REVIEM
Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática
ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 2, No. 3
DOI: 10.54541/reviem.v2i3.56

La competencia mirar profesionalmente de futuros profesores de matemáticas: uso de representaciones de la práctica

Prospective mathematics teachers' noticing competence: the use of representations of practice

A competência olhar profissionalmente dos futuros professores de matemática: utilização de representações da prática

Ceneida Fernández
Juan Manuel González-Forte
Pedro Ivars

Universidad de Alicante, Alicante, España

Recibido: 30/09/2022 – Aceptado: 30/11/2022 – Publicado: 16/12/2022

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Ceneida Fernández.
Correo electrónico: *ceneida.fernandez@ua.es*

Resumen
Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica que el profesorado sea capaz de identificar aspectos relevantes en una situación, usar su conocimiento para interpretarlos y decidir cómo continuar en la enseñanza. Esta competencia ha sido identificada como una de las competencias importantes a desarrollar en los programas de formación de profesorado de educación infantil, primaria y secundaria. El Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alicante (GIDIMAT-UA) ha contribuido a esta agenda de investigación y ha aportado características del desarrollo de esta competencia y de los entornos de aprendizaje que apoyan su desarrollo. Una de las características de los entornos de aprendizaje es el uso de representaciones de la práctica (viñetas) que proporcionan contextos reales para interpretar aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, por consiguiente, proporcionan oportunidades para relacionar las ideas teóricas con ejemplos de la práctica. Se presentan ejemplos de viñetas que forman parte de los entornos de aprendizaje de los programas de formación de profesores y que tienen el objetivo de desarrollar esta competencia. Además, se presentan algunos resultados que muestran características de cómo se desarrolla esta competencia.
Palabras clave: Mirar profesionalmente; Competencia docente; Representaciones de la práctica.

Abstract

Professional noticing of mathematical teaching-learning situations implies that teachers are able to identify relevant aspects of a situation, use their knowledge to interpret them and decide how to continue the instruction. This competence has been identified as one of the important competences to be developed in teacher training programmes for early childhood, primary and secondary education. The Research Group in Didactics of Mathematics at the University of Alicante (GIDIMAT-UA) has contributed to this research agenda by providing characteristics of how this competence is developed and characteristics of the learning environments that support its development. One of the features of learning environments is the use of representations of practice (vignettes) that provide real contexts for interpreting aspects of mathematics teaching and learning and thus provide opportunities to relate theoretical ideas to examples from practice. Examples of vignettes that are part of learning environments in teacher education programmes aiming to develop this competence are presented. In addition, some results are presented showing characteristics of how this competence is developed.

Keywords: Professional noticing; Teaching competence; Representations of practice.

Resumo

Olhar profissionalmente para situações de ensino e de aprendizagem matemática implica que os professores são capazes de identificar aspectos relevantes de uma situação, usar seus conhecimentos para interpretá-los e decidir como continuar ensinando. Esta competência foi identificada como uma das competências importantes a serem desenvolvidas nos programas de formação de professores para a primeira infância, ensino primário e secundário. O Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática da Universidade de Alicante (GIDIMAT-UA) contribuiu para esta agenda de pesquisa ao fornecer características de como esta competência é desenvolvida e características dos ambientes de aprendizagem que apoiam seu desenvolvimento. Uma das características dos ambientes de aprendizagem é o uso de representações da prática (vinhetas) que fornecem contextos reais para interpretar aspectos do ensino e aprendizagem da matemática e, assim, oferecem oportunidades para relacionar ideias teóricas a exemplos da prática. São apresentados exemplos de vinhetas que fazem parte de ambientes de aprendizagem em programas de formação inicial de professores e que visam desenvolver esta competência. Além disso, são apresentados alguns resultados que mostram características de como essa competência é desenvolvida.

Palavras-chave: Olhar profissionalmente; Competência docente; Representações da prática.

INTRODUCCIÓN

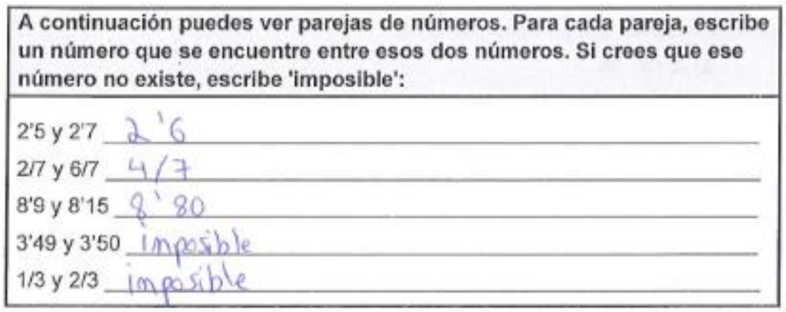
La competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas ha sido identificada como una de las competencias docentes relevantes para la práctica de los profesores de matemáticas, y, por tanto, se ha generado una agenda de investigación internacional para identificar características de su desarrollo en los programas de formación de profesores de matemáticas, y para analizar contextos que pueden apoyar su desarrollo (Dindyal *et al.*, 2021; Fernández & Choy, 2019; Jacobs & Spangler, 2017).

Esta competencia distingue a un experto en una determinada área de alguien que no lo es por su capacidad de ver ciertos fenómenos de una manera particular (Mason, 2002). En el caso de los profesores de matemáticas, la mirada profesional les permite identificar e interpretar aspectos importantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje para apoyar sus decisiones. Esta competencia implica que el profesorado use su conocimiento de matemáticas y conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para identificar e interpretar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y apoyar sus decisiones en el aula (Brown *et al*., 2020; Fernández *et al*., 2018; Thomas *et al.*, 2017).

Por ejemplo, en la Figura 1 se muestra la respuesta de un estudiante de educación secundaria a una actividad en la que se solicita escribir un número entre dos números decimales o entre dos fracciones.

Figura 1

Actividad y respuesta de un estudiante de educación secundaria



A continuación puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':

2'5 y 2'7 2'6
2/7 y 6/7 4/7
8'9 y 8'15 8'80
3'49 y 3'50 imposible
1/3 y 2/3 imposible

Nota. La notación utilizada para los números decimales era la usada en las aulas

Una mirada profesional permitiría a un profesor identificar que esta actividad implica el concepto de densidad. Las respuestas dadas por este estudiante de secundaria muestran que entre dos números "no pseudo-consecutivos" es capaz de encontrar otro número. Por ejemplo, 2.6 está entre 2.5 y 2.7 o 4/7 está entre 2/7 y 6/7. Sin embargo, entre dos números "pseudo-consecutivos" no es capaz de encontrar otro número. Por ejemplo, el estudiante dice que es imposible encontrar un número entre 3.49 y 3.50 o entre 1/3 y 2/3. Interpretar implica ver lo que hay detrás de estas respuestas. En este caso, este estudiante utiliza el conocimiento de los números naturales (conjunto discreto) en el conjunto de los números racionales. Esta interpretación de las respuestas erróneas dadas por el estudiante ayudaría al profesor a centrar su instrucción en ayudar al estudiante a "superar este sesgo del número natural", por ejemplo, utilizando actividades donde se introduzcan otros modos de representación como podría ser la recta numérica.

Las investigaciones han mostrado que esta competencia puede ser desarrollada en los programas de formación inicial y continua, identificando características de cómo el futuro profesorado de primaria y secundaria identifica e interpreta las situaciones de enseñanza y aprendizaje en diferentes contenidos matemáticos. Algunos contenidos matemáticos son: pensamiento algebraico (Magiera *et al*., 2013), razonamiento proporcional (Buforn *et al*., 2022; Son, 2013), derivada (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2019), límite (Fernández *et al.*, 2018) o numeración y algoritmos (Dick, 2017; Schack *et al.*, 2013).

El grupo GIDIMAT-UA del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante (España) ha aportado a esta agenda de investigación (Fernández *et al*., 2018) y ha generado: (i) información sobre las características de los entornos de aprendizaje, y en particular de las viñetas, para favorecer el desarrollo de la competencia en futuros profesores de educación infantil, primaria y secundaria (Fernández *et al.,* 2018; Llinares & Fernández, 2021; Llinares *et al.,* 2016; Sánchez-Matamoros *et al.,* 2019); (ii) descriptores del grado de desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento de los estudiantes (Ivars *et al*., 2018; Sánchez-Matamoros *et al*., 2018), y (iii) contextos que favorecen su desarrollo (Fernández *et al*., 2020; Ivars & Fernández, 2018).

Metodológicamente se diseñan experimentos de enseñanza (Design-Based Research Collective, 2003) que permiten el nexo entre la práctica de formar profesores y la investigación sobre su aprendizaje (Llinares, 2013). Un experimento de enseñanza está formado por ciclos de investigación en tres fases: diseño, implementación y análisis. En la fase de diseño se fijan los objetivos y se diseñan las tareas que favorecen el logro de los objetivos. En nuestras investigaciones, se diseñan los entornos de aprendizaje y las tareas profesionales que forman parte de estos. Posteriormente, los entornos de aprendizaje son implementados en los programas de formación de profesores de educación infantil, primaria y secundaria. Finalmente, se analiza el aprendizaje de los futuros profesores y el desarrollo de la competencia, pudiendo dar lugar a modificaciones de las tareas profesionales propuestas o modificaciones en el entorno de aprendizaje (rediseño). Tras el rediseño, se comenzaría un nuevo ciclo.

En este artículo, mostramos, en primer lugar, los principios teóricos para el diseño de los entornos de aprendizaje y las características de las tareas profesionales que conforman los entornos de aprendizaje y que, según la investigación, parecen mostrar que ayudan a desarrollar la competencia (Fernández, 2021; Fernández *et al*., 2018; Llinares & Fernández, 2021). En segundo lugar, mostramos un ejemplo de entorno de aprendizaje y tarea profesional que forma parte del programa de formación del profesorado de matemáticas. Posteriormente, se presentan algunos resultados que muestran características de cómo los futuros profesores miran profesionalmente. Finalmente se presentan algunas reflexiones a modo de conclusión y perspectivas de futuro.

PRINCIPIOS TEÓRICOS EN EL DISEÑO DE LOS ENTORNOS DE APRENDIZAJE

Los entornos de aprendizaje constan de diferentes tareas profesionales y son diseñados con el objetivo de desarrollar la competencia mirar profesionalmente en los programas de formación de profesores y, por tanto, de generar oportunidades para la práctica.

El desarrollo de la competencia implica el ser capaz de usar el conocimiento en la práctica de enseñar matemáticas, por tanto, ser capaz de usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en tareas profesionales como analizar o anticipar respuestas de estudiantes, analizar o diseñar actividades o gestionar la comunicación en el aula (Llinares, 2013). Desde esta relación, el aprendizaje del profesor se entiende como la participación en entornos de aprendizaje con un grado creciente de conocimiento y uso de los instrumentos característicos de la práctica.

El término instrumento integra tanto los instrumentos técnicos tales como materiales didácticos, rúbricas de evaluación, técnicas para gestionar los debates en el aula, como instrumentos conceptuales que integran, por ejemplo, información sobre los diferentes tipos de problemas aritméticos elementales de estructura aditiva, o las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes en estos tipos de problemas (Llinares, 2002). Los instrumentos técnicos permiten al profesor tener los medios para hacer o decidir en la práctica mientras que los instrumentos conceptuales le permiten poseer referencias para interpretar las situaciones de enseñanza-aprendizaje y tomar decisiones durante y para la instrucción.

Para llegar a ser competente en la práctica de enseñar matemáticas, el profesor debería ser consciente del potencial de los instrumentos para llevar a cabo las diferentes tareas que integran la práctica de enseñar matemáticas. Por tanto, el reto no está en que el futuro profesor conozca los instrumentos, sino que aprenda a construir nuevo conocimiento a partir de la práctica.

Desde esta perspectiva, tenemos en cuenta en el diseño de nuestros entornos de aprendizaje el carácter situado del conocimiento y la componente social del aprendizaje.

Las teorías de cognición situada (Brown *et al.*, 1989) asumen que el conocimiento es inseparable de los contextos y las actividades en los que se desarrolla. Brown *et al.* (1989) sugieren el uso de actividades auténticas entendidas como: "las prácticas ordinarias de la cultura" (p. 34). Desde esta perspectiva, en nuestro contexto, se usan representaciones de la práctica (también llamadas viñetas). Las representaciones de la práctica pueden ser respuestas de estudiantes a una actividad o varias actividades, interacciones entre un profesor y un estudiante, o un profesor y varios estudiantes, o bien, una colección de problemas o actividades de un libro de texto. Estas proporcionan contextos reales para analizar e interpretar un aspecto o varios aspectos de una situación de clase (Buchbinder & Kuntze, 2018). Esta reducción de información hace que las viñetas sean instrumentos útiles en la formación de profesores ya que permiten centrar la atención en aspectos sobre la práctica que son objeto de aprendizaje. Por tanto, las viñetas ofrecen oportunidades para relacionar ideas teóricas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con ejemplos de la práctica. Se pueden diseñar las viñetas en diferente formato (Friesen & Kuntze, 2018): video, escritas, animaciones o cómic.

Por otro lado, los entornos de aprendizaje diseñados reflejan la idea de que el futuro profesor construye activamente el significado en colaboración con otros. Este aspecto deriva de las perspectivas socioculturales del aprendizaje en las que se asume que aprender a enseñar matemáticas es un asunto de participación en un proceso social de construcción de conocimiento. En los entornos de aprendizaje se generan espacios de interacción como las discusiones presenciales en pequeños grupos o gran grupo o a través de un foro/debate virtual que permiten que los futuros profesores participen de manera activa, reflexionen, discutan y se apoyen (Fernández *et al.,* 2012; Fernández *et al.,* 2020). Por lo que las tareas profesionales que integran los entornos de aprendizaje permiten que el futuro profesorado construya activamente el significado en colaboración con otros.

Teniendo en cuenta estos principios, las tareas profesionales que forman los entornos de aprendizaje presentan las siguientes características: (i) están formadas por representaciones de la práctica (viñetas) y unas preguntas guía; (ii) un documento teórico con información procedente de investigaciones en Educación Matemática; y (iii) espacios de interacción para la reflexión y discusión de las ideas.

Las preguntas guía se centran en desarrollar en los futuros profesores aspectos específicos de la competencia docente mirar profesionalmente. El uso de éstas permite centrar la atención de los futuros profesores en los aspectos que son objeto de aprendizaje en la representación de la práctica utilizada. El documento teórico (instrumento) incluye información procedente de la investigación en Educación Matemática sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático implicado en la representación de la práctica. El objetivo de este documento teórico es proporcionar a los futuros profesores el conocimiento necesario para reflexionar y dar respuesta a la representación de la práctica.

UN EJEMPLO DE ENTORNO DE APRENDIZAJE

A continuación, se describe un entorno de aprendizaje diseñado para la asignatura "Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria" del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Alicante. El objetivo específico de este entorno es desarrollar en el futuro profesorado de matemáticas de Educación Secundaria la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria sobre los números racionales.

Este entorno de aprendizaje consta de dos sesiones de dos horas cada una (un total de cuatro horas). Durante las dos sesiones se trabaja un documento teórico y tres tareas profesionales (Figura 2). En la primera sesión se presenta el documento teórico en el que se proporciona información sobre las características de la comprensión de los números racionales en base a resultados obtenidos en investigaciones, y posteriormente el futuro profesorado tiene que usar la información de este documento para realizar la tarea profesional 1. En la segunda sesión el futuro profesorado participa en las tareas profesionales 2 y 3.

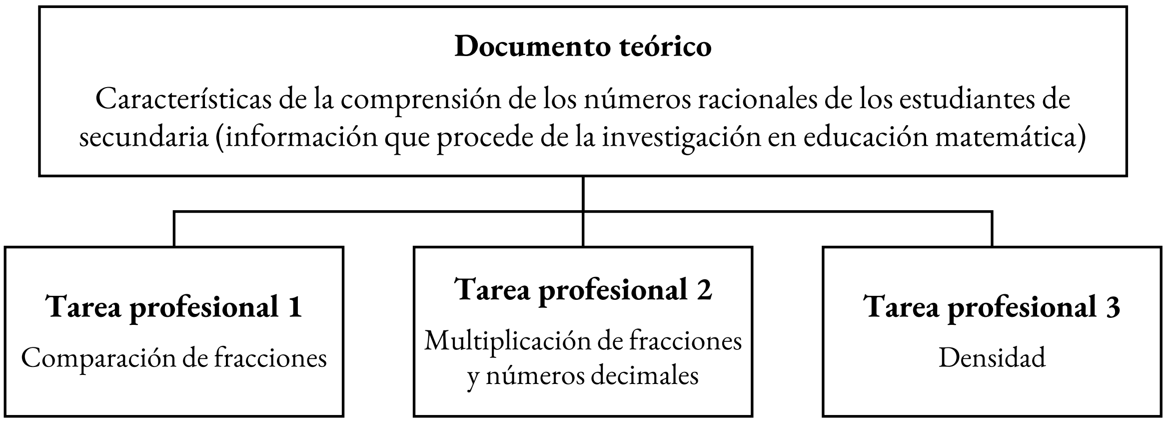
En particular, el documento teórico está formado por información procedente de investigaciones sobre la comprensión de los números racionales en estudiantes de secundaria (González-Forte *et al*., 2020; González-Forte *et al*., 2022). Esta información integra diferentes formas de razonar (correctas e incorrectas) de los estudiantes en i) actividades de comparar y ordenar fracciones y números decimales, ii) actividades de suma, resta, multiplicación y división con fracciones y números decimales, y iii) actividades sobre el concepto de densidad. Además, también se muestran diferentes tipos de actividades y variables de éstas que influyen en la actuación de los estudiantes.

Cada tarea profesional consta de respuestas escritas de estudiantes de secundaria a actividades con números racionales (representación de la práctica) y se les pide a los futuros profesores que describan cómo cada estudiante ha resuelto la actividad, que interpreten qué características de la comprensión de los números racionales exhibe cada estudiante; y finalmente, que diseñen una secuencia de actividades que ayude a cada estudiante a progresar en su comprensión. Además, en la secuencia de actividades diseñada se les solicita el objetivo de aprendizaje y justificar por qué y cómo ayudaría al estudiante a progresar.

Las respuestas escritas de los estudiantes de secundaria a las actividades que integran la tarea profesional muestran diferentes características de la comprensión sobre los números racionales.

Figura 2

Entorno de aprendizaje



EJEMPLO DE TAREA PROFESIONAL

Se presenta como ejemplo la tarea profesional 1 que está formada por una representación de la práctica en formato escrito: tres respuestas de estudiantes a una actividad de comparación de fracciones donde se tenía que *rodear* la fracción mayor y justificar por qué esta fracción era la mayor (Figura 3). Las tres respuestas de los estudiantes muestran diferentes razonamientos erróneos utilizados por los estudiantes de secundaria en la comparación de fracciones (González-Forte *et al*., 2020).

La respuesta de Juan Carlos (E1) muestra el uso de las propiedades de los números naturales en el conjunto de los números racionales, y en particular en las fracciones (sesgo del número natural). Aunque la respuesta de Juan Carlos es correcta, ya que 7/8 es mayor que 2/3, su razonamiento se centra en el conocimiento de los números naturales ya que justifica que 7/8 es mayor “porque tanto el denominador como el numerador son mayores”. El uso de este razonamiento deriva en una respuesta correcta ya que esta pareja de fracciones es compatible con este razonamiento. Sin embargo, este razonamiento deriva en una respuesta incorrecta cuando la pareja de fracciones no es compatible con este razonamiento, por ejemplo 5/8 y 2/3.

Figura 3

Representación de la práctica: Respuestas de tres estudiantes de secundaria a una actividad de comparación de fracciones

Respuesta de Juan Carlos (E1)

1. Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 7/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

porque tanto el denominador como el numerador son mayores

Respuesta de Vanessa (E2)

2. Rodea la fracción mayor

- 2/7
- 5/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

porque la diferencia que hay del nominador al denominador es menor.

Respuesta de Sandra (E3)

4. Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 5/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

porque está partido por un número menos que en el 5/8 y la solución daría un número mayor.

La respuesta de Vanessa (Figura 3-E2) muestra el uso de una aproximación aditiva (la fracción mayor es aquella con menor diferencia entre numerador y denominador). De nuevo, aunque la respuesta dada por Vanessa es correcta ya que 5/8 es mayor que 2/7, su razonamiento es incorrecto ya que usa la diferencia entre el numerador y denominador (gap thinking). El uso de este razonamiento deriva en una respuesta correcta ya que es compatible con la pareja de fracciones a comparar, pero lleva a la respuesta incorrecta con otros pares de fracciones incompatibles con este razonamiento (por ejemplo, 7/9 y 2/3).

Por último, la respuesta de Sandra (Figura 3-E3) muestra características del uso de la relación inversa (razonamiento inverso): "a menor número de divisiones en el denominador, las partes son mayores", razonamiento adecuado en la comparación de fracciones con el mismo numerador. En este caso, la respuesta es correcta ya que 2/3 es mayor que 5/8, sin embargo, el razonamiento es incorrecto ya que considera únicamente el número de partes y tamaño del denominador. De nuevo este razonamiento conduce a una respuesta correcta ya que la pareja de fracciones dada es compatible con este razonamiento, pero conduce a una respuesta incorrecta en pares de fracciones incompatibles con este razonamiento (por ejemplo, 7/8 y 2/3).

El futuro profesorado de matemáticas tiene que interpretar esta representación de la práctica (respuestas de los estudiantes de secundaria a la actividad de comparación de fracciones) contestando las preguntas guía que se les proporciona. Estas preguntas motivan el análisis de la comprensión de los estudiantes y el diseño de secuencias de actividades que ayuden al estudiante a progresar en su comprensión:

- Describe cómo ha resuelto cada estudiante la actividad.
- ¿Qué comprensión tiene cada estudiante sobre la comparación de fracciones?
- Diseña una secuencia de actividades para cada estudiante que le ayude a progresar en su comprensión. Especifica el objetivo de aprendizaje para cada secuencia diseñada y justifica por qué y cómo ayudaría a progresar al estudiante.

ANÁLISIS DE LA COMPETENCIA

Este entorno de aprendizaje fue implementado con 27 futuros profesores de matemáticas que estaban cursando la asignatura de "Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria". De los 27 participantes, 14 eran hombres y 13 eran mujeres.

Los datos que se analizan son las respuestas de los 27 futuros profesores a las tres tareas profesionales. Se lleva a cabo un análisis inductivo de generación de categorías por parte de varios investigadores. En una primera fase de análisis, se obtienen categorías para una tarea profesional que permite caracterizar cómo los futuros profesores interpretan la situación y apoyan sus decisiones. En una segunda fase de análisis, se comparan las respuestas de un mismo futuro profesor a varias tareas profesionales que conforman el entorno de aprendizaje para generar características de su desarrollo.

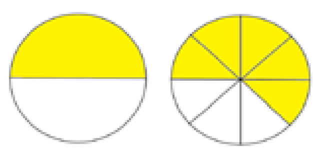
Se muestran a continuación, las respuestas de dos futuros profesores (FP8 y FP21) a la tarea profesional 1 descrita anteriormente como ejemplos del análisis de la primera fase.

El futuro profesor FP8 interpreta el razonamiento de Vanessa (E2 en Figura 2) identificando que, aunque Vanessa ha proporcionado una respuesta correcta, su razonamiento es erróneo ya que se centra en un razonamiento basado en diferencias (gap thinking). FP8 escribió lo siguiente:

> *Vanessa ha argumentado que es mayor la fracción cuya diferencia entre numerador y denominador es menor. Aunque la respuesta de Vanessa es la correcta, el razonamiento no lo es. Esto se debe a que ha hecho uso del denominado Gap thinking, un razonamiento por el cual se calcula la diferencia en valor absoluto entre numerador y denominador entre ambas fracciones [...] utiliza una relación aditiva entre numerador y denominador y no multiplicativa.*

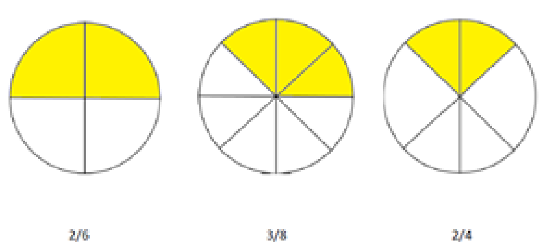
Además, es capaz de proporcionar una secuencia de actividades que podría ayudar a Vanessa a superar la aproximación aditiva dando razones que apoyan su decisión. Esta secuencia de actividades se centra en el uso de parejas de fracciones incompatible con su razonamiento en diferencias y en el uso de la representación gráfica (uso de círculos para representar las fracciones). A continuación, se muestra la secuencia de actividades proporcionada por FP8:

Ejercicio 1.
Contesta a los siguientes apartados.
a) Rodea la fracción mayor: 1/2 y 5/8. ¿Por qué crees que la fracción elegida es la mayor?
b) Rodea el círculo más pintado.



c) Si el primer círculo del apartado b) representa el número 1/2 y el segundo círculo el número 5/8. ¿Es el círculo más pintado el que representa la fracción que has elegido en el apartado a)? ¿A qué crees que se debe?

Ejercicio 2.
a) Une mediante una línea los círculos con la fracción (2/6, 3/8 y 2/4) que creas que representa el área del círculo pintada.



b) Ordena las fracciones descritas arriba de menor a mayor. ¿Por qué has elegido ese orden?

Ejercicio 3.
Contesta a los siguientes apartados.

> a) Rodea la fracción mayor 5/8 y 2/4. ¿Por qué crees que la fracción elegida es la mayor?
> b) Representa en un círculo las fracciones del apartado a).

Asimismo, este futuro profesor proporciona razones para justificar cada una de las actividades propuestas. Por ejemplo, proporciona la siguiente justificación para la actividad 1:

> *La intención del ejercicio 1 es explicar a Vanessa que un posible criterio alternativo al gap thinking es pensar en porciones circulares, ya que su enfoque es incorrecto. Para esto presentamos una tarea incongruente con su criterio ya que 8 - 5 = 3 y 2 – 1 = 1 por lo que la diferencia entre numerador y denominador es mayor para la fracción 5/8 aunque esta sea mayor que 1/2.*
>
> *El segundo ejercicio propuesto ayuda a entender la representación circular de las fracciones a Vanessa. Además, es una tarea incongruente con el gap thinking ya que 6 – 2 = 4 y 8 – 3 = 5 y sin embargo es mayor la fracción 3/8 que 2/6. Esto reforzará la idea de que su método anterior no era correcto y que dichas representaciones pueden ser útiles.*
>
> *Con este ejercicio trato de reafirmar lo aprendido por Vanessa. Mi intención es que realice el apartado a) pensando en círculos y comprobar que círculos ha pensado en el apartado b). De esta forma la representación circular se habrá convertido en un método de apoyo para Vanessa, y habrá comprendido que el criterio del gap thinking no es el adecuado.*

De la respuesta se observa que este futuro profesor es capaz de interpretar la respuesta de Vanessa al identificar que usa una aproximación basada en diferencias, de diseñar una secuencia de actividades que podría apoyar a Vanessa a superar la aproximación aditiva (usando una representación distinta -círculos- y usando parejas de fracciones incompatibles con su razonamiento incorrecto) y de proporcionar razones que apoyan su diseño a partir de las ideas teóricas proporcionadas.

Otro ejemplo es el futuro profesor FP21 que describió la respuesta de Vanessa como:

> *Toma el resultado de las fracciones como una diferencia entre el numerador y el denominador, y utiliza esto para hacer comparaciones con otras fracciones.*

Este futuro profesor identificó que Vanessa ha utilizado la diferencia entre numerador y denominador para hacer la comparación de fracciones. Sin embargo, interpretó que el razonamiento seguido por Vanessa era correcto, ya que indicó que era una estrategia válida para la pareja de fracciones dada. El hecho de obtener una respuesta correcta no significa que el razonamiento del estudiante sea correcto cuando se comparan fracciones. Tal y como mostraba el documento teórico "el razonamiento basado en diferencias es un razonamiento incorrecto usado por los estudiantes de secundaria con frecuencia":

> *Está bien planteado en el sentido de que cuando el numerador es menor que el denominador, aquella fracción cuya diferencia entre numerador y denominador sea menor, será la fracción más grande. El problema es que, a la hora de resolver el mismo tipo de ejercicio, pero con fracciones donde el numerador sea mayor que el denominador, esta estrategia no vale, pues se aplica de forma inversa.*

El análisis de esta respuesta revela que el FP21 presenta dificultades con el contenido matemático, es decir, con la comparación de fracciones, al identificar como correcto el razonamiento de Vanessa para las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador – fracciones propias.

Posteriormente, propuso la siguiente actividad de comparación de fracciones, para apoyar el progreso conceptual de Vanessa:

> Actividad: Decidir cuál es la fracción mayor de las siguientes parejas de fracciones:
>
> **a)** 7/2 y 8/5 **b)** 5/8 y 2/5 **c)** 2/3 y 7/8
> **d)** 1/3 y 3/5 **e)** 5/2 y 2/3 **f)** 3/2 y 8/5

Y escribió la siguiente justificación para esta actividad:

> *Esta actividad tiene como objetivo que la alumna no interiorice que todas las fracciones cuya diferencia entre numerador y denominador es menor, será la mayor, sino que también existe la posibilidad de que sea al revés, cuando el resultado de la fracción es mayor a la unidad.*

Se observa que el futuro profesor únicamente ofrece una actividad en lugar de una secuencia de actividades para apoyar el progreso de Vanessa. Por otra parte, se observa que se incluye parejas de fracciones que son incompatibles con la respuesta de la estudiante (por ejemplo, parejas de fracciones que tienen la misma diferencia entre numerador y denominador como el ejemplo *b* o fracciones impropias donde el razonamiento no es compatible). Sin embargo, la actividad propuesta por el FP21 no incluye ningún apartado o comentario sobre cómo ésta podría ayudar a la estudiante a darse cuenta de que su razonamiento no es correcto, como podría ser, solicitar que representara gráficamente las parejas de fracciones, o proporcionar la representación en contextos continuos (círculos), discretos o usando la recta numérica. Además, en la justificación que proporciona, se observa de nuevo que para el FP21 parece que el razonamiento usado por la alumna "es correcto" para algunas parejas de fracciones (propias), sin embargo, es uno de los razonamientos erróneos usados por los estudiantes, y aunque esta información aparecía en el documento teórico proporcionado, parece que el FP21 tienen dificultades con su uso para interpretar la respuesta de Vanessa.

Las respuestas de los futuros profesores FP8 y FP21 son ejemplos del análisis realizado en la primera fase a la tarea profesional 1. Desde este análisis se obtuvieron diferentes características de cómo los futuros profesores interpretaban las respuestas de los estudiantes y proponían secuencias de actividades justificadas. De esta manera, un grupo de futuros profesores lograron interpretar el razonamiento de los tres estudiantes y, además, fueron capaces de proponer una secuencia de actividades para ayudarles a progresar en su comprensión de los números racionales. Estos futuros profesores no solo tuvieron en cuenta la elección de los números implicados (actividades en las que se usaban parejas de fracciones incompatibles con el razonamiento del estudiante) sino que también apoyaron la comprensión de los estudiantes usando cambios de representación como por ejemplo representaciones gráficas (circular o rectangular), el uso de la recta numérica y la conversión de fracción a decimal. Un ejemplo es el análisis del FP8 mostrado anteriormente.

Sin embargo, no todos los futuros profesores lograron interpretar el razonamiento de los estudiantes y otros, habiendo identificado el razonamiento de los estudiantes, mostraron dificultades a la hora de proponer una secuencia de actividades para ayudar a estos estudiantes a progresar. Con relación al primer grupo de futuros profesores que no lograron interpretar el razonamiento de los estudiantes, se aprecia que manifestaron dificultades con la actividad propuesta, al considerar como correctos "razonamientos incorrectos", como el caso del FP21. Con respecto al segundo grupo de futuros profesores, aunque lograron interpretar el razonamiento, y por ende las dificultades de los estudiantes, mostraron dificultades para proponer una secuencia de actividades que les ayudara a superar sus dificultades. Las características de estas dificultades indican que los futuros profesores se limitaban a trabajar de nuevo con actividades de comparación y/o ordenación de fracciones en el modo de representación simbólico, y/o que los futuros profesores tenían dificultades para elegir las parejas de fracciones que debían incluir en las actividades diseñadas. Es decir, aunque propusieron actividades concretas, estas eran similares a las presentadas en actividad que tenían que resolver (Figura 3) y, además los números elegidos como ejemplos en estas actividades eran compatibles con el razonamiento de los estudiantes (en algunos casos) y, por tanto, no les permitían superar sus dificultades. Además, en estos casos, las secuencias de actividades propuestas no incluían cambios de representación que podrían ayudar a los estudiantes a visualizar que su tipo de razonamiento es incorrecto.

Aunque no era el objetivo a mostrar en este artículo, el análisis de las respuestas de los futuros profesores a las tres tareas profesionales que componen este entorno de aprendizaje, en la segunda fase de análisis, nos permitirá observar cambios en algunos de los futuros profesores y comenzar a caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en futuros profesores de matemáticas, en el dominio específico de los números racionales.

REFLEXIONES FINALES

Con base en los resultados se ha observado que el desarrollo de la competencia está vinculado a transitar desde un discurso básicamente descriptivo hacia un discurso organizado alrededor de las ideas teóricas con vínculos claros a las evidencias de la representación de la práctica (Llinares, 2019). En el ejemplo descrito del FP8, el futuro profesor va más allá de la valoración de la corrección de la respuesta o el razonamiento de la estudiante, al proporcionar una justificación de su propuesta de actividades que va más allá de la secuenciación de contenidos del currículo. Sin embargo, no todos los futuros profesores lograron llegar a este nivel de concreción, tal y como se ha mostrado en el ejemplo descrito del FP21. Este futuro profesor mostró dificultades con la identificación de los razonamientos incorrectos de los estudiantes de secundaria y con el diseño de la secuencia de actividades. Estos resultados coinciden con resultados obtenidos por estudios previos que informan que tomar decisiones de acción centradas en la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes es una actividad compleja para los futuros profesores y profesores en activo (Stahnke *et al*., 2016). Es decir, aunque los profesores y futuros profesores pueden aprender a identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes que les permiten interpretar su comprensión, algunas veces no logran usar esa información para tomar decisiones de acción (Barnhart & van Es, 2015). Además, también coinciden con estudios previos que han informado de la importante relación entre interpretar y decidir y el conocimiento matemático del dominio específico con el que se está trabajando (Dick, 2017; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2019).

Un nuevo espacio de indagación en esta agenda de investigación se centra en la manera en la que esta competencia se desarrolla durante los periodos de prácticas de los futuros profesores en los centros educativos (Llinares & Fernández, 2021). Nuestro grupo ha comenzado a aportar a esta agenda al proporcionar información sobre cómo apoyar su desarrollo a través de la escritura de narrativas de la propia práctica y el uso de foros donde se puedan compartir estas narrativas y se reciba *feedback* de otros compañeros y del propio tutor (Fernández *et al*., 2020; Ivars & Fernández, 2018).

ACLARATORIAS

Los autores no tienen conflictos de interés para declarar. Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto PID2020-116514GB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación, España y el apoyo del Programa de la Unión Europea Erasmus+ (project coReflect@maths, 2019–1–DE01–KA203–004947). El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

REFERENCIAS

Barnhart, T., & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18*(1), 32-42. https://doi.org/10.3102/0013189X018001032

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T., & Llinares, S. (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. From university-based activities to classroom practice. En G. M. Lloyd, & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3. Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 343-366). Koninklijke Brill NV. https://doi.org/10.1163/9789004419230_014

Buchbinder, O., & Kuntze, S. (Eds.) (2018). *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (ICME-13 Monographs). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70594-1

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., & Brown, L. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 425-443. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Design-Based Research Collective (2003). The Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

Dick, L. K. (2017). Investigating the relationship between professional noticing and specialized content knowledge. En E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts and Frameworks* (pp. 445-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_20

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H., & Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM Mathematics Education*, *53*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: práctica e investigación. *Realidad y Reflexión*, *53*, 40-60. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10887

Fernández, C., & Choy, B. H. (2019). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological, and social perspectives. En S. Llinares, & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Second Edition) (pp. 337-360). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fernández, C., Llinares, S., & Rojas, Y. (2020). Prospective mathematics teachers' development of noticing in an online teacher education program. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 959-972. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01149-7

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *36*, 143-162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *13*, 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Friesen, M., & Kuntze, S. (2018). Competence assessment with representations of practice in text, comic and video format. En O. Buchbinder, & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 113-130). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70594-1_7

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education*, *35*, 549-565. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00440-w

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van-Hoof, J., & Van Dooren, W. (2022). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7

Ivars, P., & Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. J. Stylianides, & K. Hino (Eds.), *Research Advances in the mathematical Education of Preservice Elementary Teachers. ICME-13 Monographs* (pp. 245-259) Springer. London. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3_17

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *EURASIA. Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(11), em1599. https://doi.org/10.29333/ejmste/93421

Jacobs, V. R., & Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K-12 mathematics teaching. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 766-792). National Council of Teachers of Mathematics.

Linares, S. (2002). La práctica de enseñar y aprender a enseñar matemáticas: la generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria*, *19*, 115-124.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus - Journal of Education*, *1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2019). Indicators for the development of noticing: how do we recognize them? *For the Learning of Mathematics*, *1*, 38-43.

Llinares, S., & Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, *24*(1), 185-205.

Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(8), 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 93-113. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9472-8

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. Routledge/Falmer. https://doi.org/10.4324/9780203471876

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematic teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *100*, 83-99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., & Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 379-397. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9240-9

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 49-70. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 1-27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H., & Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge. Exploring theoretical connections between profesional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator*, *26*, 3-25.

Cómo citar este artículo:
Fernández, C., González-Forte, J. M., & Ivars, P. (2022). La competencia mirar profesionalmente de futuros profesores de matemáticas: uso de representaciones de la práctica. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *2*(3), e202211. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i3.56