Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departament de Fisica, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA

Resúmenes de los temas

Ingeniería Técnica de Telecomunicación: Sonido e Imagen
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Augusto Beléndez Vázquez

Fundamentos Físicos de la Ingeniería

- Magnitudes y unidades
- Interacción eléctrica
- Interacción magnética
- Corrientes eléctricas
- El campo eléctrico
- El campo magnético
- El campo electromagnético
- Movimiento oscilatorio
- Movimiento ondulatorio
- Ondas electromagnéticas
- Reflexión, refracción y polarización
- Óptica Geométrica
- Interferencias
- Difracción
- Fotometría

Tema 1.- MAGNITUDES Y UNIDADES

• Magnitudes físicas y medidas

Magnitud física es todo aquello que se puede medir. La longitud, la masa, el tiempo, son magnitudes, ya que pueden medirse. Una magnitud física está correctamente expresada por un *número* y una *unidad*, aunque hay algunas magnitudes físicas (relativas) que no necesitan de unidades y representan cocientes de magnitudes de la misma especie.
Cantidad de una magnitud física es el estado de la misma en un determinado fenómeno físico. La aceleración es una magnitud física y el valor de la aceleración de la gravedad en un punto sobre la superficie de la Tierra es una cantidad de esta magnitud.
Las magnitudes físicas se dividen en tres grupos:
(i) *Magnitudes básicas o fundamentales:* Aunque las leyes físicas relacionan entre sí cantidades de distintas magnitudes físicas, siempre es posible elegir un conjunto de magnitudes que no estén relacionados entre sí por ninguna ley física, es decir, que sean independientes.
(ii) *Magnitudes derivadas:* Se derivan de las magnitudes físicas básicas mediante fórmulas matemáticas. Las leyes físicas que permiten su obtención a partir de las magnitudes fundamentales reciben el nombre de ecuaciones de definición.
(iii) *Magnitudes suplementarias:* Son el ángulo plano (θ), que se expresa en radianes (rad) y el ángulo sólido (Ω) que se expresa en estereorradianes (sr). El ángulo sólido completo alrededor de un punto es 4π sr.

Medir es comparar dos magnitudes de la misma especie, una de las cuales se toma como patrón. Se trata de determinar la cantidad de una magnitud por comparación con otra que se toma como unidad. El resultado de una medida es un número que debe ir acompañado de la unidad empleada. Para que se pueda efectuar una medida es necesario disponer del sistema que se pretende medir y un instrumento de medida que lleve incorporado el patrón a utilizar.
El proceso de medida siempre es imperfecto debido a deficiencias del experimentador y de los instrumentos de medida. El concepto de error surge como necesario para dar fiabilidad a las medidas efectuadas. Toda medida lleva consigo intrínsecamente una incertidumbre o error, de tal modo que no es posible conocer exactamente el número que la expresa. Por ello, cuando se realiza una medida en el laboratorio es importante conocer no sólo el valor de la magnitud física, sino también la exactitud con que ha sido determinada.

• Sistemas de Unidades. Sistema Internacional

Las unidades son los patrones que se eligen para poder efectuar medidas. Su elección es arbitraria por lo que es necesario un entendimiento entre todos los científicos.
A un conjunto de unidades que representan las magnitudes físicas de interés se les llama *sistema de unidades*, y se utilizan como unidades para medir otras cantidades de las magnitudes correspondientes.
Para definir un sistema de unidades es necesario establecer:
- La *base del sistema*, es decir, las magnitudes que se toman como fundamentales.
- La cantidad que se elige como *unidad* de cada magnitud fundamental.
- Las *ecuaciones de definición* de las magnitudes derivadas, los valores de las constantes de proporcionalidad de estas ecuaciones.

En Mecánica basta con elegir convenientemente tres magnitudes fundamentales y sus unidades para poder derivar todas las demás. Si se eligen longitud, masa y tiempo se tienen los llamados *sistemas absolutos*.
Si las magnitudes fundamentales son longitud, fuerza y tiempo se tienen los *sistemas técnicos* muy usados en ingeniería.

En la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960 se aceptó como *Sistema Internacional de Unidades (S.I.)* el que había propuesto, a principio de este siglo, el italiano Giorgi. En España fue declarado legal por la ley de Pesas y Medidas de 1967.

(i) *Magnitudes y unidades fundamentales*:

longitud	metro (m)
masa	kilogramo (kg)
tiempo	segundo (s)
corriente eléctrica	amperio (A)
temperatura termodinámica	kelvin (K)
cantidad de sustancia	mol (mol)
intensidad luminosa	candela (cd)

(ii) *Magnitudes y unidades derivadas:* Se expresan mediante relaciones algebraicas de las unidades fundamentales y de las suplementarias, haciendo uso de símbolos matemáticos de multiplicar y dividir. Para establecer la unidad derivada se escribe una ecuación que relacione la magnitud correspondiente con las fundamentales. Se hace después que las magnitudes valgan 1 y tendremos la unidad de la magnitud derivada.
Muchas de estas unidades han recibido nombre oficial y símbolo como newton (N), culombio (C), faradio (F), henrio (H), ohmio (Ω), tesla (T), voltio (V), etc.

(iii) *Unidades suplementarias:* El radián (rad) para el ángulo plano y el estereorradián (sr) como unidad de ángulo sólido.

(iv) *Prefijos del Sistema Internacional:* En ocasiones para medir ciertas cantidades resulta más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de la unidad. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades, tanto fundamentales como derivadas, se forman añadiendo un prefijo. Existen una serie de prefijos aceptados con sus símbolo y nombre particulares.

• Análisis dimensional. Ecuación de dimensiones

A las siete magnitudes fundamentales se les asocia unívocamente el concepto de *dimensión*. A cada magnitud fundamental le hacemos corresponder su símbolo, es decir: longitud (L), masa (M), tiempo (T), intensidad eléctrica (I), temperatura termodinámica (K), cantidad de sustancia (n) e intensidad luminosa (I_r).

Toda magnitud derivada se puede expresar por medio de un producto (*ecuación de dimensiones*) de las magnitudes fundamentales. Para ello, se sustituye cada magnitud fundamental de la ecuación de definición de la magnitud derivada, por su dimensión. Escribiremos:

$$[A] = \text{dimensiones de la magnitud A}$$

por ejemplo:

$$F = ma \qquad [F] = [m]\,[a] = M\,[e/t^2] = M\,L\,T^{-2}$$

Para que la fórmula representativa de una ley que relaciona diversas magnitudes físicas sea correcta, debe ser homogénea, es decir, las ecuaciones dimensionales de sus dos miembros deben ser idénticas.
La *coherencia de las dimensiones* es una condición necesaria para que una ecuación física sea correcta pero no suficiente. Una ecuación puede tener las dimensiones correctas en cada miembro sin describir ninguna situación física.
El conocimiento de las dimensiones de las magnitudes nos permite recordar una fórmula e incluso hacer suposiciones sobre la misma.

Tema 2.- INTERACCIÓN ELÉCTRICA (*RESUMEN)*

• Carga eléctrica
La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia, existiendo dos tipos de carga: positiva y negativa. Dos cuerpos con el mismo tipo de carga se repelen, mientras que si tienen distinto tipo de carga, se atraen entre sí.

• Ley de Coulomb
La ley de Coulomb expresa la fuerza eléctrica **F** que ejerce una carga *q* sobre otra *q'*:

$$\mathbf{F} = K\frac{qq'}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$

donde **r** es el vector que con origen en *q* y final en *q'*. Esta fuerza es de tipo inverso del cuadrado de la distancia, es atractiva entre cargas de distinto signo y repulsiva entre cargas del mismo signo.

• Campo eléctrico
Existe un campo eléctrico en cualquier región donde una carga eléctrica experimenta una fuerza, la cual se debe a la presencia de otras cargas en esa región. El campo eléctrico **E** producido por una distribución de carga es la fuerza **F** ejercida por la distribución sobre una partícula de prueba dividida por el valor de la carga *q* de la partícula de prueba:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \qquad \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

Las características espaciales de un campo eléctrico pueden ilustrarse con **líneas de campo** eléctrico, que son tangentes en cada punto a la dirección de **E** en ese punto.
Un campo uniforme tiene la misma intensidad, dirección y sentido en todos los puntos del espacio y se representa por líneas de campo rectilíneas, paralelas y equidistantes.

• Partícula cargada en un campo eléctrico
Si la fuerza eléctrica es la única que afecta a una partícula de masa *m* y carga *q*, la segunda ley de Newton da para la aceleración $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$. Cuando una partícula se mueve en un campo eléctrico uniforme, su movimiento es descrito por la cinemática del movimiento bajo aceleración constante.

• Campo eléctrico de una carga puntual
Para una carga puntual:

$$\mathbf{E} = K\frac{q}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$

donde $\mathbf{u}_r$ es un vector unitario que va de la carga *q* al punto donde se evalúa el campo **E**. Para una distribución continua de carga (en volumen, superficie o línea) viene dado por:

$$\mathbf{E} = K\int\frac{dq}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$

Las líneas de campo eléctrico parten de las cargas positivas y van a parar a las cargas negativas.

• Cuantización de la carga eléctrica
La carga eléctrica aparece siempre como múltiplo de una carga fundamental o cuanto eléctrico, cuyo valor es $e = 1.602177 \times 10^{-19}$ C, que es la carga del electrón, en módulo.

• Principio de conservación de la carga eléctrica
En todos los procesos observados en la Naturaleza, la carga neta o total de un sistema aislado permanece constante.

• Potencial eléctrico
La fuerza eléctrica es conservativa. La **energía potencial** de una partícula de prueba en el campo creado por varias partículas fijas está dada por:

$$E_p = Kq\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(tomando el origen de energías potenciales en el infinito).
El **potencial eléctrico** de una carga *q* se define como

$$V = \frac{E_p}{q} \qquad E_p = qV$$

La diferencia de potencial ΔV entre dos puntos 1 y 2 está relacionada con el trabajo *W* realizado por el campo eléctrico

$$W = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2} = q(V_1 - V_2) = -q\Delta V$$

• Relación entre el potencial eléctrico y el campo eléctrico
Se cumple que $dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$. Si se conoce la expresión de **E**, puede obtenerse el potencial *V* en un punto *P* por medio de la integral de línea de **E**:

$$V = -\int_{\infty}^{P}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}$$

Si se conoce *V*, el campo **E** se puede encontrar por medio del gradiente de *V*:

$$\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V = -\nabla V$$

Si el campo eléctrico es constante en dirección (por ejemplo, la *X*):

$$E_x = -dV/dx$$

Si el potencial sólo depende del módulo de **r**, es decir, *r*,

$$E = -dV/dr$$

• Potencial de una carga puntual
Para una carga puntual (con origen de potenciales en el ∞):

$$V = K\frac{c}{r}$$

Para un sistema de partículas cargadas:

$$V = K\sum_i\frac{q_i}{r_i}$$

y para una distribución continua de carga:

$$V = K\int\frac{dq}{r}$$

Las superficies que tienen el mismo potencial eléctrico en sus puntos, es decir, *V = constante*, se conocen como **superficies equipotenciales**. Las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

• Dipolo eléctrico
Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas iguales y de signo opuesto $+q$ y $-q$ separadas por una distancia *a*. El momento dipolar eléctrico se define como $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$, donde **a** es el vector que va de la carga negativa a la positiva. El potencial de un dipolo eléctrico varía con el inverso del cuadrado de la distancia:

$$V = K\frac{p\cos\theta}{r^2} = K\frac{\mathbf{p}\,\mathbf{r}}{r^3}$$

Cuando un dipolo está en un campo eléctrico **E**, éste tiende a alinear al dipolo paralelamente al campo. El momento de la fuerza que actúa sobre el dipolo y su energía potencial son, respectivamente, $\tau = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$ y $E_p = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$. El dipolo está en equilibrio cuando está orientado paralelo al campo.

• Relaciones de energía en un campo eléctrico
La energía total de una partícula de masa *m* y carga *q* que se mueve en un campo eléctrico es:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Tema 3.- INTERACCIÓN MAGNÉTICA (*RESUMEN)*

• Fuerza magnética sobre una carga en movimiento
Existen ciertos minerales del hierro, como la magnetita, que tienen la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro. A esta propiedad se le dió el nombre de *magnetismo.* Las regiones de un cuerpo donde parece concentrarse el magnetismo se denominan *polos magnéticos* y el cuerpo magnetizado se llama *imán.* Existen dos polos magnéticos (norte, *N,* y sur, *S*), de modo que la interacción entre polos magnéticos iguales es de repulsión y entre polos magnéticos distintos es de atracción. No existen monopolos magnéticos, no siendo posible aislar un polo *N* o un polo *S* por separado: siempre aparecen por parejas.
Las interacciones eléctricas y magnética están estrechamente relacionadas, y constituyen dos aspectos diferentes de una misma propiedad de la materia, su *carga eléctrica.* El magnetismo es una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento (como las corrientes eléctricas) con respecto al observador. Por esta razón, las interacciones eléctrica y magnética deben considerarse juntas bajo el nombre de *interacción electromagnética.*

El campo magnético **B** en un punto del espacio se define en función de la fuerza magnética ejercida sobre una partícula de carga q y velocidad **v** en dicho punto:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

La dirección de la fuerza magnética es perpendicular al plano definido por los vectores **v** y **B**.
Como la fuerza magnética es perpendicular al vector velocidad, su trabajo al mover la carga es cero, por lo que es constante la energía cinética de la partícula. Esto implica que el módulo del vector velocidad permanece constante cuando la partícula se mueve en el seno de un campo magnético.
Si la partícula se mueve en una regón donde hay un campo eléctrico **E** y un campo magnético **B**, la fuerza total sobre la partícula se conoce como *fuerza de Lorentz:*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Las características espaciales de un campo magnético pueden ilustrarse con **líneas de campo** magnético, que son tangentes en cada punto a la dirección de **B** en ese punto. Las líneas del campo magnético son cerradas sobre sí mismas, debido a la no existencia de cargas magnéticas (monopolos). El campo magnético es solenoidal (su divergencia es nula, div **B** = 0).

• Movimiento de una partícula en un campo magnético
Campo magnético uniforme: Si la velocidad v ($v << c$) de la partícula es perpendicular a un campo magnético uniforme, y no existen otras fuerzas, la partícula cargada describe un movimiento circular uniforme. Para una partícula de masa m, la velocidad v y el radio r de la trayectoria están relacionados por:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La **frecuencia ciclotrónica** ω no depende de v y r:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{q}{m} B$$

y en forma vectorial:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{\mathbf{B}}$$

Si el campo magnético es uniforme pero la velocidad de la partícula no es perpendicular al campo, la partícula describirá una hélice de radio y paso constante.

Campo magnético no uniforme: Si la velocidad de la partícula no es perpendicular al campo, la partícula describirá una hélice de radio y paso variable, disminuyendo éstos conforme aumenta la intensidad del campo magnético.

Espectrómetro de masas: Se utiliza para separar iones de la misma carga y diferente masa m. La relación carga-masa de los iones es:

$$\frac{q}{m} = \frac{2\,\Delta V}{B^2 r^2}$$

donde ΔV es la d.d.p. del potencial eléctrico acelerador.

Determinación de la carga-masa del electrón (*Thomson*)*:* Se utiliza un tubo de rayos catódicos y un campo eléctrico **E** y otro magnético **B** perpendiculares como selector de velocidad. Sólamente las partículas con velocidad:

$$v = E/B$$

pasarán a través de la región de los campos sin desviarse.

El ciclotrón: Es un acelerador de partículas cargadas formada por dos conductores huecos en forma de D y entre los cuales se aplica una tensión alterna de frecuencia angular la frecuencia ciclotrónica. Perpendicular a los conductores hay un campo magnético uniforme. La enercía cinética de los iones acelerados es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{m} B^2 R^2$$

donde R es el radio del ciclotrón.

• Campo magnético de una carga en movimiento
Una carga eléctrica en movimiento, con respecto al observador, produce un campo magnético además de su campo eléctrico. El campo magnético a una distancia r de la carga que se mueve con velocidad v (pequeña comparada con la de la luz, c) es:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\,\mathrm{sen}\theta}{r^2}$$

donde θ es ángulo formado por los vectores **v** y **r**, y μ_0 es la *permeabilidad del vacío* ($4\pi \times 10^{-7}$ m kg C^{-2}). en forma vectorial:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$

donde $\mathbf{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de **r**. Las líneas de fuerza magnética son circunferencias con su centro en la trayectoria de la carga. Para $v << c$, y teniedo en cuenta la definición del campo eléctrico de una carga:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{c^2}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío (~ 3×10^{-8} m/s).

• Dipolos magnéticos
Una partícula cargada que describe un órbita cerrada constituye un *dipolo magnético,* cuyo **momento dipolar magnético** es:

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{q}{2m}\vec{\mathbf{L}}$$

donde **L** es el momento angular de la partícula (**L** = **r** x **p**, siendo **p** = m**v** el momento lineal). Un campo magnético **B** produce un momento τ sobre un dipolo magnético de momento dipolar **M** dado por:

$$\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

Tema 4.- CORRIENTES ELÉCTRICAS (*RESUMEN*)

• Corriente eléctrica

Una corriente eléctrica consiste en un flujo de partículas cargadas. La intensidad I de la corriente eléctrica caracteriza la carga que fluye a través de un elemento de circuito:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

El sentido de la corriente corresponde con el sentido de la velocidad de arrastre **v** de los portadores de carga positivos. En el S.I. I se expresa en amperios (A). La densidad de corriente **j** es el flujo de carga en un punto interior de un medio conductor:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$$

Si **j** es uniforme, su módulo j viene dado por:

$$j = I/S$$

y en el caso general:

$$I = \int_S \vec{\mathbf{j}}\ d\vec{\mathbf{S}}$$

• Ley de Ohm

La ley de Ohm establece que para un conductor a temperatura constante, la relación entre la d.d.p. ΔV que hay entre dos puntos de un conductor y la corriente eléctrica I en el conductor es una constante conocida como *resistencia eléctrica, R:*

$$\frac{\Delta V}{I} = R \qquad\qquad \Delta V = RI$$

En este caso se dice que el conductor es óhmico. En el S.I. R se expresa en ohmios (Ω).

• Conductividad

Para un conductor de longitud l y sección S ley de Ohm puede escribirse en la forma:

$$j = \frac{l}{RS}\,E = \frac{1}{\rho}\,E = \sigma E$$

donde $\sigma = 1/\rho$ es la *conductividad* del material y ρ es su resistividad. σ se expresa en Ω^{-1}m^{-1}. Se cumple:

$$R = \frac{\rho\, l}{S}$$

La ley de Ohm puede escribirse de forma general como:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

y la velocidad de arrastre para los electrones se escribe como:

$$\mathbf{v} = -\,(\sigma/en)\mathbf{E}$$

• Potencia eléctrica

Para mantener una corriente eléctrica es necesario un suministro de energía ya que las cargas deben de ser aceleradas por el campo eléctrico. La energía por unidad de tiempo o potencia requerida para mantener una corriente se obtiene como $P = I\Delta V$ o simplemente $P = IV$. en el S.I. P se expresa en vatios (W). Para conductores que obedecen la ley de Ohm $V = RI$ y por tanto:

$$P = I^2R \quad \text{(efecto Joule)}$$

• Combinación de resistencias

Para resistencias conectadas en serie:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

y para resistencias conectadas en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

• Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica

La fuerza magnética producida por un campo magnético uniforme sobre un trozo recto de conductor, por el que circula una corriente, viene dada por:

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

En general, la fuerza magnética sobre un trozo de conductor por el que circula una corriente eléctrica es:

$$\vec{\mathbf{F}} = I \int_L d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

• Momento magnético sobre una corriente eléctrica

Si una espira por el que circula una corriente I está en el seno de un campo magnético uniforme **B**, el momento τ de las fuerzas que ejerce el campo sobre el circuito es:

$$\tau = I\,\mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

donde **S** es el vector del área plana encerrada por la espira, su dirección es perpendicular al plano de la espira y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha. El momento dipolar magnético de la espira es $\mathbf{M} = I\mathbf{S}$ por lo que el momento de fuerzas se puede escribir:

$$\tau = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

El dipolo tiene una energía potencial $E_p = -\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}$.

• Campo magnético producido por una corriente

La contribución $d\mathbf{B}$ de un elemento infinitesimal de corriente $Id\mathbf{l}$ al campo magnético en un punto del espacio viene dada por la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

El campo magnético resultante se obtiene por la forma integral de la ley de Biot-Savart:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}$$

μ_0 es la permeabilidad del vacío ($4\pi \times 10^{-7}$ m kg C^{-2}).

Para una corriente rectilínea e indefinida, a una distancia r del conductor, el campo vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

El campo magnético creado por una espira circular de radio a con una corriente I, en un punto de su eje a una distancia R de su centro es:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2\,(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

El campo magnético en el eje de un solenoide muy largo de longitud L con N vueltas en total es:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

El campo magnético de un solenoide infinito en su eje con n vueltas por unidad de longitud es $B = \mu_0 nI$.

• Fuerzas entre corrientes eléctricas

La fuerza por unidad de longitud entre dos conductores rectilíneos indefinidos, paralelos, separados una distancia R, por los que circulan corrientes I e I' viene dada por:

$$f = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R}$$

El amperio, unidad de corriente eléctrica, se define en función de la fuerza por unidad de longitud entre los conductores.

Tema 5.- EL CAMPO ELÉCTRICO (*RESUMEN*)

• Fuerza electromotriz

El trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico cuando desplazamos una carga a lo largo de la trayectoria L está expresado por la integral de línea:

$$\int_L \vec{E}\, d\vec{l}$$

Para un campo electrostático:

$$\int_L \vec{E}\, d\vec{l} = V_A - V_B$$

donde A y B son los puntos extremos de la trayectoria L.

La fuerza electromotriz (fem), ε, es el trabajo por unidad de carga cuando se mueve la carga por una trayectoria cerrada:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\, d\vec{l}$$

donde el círculo sobre el símbolo de la integral indica que la trayectoria es cerrada. A este tipo de integral se le conoce como **circulación.**

Si el campo eléctrico es estático y la trayectoria cerrada:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

• Flujo del campo eléctrico

Se define el flujo del campo eléctrico a través de una superficie S como la integral de superficie del vector campo eléctrico extendida a toda la superficie:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

Cuando se calcula el flujo a través de una superficie cerrada a ésta se la denomina **superficie gaussiana.** Las líneas de campo pueden ser utilizadas para visualizar el flujo a través de la superficie.

El flujo total puede ser positivo, negativo o cero. Cuando es positivo, el flujo es saliente y cuando es negativo, es entrante.

• Ley de Gauss para el campo eléctrico

La Ley de Gauss establece que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica neta encerrada dentro de la superficie dividida por ε_0:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \int_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

En electrostática la Ley de Gauss es equivalente a la Ley de Coulomb.

La Ley de Gauss puede ser utilizada para encontrar el campo eléctrico producido por distribuciones de carga que posean una alta simetría. El paso crucial de este proceso es la selección de la superficie gaussiana.

• Propiedades electrostáticas de los conductores

Cuando un conductor colocado en un campo eléctrico está en equilibrio, el campo eléctrico en el interior del conductor es cero.

El campo eléctrico en la superficie de un conductor en equilibrio electrostático es normal a la superficie.

Todos los puntos de un conductor en equilibrio electrostático están al mismo potencial.

La superficie de un conductor en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial.

La carga eléctrica neta de un conductor en equilibrio electrostático se encuentra sobre su superficie.

El campo eléctrico en puntos muy próximos a la superficie de un conductor es perpendicular a su superficie y vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

• Polarización eléctrica de la materia

Existen dieléctricos apolares y polares. En los primeros, sus moléculas no tienen momento dipolar eléctrico, mientras que en los segundos las moléculas tienen un momento dipolar eléctrico permanente.

Cuando se coloca un dieléctrico apolar en un campo eléctrico, sus átomos o moléculas se convierten en dipolos eléctricos que se orientan en la dirección del campo eléctrico. si el dieléctrico es polar, sus momentos dipolares permanentes se orientan paralelos al campo exterior.

Cuando los dipolos eléctricos de una sustancia se alinean de manera espontánea (sustancias **ferroeléctricas**) o debido a la acción de un campo eléctrico externo, decimos que la sustancia está **polarizada.**

• Vector polarización

La **polarización P** de un material es una magnitud vectorial definida como el momento dipolar eléctrico del material por unidad de volumen. Si **p** es el momento dipolar eléctrico inducido por átomo o molécula y n el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la polarización es:

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p}$$

La polarización tiene dimensiones de densidad superficial de carga y en el S.I. se mide en C/m^2.

Sobre cada una de las superficies de un material polarizado aparece una densidad superficial de carga ligada o densidad de carga de polarización, σ_{pol}, de modo que:

$$\sigma_{pol} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}_N$$

donde $\mathbf{u}_N$ es el vector unitario en la dirección normal a la superficie del material.

• Desplazamiento eléctrico

Un dieléctrico polarizado tiene cargas sobre su superficie y, a menos que la polarización sea uniforme, también en su volumen. Estas **cargas de polarización**, sin embargo, están congeladas en el sentido de que están ligadas a los átomos o moléculas y no tienen libertad de movimiento en el dieléctrico. En un conductor, las cargas sí que son capaces de moverse con libertad y se denominan **cargas libres**. Se cumple la relación:

$$\sigma_{libre} = \varepsilon_0 E + P$$

y se define el vector **desplazamiento eléctrico**, **D**, como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

que se expresa en C/m^2. La densidad de carga libre está relacionada con **D** mediante la ecuación:

$$\sigma_{libre} = \mathbf{D}\cdot\mathbf{u}_N$$

La carga libre total sobre un conductor es entonces:

$$q_{libre} = \int_S \sigma_{libre}\, dS = \int_S \vec{D}\, d\vec{S}$$

donde S es una superficie cerrada.

• Susceptibilidad y permitividad eléctrica

En general, el vector **P** es proporcional al campo eléctrico aplicado **E**:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$$

χ_e es la **susceptibilidad eléctrica** del material. Cuando la relación entre **P** y **E** es lineal, se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$$

la cantidad:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

es la permitividad relativa del medio y $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ es la **permitividad** del medio. Cuando la relación $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ es válida para un medio, podemos escribir:

$$q_{libre} = \int_S \varepsilon \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}}$$

donde S es una superficie cerrada, y si el medio es homogéneo (ε constante):

$$\int_S \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}} = \frac{q_{libre}}{\varepsilon}$$

• Capacidad y condensadores

Un condensador es un dispositivo eléctrico utilizado en los circuitos para almacenar carga y energía eléctrica; está formado por dos placas conductoras separadas por un dieléctrico. La capacidad de un condensador es:

$$C = \frac{Q}{V}$$

En el S.I. la capacidad se mide en faradios (1 F = 1 C/V). La capacidad depende del diseño geométrico del condensador y de la naturaleza del dieléctrico que hay entre sus placas o armaduras. Para un condensador de láminas planoparalelas con vacío entre las placas:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Cuando se introduce un dieléctrico entre las armaduras de un condensador en que había el vacío entre las placas, la capacidad aumenta de modo que:

$$C = \varepsilon_r C_0$$

mientras que la diferencia de potencial y el campo eléctrico disminuyen:

$$V = V_0/\varepsilon_r \qquad E = E_0/\varepsilon_r$$

La capacidad equivalente de un conjunto de condensadores conectados es la capacidad de un único condensador que, cuando se utiliza en lugar del conjunto, produce el mismo efecto externo. La capacidad equivalente de varios condensadores en **serie** es:

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_i (1/C_i)}$$

Para varios condensadores en **paralelo**:

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

• Energía del campo eléctrico

La energía de un condensador es la energía potencial de las cargas que hay en sus placas:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

Cuando se asocia esta energía con el campo eléctrico, la **densidad de energía** u_E en el espacio ocupado por el campo (en el vacío) es:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

En un medio material basta sustituir ε_0 por ε. La energía eléctrica total U en un volumen V se calculará mediante la integral:

$$U = \int_V u_E\, dV$$

En forma diferncial la Ley de Gauss puede escribirse utilizando la divergencia:

$$\mathrm{div}\, \vec{\mathbf{E}} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Tema 6.- EL CAMPO MAGNÉTICO (*RESUMEN)*

• Ley de Ampère para el campo magnético
La ley de Ampère establece que la circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada L que enlaza las corrientes I_1, I_2, I_3, ... depende únicamente de las corrientes que atraviesan una superficie delimitada por la línea cerrada:

$$\oint \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

donde $I = I_1 + I_2 + I_3 + ...$ es la corriente enlazada por la línea cerrada L.
Cuando se aplica la ley de Ampère consideramos que la corriente es positiva si pasa a través de la línea L en el sentido indicado por el dedo pulgar, cuando se utiliza la regla de la mano derecha para indicar la forma en que está orientada la trayectoria, y negativa en el sentido opuesto.
La ley de Ampère puede usarse para obtener el campo magnético producido por distribuciones de corriente con gran simetría. El campo magnético en el interior de un solenoide largo de vueltas apretadas, con n vueltas por unidad de longitud, y por el que circula una corriente I, viene dado por:

$$B = \mu_0 n I$$

• Flujo del campo magnético
Se define el flujo del campo magnético a través de una superficie S como la integral de superficie del vector campo magnético extendida a toda la superficie:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$$

La Ley de Gauss para el campo magnético establece que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es nulo, de acuerdo con la inexistencia de monopolos magnéticos:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0$$

Las líneas del campo magnético son cerradas sobre sí mismas.

• Magnetización de la materia
Los electrones que están en órbita en los átomos pueden tratarse como pequeños dipolos magnéticos que tienen un momento magnético asociado con sus momento angular y su spin.
Según un modelo simple, un electrón que se mueve en una órbita alrededor de un núcleo tiene un momento magnético $\mathbf{m}_L$ proporcional a su momento angular $\mathbf{L}$, dado por:

$$\mathbf{m}_L = -\frac{e}{2m_e}\,\mathbf{L}$$

y también presenta una contribución $\mathbf{m}_S$ al momento magnético total $\mathbf{m}$ debida al momento angular de spin $\mathbf{S}$, dada por:

$$\mathbf{m}_S = -\frac{e}{m_e}\,\mathbf{S}$$

donde e y m_e son la carga y la masa del electrón, respectivamente.
Los átomos y las moléculas pueden o no tener un momento dipolar magnético neto, dependiendo de su simetría y de la orientación relativa de sus órbitas electrónicas. Los agregados de materia, con excepción de las sustancias **ferromagnéticas**, no poseen un momento magnético neto, debido a la orientación al azar de sus moléculas. Sin embargo, la presencia de un campo magnético externo distorsiona el movimiento electrónico, dando lugar a una polarización magnética o **magnetización** del material. Las sustancias se pueden agrupar en varios tipos, dependiendo de la forma en que son magnetizadas por un campo magnético externo. Se habla de diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo, así como de antiferromagnetismo y ferrimagnetismo.

• Vector magnetización
La **magnetización M** de un material es una magnitud vectorial definida como el momento dipolar magnético del material por unidad de volumen. Si **m** es el momento dipolar magnético inducido por átomo o molécula y n el número de átomos o moléculas por unidad de volumen, la magnetización es:

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}$$

La magnetización tiene dimensiones de corriente por unidad de longitud y en el S.I. se mide en A/m.
La corriente de magnetización efectiva por unidad de longitud, I_{mag}, sobre la superficie de un trozo de material magnetizado es igual a la componente del vector magnetización, M, paralela al plano tangente a la superficie del cuerpo, y tiene dirección perpendicular a **M**.

• El campo magnetizante
El vector intensidad magnética o campo magnetizante **H** está dado por la relación:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

H se expresa en A/m. En un medio lineal con permeabilidad magnética μ está relación puede expresarse como:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \text{(medio lineal)}$$

El vector **H** depende sólo de las corrientes libres, siendo su valor independiente de las corrientes de magnetización. La ley de Ampère para el vector **H** se escribe:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I_{libre}$$

• Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas
El vector **M** es proporcional al campo magnetizante **H**:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

χ_m es la **susceptibilidad magnética** del material. Teniendo esto en cuenta, se puede escribir:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

la cantidad:

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

es la permeabilidad relativa del medio y $\mu = \mu_r\mu_0$ es la **permeabilidad** del medio. En materiales diamagnéticos y paramagnéticos χ_m es muy pequeño (por ejemplo, -2.4×10^{-6} para el sodio o 2.3×10^{-5} para el aluminio), por lo que para estos materiales $\mu_r \approx 1$.

En los materiales **diamagnéticos** un campo magnético externo induce momentos dipolares magnéticos en las moléculas que lo componen. En este caso los vectores **M** y **B** tienen distinto sentido y $\chi_m < 0$.

En los materiales **paramagnéticos** el momento magnético permanente de los electrones desapareados tiende a alinearse con el campo magnético externo. En este caso los vectores **M** y **B** son paralelos y tienen el mismo sentido, siendo ahora $\chi_m > 0$. Los vectores **M** y **B** están relacionados por la ley de Curie:

$$\mathbf{M} = \frac{C\mathbf{B}}{\mu_0 T}$$

válida mientras el material no se encuentre a baja temperatura o sometido a un campo magnético intenso.

En un material **ferromagnético** los momentos magnéticos moleculares se encuentran alineados dentro de cada dominio magnético. Cuando los dominios magnéticos son orientados preferencialmente en una dirección, mediante la aplicación de un campo externo, la muestra adquiere una intensa magnetización. La magnetización persiste una vez retirado el campo en materiales ferromagnéticos duros, dando lugar a imanes permanentes.

• Energía del campo magnético

La energía de un campo magnético almacenada en un volumen V está dada por la expresión:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 \, dV$$

La **densidad de energía** u_B en el espacio ocupado por el campo (en el vacío) es:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

En un medio material lineal basta sustituir μ_0 por μ. La energía magnética total U_B en un volumen V se calculará mediante la integral:

$$U_B = \int_V u_B \, dV$$

Tema 7.- EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO (*RESUMEN*)

• Inducción electromagnética. Ley de Faraday-Henry
En una espira conductora se induce una corriente cuando varía el flujo del campo magnético que la atraviesa. La fuerza electromotriz inducida en una espira simple viene dada por la ley de Faraday-Henry:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

De acuerdo con la **ley de Lenz**, el sentido de la corriente inducida es tal que se opone al cambio de flujo que la produce.

• Inducción electromagnética debida al movimiento relativo de un conductor y un campo magnético
Cuando un circuito o una parte del mismo se mueve en un campo magnético se induce una fuerza electromotriz en dicho circuito. La fuerza electromotriz inducida en un circuito que posee un alambre deslizante es:

$$\varepsilon = Blv$$

Según la ley de Faraday-Henry, la fuerza electromotriz inducida en un **generador** de bobina rotante es:

$$\varepsilon = NBS\omega \operatorname{sen} \omega t$$

En un **alternador**, la fuerza electromotriz se induce en bobinas estáticas debido a un imán giratorio.

• Principio de conservación de la carga eléctrica
En todos los procesos que ocurren en el universo, la cantidad neta de carga siempre debe permanecer constante. El principio de conservación de la carga exige claramente que:

pérdida de carga = flujo de carga saliente - flujo de carga entrante = flujo neto de carga saliente

de donde:

$$\int_S \vec{\mathbf{j}}\, d\vec{\mathbf{S}} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{E}}\, d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

• Ley de Ampère-Maxwell
La ley de Ampère modificada tiene la forma:

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\, d\vec{r} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Donde el segundo término de la derecha corresponde, salvo μ_0, a la *corriente de desplazamiento.*

• Autoinducción
Cuando la corriente que circula por un componente de un circuito, como una bobina, varía, aparece una fuerza electromotriz autoinducida que viene dada por:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

El coeficiente de autoinducción, L, depende de la geometría del componente. En el S.I. L se mide en henrios (1 H = 1 $\mathrm{Tm^{-2}A}$). Para una bobina:

$$LI = \Phi_B$$

donde es el flujo que atraviesa las N espiras de la bobina.

• Energía del campo electromagnético
La energía almacenada en una autoinducción L por la que circula una corriente I es:

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

Esta energía está almacenada en el campo magnético producido por la corriente. La densidad de energía de este campo magnético es:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

• Circuitos acoplados. Inducción mutua
Cuando por dos bobinas próximas circulas corrientes variables, cada una de ellas induce una fuerza electromotriz sobre la otra:

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{21} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

donde M es la inducción mutua del conjunto de las bobinas.

En un **transformador**, los voltajes y corrientes en las bobinas primaria y secundaria dependen del número de vueltas de cada una de ellas:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

Tema 8.- MOVIMIENTO OSCILATORIO (*RESUMEN)*

• Introducción

Una partícula tiene un movimiento oscilatorio (vibratorio) cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio.
El movimiento de un péndulo es oscilatorio. Un peso unido a un resorte estirado comienza a oscilar cuando se suelta el resorte. Los átomos de un sólido y en una molécula vibran unos respecto a otros. Los electrones de una antena emisora o receptora oscilan rápidamente.
Entender el movimiento vibratorio es esencial para el estudio de los fenómenos ondulatorios relacionados con el sonido (acústica) y la luz (óptica).
De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el *movimiento armónico simple (MAS)*. Además de ser el más sencillo de describir y analizar, constituye una descripción bastante precisa de muchas oscilaciones que se observan en la naturaleza. Sin embargo, no todos los movimientos oscilatorios son armónicos.

• Cinemática del movimiento armónico simple

Para un objeto que experimenta un MAS se tiene:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

donde A es la amplitud, es decir, el desplazamiento máximo a partir del origen, y ϕ es la fase inicial. La frecuencia angular ω, la frecuencia ν y el período T están relacionados por:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

El MAS puede identificarse mediante la relación:

$$a = -\omega^2 x$$

En el MAS la aceleración a es proporcional y de sentido opuesto al desplazamiento x.

• Dinámica del movimiento armónico simple

El MAS está originado por una fuerza resultante que es una fuerza restauradora lineal. Como la fuerza y la aceleración están relacionadas mediante la ecuación:

$$F = ma$$

y $a = -\omega^2 x$, queda:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx$$

La ecuación $F = -kx$ corresponde a la *ley de Hooke* e indica que en el MAS la fuerza F es proporcional y opuesta al desplazamiento x.
La segunda ley de Newton aplicada a un objeto que sigue un MAS puede escribirse en forma diferencial como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Una solución de esta ecuación es $x = A\cos(\omega t + \phi)$, con

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

• Energía de un oscilador armónico simple

Las energía potencial y cinética de un oscilador armónico simple son:

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)$$

Teniendo en cuenta que $x = A\cos(\omega t + \phi)$, se puede escribir:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

La energía mecánica total del sistema oscilante es constante y proporcional al cuadrado de la amplitud A:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

• Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme

Cada una de las componentes, x e y, del movimiento de una partícula que describe un movimiento circular uniforme en el plano xy son movimientos armónicos simples. Es decir, cuando una partícula se mueve con movimiento circular uniforme, su proyección sobre un diámetro se mueve con movimiento armónico simple.

• Ejemplos de movimiento armónico simple

Algunos sistemas que experimentan un MAS son:
(i) Una bloque de masa unido a un resorte:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(ii) Un péndulo simple bajo la hipótesis de oscilaciones pequeñas (ángulos pequeños):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Tema 9.- MOVIMIENTO ONDULATORIO (*RESUMEN*)

• Movimiento ondulatorio. Generalidades

Una onda viajera es una perturbación que se propaga de una posición a otra. En las *ondas longitudinales* la dirección en la cual varía la magnitud que define la perturbación coincide con la dirección de propagación de la onda. Mientras que en las *ondas transversales* la dirección de variación de la magnitud que define la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

• Ondas unidimensionales. Ecuación de onda

Una onda está descrita por una función ψ que representa una propiedad de la onda y recibe el nombre de *función de onda*:

$$\psi = f(x,t)$$

Si la perturbación se propaga con una velocidad constante en el medio, v (*velocidad de fase)*, la forma más general de una *onda unidimensional* que se propaga hacia $+x$ es:

$$\psi(x,\ t) = f(x - vt)$$

Si la onda viaja hacia $-x$:

$$\psi(x,\ t) = f(x + vt)$$

La ecuación diferencial de onda en una dimensión que describe el movimiento ondulatorio que se propaga con una velocidad v sin distorsión a lo largo del eje x se escribe:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Esta ecuación de onda es una ecuación diferencial lineal, lo que significa que las ondas que satisfagan esta ecuación obedecen el principio de superposición.

• Ondas armónicas

Una onda armónica se puede expresar como:

$$\psi(x,t) = A\ \mathrm{sen}k(x - vt)$$

que es una onda periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El período espacial o *longitud de onda* λ es el intervalo espacial de modo que $\psi(x,t) = \psi(x + \lambda, t)$. Se cumple:

$$k = 2\pi/\lambda$$

El *período temporal* es el intervalo temporal T de modo que:$\psi(x,t) = \psi(x, t + T)$. Se cumple:

$$T = \lambda/v$$

El inverso del período T es la frecuencia $\nu = 1/T$. Se verifica la relación:

$$v = \nu\lambda.$$

Otra cantidad que se usa es la *frecuencia angular* ω:

$$\omega = 2\pi/T$$

y se puede escribir:

$$v = \omega/k$$

con lo que la función de onda puede reescribirse como:

$$\psi(x,t) = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$$

Dos puntos x_1 y x_2 que en un instante t tienen el mismo estado de perturbación se dice que están *en fase* si $\psi(x_1,t) = \psi(x_2,t)$, condición equivalente a:

$$x_2 - x_1 = m\lambda$$

donde m es un número entero.

Dos puntos x_1 y x_2 que en un instante t tienen un estado de perturbación opuesto se dice que están *en oposición de fase* si $\psi(x_1,t) = -\psi(x_2,t)$, condición equivalente a:

$$x_2 - x_1 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$$

donde m es un número entero.

Se podría haber escrito inicialmente la función de onda en la forma:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

o bien en la forma más general:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varepsilon)$$

• Representación compleja de las ondas armónicas

Puede considerarse que la función de onda ψ es la parte real de un número complejo de modo que:

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varepsilon) = \mathrm{Re}\{A\exp[j(\omega t - kx + \varepsilon)]\}$$

La *función de onda compleja*, $U(x,t)$, es:

$$U(x,t) = A\exp[j(\omega t - kx + \varepsilon)]\}$$

La función de onda que tiene verdadero sentido físico es la parte real de $U(x,t)$, es decir, $\psi(x,t) = \mathrm{Re}\{U(x,t)\}$. Es posible escribir la *función de onda compleja* como:

$$U(x,t) = A\exp(j\omega t)\exp(-jkx)\exp(j\varepsilon) = U(x)\exp(j\omega t)$$

donde $U(x)$ se conoce como *amplitud compleja*:

$$U(x) = A\exp(j\varepsilon)\exp(-jkx)$$

y llamando A al número complejo $A\exp(j\varepsilon)$, queda:

$$U(x) = A\exp(-jkx)$$

• Intensidad, potencia y energía

La *intensidad* I de una onda es el flujo de energía que atraviesa la unidad de área normal a la dirección de propagación en la unidad de tiempo, es decir, la potencia P que atraviesa la unidad de área de una superficie normal ΔS a la dirección de propagación:

$$I = P/\Delta S$$

Suele definirse una intensidad media respecto al tiempo para un intervalo τ largo comparado con el período de la onda. Para una *onda plana* la intensidad es constante:

$$I \quad A^2$$

Para una *onda esférica* $I = P/4\pi r^2$, es decir, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente puntual. Se cumple:

$$I \quad A^2/r^2$$

• Velocidad de fase y velocidad de grupo

Velocidad de fase: $v = \omega/k$

Velocidad de grupo: $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

La función $\omega = \omega(k)$ se conoce como *relación de dispersión.* Como $\omega = kv$:

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

Si la velocidad de fase es independiente del número de onda k (medio no dispersivo) queda $dv/dk = 0$ y $v_g = v$ (en un medio no dispersivo no hay diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo).

Tema 10.- ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS (*RESUMEN*)

• Ondas electromagnéticas planas

Las ecuaciones de Maxwell pueden utilizarse para demostrar que para una onda electromagnética (e.m.) plana en el vacío los campos **E** y **B**:
(i) son perpendiculares a la dirección de propagación, la cual coincide con la dirección del producto vectorial **E** x **B**,
(ii) son perpendiculares entre sí,
(iii) cumplen las ecuaciones de onda con una velocidad de propagación en el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

(iv) están en fase y tienen la misma velocidad y frecuencia, y
(v) tienen amplitudes relacionadas por:

$$E_0 = c\,B_0 \qquad\qquad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Las ecuaciones de una onda e.m. plana-polarizada que se propaga en la dirección del eje $+x$ son:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx) \qquad \text{y} \qquad B_z = B_0 \cos(\omega t - kx)$$

donde $c = \omega/k$, y el plano xy es el plano de polarización. Los valores instantáneos de E y B están relacionados por:

$$E = cB \qquad\qquad B = E/c$$

• Energía y momento lineal de una onda electromagnética

La densidad de energía total de una onda e.m., u, es igual a la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética (que para el caso de una onda electromagnética son iguales):

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0$$

La intensidad instantánea I de una onda e.m. es el producto de u por c:

$$I = uc = c\varepsilon_0 E^2$$

y el momento lineal p de una onda e.m. es:

$$p = u/c$$

• Vector de Poynting

El vector de Poynting, **S**, apunta en la dirección de propagación de una onda e.m. y su módulo es la intensidad instantánea de la onda:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

siendo su módulo:

$$S = \left|\vec{\mathbf{S}}\right| = I$$

Para el caso de una onda armónica, la intensidad media, S_m (valor medio del módulo del vector de Poynting) es:

$$S_m = \frac{1}{2\mu_0}\,E_0\,B_0 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E_0^2 c = \frac{c\,B_0^2}{2\mu_0}$$

La intensidad promedio de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud. Normalmente cuando se habla de la intensidad de una onda, se refiere a la intensidad promedio.

• Presión de radiación

Las ondas e.m. transportan momento lineal y energía. Cuando una onda e.m. de intensidad media S_m incide normalmente sobre una superficie y es completamente absorbida por ésta, la *presión de radiación* (promedio), p_r, en la superficie es:

$$p_r = \frac{S_m}{c}$$

Cuando la onda incide normalmente sobre una superficie y es reflejada completamente por ésta, la presión de radiación es:

$$p_r = \frac{2S_m}{c}$$

Si la superficie es parcialmente reflectante siendo r el coeficiente de reflexión en intensidad, entonces la presión de radiación es:

$$p_r = (1 + r)\frac{S_m}{c}$$

• Emisión de ondas electromagnéticas

Las fuentes de ondas e.m. son las cargas, o sistemas de cargas, aceleradas. Cuando una carga oscila con una determinada frecuencia, generará una onda de la misma frecuencia. Los dipolos eléctricos y magnéticos oscilantes también son fuentes de ondas e.m.

• Propagación de ondas electromagnéticas en la materia: dispersión

Cuando una onda e.m. se propaga en un medio material, su velocidad de propagación es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

El índice de refracción n de una sustancia es el cociente:

$$n = c/v$$

y puede escribirse en función de la permitividad y la permeabilidad relativas:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Para la mayoría de las sustancias que transmiten ondas electromagnéticas $\mu_r \approx 1$ (no ferromagnéticas), y se puede escribir:

$$n \approx \sqrt{\varepsilon_r} \quad \text{(relación de Maxwell)}$$

Como la permitividad relativa ε_r depende de la frecuencia del campo electromagnético, la velocidad v de la onda e.m. depende de la frecuencia de la radiación. Por tanto, las ondas e.m. sufren *dispersión* cuando se propagan en la materia.

• Espectro de la radiación electromagnética

Las frecuencias (o las longitudes de onda) de las ondas e.m. abarcan varios órdenes de magnitud. La luz visible corresponde sólo a una pequeña parte del espectro electromagnético. Las longitudes de onda varía de la siguiente forma:

(1) *Ondas de radiofrecuencia:* Varios kilómetros hasta 0.3 m
(2) *Microondas:* Desde 0.3 m hasta 10^{-3} m
(3) *Espectro infrarrojo:* Desde 10^{-3} m hasta 7.8×10^{-7} m
(4) *Luz o espectro visible:* Desde 780 nm hasta 380 nm
(5) *Rayos ultravioleta:* Desde 3.8×10^{-7} m hasta 6×10^{-10} m
(6) *Rayos X:* Desde $\sim 10^{-9}$ m hasta 6×10^{-12} m
(7) *Rayos gamma* (γ)*:* Desde $\sim 10^{-10}$ m hasta $\sim 10^{-14}$ m

Tema 11.- REFLEXIÓN, REFRACCIÓN Y POLARIZACIÓN (*RESUMEN)*

• Polarización

Las ondas electromagnéticas (e.m.) son ondas transversales. Si la vibración de una onda transversal se mantiene paralela a una línea fija en el espacio, la onda está *polarizada linealmente*. La dirección de polarización se define según el vector **E**.
Una onda está *polarizada circularmente* cuando el vector **E** mantiene su módulo fijo, mientras que su dirección gira en el espacio con una frecuencia angular ω constante. La punta del vector **E** describe una circunferencia.
Una onda *polarizada elípticamente* es similar a una onda polarizada circularmente salvo que las componentes E_y y E_z del vector campo eléctrico **E** tienen amplitudes diferentes. En este caso el vértice del vector **E** describe una elipse.

Elipse de polarización

$$\frac{E_y^2}{A_y^2} + \frac{E_z^2}{A_z^2} - 2\frac{E_y E_z}{A_y A_z}\cos\delta = \operatorname{sen}^2\delta$$

$$\delta = \phi_z - \phi_y$$

Campo eléctrico: $\mathbf{E}(x,t) = E_y\,\mathbf{u}_y + E_z\,\mathbf{u}_z$

$$E_y = A_y \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi_y\right] \qquad E_z = A_z \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi_z\right]$$

Si $\delta = 2m\pi$, con m un entero: onda polarizada linealmente en los cuadrantes 1 y 3.
Si $\delta = (2m+1)\pi$, con m un número entero: onda polarizada linealmente en los cuadrantes 2 y 4.
Cuando $A_y = A_z$ y $\delta = (2k+1)\pi/2$ la elipse se convierte en una circunferencia, obteniéndose una onda polarizada circularmente.

• Medida de la polarización. Ley de Malus

La luz puede polarizarse cuando se hace pasar a través de un *polarizador* (lineal), el cuál transmite selectivamente luz que tiene su plano de polarización paralelo el *eje de transmisión del polarizador*. La luz que tiene su plano de polarización perpendicular al eje de transmisión queda bloqueada. Si un haz de luz no polarizada (*luz natural*) incide sobre un polarizador, éste deja pasar la mitad de la intensidad de la luz incidente.

Ley de Malus

Si la luz polarizada mediante un polarizador pasa a través de un segundo polarizador, denominado *analizador*, y los ejes de transmisión del polarizador y el analizador forman un ángulo θ, se cumple:

$$I = I_0 \cos^2\theta$$

Grado de polarización $(0 \le P \le 1)$

$$P = \frac{I_{\parallel} - I}{I_{\parallel} + I}$$

$I_{\parallel}$ es la intensidad medida por el detector para los ejes de transmisión del polarizador y el analizador paralelos (θ = 0°), e I cuando estos ejes son perpendiculares (θ = 90°), suponiendo que el polarizador no es ideal pero sí lo es el analizador.

• Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

Reflexión de ondas e.m.: las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada y la normal a la superficie están en un mismo plano (*plano de incidencia*) y además $\theta_1 = \theta_2$.

Refracción de ondas e.m.: las direcciones de propagación de las ondas incidente y refractada o transmitida y la normal a la superficie están en un mismo plano (*plano de incidencia*) y además $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$ (ley de Snell).

Fórmulas de Fresnel

Coeficientes de reflexión, r, y de *refracción* o *transmisión*, t, (razón de la amplitud reflejada a la incidente, y de la amplitud transmitida a la incidente, respectivamente) para medios no magnéticos ($\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$):

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1}$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1}$$

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

Es posible conseguir que $r_{\parallel} = 0$. En esta situación la onda reflejada no tiene componente eléctrica del tipo $E_{r\parallel}$, sino sólo la E_r , y la onda reflejada está totalmente polarizada en un plano perpendicular al plano de incidencia (modo *TE*). Para que se cumpla $r_{\parallel} = 0$ necesario que $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. Esta situación implica que:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = n_2/n_1$$

Ecuación que recibe el nombre de *Ley de Brewster* y el ángulo de incidencia que cumple la ecuación anterior recibe el nombre de *ángulo de polarización* o *ángulo de Brewster*. Si además la onda incidente no tiene componente E_i (modo *TM*) entonces no existe onda reflejada si se incide con el ángulo de Brewster.

Los *factores de reflexión, R,* y *transmisión, T,* relacionan las intensidades incidente, reflejada y transmitida. Por el principio de conservación de la energía $R + T = 1$. R y T se calculan mediante:

$$R = |r|^2 \qquad \text{y} \qquad T = 1 - |r|^2$$

• Métodos para polarizar la luz

Entre los fenómenos más utilizados para producir luz polarizada figuran la polarización por reflexión, la absorción selectiva y la refracción en medios anisótropos.

• Retardadores y polarizadores circulares

Retardo de fase entre las ondas ordinaria y extraordinaria que atraviesan un medio anisótropo de espesor d:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_E - n_O)d$$

Lámina de cuarto de onda. Polarizador circular

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_E - n_O)}$$

Lámina de media de onda. Rotor

$$d = \frac{\lambda_0}{2(n_E - n_O)}$$

• Actividad óptica

Ley de Biot: $\theta = \rho d[c]$

• Efecto Faraday

$$\theta = VBd$$

Tema 12.- ÓPTICA GEOMÉTRICA (*RESUMEN)*

• Introducción

La óptica geométrica es una aproximación a los resultados de las ecuaciones de Maxwell, que es válida cuando las dimensiones del sistema son muy superiores a la longitud de onda de la luz utilizada.

• Postulados de la Óptica Geométrica

1.-La luz se propaga en forma de rayos.

2.-Un medio óptico se caracteriza por el índice de refracción *n:*

$$n = c/v$$

Como $c \geq v$ (para el vacío $c = v$), se tiene $n \geq 1$.
La cantidad $L = ns$ se conoce como ***camino óptico***.

3.-En un medio inhomogéneo el índice de refracción $n(\mathbf{r})$ es una función del vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,z)$. El camino óptico L a lo largo de una trayectoria luminosa entre dos puntos A y B se obtiene mediante:

$$L = \int_A^B n(\mathbf{r})\, ds$$

El tiempo t que tarda la luz en recorrer la trayectoria desde A hasta B es proporcional al camino óptico: $t = L/c$

4.-*Principio de Fermat:* el camino óptico a lo largo de una trayectoria real de luz es estacionario, es decir, un extremal:

$$\delta L = \delta \int_A^B n(\mathbf{r})\, ds = 0$$

Propagación de la luz en un medio homogéneo: Las trayectorias de la luz en los medios homogéneos son rectilíneas.

Reflexión de la luz en un espejo: El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia:

$$\theta' = \theta$$

Refracción de la luz en una superficie: El ángulo refractado θ_2 y el incidente θ_1 están relacionados mediante la ***Ley de Snell***:

$$n_1 \mathrm{sen}\theta_1 = n_2 \mathrm{sen}\theta_2$$

Convenio de signos

-Para las distancias en el eje z a lo largo de cualquier rayo se toma como sentido positivo el de la luz incidente, que siempre será de izquierda a derecha mientras no se advierta lo contrario. Estas distancias a lo largo del eje se toman con origen en el vértice S de la superficie del elemento óptico.

-El radio de curvatura R es positivo si el centro de curvatura de la superficie está a la derecha de S (el origen de R se toma en S).

-Los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

-Los ángulos de incidencia y refracción de un rayo serán positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto, se va en el sentido de las agujas del reloj.

-Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir por giro con el eje se va en el sentido contrario a las agujas del reloj.

• Espejos

Rayos paraxiales reflejados por un espejo esférico

Los rayos que inciden con pequeños ángulos θ reciben el nombre de ***rayos paraxiales***.

Las distancias objeto z_1 e imagen z_2 para un espejo esférico en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f}$$

donde $f = R/2$ es la focal del espejo. Si por la imagen pasan rayos de luz, ésta se denomina ***imagen real.*** Si la imagen se forma con las prolongaciones en sentido opuesto de los rayos de luz, se la denomina ***imagen virtual.*** El ***aumento lateral*** de un sistema óptico es el cociente entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto, $m = y_2/y_1$; para un espejo esférico:

$$m = -z_2/z_1$$

• Refracción en superficies planas

Reflexión total: Para el caso $n_1 > n_2$, el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia, $\theta_2 > \theta_1$, y conforme θ_1 aumenta, θ_2 se acerca al valor de 90°. Cuando esto sucede, es decir, cuando $\theta_2 = 90°$, el ángulo de incidencia recibe el nombre de ***ángulo crítico*** $\theta_c = \theta_2$ y se cumple:

$$\theta_c = \mathrm{arc\ sen}(n_2/n_1)$$

Para $n_1 > n_2$ y $\theta_1 > \theta_c$, la Ley de Snell no puede satisfacerse, no hay refracción de la luz y el rayo incidente es totalmente reflejado como si la superficie de separación de los dos medios fuera un espejo perfecto (***reflexión total***).

Prismas: Un prisma de ángulo de refringencia α e índice de refracción n deflecta o desvía un rayo que incide sobre él formando un ángulo θ con la normal a una de las caras, un ángulo δ que recibe el nombre de ***ángulo de desviación.***

Dispersión cromática: El índice de refracción n de una sustancia depende de la longitud de onda λ ($n = n(\lambda)$). Si la luz incidente sobre un prisma es blanca, entonces éste da lugar a un ángulo de desviación diferente para cada λ, $\delta = \delta(\lambda)$.

• Dioptrio esférico

Un *dioptrio esférico* es una superficie esférica de radio R que separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. La distancias objeto z_1 e imagen z_2 para un dioptrio esférico en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$-\frac{n_1}{z_1} + \frac{n_2}{z_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

con un aumento lateral m dado por la ecuación:

$$m = \frac{n_1}{n_2}\frac{z_2}{z_1}$$

• Lentes

Una *lente esférica* está limitada por dos superficies esféricas de radios R_1 y R_2 cuyo espesor es d y el índice de refracción de la misma es n. Una lente es delgada si su espesor d es despreciable frente a cada uno de sus radios de curvatura. La distancias objeto z_1 e imagen z_2 para una ***lente delgada en aire*** en la aproximación paraxial están relacionadas por:

$$-\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f'}$$

donde f' es la *focal imagen de la lente*:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

y el aumento lateral dado por la ecuación:

$$m = z_2/z_1$$

Si $f' > 0$ la lente se dice que es ***convergente***, mientras que si $f' < 0$, la lente es ***divergente***.

En los sistemas ópticos existen una serie pares de puntos y de pares de planos que tienen especial importancia, unos de ellos son los ***focos*** *F y F'* y los ***planos focales***.

Otro par de puntos y planos conjugados de importancia son los ***puntos principales*** *H y H'* y los ***planos principales***, que son un par de planos conjugados cuyo aumento lateral es $m = +1$. La intersección de estos planos con el eje óptico del sistema se les llama puntos principales H y H'.

Tema 13.- INTERFERENCIAS (*RESUMEN*)

• Interferencia de dos ondas luminosas

Cuando dos o más ondas coinciden en el espacio y el tiempo existe una *interferencia*.

Cuando dos ondas de luz monocromática de amplitudes complejas $U_1(\mathbf{r})$ y $U_2(\mathbf{r})$ se superponen, el resultado es una onda monocromática de la misma frecuencia y amplitud compleja $U(\mathbf{r})$ tal que:

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r})$$

las intensidades de las ondas que se superponen son:

$$I_1 = |U_1(\mathbf{r})|^2 \qquad\qquad I_2 = |U_2(\mathbf{r})|^2$$

y la intensidad de la onda resultante es:

$$I = |U|^2 = |U_1 + U_2|^2 = |U_1|^2 + |U_1|^2 + U_1^* U_2 + U_1 U_2^*$$

Sustituyendo:

$$U_1(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) \exp[j\phi_1(\mathbf{r})], \qquad U_2(\mathbf{r}) = A_2(\mathbf{r}) \exp[j\phi_2(\mathbf{r})]$$

se obtiene:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$$

siendo:

$$\delta = \phi_1 - \phi_2$$

la *diferencia de fase* entre la dos ondas. La intensidad I de la suma de las dos ondas no es la suma de las intensidades, sino que hay un término adicional debido a la interferencia.

Si $\delta = 2m\pi$ (m Z) la intensidad es máxima y corresponde a la *interferencia constructiva*:

$$I_{máx} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Si $\delta = (2m + 1)\pi$ (m Z) la intensidad es mínima y corresponde a la *interferencia destructiva*:

$$I_{mín} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Si las intensidades de las dos ondas que interfieren es idéntica, $I_1 = I_2 = I_0$, entonces:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

La dependencia de la intensidad I con la diferencia de fase δ permite obtener diferencias de fase midiendo la intensidad de luz. Este principio se utiliza en muchos sistemas ópticos.

Para poder obtener interferencias luminosas es necesario que las ondas que interfieran tengan la misma frecuencia y mantengan una diferencia de fase δ constante, entonces se dice que las dos fuentes son *coherentes*.

• Experimento de Young de la doble rendija

El experimento de Young de la doble rendija demuestra la naturaleza ondulatoria de la luz, debido a que el diagrama que aparece en la pantalla puede explicarse en términos de la interferencia entre ondas. Las ondas emitidas por las rendijas S_1 y S_2 tienen amplitudes complejas:

$$U_1(\mathbf{r}) = A_1 \exp(-jkr_1), \qquad U_2(\mathbf{r}) = A_2 \exp(-jkr_2)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias desde cualquier punto P de la pantalla a S_1 y S_2, respectivamente. La diferencia de fase es:

$$\delta = kr_2 - kr_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

De donde:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2m\pi \qquad \text{interferencia constructiva}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m + 1)\pi \qquad \text{interferencia destructiva}$$

es decir:

$$r_2 - r_1 = m\lambda \qquad \text{interferencia constructiva}$$

$$r_2 - r_1 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{interferencia destructiva}$$

Si la distancia y medida en el plano de observación así como la separación a de las fuentes S_1 y S_2 son pequeñas comparadas con la distancia d entre el plano de las rendijas y la pantalla de observación:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi a y}{\lambda d}$$

La intensidad resultante en los puntos de la pantalla es:

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda d}\right)$$

Los puntos de intensidad máxima (franjas brillantes) son:

$$y = \frac{m\lambda d}{a}$$

Los puntos de intensidad mínima (franjas oscuras) son:

$$y = (2m + 1)\frac{\lambda d}{2a}$$

La separación entre dos franjas brillantes consecutivas (*interfranja*) es:

$$\Delta y = \frac{\lambda d}{a}$$

Midiendo Δy, d y a, es posible obtener la longitud de onda λ.

• Interferómetros

Consideremos la interferencia de dos ondas planas de igual intensidad, $I_1 = I_2 = I_0$, propagándose según el eje z, y supongamos que una de ellas está retrasada una distancia d con respecto a la otra de modo que la amplitudes complejas serán: $U_1 = I_0^{1/2} \exp(-jkz)$ y $U_2 = I_0^{1/2} \exp[-jk(z - d)]$. La intensidad resultante I puede determinarse, teniendo en cuenta que la diferencia de fase es $\delta = kd = 2\pi d/\lambda$, como:

$$I = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right)\right]$$

Si $d = m\lambda$, con m un entero, se obtiene interferencia constructiva y la intensidad resultante es $I = 4I_0$; sin embargo, si $d = (2m + 1)\lambda/2$, con m un entero, se obtiene interferencia destructiva y la intensidad resultante es nula, $I = 0$.

Un *interferómetro* es un dispositivo óptico que divide una onda incidente en dos ondas utilizando un divisor de haz, produciendo posteriormente un retraso entre las dos ondas haciendo que éstas recorran caminos diferentes. Después, y con la ayuda de espejos, los dos haces se vuelven a combinar utilizando otro divisor de haz, detectándose la intensidad correspondiente a la interferencia de las dos ondas. Ejemplos de interferómetros de doble haz son el *interferómetro de Mach-Zehnder* y el *interferómetro de Michelson*.

• Interferencia en películas delgadas

Si n es el índice de refracción de la película y a su espesor, se tiene para máxima reflexión (mínima transmisión):

$$2an \cos\theta_r = \frac{1}{2}(2N - 1)\lambda$$

y para máxima transmisión (mínima reflexión):

$$2an \cos\theta_r = N\lambda$$

donde θ_r es el ángulo de refracción.

Tema 14.- DIFRACCIÓN (*RESUMEN)*

• Introducción

La difracción es un fenómeno característico del movimiento ondulatorio que se presenta cuando una onda es distorsionada por un obstáculo como una pantalla con una pequeña abertura, una rendija o un objeto pequeño.

El efecto de la difracción se hace más notable cuando el tamaño de las aberturas o de los obstáculos es comparable a la longitud de onda. Por esta razón, habitualmente no es posible observar a simple vista la difracción de la luz, ya que la mayoría de los objetos interpuestos son mucho mayores que la longitud de onda de la luz (del orden de 0.5 µm).

Los fenómenos de difracción se dividen en dos tipos. En la *difracción de Fraunhofer* los rayos incidentes sobre una abertura son paralelos y que se observa el diagrama de difracción a una distancia suficientemente grande para que efectivamente se reciban sólo rayos difractados paralelos. En la *difracción de Fresnel*, bien los rayos incidentes se originan en una fuente puntual, bien se observan en un punto del espacio cerca del obstáculo, o bien ambas cosas.

El *diagrama de difracción* es la distribución de la intensidad de la luz difractada en un plano de observación determinado.

• Principio de Huygens

Si se conoce la fuente productora de una onda es posible, en principio, seguir su propagación de una región a otra, tomando en consideración las propiedades del medio. Sin embargo, se puede determinar la propagación de una onda sin hacer mención a las fuentes, utilizando el *Principio de Huygens* (1629-1695), según el cuál la propagación de una onda a través del espacio puede describirse considerando que cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de ondas elementales secundarias que avanzan con la misma velocidad y frecuencia que la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de las ondas secundarias.

Para ondas electromagnéticas, como la luz, que se propagan en el vacío, el Principio de Huygens fue revisado por Kirchhoff a finales del siglo XIX, indicando que "se puede obtener la perturbación en un punto P en el instante t si se conoce la perturbación en cada elemento de superficie dS sobre una superficie S y se supone que los elementos de superficie actúan como fuentes de ondas secundarias; el movimiento ondulatorio se obtiene sumando los movimientos ondulatorios debidos a estas fuentes secundarias".

• Difracción de Fraunhofer por una abertura rectangular

Para una rendija de anchura b se observa que para las direcciones determinadas por los ángulos θ con respecto a la dirección de incidencia normal, se encuentran direcciones para las que la intensidad difractada es nula:

$$\text{sen}\theta = n\,\frac{\lambda}{b} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Para $\theta = 0$ se obtiene un máximo de intensidad. Si $\lambda \ll b$, los primeros ceros de intensidad a cualquier lado del máximo central corresponden a un ángulo:

$$\theta \approx \text{sen}\theta = \pm \lambda / b$$

y la mancha central brillante está subtendida por un ángulo:

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{b}$$

Si la pantalla de observación está a una distancia d de la rendija, la anchura Δx de la mancha central brillante sobre la pantalla es:

$$\Delta x = \frac{2\lambda\, d}{b}$$

El *poder de resolución* de una rendija según el criterio de Rayleigh es:

$$\theta = \lambda / b$$

Para una abertura rectangular de lados a y b de tamaño semejante, el diagrama de difracción es la combinación de los dos diagrama debidos a cada par de lados.

• Difracción de Fraunhofer por una abertura circular

Cuando en una pantalla que tiene una abertura circular de diámetro D inciden perpendicularmente ondas planas, el diagrama de difracción consiste en un disco central brillante, denominado *disco de Airy*, rodeado por anillos oscuros y brillantes que se alternan. Cuando $\lambda \ll D$ el semiángulo θ correspondiente al primer anillo oscuro está dado por:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

y el radio del disco de Airy sobre una pantalla situada a una distancia d es:

$$\rho = 1.22\,\frac{\lambda\, d}{D}$$

El *poder de resolución* de una abertura circular según el criterio de Rayleigh es:

$$\theta = 1.22\lambda / b$$

• Difracción de Fraunhofer por dos rendijas paralelas e iguales

La distribución de intensidades del diagrama de interferencia de las dos rendijas está modulada por la distribución de intensidades del diagrama de difracción de una sola rendija. Los máximos del diagrama de interferencia están dados por:

$$\text{sen}\theta = n\lambda / a \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

siendo a la distancia entre las rendijas. Los ceros del diagrama de difracción están dados por:

$$\text{sen}\theta = m\lambda / b \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

siendo b la anchura de cada rendija. Como $a > b$, los ceros del diagrama de difracción están más separados que los máximos del diagrama de interferencia.

• Redes de difracción

Una red de difracción está formada por un gran número de rayas o rendijas muy juntas. Para incidencia normal, las posiciones de los máximos de interferencia de una red son:

$$\text{sen}\theta = m\,\frac{\lambda}{\Lambda} = m\lambda f \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

donde m es el de *orden de difracción*, Λ es el *período de la red* y f su *frecuencia espacial* (en líneas/mm). El **poder de resolución** de una red es:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

donde N es el número de rendijas de la red que resultan iluminadas y m es el orden de difracción.

Cuando sobre una red de difracción incide luz policromática, las diferentes longitudes de onda producen máximos de difracción para distintos ángulos, excepto para el orden cero. El conjunto de máximos de un cierto orden para todas las longitudes de onda constituye un *espectro.*

Tema 15.- FOTOMETRÍA

La *Fotometría* es la parte de la Óptica que se ocupa del estudio de las características de los focos luminosos, así como de las iluminaciones que producen. Todos los focos luminosos emiten energía, y en la mayor parte de los casos lo son a causa de su elevada temperatura, gracias a la cual tiene lugar en ellos una emisión térmica de energía cuya longitud de onda corresponde precisamente a la zona visible del espectro.

• Flujo energético y flujo luminoso

Un foco luminoso da lugar a un *flujo energético* que representa la energía que pasa por segundo a través de la superficie cerrada que lo contiene. Su potencia se expresa en vatios. En la medida del flujo energético se utilizan órganos sensibles a la energía radiante y, en general, la sensibilidad de los receptores está limitada a cierta región del espectro.

Dos focos luminosos que emiten el mismo flujo energético, Φ, generalmente no producen la misma sensación luminosa, porque la sensibilidad del ojo varía con la longitud de onda de la radiación, siendo nula para todas las longitudes de onda fuera de los límites del espectro visible (~380-740 nm).

Cada valor del *rendimiento luminoso* V_λ se obtiene como el cociente entre el flujo energético para una longitud de onda λ y el flujo energético para la longitud de onda de 555 nm, de modo que ambos flujos energéticos produzcan en el ojo humano igual sensación de claridad.

Un determinado *flujo luminoso* puede ser producido por distintos flujos energéticos. El flujo luminoso se mide en lúmenes (lm). Para la radiación de λ = 555 nm un flujo energético de 1 W produce una luminosidad o sensación de claridad equivalente a un flujo de 680 lm:

$$1\,\mathrm{lm}(\,de\ 555\ nm) = \frac{1}{680}\ \mathrm{W}$$

número que se denomina *equivalente mecánico del lumen* para la mencionada radiación. Una fuente que emite un flujo energético de 1 W de luz de 555 nm tiene un flujo luminoso de 680 lm. Con esta definición una cierta cantidad de lúmenes de cualquier color producirá la misma sensación de claridad al ojo. El flujo luminoso total se obtiene mediante:

$$F = \int_0^\infty 680 V_\lambda\, f(\lambda)\, d\lambda$$

donde para el ojo realmente los límites de integración quedan reducidos al intervalo 380-740 nm.

• Intensidad luminosa de un foco puntual

Para un foco O cuyas dimensiones son lo suficientemente pequeñas para poder considerarlo puntual, se define la intensidad I del foco O en una dirección OO', como el flujo luminoso emitido por unidad de ángulo sólido Ω:

$$I = \frac{dF}{d\Omega}$$

En el SI su unidad es la *candela* (cd) que es la intensidad luminosa en la dirección perpendicular de una superficie de 1/600000 m^2 de un cuerpo negro a la temperatura de fusión del platino bajo la presión de 1.013 x 10^5 Nm^{-2}. La unidad de flujo luminoso (lumen, lm), es el flujo emitido por un foco puntual de 1 cd en un ángulo sólido de 1sr:

$$1\ \mathrm{lm} = 1\ \mathrm{cd} \times 1\ \mathrm{sr}$$

• Iluminancia y 1ª ley de Lambert

La *iluminancia E* es el concepto fotométrico más importante desde el punto de vista práctico, pues representa el flujo luminoso recibido por unidad de superficie:

$$E = \frac{dF}{dS}$$

La unidad es el *lux* o lumen por metro cuadrado (1 lux = 1 lm/m^2). Si el foco que produce la iluminación puede considerarse puntual existe una relación sencilla entre la iluminación que origina y la intensidad de dicho foco. En efecto, el flujo luminoso dF recibido por la superficie elemental dS, situada a la distancia r del foco puntual O, es:

$$dF = I\, d\Omega$$

siendo $d\Omega$ el ángulo sólido elemental bajo el cual se ve, desde O, la superficie dS. Se tiene:

$$dF = \frac{I\, dS \cos\theta}{r^2}$$

de donde:

$$E = \frac{dF}{dS} = \frac{I \cos\theta}{r^2}$$

Expresión que se conoce como *ley inverso del cuadrado de la distancia* o *"1ª Ley de Lambert"*.

• Focos luminosos extensos. Luminancia y 2ª Ley de Lambert

La mayor parte de los focos no pueden considerarse puntuales, salvo cuando los observamos a distancias muy grandes y, en general, los focos luminosos son de cierta extensión, tanto si tienen intensidad propia como si actúan difundiendo la luz que reciben de otro foco. Para un pequeño elemento de superficie S perteneciente a un foco extenso π, sea dF la parte del flujo emitido por S en la dirección OO' dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, la intensidad en dicha dirección es:

$$I_\theta = \frac{dF}{d\Omega}$$

Recibe el nombre de *luminancia* de dicha superficie, observada en la dirección OO', el cociente entre la intensidad I_θ y la proyección de la superficie S normalmente a dicha dirección:

$$B_\theta = \frac{I_\theta}{S \cos\theta}$$

Es un hecho experimental que una esfera incandescente, como el Sol, aparece con luminancia uniforme, independientemente del punto observado, luego para los difusores o emisores perfectos se cumple siempre que $B_\theta = B_0$, siendo B_0 la luminancia en dirección normal a la superficie. Como $B_0 = I_0/S$, resulta:

$$I_\theta = I_0 \cos\theta$$

que se conoce como *ley del coseno* o *2ª Ley de Lambert*. La unidad SI de luminancia es el nit:

$$1\ \mathrm{nit} = 1\ \mathrm{cd/m^2}$$

Las superficies que reflejan luz de manera difusa y uniformemente en todas las direcciones se denominan reflectores lambertianos y su luminancia no depende del punto de la fuente, ni de la dirección de propagación de la luz.

La luminancia de los focos es la causa que provoca el deslumbramiento cuando tiene valores elevados. De ahí la sensación desagradable que producen los focos intensos de poca superficie y, por el contrario, lo grata que resulta a la vista una iluminación idéntica producida por un foco extenso. El flujo luminoso correspondiente a una fuente lambertiana verifica la ecuación:

$$F_\theta = F_0 \cos\theta$$

y para la iluminancia se cumple:

$$E_\theta = E_0 \cos\theta$$

Bibliografía

- M. Alonso y E. J. Finn. **Física. Vol. II: Campos y Ondas** (Addison-Wesley Ibeoamericana. Mexico, 1986).

- M. Alonso y E. J. Finn. **Física** (Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington, 1995).

- A. Beléndez. **Fundamentos de Óptica para Ingeniería Informática** (Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante, 1996).

- S. Burbano, E. Burbano y C. Gracia. **Física General** (Mira Editores. Zaragoza, 1993).

- J. Catalá. **Física**. (Saber. Valencia, 1988).

- W. E. Gettys, F. J. Keller y M. J. Skove. **Física Clásica y Moderna** (McGraw-Hill. Madrid, 1991).

- E. Hecht y A. Zajac. **Óptica** (Addison Wesley. México, 1988).

- J. Llinares y A. Page. **Curso de Física Aplicada: Electromagnetismo y Semiconductores** (Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1988).

- R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane. **Física** (CECSA. México, 1994).

- E. A. Saleh y M. C. Teich. **Fundamentals of Photonics** (John Wiley & Sons, Inc. New York, 1991).

- F. W. Sears, M. W. Zemansky y H. D. Young. **Física Universitaria** (Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1986).

- R. A. Serway. **Física** (MacGraw-Hill. México, 1993).

- P. A. Tipler. **Física** (Reverté. Barcelona, 1992).

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante