y de la ingeniería, como por ejemplo, la resolución de balances de materia en un sistema.

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales aparece también como un subproblema de un problema más complicado de análisis numérico, tal como ocurre por ejemplo cuando se resuelve iterativamente un sistema de ecuaciones no lineales por el método Newton-Raphson, por ejemplo, donde en cada etapa de un proceso iterativo se requiere la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, o en procesos de optimización tanto lineales como no lineales.

Con frecuencia los sistemas de ecuaciones presentan una estructura muy especial que puede ser objeto de tratamiento particular. Por ejemplo los problemas de interpolación polinómica, etc...

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales no tiene ninguna dificultad conceptual; llevarlo a la práctica sí. Esto es debido a que los sistemas a resolver son frecuentemente de un tamaño considerable y, esencialmente al hecho de que en el entorno físico en que se resuelven, la aritmética opera con precisión finita, lo que introduce errores de redondeo en todas las operaciones efectuadas, amén de que cualquier singularidad puede acarrear, si no se prevé, consecuencias no deseadas.

A continuación vamos a estudiar algunos métodos, directos o por recursión, para dar solución numérica a sistemas de ecuaciones lineales. Existen otros algoritmos especiales como es el caso de las matrices dispersas o algunos otros tipos especiales de matrices que no se estudiarán aquí, pero que es conveniente conocer dada su importancia.

2. Nomenclatura

$\|x\|_i$ = norma i de un vector o matriz x , donde la i puede ser 1, 2 o ∞ . Si no se especifica, debe tomarse por defecto la norma 2 (o euclídea)

\mathbf{A} = matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineal

a_{ij} = coeficiente que forma parte de la matriz anterior, correspondiente a la fila i (ecuación i) y columna j (incognita j)

\mathbf{b} = vector de términos independientes, con cada elemento como b_j

\mathbf{G} = es la matriz \mathbf{M} en el método de Gauss-Seidel

\mathbf{I} = matriz identidad (diagonal principal unos y resto ceros)

\mathbf{J} = es la matriz \mathbf{M} en el método de Jacobi

\mathbf{L} = matriz triangular inferior, con 1 en la diagonal principal, obtenida a partir de la matriz \mathbf{A} por el método de Gauss. Los elementos no nulos por debajo de la diagonal derivan (cambiados de signo) de los multiplicadores r_{ij} , para hacer nulos elementos de la diagonal de la matriz.

\mathbf{M} = matriz de coeficientes de la forma recursiva de los métodos iterativos
 $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{A}$,

\mathbf{P} = matriz de permutaciones (de unos y ceros, con un solo uno por fila y columna) que proviene de los cambios de orden en las ecuaciones lineales al aplicar el método de Gauss, de forma que la matriz original de coeficientes es $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{U}$

\mathbf{R} = Una de las matrices en la cual se descompone la matriz original $\mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{S}$ en los métodos iterativos

r_{ij} = multiplicadores que se obtienen para hacer ceros en la matriz \mathbf{A} (o las que deriven) por debajo de la diagonal.

\mathbf{S} = Una de las matrices en la cual se descompone la matriz original $\mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{S}$ en los métodos iterativos

\mathbf{U} = matriz triangular superior obtenida a partir de la matriz \mathbf{A} por el método de Gauss

\mathbf{x} = vector de incógnitas del sistema, siendo cada una de ellas el elemento x_i

κ = número de condición de una matriz

3. Planteamiento del problema a resolver

El problema que se plantea es la solución de sistemas de ecuaciones lineales del tipo:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

lo que significa determinar el valor de las variables x_1, \dots, x_n , que hacen que se cumplan las igualdades. A los números a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema, y a los b_i términos independientes. Si se introducen las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

el sistema puede representarse de forma más compacta por:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

En el planteamiento del problema se ha supuesto de forma implícita que el sistema de ecuaciones está bien definido, esto es, las ecuaciones que lo forman son todas linealmente independientes entre sí y el número de ecuaciones es igual al número de variables.

4. Métodos directos

4.1. Eliminación de Gauss

Comenzamos el estudio de los métodos numéricos directos con el estudio del método por excelencia del álgebra lineal numérica. Supondremos que la matriz A es de rango completo -y por lo tanto invertible- eventualmente si no lo es el procedimiento deberá detectarlo.

El método, aunque varios autores anteriores (Lagrange, Leibniz, y otros) ya habían investigado sobre el mismo, se atribuye a Gauss quien lo aplicó por primera vez en 1809. La idea básica es muy sencilla, se trata de aplicar al sistema dado por la ecuación $Ax=b$ una serie de transformaciones lineales de tal manera que al final de n pasos se haya transformado en uno mucho más fácil de resolver. Concretamente un sistema triangular superior de la forma:

$$\begin{array}{rcl}
 u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = b'_2 \\
 & & \vdots \\
 & & + u_{nn}x_n = b'_n
 \end{array}$$

o escrito de forma matricial: $\mathbf{U}\mathbf{x}=\mathbf{b}'$; todo ello tratando de evitar el cálculo de la matriz inversa, lo que comporta un número de operaciones significativamente mayor.

Un sistema triangular superior, siempre y cuando se satisfagan las condiciones $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ es fácilmente resoluble de manera recurrente mediante las fórmulas:

$$x_k = \frac{b'_k}{u_{kk}} \quad \text{Si } k=n$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(b'_k - \sum_{i=k+1}^n u_{ki}x_i \right), \quad k = n-1, \dots, 1$$

este proceso se conoce como sustitución inversa o hacia atrás.

La eliminación de Gauss convierte un sistema de ecuaciones lineales cualquiera en uno triangular superior equivalente mediante una serie de etapas, cada una de las cuales comporta las siguientes operaciones fundamentales:

- a. Multiplicación de una cualquiera de las ecuaciones del sistema por un número distinto de cero.
- a. Sustitución de una ecuación cualquiera por la que resulta de sumarle otra cualquiera de las ecuaciones del sistema.
- b. permutación del orden en el que aparecen en el sistema dos ecuaciones cualesquiera del mismo.

Comencemos la exposición de la mecánica del método mediante un ejemplo que nos servirá de introducción

$$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_4 &= 2 \\ -3x_2 - 12x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Dispongamos inicialmente la matriz A aumentada en la columna que define el término independiente b y llamemos a la nueva matriz resultante \hat{A} , es decir:

$$\hat{A} = [A/b] = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Etapas 1:

comprobamos inicialmente que el elemento a_{11} -denominado elemento pivote- no es cero. Si no es cero, el objetivo es hacer ceros los elementos de la primera columna por debajo de ese a_{11} . Para ello, definamos para cada fila por debajo de la del pivote, desde 2 hasta n, los factores o multiplicadores

$$r_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad i=2, \dots, n.$$

De esta forma, los elementos de las filas por debajo del pivote (cada fila de la matriz es un vector) se sustituyen por el resultado de multiplicar este factor r_{i1} por la fila del pivote, y sumarle la cada una de las filas i . Los elementos debajo del elemento pivote se hacen cero por esta operación, variando del resto de los elementos de \hat{A} :

$$a_{ij} = a_{ij} + r_{i1} a_{1j} \quad i=2,3,4. \quad j = 1, 2,3, 4, 5.$$

En el ejemplo que venimos manejando los multiplicadores son

$$r_{21} = -a_{21}/a_{11} = -(4/-4) = 1$$

$$r_{31} = -a_{31}/a_{11} = -(2/-4) = 1/2$$

$$r_{41} = -a_{41}/a_{11} = -(0/-4) = 0$$

La nueva matriz resultado de transformar $\hat{\mathbf{A}}$ es:

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

Observese que se habría obtenido el mismo resultado de haber multiplicado $\hat{\mathbf{A}}$ por la matriz :

$$\mathbf{L}_1 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Esta última es la denominada matriz de transformación de Gauss. que también se puede escribir de la forma $\mathbf{L}_1 = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{e}_1^T$, donde

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etapla 2 .

Una vez realizados los ceros en la primera columna, por debajo de la diagonal principal, se procede a hacer cero los elementos debajo de la diagonal principal de la segunda columna. Observamos, no obstante que el elemento pivote a_{22} no es cero. Así, procedemos ahora análogamente a como lo hicimos en el caso anterior para las filas 3,...n , definiendo los multiplicadores r_{32} y r_{42} a partir del elemento pivote a_{22} y los de las filas por debajo:

$$r_{i2} = -\frac{a_{i2}}{a_{22}} ; \quad \forall i > 2 . \quad r_{32} = 0; r_{42} = -3$$

Con estos factores, sustituyendo las filas 3 y 4 de \hat{A}_1 por el resultado de multiplicar esas filas por la del pivote (la fila 2) más las filas 3 y 4, resulta

$$\hat{A}_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & -15 & -4 & 23 \end{array} \right]$$

Esta matriz \hat{A}_2 también se hubiera obtenido multiplicando la matriz L_2 por la \hat{A}_1 .

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad L_2 = I + \alpha_2 e_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etapas 3.

Finalmente, hay que hacer cero el elemento a_{43} a partir del elemento pivote en la fila 3. Procediendo de forma análoga mediante el multiplicador $r_{43} = -a_{43}/a_{33} = 10$, Definiendo la matriz L_3 de forma análoga a las L_1 y L_2 , resulta:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{A}_3 = L_3 \hat{A}_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

De esta forma, se ha obtenido un sistema de ecuaciones triangular superior, resoluble directamente de forma secuencial desde la última fila hasta la primera.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema se lleva a cabo muy fácilmente mediante sustitución inversa:

$x_4 = -2$; sustituyendo en la tercera ecuación:

$$x_3 = \frac{-\frac{5}{2} + 1}{3/2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-7 - (-2) - (-1)}{-1} = 4$$

$$x_1 = \frac{-9 + 7(-2) - 3(-1) + 2(4)}{-4} = 3$$

A la hora de valorar las prestaciones de un algoritmo numérico se han de considerar diversos factores. Dos de los más importantes son sin duda la estabilidad numérica del algoritmo ante los efectos de los errores de redondeo y la cantidad de tiempo necesaria para completar los cálculos. Errores de redondeo y tiempo de cálculo dependen del número de operaciones aritméticas necesarias para la aplicación del algoritmo. Por el

método de Gauss el número de operaciones es del orden de $\frac{1}{3}n^3$ lo que da idea de lo que puede ser resolver sistemas de varios miles de ecuaciones por el método de Gauss.

Número de operaciones aritméticas

A la hora de valorar las prestaciones de un algoritmo numérico se han de considerar diversos factores. Dos de los más importantes son sin duda la estabilidad numérica del algoritmo ante los efectos de los errores de redondeo y la cantidad de tiempo necesaria para completar los cálculos. Errores de redondeo y tiempo de cálculo dependen del número de operaciones aritméticas necesarias para la aplicación del algoritmo.

Los tiempos necesarios para realizar en un ordenador la multiplicación y la división de dos números son aproximadamente iguales y, por otro lado, considerablemente mayores, en términos relativos, que los tiempos necesarios para realizar la suma o diferencia de dos números, que son muy semejantes entre sí. La relación entre el tiempo que requiere una multiplicación (división) y una suma (resta) varía de un ordenador a otro.

Determinemos el número de operaciones aritméticas que requiere el procedimiento de eliminación de Gauss para resolver un sistema de

ecuaciones lineales. En la primera etapa, las operaciones que se realizan están simbólicamente representadas en el esquema que sigue.

$$\begin{pmatrix} x & x & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x & x \\ x & x & \cdots & x & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x & x \\ 0 & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & a & a \\ 0 & a & \cdots & a & a \end{pmatrix}$$

El símbolo 'a' indica los elementos de la matriz que se ven afectados en esa etapa y que, en principio, son distintos de cero.

Si estamos en la etapa i transformando una matriz de $n \times n$, las operaciones que en ella se realizan son

$n - i$ Divisiones para el cálculo de los factores o multiplicadores

$(n - i)(n - i + 1)$ Multiplicaciones y restas para modificar los elementos de la matriz por debajo de la fila i que no están en la propia columna i

Sumando el número de operaciones en cada etapa se obtiene:

$$(n - i) + (n - i)(n - i + 1) = (n - i)(n - i + 2) \quad \text{multiplicaciones / divisiones}$$

$$(n - i)(n - i + 1) \quad \text{sumas / restas}$$

En las $(n - 1)$ etapas de que consta el proceso se harán:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)(n-i+2) &= (n^2 + 2n) \sum_{i=1}^{n-1} 1 - 2(n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \\ &= (n^2 + 2n)(n-1) - 2(n+1) \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6} \end{aligned}$$

Multiplicaciones o divisiones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)(n-i+1) &= (n^2 + 2n) \sum_{i=1}^{n-1} 1 - (2n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \\ &= (n^2 + n)(n-1) - (2n+1) \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{6} = \\ &= \frac{n^3 - n}{3} \end{aligned}$$

Sumas o restas

Es decir, para sistemas grandes, el número de operaciones es del orden de $(1/3)n^3$.

Aunque la cantidad $(1/3)n^3$ pueda parecer muy grande, si la comparamos con el método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, podemos comprobar que la diferencia es más que notable. Por ejemplo, para un sistema 10×10

Gauss 700 operaciones

Cramer 400.000.000 de operaciones.

4.2. Factorización LU

La factorización LU o factorización triangular busca expresar una matriz cuadrada regular como producto de una triangular inferior **L** y otra triangular superior **U**. De tal manera que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$$

el problema de resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se reduce a resolver 2 sistemas de ecuaciones triangulares:

$$(LU)x = b; \quad Ly=b \text{ (triangular inferior)} \quad Ux=y \text{ (triangular superior)}$$

Este hecho tiene una gran importancia cuando se quiere resolver sistemas en los que la matriz A es siempre la misma y lo único que cambia es el término independiente.

En el ejemplo anterior de la eliminación de Gauss, partiendo de la matriz A (la de los coeficientes) se obtuvo otra matriz U triangular superior, fruto de ir multiplicando (por la derecha) por las matrices con coeficientes L_i , de forma que $L_3L_2L_1A=U$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasando las matrices L_i al otro lado de la ecuación, resulta que:

$$A = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}U = LU, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde una matriz A se ha descompuesto, mediante la eliminación de Gauss, en dos matrices triangulares, una inferior L y una superior U, cuyo producto es la matriz original A, y por tanto, permite resolver un sistema de ecuaciones lineales en dos sistemas inmediatos, uno triangular inferior ($Ly=b$), y a continuación otro triangular superior ($Ux=y$).

4.3. Factorización PLU

En el ejemplo puesto en el apartado 3.1. de la eliminación de Gauss, no ha hecho falta aplicar una de las operaciones fundamentales del método descritas anteriormente, en concreto la c que hace referencia a la permutación del orden de las ecuaciones en el sistema. En otro ejemplo de sistema de ecuaciones, hubiera podido suceder que el elemento pivote de una transformación de columnas fuera cero, lo cual hubiera abortado la posibilidad de obtener los multiplicadores r_{ij} (por ejemplo, si el elemento a_{11}

de la matriz fuera cero). En ese caso, se hubiera tenido que alterar el orden de las ecuaciones en el sistema, lo cual significa que la eliminación de Gauss sigue siendo viable, que se siga obteniendo una matriz triangular superior U, pero en la factorización $A=LU$, la matriz L derivada de los multiplicadores incluye las permutaciones, que hace que L no sea triangular inferior. En este caso, puede incluirse una nueva matriz P de permutaciones, que solo tiene unos y ceros, de forma que si se cumpla la factorización:

$$A=PLU$$

La matriz U es una matriz triangular superior tal cual se obtiene de la eliminación de Gauss. La matriz L es una matriz triangular inferior que almacena las eliminaciones que se han llevado a cabo durante la eliminación de Gauss. La matriz P, no siempre presente, es una matriz de permutación que recoge los intercambios de ecuaciones que se han producido durante la eliminación. Aunque los intercambios se llevan a cabo de uno en uno, se pueden juntar todos en una única matriz.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \text{fila 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{fila 3} \\ \text{fila 1} \\ \text{fila 4} \\ \text{fila 2} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz de permutación cumple que $P^T P = I$ y por lo tanto $P^{-1} = P^T$

Como se ha dicho la matriz L almacena cada uno de los pasos del proceso de eliminación, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \text{fila 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} + 5 \text{ fila 2} \\ \text{fila 4} - 3 \text{ fila 2} \end{pmatrix}$$

Ilustraremos el procedimiento utilizando una matriz de 3x3

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & -4.2 & -0.8 \\ 4.0 & 1.5 & 3.0 \\ 8.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Aunque no es estrictamente necesario, una buena forma de proceder es seleccionar como elemento pivote el de mayor valor absoluto. Esto se conoce como pivoteo parcial. En nuestro ejemplo comenzamos intercambiando las filas 3 y 1.

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & 1.0 \\ 4.0 & 1.5 & 3.0 \\ 1.6 & -4.2 & -0.8 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si llevamos a cabo la eliminación de Gauss de la primera columna, los factores de eliminación serán:

$$r_{21} = -\frac{4.0}{8.0} = -0.5; \quad r_{31} = -\frac{1.6}{8.0} = -0.2$$

Así pues:

$$L_1(P_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & 1.0 \\ 4.0 & 1.5 & 3.0 \\ 1.6 & -4.2 & -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 2.0 & 2.5 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo con el procedimiento intercambiamos filas 2 y 3

$$P_2(L_1 P_1 A) = \begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ 0 & 2.0 & 2.5 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por último:

$$L_2(P_2 L_1 P_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -4.0 & -1.0 \\ 0 & 2.0 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si combinamos todos los pasos que hemos realizado hasta este momento obtenemos:

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Despejando la matriz A, teniendo en cuenta que las matrices P_i son simétricas y operando:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}_1^T \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{P}_2^T \mathbf{L}_2^{-1}) \mathbf{U} = (\mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2^{-1}) \mathbf{U} = \mathbf{L}^* \mathbf{U}$$

con

$$\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Señalar que como consecuencia de las permutaciones intermedias el resultado $\mathbf{L}^* = (\mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2^{-1})$ no es una matriz triangular inferior estrictamente hablando:

$$\mathbf{L}^* = (\mathbf{P}_1 \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{L}_2^{-1}) = \begin{pmatrix} 0.2 & 1.0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1.0 \\ 1.0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplemente deshaciendo las permutaciones

$$(\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1) \mathbf{A} = (\mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1) \mathbf{L}^* \mathbf{U} = \mathbf{L} \mathbf{U}; \text{ y definiendo } \mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1, \text{ resulta que}$$

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{LU}$$

Donde P es una matriz de permutaciones (tiene unos y ceros, sólo un uno por cada fila y columna), L una triangular inferior y U una triangular superior. Aplicándolo al ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora volvemos al uso de la factorización

$$Ax = P^T \underbrace{L}_{y} \underbrace{Ux}_{z} = b$$

Primero resolvemos para z así: $P^T z = b$ que corresponde a cambiar el orden en b. A continuación resolvemos $L y = z$ este sistema es triangular inferior, por lo que se puede resolver por sustitución hacia delante, y finalmente resolvemos $U x = y$ que nos da la solución del sistema.

4.4 Matrices definidas positivas. Factorización LDL^T y factorización de Cholesky

Una matriz simétrica A es definida positiva si y sólo si

$$x^T Ax > 0$$

para cualquier vector x diferente del vector nulo. Esta es una condición difícil de verificar, pero existen condiciones equivalentes que, en ocasiones son más prácticas. Por ejemplo A será definida positiva si todos sus valores propios son positivos. O también si al aplicar eliminación de Gauss a la matriz A sin usar pivotación (no existen permutaciones de filas) para obtener una matriz triangular superior todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz transformada son también positivos.

De forma similar una matriz simétrica es:

- *semidefinida positiva* si $x^T Ax \geq 0$ para todo x (todos los valores propios son no negativos, o bien todos los elementos de la diagonal principal al hacer la eliminación de Gauss son no negativos)

- *definida negativa* si $x^T A x < 0$ para todo x . (Todos los valores propios son negativos, o bien todos los elementos de la diagonal principal al hacer la eliminación de Gauss son negativos)
- *semidefinida negativa* si $x^T A x \leq 0$ para todo x . (Todos los valores propios son no positivos, o bien todos los elementos de la diagonal principal al hacer la eliminación de Gauss son no positivos)
- *indefinida* si $x^T A x$ puede tanto tomar valores tanto positivos como negativos. (los valores propios son algunos positivos y otros negativos, o bien los elementos de la diagonal principal al hacer la eliminación de Gauss aparecen con diferentes signos)

Si la matriz A es simétrica y definida positiva, la eliminación de Gauss se puede llevar a cabo siempre sin utilizar pivoteo parcial sin peligro de que el método intente realizar una división por cero y sin peligro de que aparezcan dificultades numéricas.

Si no hay intercambio de filas la factorización LU toma la forma

$$A = LU$$

Las primeras dos factorizaciones se pueden obtener manipulando esta fórmula.

Sea D la matriz diagonal cuyas entradas son las entradas de la diagonal principal de la matriz U : $d_{i,i} = u_{i,i}$. Definamos $\hat{U} = D^{-1}U$ y por lo tanto $D\hat{U} = U$.

Así pues $A = LD\hat{U}$. Si A es definida positiva entonces es también simétrica y por lo tanto:

$$A^T = (\hat{U})^T D^T L^T = (\hat{U})^T D L^T = A = LD\hat{U}$$

es fácil verificar que $\hat{U} = L^T$ y por lo tanto:

$$A = L D L^T$$

Si la matriz A es definida positiva todos los elementos de la diagonal principal deben ser positivos. Podemos modificar la factorización anterior por otra:

$$A = L \mathbf{D} \mathbf{D} L^T$$

donde $D = \mathbf{D} \mathbf{D}$ y por lo tanto los elementos de la diagonal principal de esta nueva matriz serán $\mathbf{d}_{i,i} = (d_{i,i})^{1/2}$

Si nosotros definimos $\mathbf{L} = L \mathbf{D}$ entonces $A = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ que se conoce como factorización de *Cholesky*.

Veamos un ejemplo:

consideremos la siguiente matriz que es simétrica y definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 1.4 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 1.5 & -0.3 \\ 0.1 & -0.3 & 1.8 \end{pmatrix}$$

Haciendo la eliminación de Gauss podemos representarla como LDL^T donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1429 & 1 & 0 \\ 0.0714 & -0.1942 & 1 \end{pmatrix} \text{ y además } D = \begin{pmatrix} 1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4714 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7374 \end{pmatrix}$$

podemos modificar la matriz D para calcular \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1.1832 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2130 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3181 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$A = L \mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} 1.1832 & 0 & 0 \\ -0.1690 & 1.2130 & 0 \\ 0.0845 & -0.2355 & 1.3118 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1832 & -0.1690 & 0.0845 \\ 0 & 1.2130 & -0.2355 \\ 0 & 0 & 1.3181 \end{pmatrix}$$

Debido al carácter simétrico de la matriz el coste de cálculo de la factorización de Cholesky es aproximadamente la mitad que el de la factorización PLU

5. Normas de vectores y matrices

Una norma nos da una medida, mediante un escalar positivo, de la magnitud de los elementos de un vector o una matriz que le dá en su conjunto. Es decir, es el equivalente a la noción de valor absoluto para números reales.

En general una norma tiene que cumplir las siguientes propiedades:

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall x$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Consideremos primero normas de vectores.

$$\text{Sea } x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$$

las normas más comunes son:

Norma 2:

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Norma 1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Norma infinito

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Son casos especiales de

Ejemplo:

$$x = (1, 2, 3)^T$$

$$\|x\|_1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\|x\|_2 = (1 + 4 + 9)^{1/2} = \sqrt{14}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max\{1, 2, 3\} = 3$$

En muchos casos no importa realmente que norma se esté usando, por lo que es útil en ocasiones usar la notación $\|x\|$ sin más especificaciones. En problemas grandes de software es útil usar la norma infinito.

Si el vector tiene muchas entradas la norma 1 y la 2 son valores grandes independiente de que los valores sean todos pequeños. la norma infinito no cumple esta propiedad.

Las normas de matrices se suelen definir en términos de las normas vectoriales. Si A es una matriz y x es un vector cualquiera, la norma matricial inducida de la matriz A viene dada por :

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Todas las normas inducidas satisfacen:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

y además se tiene que cumplir:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Las normas matriciales inducidas por los vectores son :

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}| \quad (\text{m\u00e1ximo de la suma de los valores absolutos de las columnas})$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \quad (\text{m\u00e1ximo de la raiz cuadrada de los valores propios de } A^T A)$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \quad (\text{m\u00e1ximo de la suma de los valores absolutos de las filas})$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -5 & 7 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+5+2, 3+7+1, 2+9+6, 4+3+8\} = 17$$

$$\|A\|_{\infty} = \max\{1+3+2+4, 5+7+9+3, 2+1+6+8\} = 24$$

$$\|A\|_2 = \max(0, 19.2065, 105.1842, 174.6093)^{1/2} = 13.2140$$

Condicionamiento de sistemas de ecuaciones lineales

El concepto de condicionamiento de un problema es algo a lo que se recurre a menudo, aun cuando el concepto es algo difuso o vago. En un sentido general, se dice que un problema est\u00e1 bien condicionado si peque\u00f1os

cambios en los parámetros que lo definen producen pequeños cambios en los resultados. Para decidir si tal o cual problema está bien condicionado habría que determinar su sensibilidad a cada uno de sus parámetros. Como ejemplo de condicionamiento podríamos considerar el de una carga sujeta a una superficie firme mediante un cable o barra de hierro. Aumentando la carga en pequeñas cantidades, el cable o barra sufre unos pequeños estiramientos proporcionales a los incrementos de esa carga. Alcanzando el umbral que define la zona denominada de fluencia, incrementos muy pequeños de la carga suponen, proporcionalmente grandes estiramientos del cable. Antes de este umbral el problema estiramiento/carga se puede decir que está bien condicionado; en la zona de fluencia por el contrario el problema está mal condicionado.

Un sistema de ecuaciones lineales representado $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, como modelo matemático de un determinado problema también puede estar mal o bien condicionado. Su condicionamiento lo determina la estabilidad del vector solución \mathbf{x} a pequeños cambios, tanto en el término de la derecha \mathbf{b} , como en los coeficientes que definen la matriz \mathbf{A} .

Particularmente importante es el asunto del condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales si tenemos en cuenta que el ordenador que lo ha de resolver no trabaja más que con una precisión determinada, por lo tanto no resolverá el sistema como tal sino una aproximación:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

Si el algoritmo utilizado es estable y el sistema también cabe esperar que el resultado obtenido sea muy parecido al real. Sin embargo, si el sistema está mal condicionado la solución puede diferir sustancialmente de la real.

De estas consideraciones se desprende que puede ser necesario cuantificar el condicionamiento de un sistema de ecuaciones. Esto se hace a través del número de condicionamiento de una matriz que veremos más adelante.

Antes consideremos los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0.66 & 3.34 \\ 1.99 & 10.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

La solución de ambos es el vector $[1,1]^T$. Si introducimos un $\Delta \mathbf{b} = [-0.04, -0.06]^T$ en el término independiente del primer sistema, su solución pasará a ser $[0.993, 0.9968]^T$. El cambio relativo de la norma euclídea del vector \mathbf{b} es

$$\frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\sqrt{0.04^2 + 0.06^2}}{\sqrt{3^2 + 14^2}} = 0.0050$$

Por lo que respecta a la solución ese cambio relativo en la norma euclídea es

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.0054$$

Como se puede ver un cambio pequeño en el vector \mathbf{b} induce un cambio pequeño en el vector solución.

Introduciendo el mismo cambio en el vector \mathbf{b} del segundo sistema su solución pasa a ser $\mathbf{x} = [6, 0]^T$ es decir un cambio relativo en la norma euclídea de \mathbf{b} igual a 0.0057, produce un cambio relativo en el vector solución de 3.6055.

Evidentemente el segundo sistema es mucho más sensible a cambios en el término independiente que el primero. Un estudio similar se podría hacer introduciendo pequeños cambios en la matriz de coeficientes.

Analicemos en primer lugar el caso de una modificación $\Delta \mathbf{b}$ del término independiente. Veamos como se relaciona la solución de

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} \quad \text{con la de} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Restando las dos ecuaciones anteriores y despejando $\Delta \mathbf{x}$ se obtiene que:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b}$$

De la definición de norma matricial consistente con una norma vectorial se tiene que

$$\begin{aligned}\|\Delta \mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{b}\| \\ \|\mathbf{b}\| &\leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|\end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores podemos deducir que el error relativo de la solución del sistema al modificar el término independiente es:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Se define entonces el *número de condición* de una matriz invertible \mathbf{A} como:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

El número de condición de una matriz \mathbf{A} es un factor del error de ampliación que produce en el vector \mathbf{x} su multiplicación por la matriz \mathbf{A}

De la misma forma que analizamos el efecto de pequeños cambios en el término independiente, se pueden estudiar cambios en la matriz de coeficientes. Comparandola solución de los dos sistemas siguientes:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{y} \quad (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

con las dos ecuaciones anteriores y despreciando el producto $\Delta \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{x}$ se obtiene que:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Así el error relativo que resulta de aplicar unos pequeños cambios en los coeficientes de la matriz de un sistema de ecuaciones lineales está acotado en términos del número de condición de la matriz de coeficientes.

El número de condición indica también lo cerca que la matriz está de la singularidad.

Recordando el ejemplo que se utilizaba para introducir estos conceptos, las matrices de coeficientes y sus inversas son respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.05 \\ -0.4 & 0.08 \end{bmatrix}$$

El número de condición es $= \kappa_1(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = 15 \cdot 0.14 = 2.1$

$$A = \begin{bmatrix} 0.66 & 3.34 \\ 1.99 & 10.01 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 250.25 & 83.5 \\ 49.75 & -16.5 \end{bmatrix}$$

Con número de condición $= \kappa_1(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = 13.35 \cdot 300 = 4005$ tres ordenes de magnitud superior.

6. Métodos iterativos

En los apartados anteriores se pueden entrever las dificultades con las que puede encontrarse un usuario de esos métodos a la hora de resolver problemas grandes o muy grandes. Como ejemplo supongamos que se desea modelizar la temperatura en las distintas partes de un cuerpo tridimensional con forma de paralelepípedo; suponiendo que la temperatura de una partícula en ese cuerpo depende de su posición, su valor se puede aproximar discretizando cada una de las tres dimensiones del cuerpo en una serie de intervalos determinados y considerando cada uno de los pequeños trocitos de la malla que se obtiene. Si cada dirección se divide en 100 intervalos la malla resultante tendrá $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ elementos. a pesar de que en este sencillo ejemplo existe un sólo parámetro físico a considerar, la temperatura, el modelo adoptado involucra cálculos con un millón de variables o incognitas: la temperatura en cada elemento.

Como se puede comprender, los métodos directos tal como se han estudiado, no se pueden aplicar a problemas de grandes dimensiones, como el del ejemplo. afortunadamente muchos de los grandes problemas que se plantean habitualmente en la industria y en la técnica presentan unas

matrices de coeficientes en las que los elementos distintos de cero son muy pocos. En el caso del ejemplo anterior se puede asumir que la temperatura en cada elemento sólo está íntimamente relacionada con la de los más próximos a él. En los últimos años se han desarrollado técnicas especiales que permiten trabajar con *matrices dispersas* como en el caso anterior.

Sin embargo, una forma más clásica de resolver problemas de grandes dimensiones sin utilizar los métodos directos la conforman los métodos iterativos.

La idea general de los métodos iterativos consiste en llegar a la solución real del problema mediante una sucesión de soluciones que converjan a aquella. Estos métodos no proporcionan, teóricamente la solución exacta, aunque sí permiten, cuando funcionan bien, acercarse a aquella tanto como se desee.

Si consideramos que el problema a resolver es el de determinar un vector \mathbf{x} tal que $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ la idea común de todos los métodos iterativos estriba en descomponer la matriz de coeficientes \mathbf{A} de la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}-\mathbf{S}$$

donde la matriz \mathbf{R} se elige de manera que sea invertible con inversa fácilmente calculable, la ecuación $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ se puede escribir:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{Sx} + \mathbf{b}$$

o bien $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Mx} + \mathbf{c}$

la ecuación $\mathbf{x}=\mathbf{Mx} + \mathbf{c}$ sugiere la definición de un esquema iterativo del tipo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Mx}^{(k)} + \mathbf{c}$$

con el que partiendo de un vector inicial arbitrario \mathbf{x}_0 se obtenga una sucesión de vectores que converja a la solución real de la ecuación. El método iterativo será convergente si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

Las técnicas iterativas rara vez se emplean para resolver sistemas de ecuaciones lineales de pequeña dimensión pues el tiempo y el número de iteraciones requerido para lograr una precisión suficiente en la solución excede a la de los métodos directos.

6.1. Método de Jacobi

El primero de los métodos que consideramos es el de Jacobi. Para familiarizarse con su mecánica, supongamos que se desea resolver el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Admitiendo que los coeficientes a_{11} , a_{22} , a_{33} son distintos de cero se puede despejar de la primera ecuación la incógnita x_1 de la segunda x_2 y x_3 de la tercera, resultando:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}) \end{aligned}$$

La generalización de esta idea es la base del método iterativo de Jacobi. La relación general de recurrencia para un sistema $n \times n$ es :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Razonando de igual forma a como lo hacemos al principio de este capítulo, descompongamos la matriz de coeficientes del sistema, \mathbf{A} , de la forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - (\mathbf{D} - \mathbf{A})$$

donde \mathbf{D} es la matriz diagonal formada por los elementos de la matriz diagonal de \mathbf{A} . El esquema iterativo del método de Jacobi escrito de forma matricial resulta:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

La matriz $\mathbf{J} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$ es la que caracteriza el método de Jacobi denominándose *Matriz de Jacobi*.

Método de Gauss-Seidel

En el método de Jacobi cada una de las componentes del vector solución en la iteración (k+1) se determina a partir de las de la iteración (k). La idea del método de Gauss-Seidel es muy intuitiva, modificar el de Jacobi utilizando en el cálculo de cada componente de la solución en una iteración el valor de aquellos ya calculados en esa iteración. Volviendo al sistema de orden 3 que considerábamos para introducir el método de Jacobi, suponiendo nuevamente que los coeficientes de la diagonal principal son distintos de cero, el esquema iterativo del método de Gauss-Seidel es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Si en el método de Jacobi las relaciones de recurrencia que conformaban el esquema iterativo se obtenían de despejar cada variable en su correspondiente ecuación, en el método de Gauss-Seidel esas relaciones surgen de hacer esto mismo pero de una forma que podríamos denominar escalonada.

La relación de recurrencia general para un sistema n x n es la siguiente:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right); i = 1, \dots, n$$

Si se introducen las matrices:

$$\mathbf{E} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y volvemos a considerar la descomposición de la matriz del sistema \mathbf{A} de la forma

$$\mathbf{A} = (\mathbf{D} - \mathbf{E}) - \mathbf{F}$$

El sistema iterativo escrito en forma matricial resulta :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{b}$$

Y por lo tanto la matriz de Gauss será:

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} - (\mathbf{D} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}$$

7. Resumen

- En este tema se ha presentado como resolver sistemas de ecuaciones lineales por métodos numéricos, problema muy común y complejo dado que bien suele hacer falta en muchas disciplinas o bien hace falta su resolución dentro de otro método numérico.
- Existen dos métodos bien diferenciados, los métodos directos y los métodos iterativos.
- Los métodos directos se basan en la resolución de sistemas de ecuaciones triangulares. Para ello, se debe factorizar la matriz de

coeficientes del sistema en dos matrices triangulares, mediante el denominado métodos de factorización de Gauss (o bien incluyendo una de permutaciones). De cualquier forma, hay que comprobar si el sistema está bien condicionado, para no cometer posibles errores de precisión.

- Por otro lado, los métodos iterativos se emplearan en aquellos casos donde haya un número de ecuaciones muy grande y haya un alto número de elementos nulos en la matriz de coeficientes, pudiendo emplearse los métodos de Jacobi o Gauss Seidel

8. Programación en Matlab®

Para resolver el sistema de ecuaciones plantearemos varios subprogramas.

$$\begin{array}{l} Ax = PLU \quad x = b \\ Ux = y \\ Ly = z \\ Pz = b \end{array}$$

1.1. Resolución sistema triangular inferior

```
function y=trianginf(L,z)
f=length(z);% Numero de ecuaciones
y=zeros(f,1);

y(1)=z(1)/L(1,1);

for n=2:f
    sumatorio=0;
    for i=1:n-1
        sumatorio=sumatorio+L(n,i)*y(i);
    end
    y(n)=(z(n)-sumatorio)/L(n,n);
end
```

1.2. Resolución sistema triangular superior

```
function x=triangsup(U,y)
f=length(y);% Numero de ecuaciones

x=zeros(f,1);

x(f)=y(f)/U(f,f);

for n=f-1:-1:1
```

```

sumatorio=0;
for i=f:-1:n+1
    sumatorio=sumatorio+U(n,i)*x(i);
end
x(n)=(y(n)-sumatorio)/U(n,n);
end

```

1.3. Funcion para resolver sistemas lineales

```

function x=sistemalineal(A,b)
% COMPROBACIONES:
[f,c]=size(A);
k=length(b);
if f~=c
    disp('Te has equivocado')
    return
elseif f~=k
    disp('Te has equivocado')
    return
end

% SOLUCION:
[L,U,Pmatlab]=lu(A);
P=Pmatlab';% Para que coincida con lo que pone en los apuntes
z=P*b;
y=trianginf(L,z);
x=triangsup(U,y);

```

1.4. Metodos iterativos: Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$D =$ matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal de A

```

function x=jacobi(A,b)
f=length(b);
xsup=ones(f,1);

D=diag(diag(A));
I=eye(f);
J=I-inv(D)*A;

RE=max(eig(J));
if RE>=1
    disp('A lo mejor no converge')
    disp('El R.E. es >=1')
end

xmejor=zeros(f,1);

while norm(xsup-xmejor)/norm(xsup)>1e-3
    xsup=xmejor;
    xmejor=J*xsup+inv(D)*b;
end

x=xmejor;

```

1.5. Metodos iterativos: Gauss Seidel

$$x_i^{(k+1)} = (I - (D - E)^{-1} A)x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

D = matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal de A
 E = triangular inferior de A cambiada de signo

```
function x=gausseidel(A,b)
f=length(b);
xsup=ones(f,1);

D=diag(diag(A));
I=eye(f);

E=-tril(A,-1);

G=I-inv(D-E)*A;

RE=max(eig(G));
if RE>=1
    disp('A lo mejor no converge')
    disp('El R.E. es >=1')
end

xmejor=zeros(f,1);

while norm(xsup-xmejor)/norm(xsup)>1e-3
    xsup=xmejor;
    xmejor=G*xsup+inv(D-E)*b;
end

x=xmejor;
```

1.6. Ejemplo resolucion sistema por varios metodos

```
A=[2 1 0 4;0 -3 -12 -1;0 0 2 1/3;0 0 3 1];
b=[2 2 -8/3 -5]';

x=sistematica(A,b)

x1=jacobi(A,b)

x2=gausseidel(A,b)
```