

FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN FÍSICA
TRABAJO FIN DE GRADO
CURSO ACADÉMICO 2021-2022

TÍTULO:

**MÉTODO DE GREEN PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN
DE HELMHOLTZ ESCALAR CON APLICACIÓN AL ESTUDIO DE
MEDIOS CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN VARIABLE**

AUTOR:

JUAN CARLOS BRAVO FRANCÉS

Resumen

Para la simulación de la propagación electromagnética en medios dieléctricos existe en la literatura un gran número de métodos numéricos [1] como el método de elementos finitos, el método de diferencias finitas, el método de líneas, el método de momentos, etc; que han demostrado una gran eficiencia a la hora de predecir el comportamiento de la radiación electromagnética. No obstante, el coste computacional suele ser elevado en muchos de ellos. En este trabajo se propone resolver la ecuación de Helmholtz escalar mediante un método integral de volumen basado en el uso del tensor de Green [2]. Si bien se derivará una versión más sencilla, en la que el tensor de Green degenera en una función y que se pretende validar comparándola con otros métodos más rigurosos. Este método se aplicará al estudio de objetos dieléctricos de diferentes formas y estructuras.

Abstract

For the simulation of the electromagnetic propagation in dielectric means there is a large number of numerical methods [1] in the literature such as finite elements method, finite differences method, momentum method, etc; that have shown a great efficiency at the time of predict electromagnetic radiation behaviour. Nevertheless, the computational cost is usually high in many of them. In this work it is propose to solve scalar Helmholtz equation by means of a volume integral method based in the use of Green tensor's [2]. Although it will be derived to a simpler version, in which Green tensor's degenerate into a function and it will try to be validated by comparating with other more rigorous methods. This method will be applied to the study of dielectric items of different shapes and structures.

Índice

1. Introducción	6
2. Fundamento teórico	8
2.1. Ecuaciones de Maxwell	8
2.2. Condiciones de contorno	9
2.3. Obtención de la ecuación de Helmholtz	10
2.4. Definición y propiedades del tensor de Green	11
2.5. La función escalar de Green	14
2.5.1. Definición	14
2.5.2. Concepto y aplicación en un campo electromagnético	15
2.5.3. Función escalar de Green en dos dimensiones	17
2.6. Discretización de las ecuaciones	19
3. Resolución analítica de las ecuaciones de Maxwell para un cilindro homogéneo	21
3.1. Incidencia de una onda electromagnética plana	25
3.1.1. Caso I. Campo eléctrico incidente paralelo al plano xz	26
3.1.2. Caso II. Campo eléctrico incidente perpendicular al plano xz	28
3.1.3. Caso III. Aproximación escalar	29
3.2. Simulaciones	30
3.2.1. Comparación de la solución analítica con la aproximación escalar	30
3.2.2. Comparación de la solución analítica con el método de Green	35
4. Resultados	37
4.1. Método de Green 2D	37
4.1.1. Luz dispersada por un cilindro de base elíptica	37
4.1.2. Luz dispersada por un prisma de base rectangular	38
4.2. Método de Green 3D	41
4.2.1. Luz dispersada por una esfera	41

4.3. Luz dispersada por un cubo	42
5. Conclusiones	43
A. Vectores Armónicos	44
B. Códigos	46
Referencias	54

1. Introducción

La teoría de Scattering es el marco de referencia del estudio y entendimiento de la dispersión de partículas y ondas. Si bien, esta teoría es conocida por la complejidad a la cual puede llegar, su precisión y exactitud son notorias. En el ámbito del electromagnetismo el Scattering es todo aquel proceso que se obtiene cuando un haz luminoso incide sobre un material y éste se dispersa. En este trabajo se estudiará la dispersión de la luz en casos específicos afrontando dos vías, la resolución analítica de la ecuación de Helmholtz escalar a partir de las ecuaciones de Maxwell y la resolución numérica mediante el método de Green, verificando la validez del mismo y entendiendo el significado físico de las funciones de Green.

Las funciones de Green fueron introducidas por el físico matemático George Green, las cuales muestran la respuesta impulsional de un sistema lineal. Estas funciones cobran especial importancia en la Teoría de Sistemas Lineales, pues si la respuesta de nuestro sistema $f(t)$ se obtiene por la convolución $g(t) \otimes h(t)$ y la entrada o input es $g(t) = \delta(t)$, entonces la salida será $f(t) = h(t)$, donde $h(t)$ es la respuesta impulsional¹ (nuestro caso la función de Green asociada). En cuanto al ámbito electromagnético, una respuesta impulsional representa una fuente puntual en el espacio como si de una delta de Dirac se tratase $\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$. Por lo tanto, la función de Green permite expresar los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} junto a los potenciales \mathbf{A} , ϕ en términos de una fuente a puntual. En problemas cuyos sistemas estén descritos en 3D, la importancia de la notación vectorial de los campos es vital, luego las funciones de Green deberán expresarse como una diada de funciones, i.e. un tensor de orden 2. En cuanto a este trabajo se abordará el caso escalar, donde la formulación planteada será diferente a la tensorial. Sin embargo, el pasar del ámbito vectorial al escalar tiene sus ventajas e inconvenientes; pues habrá una pérdida de información en cuanto a la direccionalidad de los campos y el posible sentido de la polarización de las ondas electromagnéticas pero a cambio tendremos una formulación mucho más compacta e intuitiva.

¹La respuesta impulsional de un sistema es la que se presenta en la salida cuando en la entrada se introduce un impulso. Decimos que un impulso es el caso límite de un pulso infinitamente corto en el tiempo pero que mantiene su área o integral. Se trata de una idealización la cual simplifica la integración, pues es imposible obtener amplitud infinita en un intervalo infinitamente corto en cualquier sistema real.

El principal propósito de este trabajo es formalizar un método numérico basado en las funciones escalares de Green, pudiendo así simular diferentes problemas de Scattering electromagnético.

En cuanto a la organización del proyecto, éste se organizará en tres secciones bien diferenciadas. En primer lugar daremos un marco teórico a partir de las ecuaciones de Maxwell y la obtención de la ecuación de Helmholtz. Seguidamente definiremos el tensor de Green y derivaremos de éste sus funciones escalares, explicando y aplicando las mismas al caso de los campos electromagnéticos. Para finalizar esta sección introductoria explicaremos la metodología para realizar la resolución numérica de las ecuaciones junto a su discretización. En la siguiente sección trataremos un caso particular de Scattering, la incidencia de luz sobre un cilindro homogéneo. Donde se obtendrán las soluciones analíticas de las ecuaciones de Maxwell mediante un desarrollo en vectores armónicos y se compararán las mismas con la aproximación escalar y con el método de Green. Para ello simularemos los casos que se abordan mediante una serie de Scripts programados en *MATLAB*. En la última sección se tratarán geometrías más complejas y se pondrá a prueba la validez del método variando propiedades del sistema, como puede ser el índice de refracción.

2. Fundamento teórico

2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell permiten explicar cualquier fenómeno electromagnético posible, por ello la luz al tratarse de un fenómeno ondulatorio electromagnético queda descrita por las mismas. Sabemos que cualquier radiación electromagnética está compuesta por dos ondas de carácter vectorial acopladas entre sí, las cuales hacen referencia a los campos eléctrico y magnético. Estos campos, de forma general, son funciones de la posición \mathbf{r} y del tiempo t . Así pues, para un medio de propagación general las ecuaciones de Maxwell cobran la forma siguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1d)$$

Donde los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} denotan el campo eléctrico y magnético, ρ y \mathbf{J} son la densidad volumétrica de carga y el vector densidad de corriente respectivamente. Por otro lado, el vector desplazamiento \mathbf{D} y vector inducción magnética \mathbf{B} están relacionados con los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} mediante

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.2)$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (2.3)$$

Donde \mathbf{P} y \mathbf{M} denotan el vector de polarización y de magnetización respectivamente. Éstos últimos vectores, a su vez, muestran la variación del momento dipolar eléctrico y bipolar magnético respecto al volumen. Las constantes ε_0 y μ_0 son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío, las cuales toman el siguiente valor:

$$\varepsilon_0 = 8,8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad (2.4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} \quad (2.5)$$

Por otra parte, en la expresión (2.2), ε denota la permitividad general del medio, la cual puede tomar forma escalar o tensorial, pues podemos estar ante un medio isótropo u otro en el cual las propiedades dependan de las direcciones del mismo. Por lo tanto, podemos escribir la relación anterior como

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{E} \quad (2.6)$$

Generalizando así la permitividad eléctrica de cualquier medio. Para el caso del vacío esta matriz pasa a ser la matriz identidad $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij}$ y para un medio anisótropo tendremos que $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})$.

2.2. Condiciones de contorno

Los campos electromagnéticos deben de satisfacer las ecuaciones de Maxwell en los puntos donde ε y μ sean continuos. Sin embargo, cuando una partícula se encuentra en la interfase de un medio con otro, en general, hay un cambio en la permitividad eléctrica y en la permeabilidad magnética. Esta variación aparece en la región transitoria entre medios, cuyo espesor es del orden atómico, luego desde el punto de vista macroscópico tendremos una discontinuidad en dicho borde. Para salvar este problema impondremos las condiciones de contorno siguientes

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} &= 0 \\ (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de separación entre medios. Estas condiciones de contorno exigen la continuidad de las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos en la interfase entre medios.

2.3. Obtención de la ecuación de Helmholtz

Para deducir la ecuación de Helmholtz tendremos como punto de partida las ecuaciones de Maxwell para medios en ausencia de corrientes y cargas libres ($\mathbf{J} = 0$ y $\rho = 0$, respectivamente) y cuya permitividad eléctrica es una función $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.8b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.8c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.8d)$$

Para desacoplarlas tomaremos el rotacional de (2.8c) y sustituiremos (2.8d)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.9)$$

Que aplicando la siguiente identidad vectorial y sustituyendo (2.8a) se tiene que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Si ahora consideramos una onda plana monocromática constituida por un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares entre sí, tendremos

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.11)$$

Donde \mathbf{k} denota el vector de onda, el cual muestra la dirección de propagación de la onda electromagnética, ω la frecuencia angular y $\hat{\mathbf{n}}$ es vector unitario dado en la dirección de polarización de la onda, dirección del campo \mathbf{E} . Si sustituimos dicha expresión en (2.10) llegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \omega^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (2.12)$$

Si ahora definimos $k_0^2 = \omega^2/c^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$ la ecuación resulta ser

$$\nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (2.13)$$

Y esta ecuación (2.13) es la ecuación de Helmholtz vectorial, una ecuación en derivadas parciales elíptica. Nosotros en la práctica nos quedaremos con la forma escalar considerando una única componente. Es importante comentar que la obtención del campo magnético \mathbf{H} puede dificultarse si procedemos como hasta ahora, pues el tensor dieléctrico $\varepsilon(\mathbf{r})$ depende de las posiciones y al aplicar el rotacional el cálculo no es tan simple como para el campo \mathbf{E} . Por ello, mediante la ecuación (2.8c) y la expresión del campo eléctrico podremos obtener el campo \mathbf{B} .

Por último lugar, en ocasiones se emplea el término de contraste dieléctrico, definido por

$$\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) - \varepsilon_B \quad (2.14)$$

El cual permite escribir la ecuación (2.15) como una ecuación inhomogénea. El contraste dieléctrico es una magnitud muy relevante cuando hablamos de espacios no homogéneos, pues nos muestra la influencia de la topografía del espacio, permitiéndonos así poder dar, por ejemplo, propiedades ópticas en el campo cercano por muestras no homogéneas. En la práctica tendremos que la ecuación de Helmholtz deja de ser homogénea y aparece una parte que tiene que ver con una fuente de radiación electromagnética.

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \varepsilon_B \mathbf{E} = -k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (2.15)$$

2.4. Definición y propiedades del tensor de Green

Sea $\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ el tensor de Green, el cual es un tensor de orden 2 y verifica

$$\mathcal{L}\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - k_0^2 \varepsilon_B \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{1}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.16)$$

Es decir, es un tensor el cual satisface la solución de la ecuación de onda plana para una fuente puntual. Donde \mathcal{L} es el operador diferencial, el cual actúa sobre $\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $\mathbf{1}$ muestra la diada unidad. Si ahora introducimos (2.16) en la ecuación inhomogénea

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) = k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

A continuación aplicaremos el operador divergencia sobre (2.16) obteniendo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))] - k_0^2 \varepsilon_B \nabla \cdot \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla \cdot \mathbf{1}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{1}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \nabla \cdot \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{k_0^2 \varepsilon_B} \nabla' \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.18)$$

Donde ∇' denota el gradiente actuando sobre las coordenadas del vector \mathbf{r}' . Si ahora en vez de anular el doble rotacional lo desarrollamos y aplicamos nuevamente la divergencia se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - \nabla^2 \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 \varepsilon_B \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \mathbf{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
(\nabla^2 + k_0^2 \varepsilon_B) \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - \mathbf{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\
&= \nabla \left(\frac{1}{k_0^2 \varepsilon_B} \nabla' \mathbf{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) - \mathbf{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\
&= \frac{\mathbf{1}}{k_0^2 \varepsilon_B} \nabla \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \mathbf{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Agrupando términos llegamos a

$$(\nabla^2 + k_0^2 \varepsilon_B) \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \left(\mathbf{1} - \frac{\nabla \nabla'}{k_0^2 \varepsilon_B} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.20}$$

Luego, podemos definir una función escalar $g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ que satisfaga

$$(\nabla^2 + k_0^2 \varepsilon_B) g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.21}$$

Sustituimos en (2.20) y obtenemos la siguiente relación entre el tensor de Green y la función escalar introducida

$$\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\mathbf{1} - \frac{\nabla \nabla'}{k_0^2 \varepsilon_B} \right) g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{2.22}$$

esta última expresión junto a la condición de divergencia del tensor de Green (2.18) cumple que

$$\begin{aligned}
k_B^2 \nabla \cdot \mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + k_B^2 (\nabla + \nabla') g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\nabla + \nabla') g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Esto implica que necesariamente la función escalar $g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ debe de ser función de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Luego el tensor de Green $\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para un medio infinito homogéneo, con permitividad ε_B se relaciona con la función escalar por

$$\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\mathbf{1} + \frac{\nabla \nabla'}{k_B^2} \right) g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{2.24}$$

con

$$g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik_B R}}{4\pi R} \tag{2.25}$$

la función escalar de Green, la cual como ya hemos mencionado depende solo de la distancia relativa entre la fuente y el observador, $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Esta función escalar será el centro de atención de nuestro trabajo, sobre la cual trataremos con más profundidad en secciones venideras. Por otro lado, hemos redefinido el número de onda de nuestro medio problema tal que

$$k_B = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_B \quad (2.26)$$

Si introducimos la función escalar (2.25) en (2.24) podemos llegar a la forma explícita del tensor de Green $\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

$$\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\mathbf{1} + \frac{ik_B R - 1}{k_B^2 R^2} \mathbf{1} + \frac{3 - 3ik_B R - k_B^2 R^2}{k_B^2 R^4} \mathbf{R}\mathbf{R} \right) \frac{e^{ik_B R}}{4\pi R} \quad (2.27)$$

Así pues, como en el tensor de Green aparece la función escalar, la cual solo depende del módulo de la posición relativa R , este tensor es recíproco en el sentido $\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}^B(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, además, la matriz que lo representa es simétrica.

$$\mathbf{G}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} G_{xx}^B & G_{xy}^B & G_{xz}^B \\ G_{xy}^B & G_{yy}^B & G_{yz}^B \\ G_{xz}^B & G_{yz}^B & G_{zz}^B \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

2.5. La función escalar de Green

2.5.1. Definición

Un aspecto relevante en física y matemáticas es la solución de ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas. Pues la solución general de una ecuación diferencial

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_0y(x) = f(x) \quad (2.29)$$

puede escribirse como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (2.30)$$

siendo $y_h(x)$ la solución general de la ecuación homogénea asociada e $y_p(x)$ la solución particular para la parte no homogénea. Para encontrar la solución particular $y_p(x)$ podemos formular el problema en términos de operadores diferenciales lineales. Por ello, sea I un intervalo en \mathbb{R} donde $\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$ ² con

$$\mathcal{L} = a_n(x)D^n + \dots + a_0(x) \quad (2.31)$$

Entonces el problema se puede reescribir de la siguiente forma mediante el operador lineal como $\mathcal{L}[y](x) = f(x) \quad \forall x \in I$, siendo $f(x)$ una función continua en I

$$\mathcal{L}[y](x) = \int f(x')\delta(x - x')dx' \quad (2.32)$$

Para que este operador integral sea único deberá restringirse su dominio de tal forma que se establezca una aplicación biyectiva y admita inverso $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{C}^0(I) \rightarrow \mathcal{C}^n(I)$ tal que

$$(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^{-1})[f](x) = f(x) \quad \forall f(x) \in \mathcal{C}^0(I) \quad (2.33)$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}[f](x) = \int G(x, x')f(x')dx' \quad \forall x \in I \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L}G(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.35)$$

Luego la solución de (2.32) sería

$$y(x) = \int f(x')G(x, x')dx' \quad (2.36)$$

Donde la función $G(x, x')$, núcleo del operador integral \mathcal{L}^{-1} , es lo que denominaremos como *función de Green asociada* con el operador \mathcal{L} en I .

² $\mathcal{C}^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, es el espacio de las funciones que presenta n derivadas continuas en I . Cuando nos referimos a $n = 0$, $\mathcal{C}^0(I)$ estamos en el espacio de las funciones continuas en I .

2.5.2. Concepto y aplicación en un campo electromagnético

La función de Green aplicada a la ecuación de Helmholtz es la solución de la ecuación de ondas para una fuente puntual. Luego si la solución para esta fuente puntual es conocida, entonces la solución para una fuente general se puede obtener mediante el principio de superposición. Este resultado proviene de la propia linealidad de la ecuación de ondas, pues una fuente cualquiera puede ser descrita por la superposición lineal de fuentes puntuales. Para nuestro caso vamos a considerar un campo escalar $E(\mathbf{r})$ el cual presenta una fuente $s(\mathbf{r})$. La ecuación de Helmholtz asociada a este sistema sería

$$(\nabla^2 + k^2)E(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \quad (2.37)$$

Si empleamos la definición de la función escalar de Green, renombrándola ahora como $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ tendríamos que

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.38)$$

Dado $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ podemos encontrar $E(\mathbf{r})$ mediante el principio de superposición, pues la función g es solución de la ecuación (2.37). Para ello, podemos definir la fuente arbitraria $s(\mathbf{r})$ como

$$s(\mathbf{r}) = \int s(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (2.39)$$

La cual muestra la superposición de fuentes puntuales. Consecuentemente con este resultado, se tiene que la solución de (2.37) resulta ser

$$E(\mathbf{r}) = - \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')s(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (2.40)$$

Siendo V el volumen de nuestro sistema a estudiar. Si ahora consideramos un medio homogéneo lo suficientemente grande, podemos resolverlo si consideramos coordenadas esféricas con el origen en \mathbf{r}' . Así pues, la ecuación (2.38) quedaría como

$$(\nabla^2 + k^2)g(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (2.41)$$

Que por simetría esférica, $g(\mathbf{r})$ también debe preservarla. Así pues, para $\mathbf{r} \neq 0$, podemos reemplazar el vector \mathbf{r} por el escalar r y dar una solución homogénea esféricamente simétrica, tal y como

$$g(r) = c_1 \frac{e^{ikr}}{r} + c_2 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.42)$$

Considerando ahora que no tenemos fuentes en el infinito, la ecuación anterior se puede simplificar en

$$g(r) = c \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.43)$$

Pues nos hemos quedado con la única solución saliente. Para poder hallar dicha constante c vamos a considerar un pequeño volumen de nuestro sistema δV y vamos a integrar la ecuación (2.38) en el mismo

$$\int_{\delta V} \nabla^2 \left(c \frac{e^{ikr}}{r} \right) dV + \int_{\delta V} k^2 c \frac{e^{ikr}}{r} dV = -1 \quad (2.44)$$

No es difícil de observar que la segunda integral se anula, pues si tomamos un volumen lo suficientemente pequeño $r \rightarrow 0$, esta integral será proporcional a r , pues $dV = r^2 dr d\theta d\phi$. Tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$ tendríamos que por el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta V} \nabla \cdot \left[\nabla \left(c \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dV &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\delta A} \nabla \left(c \frac{e^{ikr}}{r} \right) dA = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 c \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = -1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4\pi} \end{aligned} \quad (2.45)$$

De tal forma que la solución de la función escalar de Green solo dependerá de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y en general como

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.40) y (2.46), podemos escribir el campo escalar asociado a dicha fuente como

$$E(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} s(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.47)$$

2.5.3. Función escalar de Green en dos dimensiones

En ocasiones, cuando el problema lo permite, resulta interesante reducir el número de dimensiones del sistema, pues la dificultad de las ecuaciones que describen el problema suele reducirse. Por ello, una vez introducida la función escalar de Green en 3D sería apropiado ver su expresión en geometrías 2D. Un caso relevante a estudiar puede ser el de un cilindro infinito, el cual presenta simetría de translación en una dirección, concretamente en el eje z como muestra la figura siguiente

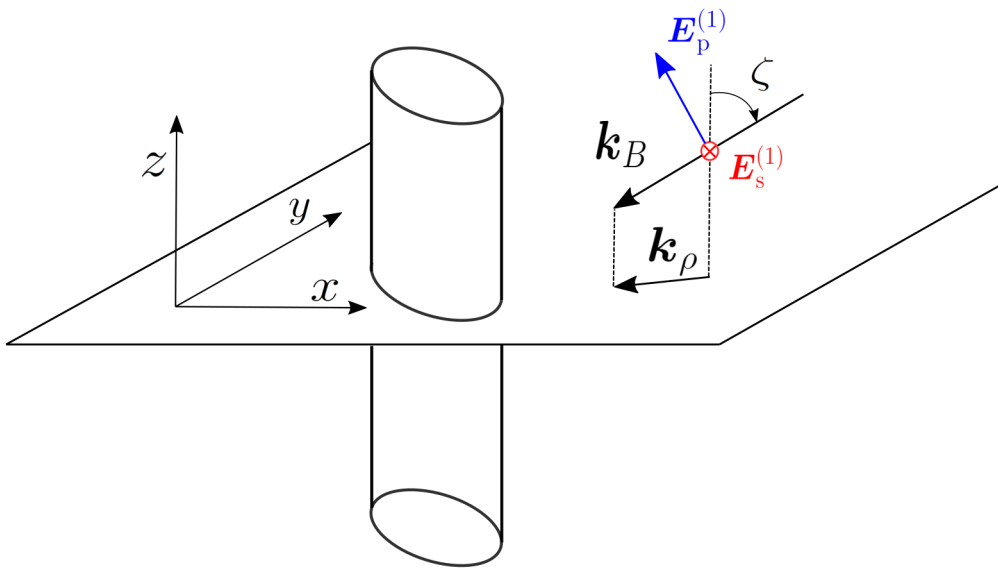


Figura 1: Esquema de un sistema 2D. Ya que la geometría es invariante en la dirección z el estudio puede reducirse al plano xy , así pues el campo electromagnético no necesariamente debe propagarse por dicho plano y el campo incidente $\mathbf{E}^{(1)}$ puede incidir sobre el sistema con un ángulo $\zeta \neq \pi/2$. Por otro lado, se pueden considerar dos polarizaciones diferentes para el campo incidente: **polarización p**, donde el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia y **polarización s**, el cual es ortogonal. En el caso en el que $\zeta = \pi/2$, la polarización p se refiere a TM y la polarización s a TE.

Como se comenta en la descripción de la imagen 1, el campo incidente puede incidir sobre el cilindro con un vector de propagación \mathbf{k}_B no paralelo al plano xy ($\zeta \neq \pi/2$). En este caso, las tres componentes; x , y , z del campo eléctrico puede acoplarse entre ellas mediante el tensor de Green.

Por otra parte, cuando el campo se propaga por el plano xy ($\zeta = \pi/2$), aparecen dos modos distintos de polarización: el transversal eléctrico (modo TE), el cual el campo eléctrico presenta dos componentes (x, y) y el modo transversal magnético (modo TM), donde el campo solo tiene componente z .

Para tener clara la notación que vamos a emplear, vamos a definir la coordenada transversal $\boldsymbol{\rho}$ como

$$\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z) = (x, y, z) \quad (2.48)$$

y el vector de onda transversal \mathbf{k}_ρ

$$\mathbf{k}_B = (\mathbf{k}_\rho, k_z) \quad k_\rho = |\mathbf{k}_\rho| \quad (2.49)$$

Como en los sistema en 3D, la función escalar de Green en geometrías 2D solo dependerá de la posición relativa entre la fuente y el observador, por ello es conveniente definir las coordenadas relativas

$$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}' = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) = (x - x', y - y') \quad (2.50)$$

Reduciendo así el problema tridimensional a uno en el plano. A continuación, para obtener la expresión de la función escalar de Green en 2D primero vamos a comprender el significado físico de la misma: en 3D ésta hace referencia a una fuente puntual de campos electromagnéticos, en 2D el sistema representará el campo generado por una fuente de carga lineal infinita observado en un plano $z = \text{cte}$ cuya dependencia axial va con $\exp(ik_z z)$. Por el mismo sentido físico podemos obtener $g_{2D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como la integral a través de esta fuente lineal

$$\begin{aligned} g_{2D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{ik_z z'} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{e^{ik_B \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} e^{ik_z z'} = \frac{i}{4} H_0(k_\rho \rho) e^{ik_z z} \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde $H(k_\rho \rho)$ denota la función de Hankel de primera especie, la cual está estrechamente relacionada con las funciones de Bessel en el plano complejo \mathbb{C} . La resolución de esta integral aparece en [3]

2.6. Discretización de las ecuaciones

Como nuestro trabajo se va a basar en un método escalar consideremos entonces las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + k_0^2 \varepsilon_B E(\mathbf{r}) = -k_0^2 \Delta \varepsilon(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) \quad (2.52)$$

$$(\nabla^2 + k_0^2 \varepsilon_B) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.53)$$

Si introducimos (2.53) en (2.52), se puede ver fácil que el campo total $E(\mathbf{r})$ viene dado por

$$E(\mathbf{r}) = E^{(1)}(\mathbf{r}) + \int_V g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot k_0^2 \Delta \varepsilon(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.54)$$

Donde la integración es sobre todo el volumen de la región de simulación escogida y $E^{(1)}(\mathbf{r})$ hace referencia al campo eléctrico incidente. Una circunstancia a resolver que se nos puede presentar es el estudio de un volumen reducido donde $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$, pues por la definición de la función escalar de green (2.46) si integramos bajo esa condición ésta se hace singular. Para solventar dicho problema cuando $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'$, la singularidad puede ser evitada si excluimos un elemento infinitesimal de volumen δV del volumen de integración V y tratamos la singularidad por separado. Reescribiendo (2.54) como

$$E(\mathbf{r}) = E^{(1)}(\mathbf{r}) + \lim_{\delta V \rightarrow 0} \int_{V-\delta V} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot k_0^2 \Delta \varepsilon(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - L \cdot \frac{\Delta \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon_B} E(\mathbf{r}) \quad (2.55)$$

Donde L es un escalar que deriva de la diada \mathbf{L} la cual depende de la geometría del volumen excluido δV . Un estudio detallado de la dependencia de \mathbf{L} con la forma del volumen excluido se puede encontrar en [4], en nuestro proyecto el punto de observación \mathbf{r} se encontrará fuera del medio dispersivo o “scatterer”, cuya posición viene dada por \mathbf{r}' . Para resolver numéricamente (2.55) deberemos definir previamente una red de N nodos la cual represente el sistema. Cada nodo i estará centrado en una posición \mathbf{r}_i y presentará un volumen V_i si estamos en 3D o un área en 2D y un valor de contraste dieléctrico. A continuación deberemos discretizar el campo eléctrico $E_i = E(\mathbf{r}_i)$, el contraste dieléctrico $\Delta \varepsilon_i = \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_i)$ y la función escalar de Green $g_{i,j} = g(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ a partir de un sistema de ecuaciones lineales

$$E_i = E_i^{(1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{i,j} \cdot k_0^2 \Delta \varepsilon_j E_j V_j + M_i \cdot k_0^2 \Delta \varepsilon_i E_i - L \cdot \frac{\Delta \varepsilon_i}{\varepsilon_B} E_i \quad i = 1, \dots, N \quad (2.56)$$

Siendo

$$M_i = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \int_{V_i - \delta V} g(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.57)$$

A lo largo de la implementación de los códigos y simulaciones se ha puesto de manifiesto que los términos donde aparece la función escalar de Green o el factor geométrico L , éstos prevalecen ante M_i . Sin embargo, muchos autores para geometrías más complejas que las que trataremos en el proyecto demuestran que el término M_i es más relevante que el de $L \cdot E_i$ como en [2].

Las ecuaciones (2.56) representan un sistema de ecuaciones lineal que se puede resolver con métodos numéricos simples. Expresando el sistema de ecuaciones de forma

$$E_i = E_i^{(1)} + B \cdot E_i \Rightarrow \underbrace{(I - B)}_{A_G} \cdot E_i = E_i^{(1)} \quad E_i = A_G^{-1} E_i^{(1)} \quad (2.58)$$

Con la notación de los códigos implementados tendríamos que; E_i es la matriz de campo eléctrico simulado, $E_i^{(1)}$ del campo incidente y A_G la matriz derivada del despeje la cual contiene la función escalar de Green y los términos de contraste dieléctrico y factor geométrico de la fuente L . Este procedimiento de resolución del sistema de ecuaciones lo solventa con rapidez el método *gmres* de MATLAB calculando la matriz inversa de A_G

3. Resolución analítica de las ecuaciones de Maxwell para un cilindro homogéneo

En esta sección vamos a plantear y resolver las ecuaciones de Maxwell cuando una onda plana monocromática incide sobre un cilindro homogéneo infinito. Pudiendo así contrastar el método numérico (con la función escalar de Green) con la solución analítica. Para abordar este problema vamos a considerar un vector \mathbf{v} y un campo escalar ψ , los cuales recogerán toda la información de los campos eléctrico y magnético incidentes en el cilindro. Como ya comentamos, la ecuación de Helmholtz vectorial (2.15) para los campos eléctrico y magnético sería

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \qquad (3.1)$$

Con $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ y cuya relación interna es

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} \qquad (3.2)$$

Para relacionar el campo fuente escalar ψ y el vector \mathbf{v} con los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} vamos a definir dos campos vectoriales; \mathbf{M} y \mathbf{N} , expresados por

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{v}\psi) \qquad \mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \qquad (3.3)$$

Algunos comentarios a tener en cuenta sobre estos nuevos campos vectoriales es su divergencia nula, pues por las identidades vectoriales la divergencia de un rotacional es igual a cero

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{N} = 0 \qquad (3.4)$$

Si a continuación empleamos las identidades vectoriales

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \qquad (3.5)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \qquad (3.6)$$

a la ecuación de \mathbf{M} (3.3) se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{v} (\nabla^2 \psi + k^2 \psi)] \qquad (3.7)$$

Podemos asegurar entonces el campo \mathbf{M} satisface la ecuación de ondas vectorial si y solo si

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \qquad (3.8)$$

Análogamente se obtiene el mismo resultado con el campo \mathbf{N} . Por otra parte, esta expresión permite expresar (3.3) como

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{v}\psi) = \psi \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \psi \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \nabla \psi \quad (3.9)$$

Pues el rotacional de un vector constante es 0. Así pues, el campo \mathbf{M} es ortogonal al vector constante \mathbf{v} . La idea de trabajar con estos dos campos es porque tanto \mathbf{M} como \mathbf{N} cumplen las propiedades de los campos electromagnéticos; es decir, presentan divergencia nula, el rotacional de \mathbf{M} es proporcional al campo \mathbf{N} (y viceversa) y ambos satisfacen la ecuación de ondas vectorial. Pues comprobadas estas propiedades nos disponemos a nombrar los campos y vectores empleados: los campos \mathbf{M} y \mathbf{N} serán nuestros vectores armónicos, ψ la función generadora de los campos y \mathbf{v} el vector piloto. En nuestro caso escogeremos $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z$

Escribiendo la ecuación (3.8) en coordenadas cilíndricas tendríamos

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (k^2 - h^2)\psi = 0 \quad (3.10)$$

Para resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales emplearemos separación de variables, que por [1] se obtiene

$$\psi_\nu(\rho, \phi, z) = Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} e^{ihz} \quad (3.11)$$

Donde $Z_\nu(k\rho)$ representa una función de Bessel genérica de primer, segundo, tercer, o cuarto orden, es decir $Z_\nu(k\rho) = \{J_\nu(k\rho), Y_\nu(k\rho), H_\nu^{(1)}(k\rho), H_\nu^{(2)}(k\rho)\}$. Las dos últimas son las funciones de Hankel de primer y segundo orden. Por otra parte, ν es un número entero y h es una constante cuyo valor viene definido por la onda incidente, por ejemplo, si el campo eléctrico es perpendicular al cilindro (polarización S), $h = 0$.

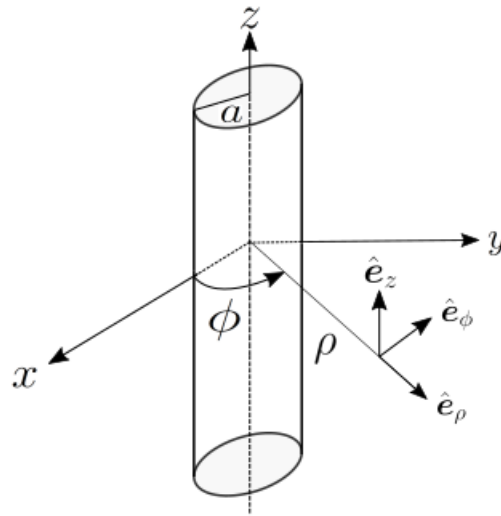


Figura 2: Sistema de coordenadas cilíndricas

Por otra parte, las funciones $Z_\nu(k\rho)$ satisfacen la ecuación diferencial de Bessel

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} Z_\nu(k\rho) + r \frac{d}{dr} Z_\nu(k\rho) + (r^2 - \nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0 \quad (3.12)$$

Donde $r = \rho\sqrt{k^2 - h^2}$, las soluciones linealmente independientes de (3.12) son las funciones de Bessel de primer y segundo orden, J_ν y Y_ν . De este modo, al definir la función generadora como una función armónica y el vector piloto $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_z$, los campos \mathbf{M} y \mathbf{N} se reescribirán como

$$\mathbf{M}_\nu = \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi_\nu) \quad \mathbf{N}_\nu = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_\nu}{k} \quad (3.13)$$

Que junto a (3.11) y tomando $h = 0$ se obtendría, véase obtención en el anexo A

$$\mathbf{M}_\nu = \left[\frac{i\nu}{\rho} Z_\nu(k\rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho - k Z'_\nu(k\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] e^{i\nu\phi} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{N}_\nu = k Z_\nu(k\rho) \hat{\mathbf{e}}_z e^{i\nu\phi}$$

Como habíamos comentado, las funciones $Z_\nu(k\rho)$ satisfacen la ecuación de Bessel, exactamente son las funciones de Bessel de primera especie, pues las de segunda especie divergen en $\rho = 0$. Por ello tomaremos las funciones de Hankel de primera especie, $H_\nu(k\rho)$, cuyo comportamiento asintótico decae con la distancia.

Gracias a la definición de estos vectores armónicos, podemos descomponer los campos eléctrico y magnético en función de éstos a partir de una expansión en serie

$$\mathbf{E}^{(j)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^{(j)} \mathbf{M}_{\nu}^{(j)} + B_{\nu}^{(j)} \mathbf{N}_{\nu}^{(j)} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}^{(j)} = -\frac{ik_j}{\omega\mu} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu}^{(j)} \mathbf{N}_{\nu}^{(j)} + B_{\nu}^{(j)} \mathbf{M}_{\nu}^{(j)} \quad (3.16)$$

Donde el superíndice (j) denotará el tipo de onda, dicho de otro modo, si $j = 1$ hablaremos de la onda incidente, $j = 2$ de los campos internos y si $j = 3$ de la onda dispersada (scattering). Cabe destacar, que el número de onda k_j no es el mismo para todas las ondas, en el caso de la onda incidente y dispersada $k_1 = k_3 = k$ y para el interior del cilindro $k_2 = nk$, con n el índice de refracción del mismo.

3.1. Incidencia de una onda electromagnética plana

Considérese un cilindro infinito circular de radio a , el cual va a ser iluminado por una onda electromagnética plana de la forma

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0 e^{ik\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (3.17)$$

Con $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \rho \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z$ y en cuanto a la dirección de propagación de la onda incidente, vendrá dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_i = -\sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_z$, con ζ el ángulo entre la onda incidente y el eje del cilindro.

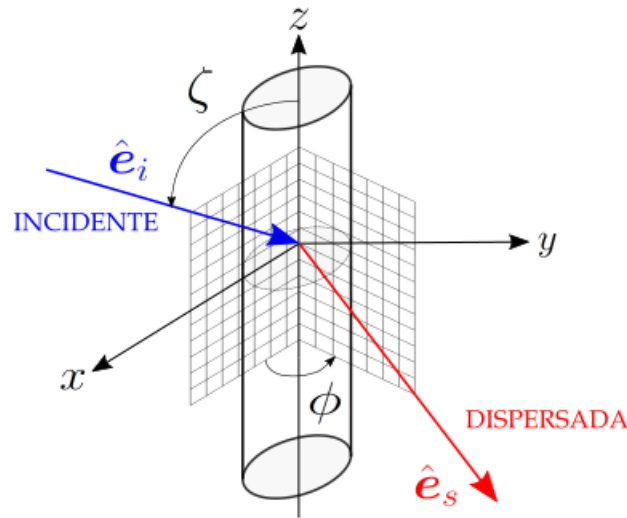


Figura 3: Cilindro infinito iluminado por una onda plana. Podemos distinguir la *onda incidente*, la cual se encuentra en el plano xz e incide con un ángulo ζ respecto al eje del cilindro, por otra parte la *onda dispersada* se encuentra en un plano rotado un ángulo ϕ respecto al plano de incidencia

Para este problema hay dos posibles casos de polarización ortogonal de la onda incidente: una sería que el campo eléctrico estuviera polarizado paralelamente con respecto al plano xz y otra perpendicularmente al mismo. A continuación afrontaremos ambos casos y obtendremos las correspondientes expresiones analíticas y por último, para finalizar esta sección nos centraremos en el caso en que la polarización es perpendicular al plano xz y compararemos la solución analítica con la aproximación escalar.

3.1.1. Caso I. Campo eléctrico incidente paralelo al plano xz

El primer paso es expandir el campo eléctrico, en este caso tendrá componentes en el eje x y z , cuya fase vendrá dada por

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_0 (\sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_z - \cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_x) e^{-ik(\rho \cos \phi \sin \zeta + z \cos \zeta)} \quad (3.18)$$

Podemos escribir este campo incidente en función de los vectores armónicos, pero previamente, para solventar el problema con $\rho = 0$ debemos excluir la función de Bessel Y_ν como parte radial de la función general, luego

$$\mathbf{E}^{(1)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu^{(1)} \mathbf{M}_\nu^{(1)} + B_\nu^{(1)} \mathbf{N}_\nu^{(1)} \quad (3.19)$$

Por consiguiente, los campos dispersados ($\mathbf{E}^{(3)}$, $\mathbf{H}^{(3)}$) describirán una ondas salientes provenientes del cilindro, las cuales de forma general recorrerán una larga distancia (aproximación de campo lejano ³). Considérese las siguientes expansiones para los campos dispersados

$$\mathbf{E}^{(3)} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} E_\nu \left[b_{\nu I} \mathbf{N}_\nu^{(3)} + ia_{\nu I} \mathbf{M}_\nu^{(3)} \right] \quad (3.20)$$

$$\mathbf{H}^{(3)} = \frac{ik}{\omega\mu} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} E_\nu \left[b_{\nu I} \mathbf{N}_\nu^{(3)} + ia_{\nu I} \mathbf{M}_\nu^{(3)} \right]$$

Las funciones generadoras de estas expansiones deberán de ser las funciones de Hankel de primera especie, $H_\nu(k\rho \sin \zeta) e^{i\nu\phi} e^{-ikz \cos \zeta}$ Si aplicamos las condiciones de contorno (2.7) para $\rho = a$ y junto a las consideraciones de A, obtenemos cuatro ecuaciones que pueden ser resueltas por los coeficientes $a_{\nu I}$, $b_{\nu I}$ (el subíndice I denota este primer caso de polarización)

$$a_{\nu I} = \frac{C_\nu V_\nu - B_\nu D_\nu}{W_\nu V_\nu + iD_\nu^2} \quad b_{\nu I} = \frac{B_\nu W_\nu + iC_\nu D_\nu}{W_\nu V_\nu + iD_\nu^2} \quad (3.21)$$

³El campo lejano es la región del espacio donde la onda electromagnética es radiante y está lejos de la fuente generadora en términos de longitud de onda. En esta región los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se atenúan proporcionalmente con $1/d$, siendo d la distancia a la fuente.

Donde definimos por

$$\begin{aligned}
 B_\nu &= \xi [n^2 \xi J'_\nu(\eta) J_\nu(\xi) - \eta J_\nu(\eta) J'_\nu(\xi)] \\
 C_\nu &= -\nu \eta \cos \zeta J_\nu(\eta) J_\nu(\xi) (1 - (\xi/\eta)^2) \\
 D_\nu &= -\nu \eta \cos \zeta J_\nu(\eta) H_\nu(\xi) (1 - (\xi/\eta)^2) \\
 V_\nu &= \xi [n^2 \xi J'_\nu(\eta) H_\nu(\xi) - \eta J_\nu(\eta) H'_\nu(\xi)] \\
 W_\nu &= i\xi [\eta J_\nu(\eta) H'_\nu(\xi) - \xi J_\nu(\eta) H_\nu(\xi)]
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

con $\xi = x \sin \zeta$, $\eta = x \sqrt{n^2 - \cos^2 \zeta}$ y $x = ka$. Junto a las propiedades de las funciones de Bessel, $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$ y $Y_{-\nu} = (-1)^\nu Y_\nu$ llegamos a

$$a_{-\nu I} = -a_{\nu I} \qquad b_{-\nu I} = b_{\nu I} \qquad a_{0I} = 0 \tag{3.23}$$

Cuando la onda incidente sobre el cilindro es ortogonal al eje del mismo ($\zeta = 90^\circ$), $a_{\nu I} = 0$, y se tiene

$$b_{\nu I}(\zeta = 90^\circ) = b_\nu = \frac{J'_\nu(ka) J_\nu(nka) - n J_\nu(ka) J'_\nu(nka)}{J_\nu(nka) H'_\nu(ka) - n J'_\nu(nka) H_\nu(ka)} \tag{3.24}$$

3.1.2. Caso II. Campo eléctrico incidente perpendicular al plano xz

Considérese el siguiente campo eléctrico incidente

$$\mathbf{E}^{(1)} = E_0 \hat{\mathbf{e}}_y e^{-ik(\rho \cos \phi \sin \zeta + z \cos \zeta)} \quad (3.25)$$

La expansión del campo eléctrico tendrá solo términos con el vector \mathbf{M}_ν , pues solo presenta componente en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_y$

$$\mathbf{E}^{(1)} = -i \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} E_\nu \mathbf{M}_\nu^{(1)} \quad (3.26)$$

Si quisiéramos obtener la expresión para el campo magnético incidente bastaría con aplicar el rotacional a (3.26). Para el campo eléctrico dispersado tendríamos que

$$\mathbf{E}^{(3)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} E_\nu \left[ia_{\nu\text{II}} \mathbf{M}_\nu^{(3)} + b_{\nu\text{II}} \mathbf{N}_\nu^{(3)} \right] \quad (3.27)$$

cuyos coeficientes $a_{\nu\text{II}}$ y $b_{\nu\text{II}}$ vendrían dados por

$$a_{\nu\text{II}} = -\frac{A_\nu V_\nu - iC_\nu D_\nu}{W_\nu V_\nu + iD_\nu^2} \quad b_{\nu\text{II}} = -i \frac{C_\nu W_\nu + A_\nu D_\nu}{W_\nu V_\nu + iD_\nu^2} \quad (3.28)$$

Donde definimos por

$$A_\nu = i\xi [\xi J'_\nu(\eta) J_\nu(\xi) - \eta J_\nu(\eta) J'_\nu(\xi)] \quad (3.29)$$

Y las demás constantes vienen dadas por las ecuaciones (3.22). Ahora bien, siguiendo las propiedades de las funciones de Bessel por [5] tendríamos que

$$a_{-\nu\text{II}} = a_{\nu\text{II}} \quad b_{-\nu\text{II}} = -b_{\nu\text{II}} \quad b_{0\text{II}} = 0 \quad (3.30)$$

Con unas ciertas cuentas podemos relacionar ambos casos estudiados mediante

$$a_{-\nu\text{I}} = -b_{\nu\text{II}} \quad (3.31)$$

Resumiendo, para incidencia normal respecto al eje del cilindro ($\zeta = 90^\circ$) se tiene que $b_{\nu\text{II}}$ se anula y $a_{\nu\text{II}}$ toma la siguiente expresión

$$a_{\nu\text{II}}(\zeta = 90^\circ) = a_\nu = \frac{nJ'_\nu(ka)J_\nu(nka) - J_\nu(ka)J'_\nu(nka)}{nJ_\nu(nka)H'_\nu(ka) - J'_\nu(nka)H_\nu(ka)} \quad (3.32)$$

3.1.3. Caso III. Aproximación escalar

En este nuevo caso vamos a considerar la aproximación escalar, por ello perderemos información acerca de la dirección del campo eléctrico. Sin embargo, en términos generales, consideraremos que la onda incidente está polarizada paralela al eje z , luego el campo eléctrico resultaría ser

$$E^{(1)} = E_0 e^{-ik\rho \cos \phi} \quad (3.33)$$

Si recurrimos a la expansión de Jacobi-Anger por [5]

$$e^{-ik\rho \cos \phi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-i)^\nu J_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \quad (3.34)$$

Se tiene que la expansión del campo incidente es

$$E^{(1)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} E_0 (-i)^\nu J_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \quad (3.35)$$

Para obtener las expresiones del campo dispersado e interno del cilindro definiremos los siguientes campos en función de unos coeficientes relacionados con el campo incidente.

$$E^{(3)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu H_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \quad (3.36)$$

$$E^{(2)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \beta_\nu H_\nu(nk\rho) e^{i\nu\phi} \quad (3.37)$$

Donde, recordando la notación definida, según el campo tendremos $j = 2$ para el campo interno y $j = 3$ para el dispersado. Ahora bien, tendremos que considerar las condiciones de frontera (2.7) en $\rho = a$, la cual define la continuidad del campo eléctrico. Obteniendo así el coeficiente del campo dispersado α_ν como

$$a_\nu = E_0 (-i)^\nu \frac{nJ'_\nu(ka)J_\nu(nka) - J_\nu(ka)J'_\nu(nka)}{nJ_\nu(nka)H'_\nu(ka) - J'_\nu(nka)H_\nu(ka)} \quad (3.38)$$

Que se corresponde con el resultado obtenido para el caso 2 en (3.32), luego es importante remarcar que la solución analítica obtenida para la polarización perpendicular al plano xz se corresponde con la de la aproximación escalar.

3.2. Simulaciones

3.2.1. Comparación de la solución analítica con la aproximación escalar

En esta sección vamos a comparar el resultado obtenido por la teoría escalar (caso III) con el esperado para el caso de polarización perpendicular al plano xz (caso II). Para ello vamos a afrontar dos vías, la primera será fijar una distancia y y la siguiente ver la evolución axial, véase la siguiente representación

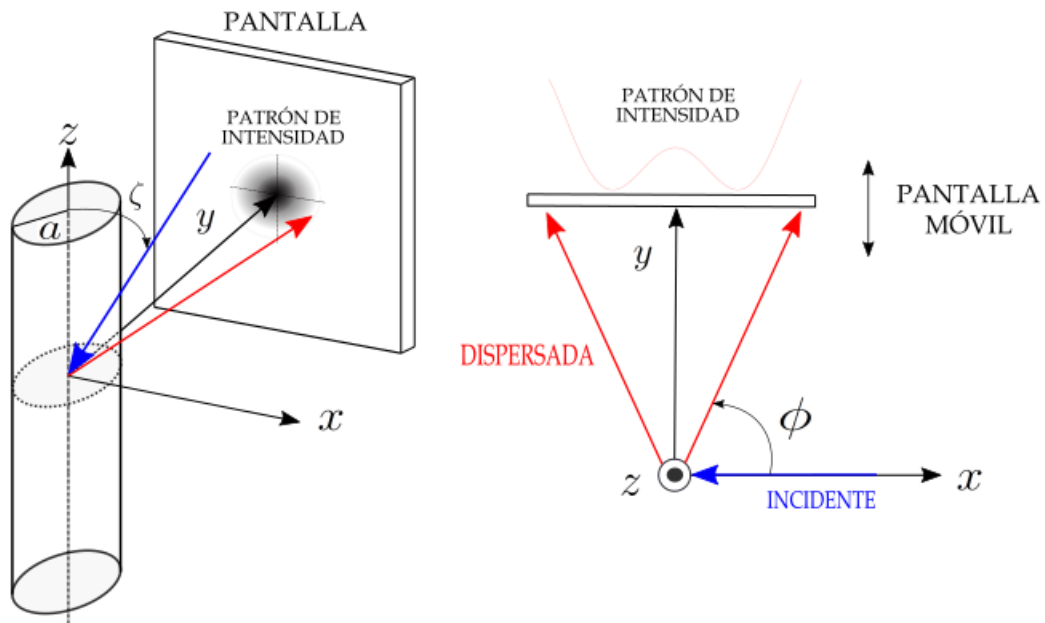
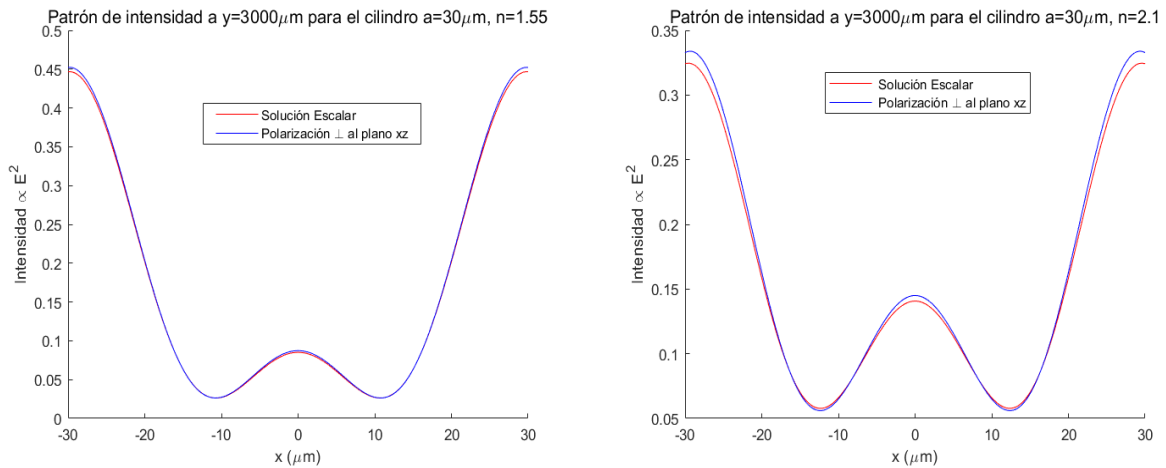


Figura 4: Esquema del problema, una vez incidamos luz sobre nuestro cilindro recogeremos el patrón de intensidad de la luz dispersada por el mismo en una pantalla móvil, teniendo así la posibilidad de variar la distancia y .

Por otra parte, cuando nos refiramos a intensidad de la onda dispersada estaremos hablando del módulo cuadrado del campo eléctrico dispersado (en unidades arbitrarias), por ello

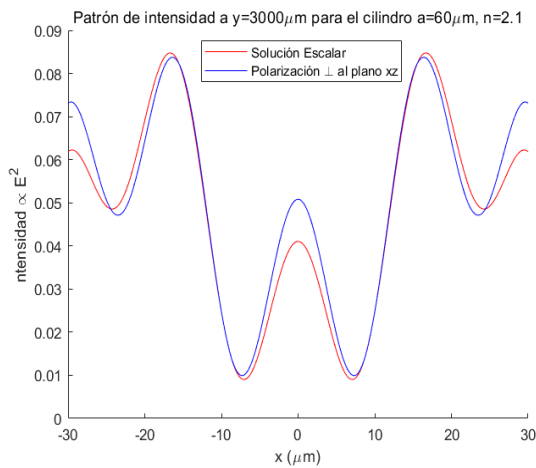
$$I \propto |\mathbf{E}|^2 = E^2 \quad (3.39)$$



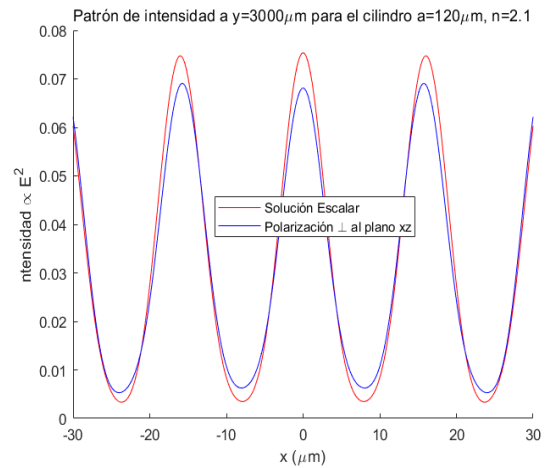
(a) Cilindro con índice de refracción $n = 1,55$ y (b) Cilindro con índice de refracción $n = 2,1$ y radio $a = 30 \mu\text{m}$.

Figura 5: En ambas simulaciones colocamos el cilindro a unos $3000 \mu\text{m}$ de distancia de la pantalla y vemos como afecta el índice de refracción del propio cilindro al patrón de intensidad.

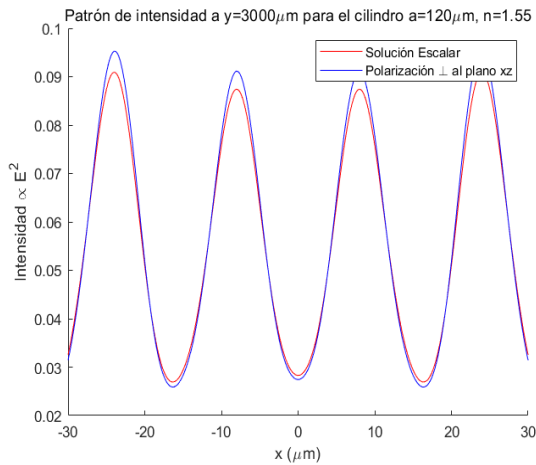
Se puede observar como al aumentar el índice de refracción la intensidad resultante es menor, esto se debe a que al aumentar el índice de refracción aumenta la reflectancia del cilindro y por ende llegará menos luz a la pantalla. Por otra parte, podemos observar como para índices de refracción más bajos la solución escalar se aproxima mucho mejor a la analítica obtenida para la polarización escogida que para índices más grandes.



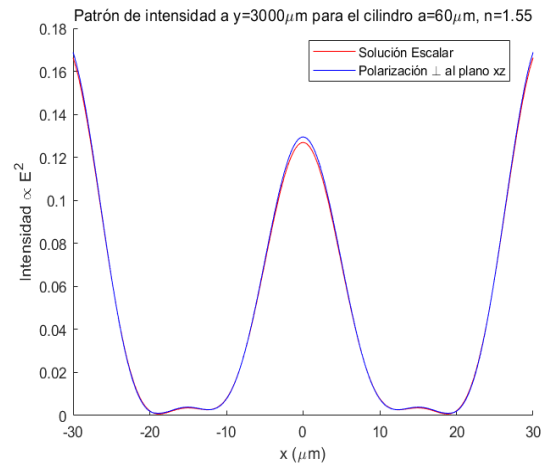
(a) Cilindro con índice de refracción $n = 2,1$ y radio $a = 60 \mu\text{m}$.



(b) Cilindro con índice de refracción $n = 2,1$ y radio $a = 120 \mu\text{m}$.



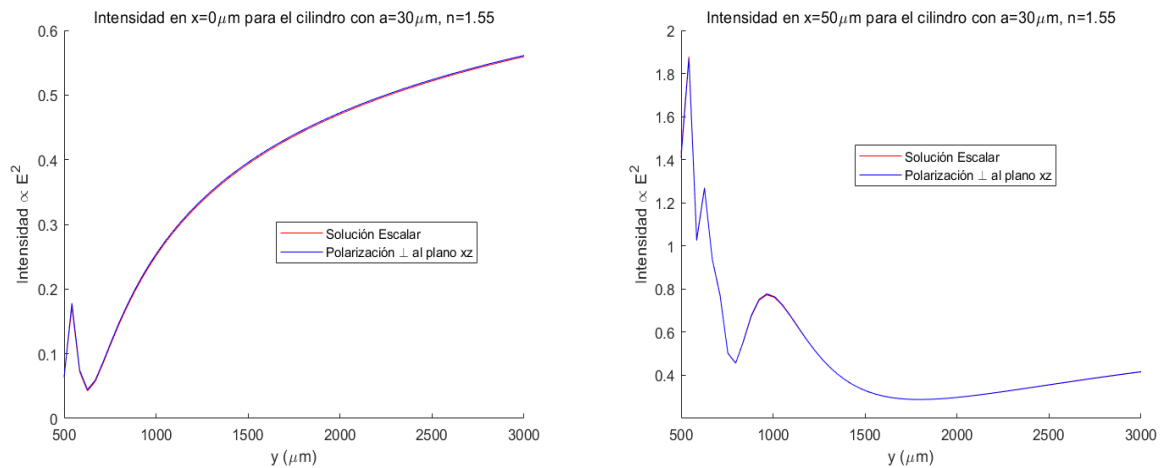
(c) Cilindro con índice de refracción $n = 1,55$ y radio $a = 120 \mu\text{m}$.



(d) Cilindro con índice de refracción $n = 1,55$ y radio $a = 60 \mu\text{m}$.

Figura 6: Podemos comparar como cambia el patrón de intensidad de la onda dispersada según aumentemos o disminuyamos el radio del cilindro.

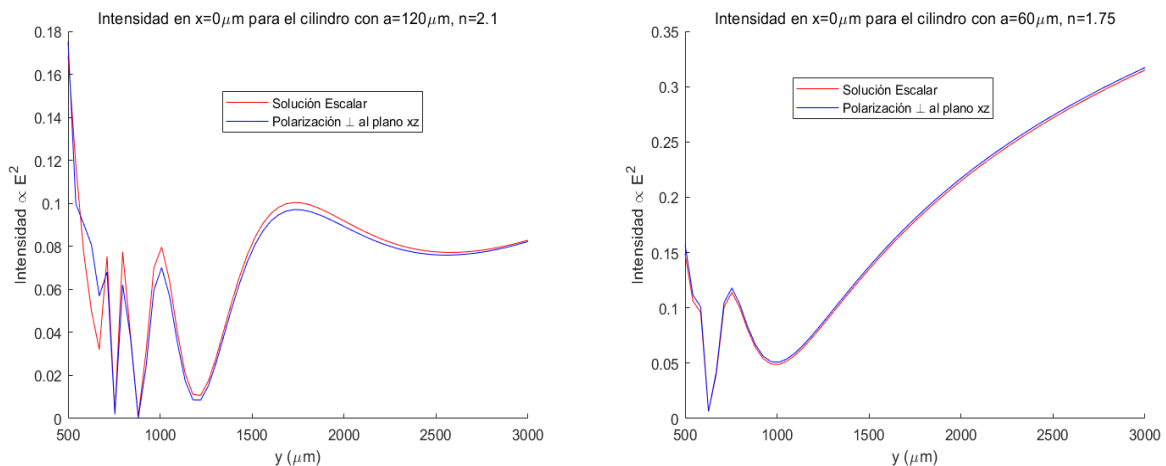
Si observamos la convergencia entre la solución escalar con las soluciones analíticas podemos verificar que aunque no se ajusten completamente éstas diferencias son prácticamente insignificantes, pues la diferencia relativa entre intensidades es del orden de $3 \cdot 10^{-3}$ para el cilindro de radio $a = 120 \mu\text{m}$ y de $9 \cdot 10^{-3}$ para el de $a = 60 \mu\text{m}$. Esta diferencia se va acentuando cuando vamos aumentando la diferencia entre los índices de refracción del cilindro y del aire y cuando disminuimos las dimensiones del cilindro.



(a) Distribución de intensidad en el centro de la pantalla $x = 0 \mu\text{m}$. (b) Distribución de intensidad en el centro de la pantalla $x = 50 \mu\text{m}$.

Figura 7: Distribución de intensidad dispersada para un cilindro de radio $a = 30 \mu\text{m}$ e índice de refracción $n = 1,55$ en diferentes puntos de la pantalla.

Podemos ver que el patrón de intensidad es diferente según la zona de la pantalla y según la distancia entre el cilindro y la misma. Al mismo tiempo, podemos comprobar que para este cilindro con dichas características la solución con la aproximación escalar se ajusta completamente al resultado esperado.



(a) Cilindro con índice de refracción $n = 2,1$ y radio $a = 120 \mu\text{m}$ (b) Cilindro con índice de refracción $n = 1,75$ y radio $a = 60 \mu\text{m}$.

Figura 8: Patrón de intensidad en el centro de la pantalla para cilindros de diferente tamaño e índice de refracción variando la distancia entre éstos y la pantalla.

A la vista de las curvas tenemos que la solución escalar se ajusta perfectamente a la analítica 8a, en cambio la figura de la derecha, 8b presenta el mismo comportamiento pero ajusta más abruptamente. Por otro lado, el comportamiento de las curvas para distancias de separación de las pantallas es muy relevante, pues muestra la validez del método cuando nos encontramos en la aproximación de campo próximo y campo lejano, ajustándose perfectamente en ambos casos en el campo lejano.

3.2.2. Comparación de la solución analítica con el método de Green

Una vez obtenidas las expresiones rigurosas para la polarización perpendicular podemos comparar éstas con la solución (2.51). Para ello, seguiremos la metodología anterior, analizando “simulaciones angulares” variando x y “axiales” variando y .

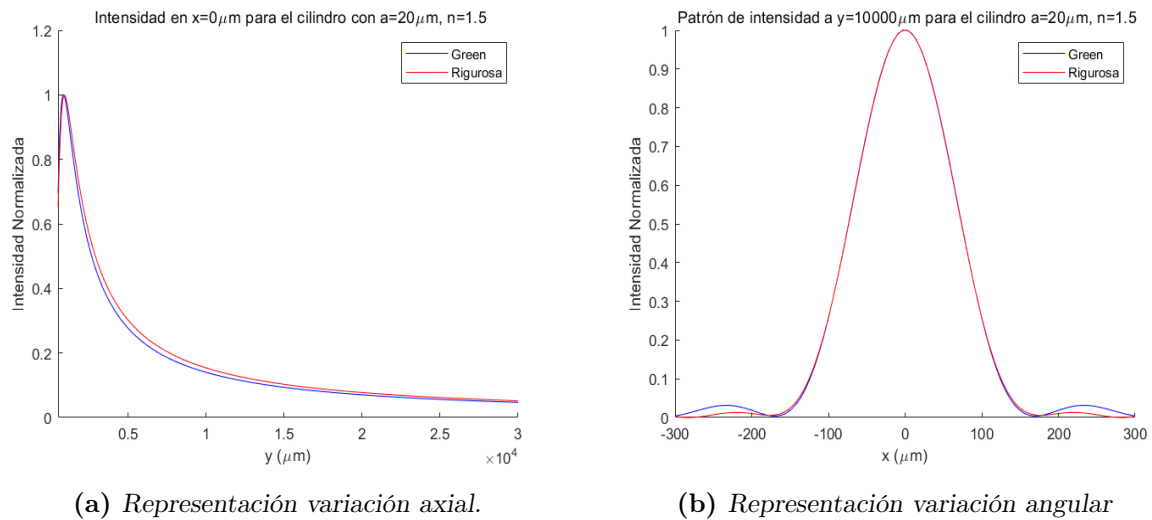


Figura 9: Intensidad en función de: (a) distancia axial, (b) distancia al centro de la pantalla para un cilindro con índice de refracción $n = 1,5$ y radio $a = 20 \mu\text{m}$.

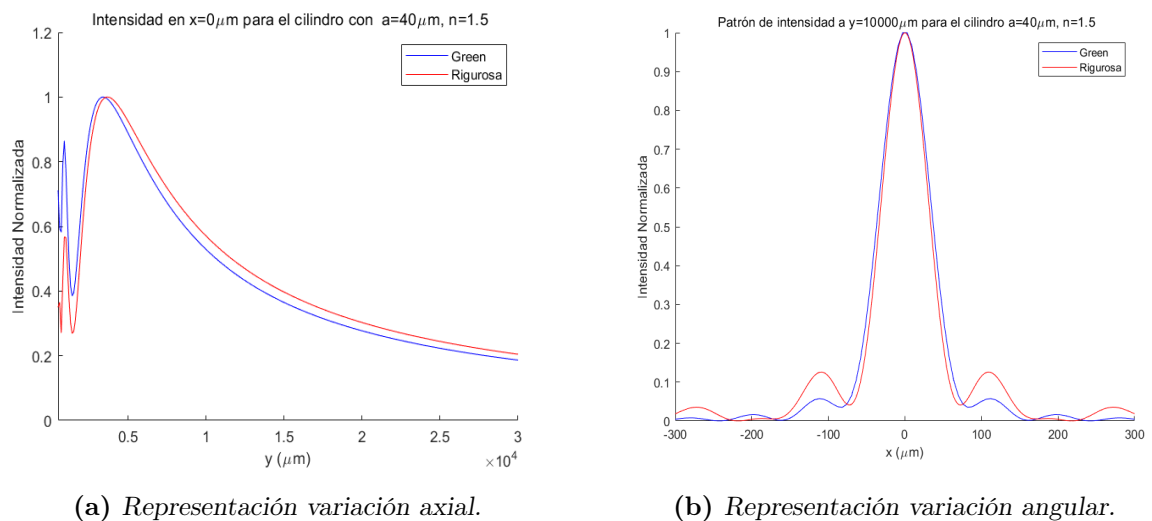


Figura 10: Intensidad en función de: (a) distancia axial, (b) distancia al centro de la pantalla para un cilindro con índice de refracción $n = 1,5$ y radio $a = 40 \mu\text{m}$.

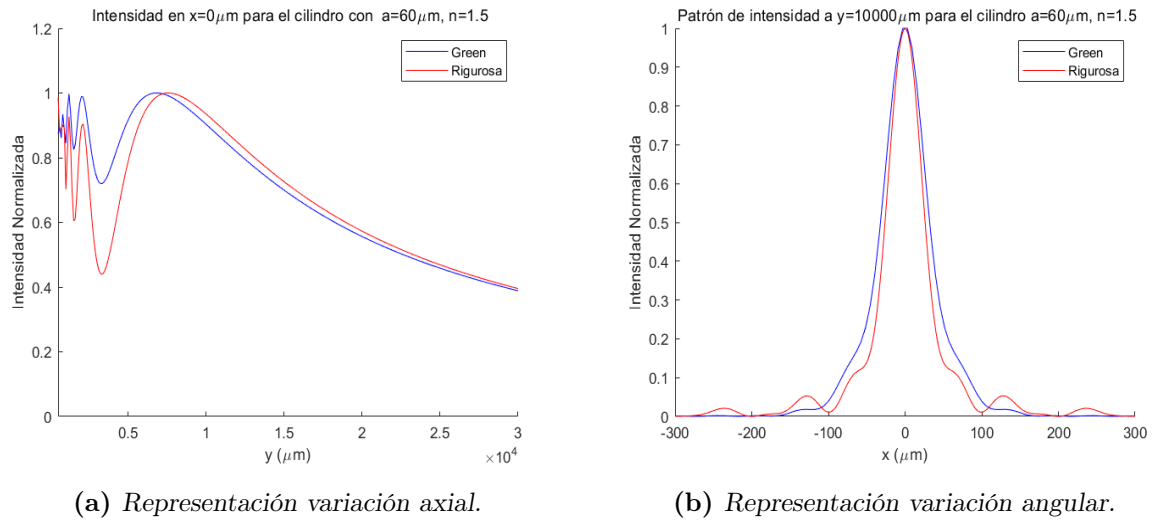


Figura 11: Intensidad en función de: (a) distancia axial, (b) distancia al centro de la pantalla para un cilindro con índice de refracción $n = 1,5$ y radio $a = 60 \mu\text{m}$.

Analizando las simulaciones obtenidas con el método de Green en 2D podemos sacar en claro que pese a que no se ajuste tan bien como la aproximación escalar, este método se adecua a la solución rigurosa obtenida en 3.1.2. Como comentario adicional, en las figuras anteriores hemos representado la intensidad normalizada $\tilde{I} = I/I_{\text{max}}$, luego pese a que no se correspondan del todo ambas curvas tienen un comportamiento prácticamente similar al de la aproximación escalar, ya que las funciones que representan (2.51) y (3.36) son en esencia, las mismas soluciones.

Por último, en las representaciones axiales tenemos que cuando más cerca de la pantalla coloquemos el cilindro más error relativo tenemos respecto a la solución rigurosa, esto se debe básicamente a que ya no nos encontramos en la aproximación de campo lejano y la solución no converge tan idealmente.

4. Resultados

4.1. Método de Green 2D

En esta última sección realizaremos algunas simulaciones utilizando el método de Green para objetos de diferentes geometrías. Para ello, seguiremos la metodología expuesta en 2.6 pero trabajando en el plano y con el escalar de green $g_{2D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ dado por (2.51). Donde simularemos la dispersión de la luz para un cilindro de base elíptica y un prisma de base rectangular.

4.1.1. Luz dispersada por un cilindro de base elíptica

Consideremos ahora un cilindro de base elíptica con semieje mayor de $a = 30 \mu\text{m}$ y menor de $b = 10 \mu\text{m}$ en el cual se incide de nuevo luz polarizada perpendicularmente y normal al cilindro.

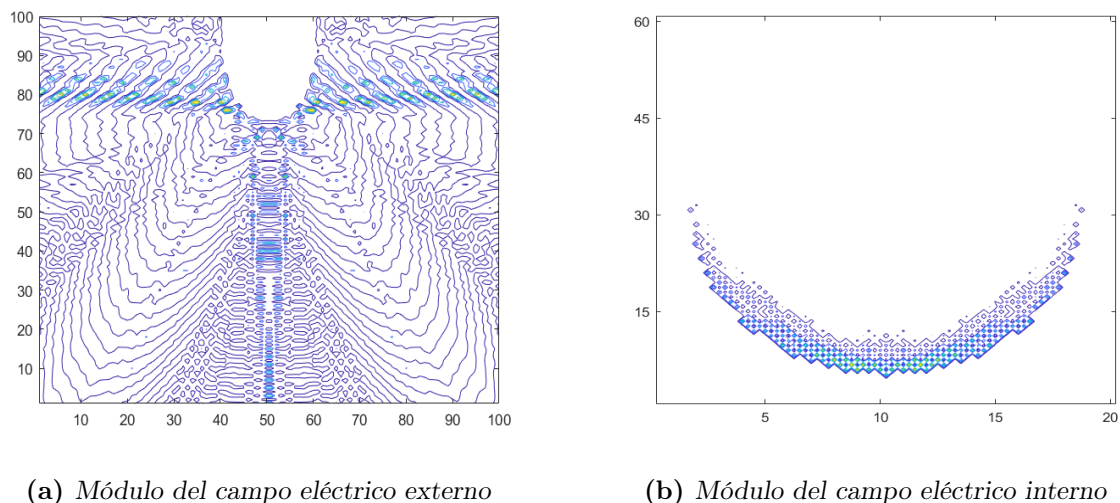


Figura 12: Cilindro de base elíptica con índice de refracción $n = 1,5$

En estas simulaciones el campo incidente se encuentra en la parte superior en 12a e inferior en 12b. Obsérvese el frente de ondas transmitido en la parte delantera de la figura 12a y los dos dispersados a los laterales del mismo. El frente de ondas delantero es el que tendríamos que recoger en una pantalla para analizar las variaciones de intensidad debido a la difracción. El cuerpo es de dimensiones reducidas (en relación con la longitud de onda incidente $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$) y la luz “envolvería” el cilindro dispersando luz a su alrededor.

4.1.2. Luz dispersada por un prisma de base rectangular

En la figura 13 disponemos de un prisma de base rectangular en el cual incide luz polarizada perpendicularmente desde la cara de arriba. Podemos observar el patrón de intensidad de la luz dispersada, recuérdese que este patrón es proporcional al cuadrado del campo eléctrico (3.39).

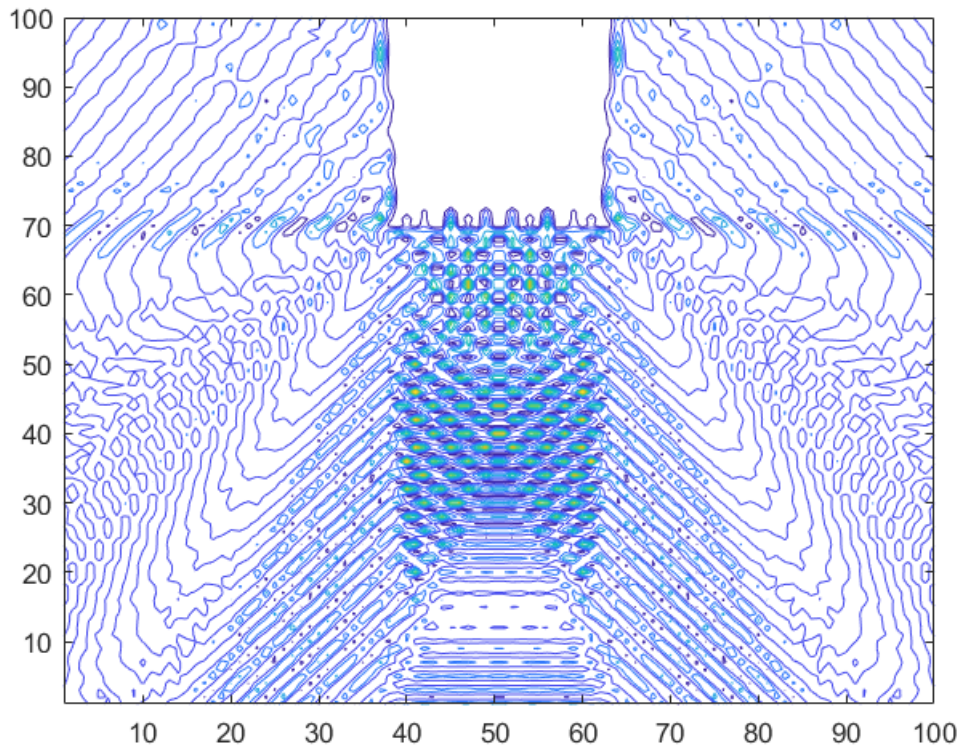


Figura 13: Prisma de base rectangular $20 \times 30 \mu\text{m}^2$ con índice de refracción $n = 1,3$ sobre el cual incide un frente de ondas plano polarizado perpendicularmente normal a la cara superior.

Para entender un poco más la representación obtenida recurriremos a la teoría de Scattering, donde si consideramos un plano infinito delgado, el cual se encuentra en la interfase entre dos medios, si sobre éste se incide normalmente por un medio con una onda plana predominará la transmisión de la misma en el otro medio.

Como la incidencia es normal $\zeta = \pi/2$ la onda se transmite a través del prisma, como resultado se obtiene un frente de ondas plano en la cara opuesta a la de incidencia. Al disponer de un cuerpo dieléctrico de dimensiones muy pequeñas, éste actúa como un “scatterer” o un elemento dispersivo, por ello no solo tenemos frentes de onda planos y

tenemos secciones (sobre todo las laterales) donde la luz se dispersa tras la incidencia. A continuación, como ya hemos estudiado el campo externo (dispersado) ahora analizaremos el campo eléctrico en el interior del prisma. Para ello consideraremos que la luz incide por la cara inferior de 14a y veremos los cambios del patrón de intensidad al modificar el índice de refracción del prisma,

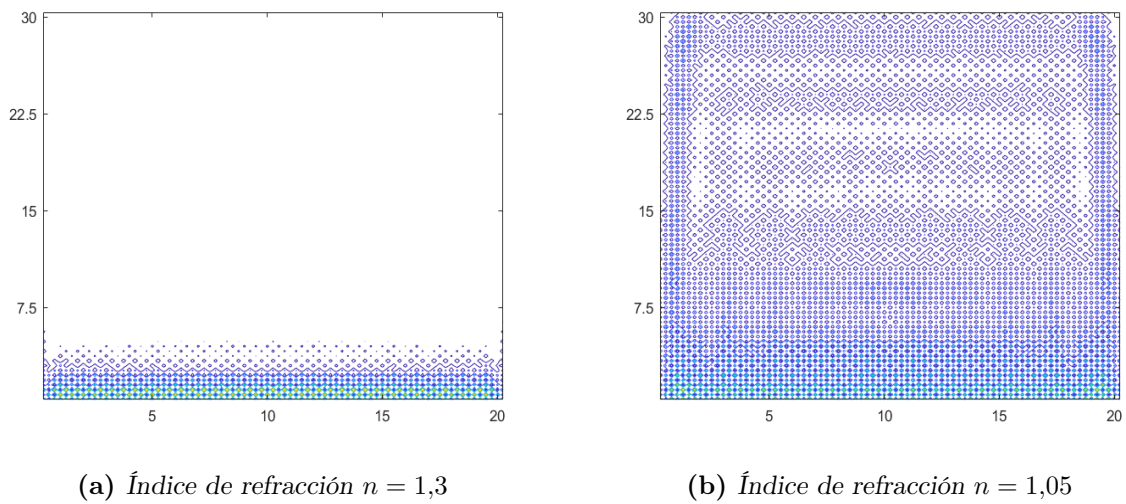
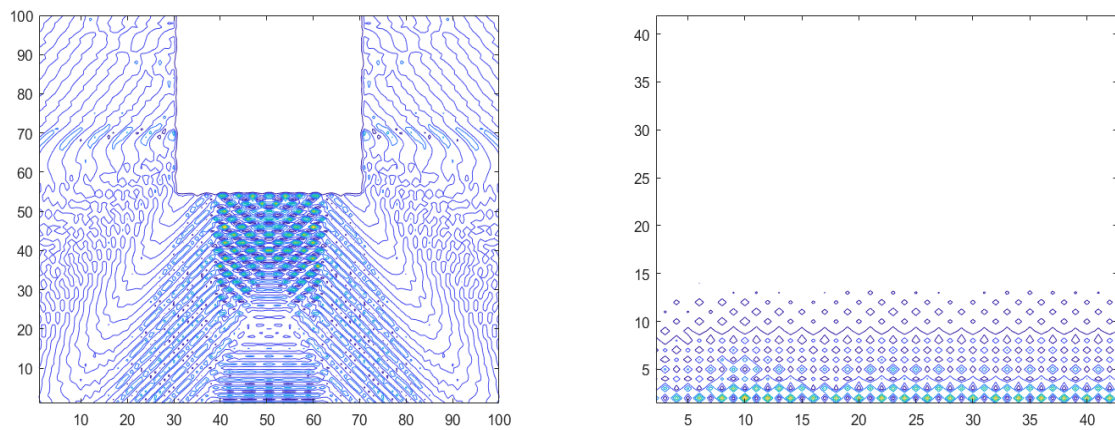


Figura 14: Módulo del campo eléctrico en el interior del prisma de base rectangular de lados $20 \mu\text{m}$ y $30 \mu\text{m}$.

En ambas simulaciones la luz incide por la parte inferior, pudiendo así observar como es el campo en el interior, el cual está ligado con la intensidad del campo transmitido. A la vista de 14a y 14b observamos que la homogeneidad de la o.e.m. (y del campo eléctrico) es mayor cuando la diferencia de índices de refracción entre el exterior y el medio dieléctrico es menor. Veamos que ocurre si variamos el índice de refracción del prisma y sus dimensiones



(a) Módulo del campo eléctrico en el exterior

(b) Módulo del campo eléctrico en el interior

Figura 15: Prisma de base cuadrada de lado $40 \mu\text{m}$ e índice de refracción $n = 1,5$

La diferencia principal entre 15a y 13 es que la onda plana transmitida es mucho menor en cuanto a dimensiones. Es decir, la onda dispersada será menor cuando aumentemos el índice de refracción del dieléctrico y sus dimensiones.

Así pues, para geometrías más complejas que la que estudiamos en el caso analítico el método de Green permite dar una estimación de la luz dispersada. Esto implica que el método permite predecir, de forma precisa, el scattering de la luz incidente sobre un dieléctrico de geometría variada.

4.2. Método de Green 3D

Procediendo análogamente como en el caso anterior pero extendiendo el algoritmo al caso 3D con la función escalar $g_{3D}^B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vamos a obtener los patrones de intensidad para una esfera y un cubo.

4.2.1. Luz dispersada por una esfera

Para afrontar esta geometría vamos a considerar una esfera en la cual le hacemos incidir luz en un la dirección z y recogemos el módulo cuadrado del campo eléctrico dispersado en el plano xz haciendo un barrido angular.

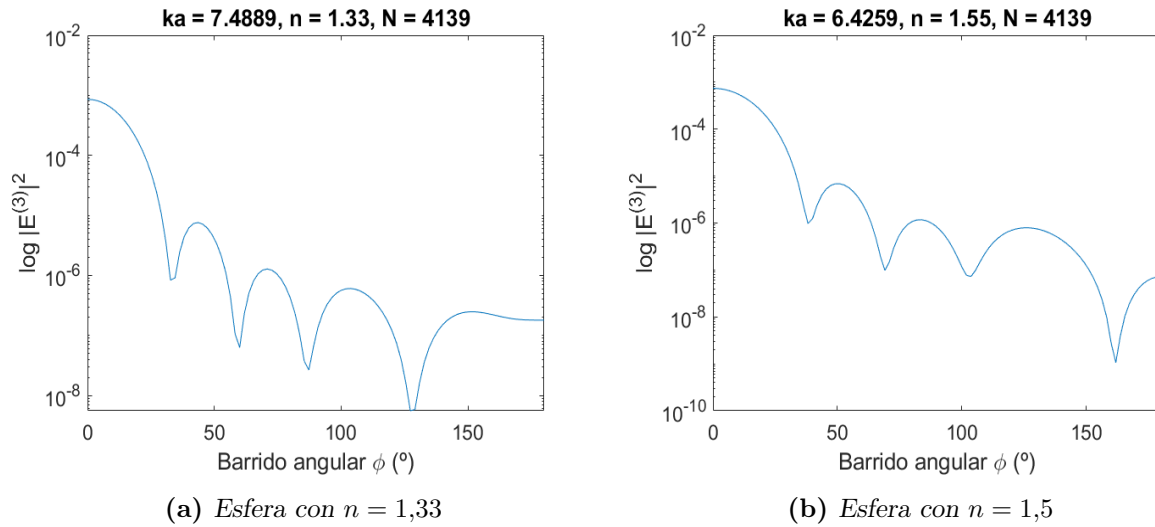
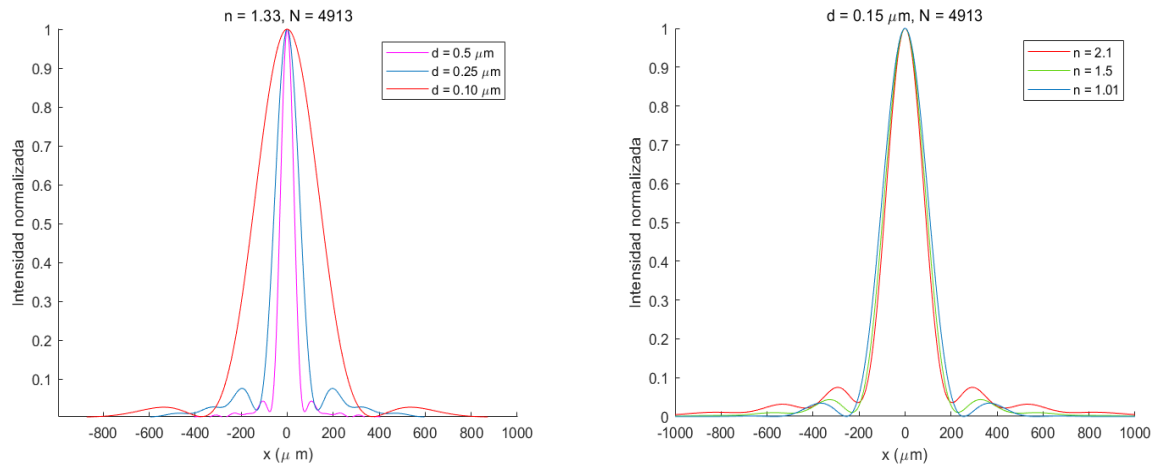


Figura 16: Patrón de intensidad de la luz dispersada $E^{(3)}$ por la esfera.

Hemos representado el logaritmo de la intensidad de la onda dispersada frente al barrido angular de 180° para poder observar mejor el patrón de dispersión. Respecto a los radios de las esferas simuladas cabe decir que hemos implementado el programa para trabajar con unidades de $ka = \frac{2\pi a}{\lambda}$ siendo k el módulo del vector de onda y a el radio de las esferas, simplificando las unidades y expresiones trabajando así en unidades de λ .

4.3. Luz dispersada por un cubo

Cambiando de metodología, ahora se va a incidir luz perpendicularmente sobre la cara de un pequeño cubo y registraremos su patrón de intensidades en una pantalla situada a $z = 1000 \mu\text{m}$ variando las dimensiones y el índice de refracción del mismo



(a) Cubo con $n = 1,33$. Comparación para distintas dimensiones del cubo. (b) Cubo con $d = 0,15$. Comparación para distintos índices de refracción.

Figura 17: Intensidad normalizada de la luz dispersada por el cubo. N denota el número de nodos empleados en el mallado de simulación y d denota la longitud del lado.

En resultado obtenido no se encuentra muy alejado de nuestra intuición, pues a la vista del esquema se tiene que el patrón dispersado tiene el comportamiento del cuadrado de la función seno cociente, tal y como muestran las teorías de difracción. Pues por las dimensiones del cubo estamos bajo los efectos de difracción y por lo tanto a mayor anchura del objeto menor será la distancias entre máximos del patrón de intensidad 17a. Por otra parte, si variamos el índice de refracción 17b observamos que al disminuir la diferencia entre índices hasta el punto donde son prácticamente iguales estamos en el caso en el que se incide una onda plana a un obstáculo cuadrado de dimensiones reducidas.

5. Conclusiones

A pesar de la larga historia y simplicidad que presentan las ecuaciones de Maxwell matemáticamente hablando, éstas en la actualidad siguen presentando nuevos retos en cuanto al desarrollo y mejora de la eficiencia de los distintos métodos numéricos conocidos hasta la fecha. Por lo tanto, el trabajo expuesto cobra mucha importancia, pues hemos implementado un método escalar el cual en términos computacionales es más eficiente que por ejemplo el método vectorial con el tensor de Green.

La simplicidad de las ecuaciones hacen de este método aproximado un buen recurso para abordar problemas de Scattering para medios dieléctricos con diversas geometrías e índices de refracción. Sin embargo, la desventaja encontrada en este algoritmo es la “pérdida de información”. Nos referimos a pérdida de información pues al tratarse de un método escalar carecemos de información vectorial sobre la dirección del campo incidente y resumimos todo al módulo del mismo. Por otra parte, en un gran número de casos como los estudiados este método es preciso. Pues el método da soluciones muy cercanas a la solución exacta o rigurosa cuando nos encontramos lejos de la fuente.

Como resumen; se ha mostrado el fundamento teórico de las ecuaciones de Maxwell, junto a la obtención de la ecuación de ondas derivada de la ecuación de Helmholtz y su importancia en el Scattering, además se ha expuesto una definición formal de las funciones escalares de Green junto a su aplicación en los campos electromagnéticos. Adicionalmente se ha definido y entendido la relevancia física de los vectores armónicos en el caso del cilindro como “scatterer” electromagnético y por último se ha validado la funcionalidad del método de Green para diversas geometrías y sistemas validándose incluso fenómenos como la difracción de la luz.

A. Vectores Armónicos

En primer lugar sabemos que la función generadora (3.11) satisface la ecuación (3.12), que reescrita en términos de ρ queda como

$$(k\rho)^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + k\rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + ((k\rho)^2 - \nu) Z_\nu(k\rho) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, las definiciones de los vectores armónicos cilíndricos \mathbf{M}_ν y \mathbf{N}_ν son

$$\mathbf{M}_\nu = \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi_\nu) \quad \mathbf{N}_\nu = \frac{\nabla \times \mathbf{M}_\nu}{k} \quad (\text{A.2})$$

Tomando la función generadora (3.11) llegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\nu &= \nabla \times (\hat{\mathbf{e}}_z \psi_\nu) = \nabla \times (Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \hat{\mathbf{e}}_z) = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi}) \hat{\mathbf{e}}_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi}) \hat{\mathbf{e}}_\phi = \left[\frac{i\nu}{\rho} Z_\nu(k\rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho - k Z'_\nu(k\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right] e^{i\nu\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\nu &= \frac{\nabla \times \mathbf{M}_\nu}{k} = \\ &= \frac{1}{\rho k} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (-\rho k Z'_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi}) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{i\nu}{\rho} Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_z = \\ &= \left[\frac{\nu^2}{k\rho^2} Z_\nu(k\rho) - \frac{Z'_\nu(k\rho)}{\rho} - k Z''_\nu(k\rho) \right] e^{i\nu\phi} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Si despejamos la derivada segunda de $Z_\nu(k\rho)$ de la expresión (A.1) llegamos a

$$k Z''_\nu(k\rho) = -\frac{((k\rho)^2 - \nu^2)}{k\rho^2} Z_\nu(k\rho) - \frac{k\rho}{k\rho^2} Z'_\nu(k\rho) = -k Z_\nu(k\rho) + \frac{\nu^2}{k\rho^2} Z_\nu(k\rho) - \frac{Z'_\nu(k\rho)}{\rho} \quad (\text{A.5})$$

Simplificándose considerablemente en

$$\mathbf{N}_\nu = k Z_\nu(k\rho) e^{i\nu\phi} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.6})$$

Además, se puede probar conjunto de campos vectoriales $\{\mathbf{M}_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$, $\{\mathbf{N}_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$ es ortogonal en el intervalo $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_\nu \cdot \mathbf{M}_\mu^\dagger d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{N}_\mu^\dagger d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_\nu \cdot \mathbf{N}_\mu^\dagger d\phi = 0 \quad (\nu \neq \mu) \quad (\text{A.7})$$

sí pues, los vectores armónicos son generados por $J_\nu(k\rho \sin \zeta) e^{\nu\phi} e^{-ikz \cos \zeta}$. Para determinar los coeficientes $A_\nu^{(j)}$ y $B_\nu^{(j)}$ de las expansiones de los campos debemos de emplear la propiedad anterior de ortogonalidad (A.7) de los vectores armónicos, la cual requiere de resolver las integrales definidas

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\nu^{(I)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(\nu\phi + k\rho \cos \phi)} d\phi \\ \mathcal{J}_\nu^{(II)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(\nu\phi + k\rho \cos \phi)} \cos \phi d\phi \\ \mathcal{J}_\nu^{(III)} &= \int_0^{2\pi} e^{-i(\nu\phi + k\rho \cos \phi)} \sin \phi d\phi \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, por [5] la representación integral de las funciones de Bessel, para $k\rho \in \mathbb{R}$ sería

$$J_\nu(k\rho) = \frac{(-i)^\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\nu\phi + k\rho \cos \phi)} d\phi \quad (\text{A.9})$$

No es difícil de demostrar que $\mathcal{J}_\nu^{(I)} = 2\pi(-i)^\nu J_\nu(k\rho)$ y si derivamos respecto a ρk se obtiene $\mathcal{J}_\nu^{(II)} = 2\pi i(-i)^\nu J'_\nu(k\rho)$. La tercera integral se puede obtener a partir de

$$2i\mathcal{J}_\nu^{(III)} = \mathcal{J}_{\nu-1}^{(I)} - \mathcal{J}_{\nu+1}^{(I)} \quad (\text{A.10})$$

Que junto a la siguiente identidad que satisface las funciones $Z_\nu(k\rho)$

$$\frac{2\nu Z_\nu(k\rho)}{\rho} = Z_{\nu-1}(k\rho) + Z_{\nu+1}(k\rho) \quad (\text{A.11})$$

Se puede reescribir como

$$\mathcal{J}_\nu^{(III)} = 2\pi \frac{(-i)^\nu \nu}{k\rho} J_\nu(k\rho) \quad (\text{A.12})$$

B. Códigos

- *scattering_wave_cylinder_comparacion_n_scalar_axial.m*

Script elaborado para comprobar el resultado analítico con la aproximación escalar para el cilindro, sección 3.2

```

1  % Scattering diagrams for an infinite circular cylinder
2  lambda=0.6328; %wavelength (micron)
3  k=2*pi/lambda; %wavenumber
4  m =2.1;      %refractive index
5
6  r=500; %radius of the cylinder micron
7  x=k*r;
8  Ep=[]; %Electric field (polarized parallel to the z axis. Figure ...
          8.3 of Bohren and Huffman book
9  Enormal=[]; %Electric field (polarized perpendicular to the xz ...
          plane. Figure 8.3 of Bohren and Huffman book
10 zp=30*10^2; % Distance from the cylinder to the screen ...
          Figure_scattering
11
12 for j=.5:.5:30
13     y=100;
14     zp=j*1000;
15     Fi=pi-atan(y/zp); %angle fi in Figure 8.2 of Bohren and ...
          Huffman book. And fi in Figure_scattering
16     Theta=pi-Fi;
17     rd=sqrt(y^2+zp^2); %r in Figure_scattering
18     Bn=[]; %Coefficients given by equation (8.30) of Bohren and ...
          Huffman book.
19     An=[]; %Coefficients given by equation (8.32) of Bohren and ...
          Huffman book.
20     [ann,bnp] = expcoeff_cyl_cr(x, m); %this line calls to ...
          expcoeff_cyl_cr function
21
22     % Sometimes there are Nan values. In the following lines The Nan ...
          values are set to zero
23
24     ida=isnan(ann);
25     idb=isnan(bnp);
26     ann(ida)=0;
27     bnp(idb)=0;
28

```

```

29 % End of setting Nan vaues to zero
30
31 Bn=[fliplr(bnp(2:length(bnp))) bnp(1) bnp((2:length(bnp)))]; %Bn ...
    coefficients taking into account that bn=b-n (symmetrical)
32 An=[fliplr(ann(2:length(ann))) ann(1) ann((2:length(ann)))]; %An ...
    coefficients taking into account that an=a-n (symmetrical)
33 n=-(length(ann)-1):(length(ann)-1);
34 xs=k*rd; %value of ro=sqrt(k^2-h^2) with h=0; ro of equation ...
    8.28 fo Bhorens book
35 Nnz=k*besselh(n, 1,xs).*exp(li*n*Fi); %z component of Nn as ...
    given by Bhorens book, after equation 8.28
36
37 besselh(n, 1,xs);
38 exp(li*n*Fi);
39 Mnr=li*n*k.*besselh(n, 1,xs).*exp(li*n*Fi)/xs; %r component of ...
    Mn as given by Bhorens book, after equation 8.28
40 Mnfi=-k*dbesselh(n, 1,xs).*exp(li*n*Fi); %fi component of Mn as ...
    given by Bhorens book, after equation 8.28
41 En=1/k*(-li).^n; %components of the expansion of the electric ...
    field in bessel functions
42
43 Es1=-sum(En.*Bn.*Nnz); %scattered field for I case of Bhorens book
44 Es2r=-sum(li*En.*An.*Mnr); %r component of the scattered field ...
    for II case of Bhorens book
45
46 Es2fi=-sum(li*En.*An.*Mnfi); %fi component of the scattered ...
    field for II case of Bhorens book
47
48 Es2=sqrt(Es2r.^2+Es2fi.^2); %scattered field for II case of ...
    Bhorens book
49
50 E2=exp(li*k*zp); %Incident field
51
52 E1=Es1+E2; %Total field case I
53
54
55 E2r=E2*sin(Theta); %r component of the incident field for II ...
    case of Bhorens book
56 E2fi=E2*cos(Theta); %fi component of the incident field for II ...
    case of Bhorens book
57 Etr=E2r+Es2r; %r component of the total field for II case of ...
    Bhorens book
58 Etfi=E2fi+Es2fi; %fi component of the total field for II case ...

```

```

        of Borens book
59 E2=sqrt (Etr.^2+Etfi.^2); %Total field case II
60
61
62 Ep=[Ep E1.*conj(E1)];
63 Enormal=[Enormal E2.*conj(E2)];
64
65 end
66
67 hold on
68 z=linspace(500,3000,length(Enormal));
69 plot(z,Ep,'r')
70 plot(z,Enormal,'b')
71 %plot(x2,I,'g')
72
73
74 legend('Solucion Escalar','Polarizacion \perp al plano zx')
75 xlabel('y (\mum)')
76 ylabel('Intensidad \propto E^2')
77 title(['Intensidad a x=' num2str(y) '\mum para el cilindro con ...
        r=' num2str(r)

```

- *interaction_AGscalar.m*

Función base de los Scripts la cual contiene el método de Green y el procedimiento de resolución del sistema de ecuaciones lineal (2.6)

```

1 % interaction_AG.m
2 function AG = interaction_AGscalar(k,r,d,Depsi,Vi)
3 % AG es una matriuz N x N
4 % k: numero de onda
5 % r: matriz N x 3 , para las coordenadas x_j, y_j, z_j
6 % N: numero de puntos
7 % j = 1..N
8 % epsB: permitividad dielectrica relativa del medio (1)
9 % Depsi: vector columna Nx1 con los valores de la variacion de la
10 % permitividad dielectrica
11 % Vi: vector columna Nx1 con los volumenes elementales alrededor ...
    de cada
12 % punto
13
14
15

```



```
16 [N,dummy] = size(r);
17 AG = single(zeros(N,N)); %Initialization of matrix Ag
18 I = eye(3); %Identity matrix
19     %Reff=d/2;
20     %V=4/3*pi*Reff^3;
21 V=d^3; %Elemental volume
22 kB=k;
23 tic;
24 i=sqrt(-1);
25 %M=2/(3*k^2)*((1-i*k*Reff)*exp(i*k*Reff)-1)*I;
26 M=0;
27 %L=1/3*I;
28 L=1;
29 %L=0;
30 Deps=0.33;
31
32 for jj=1:N
33     [jj N];
34     for kk=1:N
35         if jj ≠ kk
36             rk_to_rj = r(jj,:)-r(kk,:);
37             rjk = norm(rk_to_rj); %sqrt(sum((r(jj,:)-r(kk,:)).^2))
38             RR = rk_to_rj'*rk_to_rj;
39             R=rjk;
40             rjkrjk=RR;
41
42             Ajk = exp(i*kB*rjk)/(4*pi*rjk);
43             AG(jj,kk) = -Ajk*k^2*Depsi(kk)*Vi(kk);
44
45         else
46             Ajj=M*k^2*Depsi(kk)-L*Depsi(kk);
47             AG(jj,kk) = 1-Ajj;
48         end
49     end
50 end
51 interact = toc;
```

- *scalar_sphere.m*

Script elaborado para la sección 4.2.1

```

1 clear all
2 E0 = 1; % polarizacion-x
3 m1 = 1.33;
4 epsilon0=sqrt(m1);
5 shapepath = '../..'/shape/';
6 rfile = 'rsphereg_4139.txt';
7 S=dlmread(rfile);
8 N = length(S(:,1));
9 epsB=1.5;
10
11 lambda=1; %longitud de onda en micrometros
12 k = 2*pi/lambda; % numero de onda
13 d = 1/(abs(m1)*k);
14 a_eff = (3*N/(4*pi))^(1/3)*1/(k*abs(m1));
15 r = d*[S(:,1) S(:,2) S(:,3)];
16 m = m1*ones(N,1);
17 K=2*pi/1.2;
18 Depsi=epsilon0-1;
19 Depsi=Depsi*ones(1,N);
20 V=(d)^3;
21
22 Vi=V*ones(1,N);
23 kvec = [0 0 k]; % propagandose en la direccion z
24 Ei = E_incscalar(E0,kvec,r);
25 AG= interaction_AGscalar(k,r,d,Depsi,Vi);
26
27
28 Ein = gmres(AG,Ei);
29
30 range = linspace(0,pi,100);
31
32 Esca_S = zeros(1,length(range));
33 Esca_P = zeros(1,length(range));
34 Einc_S = zeros(1,length(range));
35 Einc_P = zeros(1,length(range));
36
37 ix = 0;
38 for theta = range
39     ix = ix+1;

```

```
40
41 phi = 90; % perpendicular al plano x-z
42 r_E = zeros(1,3); % punto de evaluacion
43
44 [r_E(1), r_E(2), r_E(3)] = sph2cart(phi*pi/180,pi/2-theta, 100);
45 r_E = r_E;
46 AGs = interaction_AGsscalar(k,r_E,r,d,Depsi,Vi);
47 E=AGs*Ein;
48 kr = dot([k k k],r_E,2);
49 expikr = exp(i.*kr);
50 E1 = E0*expikr;
51
52 Esca_S(ix) = norm(E);
53 Einc_S(ix) = norm(E1);
54
55
56 end
57
58
59 figure(1)
60 semilogy(range*180/pi,Esca_S.^2./Einc_S.^2)
61 xlim([0 180])
62 ylabel('log |E^{(3)}|^2','FontSize',14)
63 xlabel('phase angle','FontSize',14)
64 title(['ka = ' num2str(k*a_eff) ', m = ' num2str(m1) ', N = ' ...
        int2str(N)],'FontSize',14)
65 set(gca,'FontSize',14)
```

- *Cubo_scalar.m*

Script elaborado para la sección 4.3

```

1 clear all
2 E0 = 1; % polarizacion-y
3 shapepath = '../..'/shape/';
4 rfile = 'rcube_4913.txt';
5 S=dlmread(rfile);
6 N = length(S(:,1));
7
8 epsB=1.0;
9 lambda=0.633;
10 k = 2*pi/lambda; % numero de onda
11
12 d=.1;%micrometers
13 r = d*[S(:,1) S(:,2) S(:,3)];
14
15 lambdam=1;
16 K=2*pi/lambdam;
17
18 Depsi=0.33*ones(1,N);%
19 V=(d)^3;
20
21 Vi=V*ones(1,N);
22 kvec = [0 0 k]; % propagandose en la direccion z
23 Ei = E_incscalar(E0,kvec,r);
24 AG= interaction_AGscalar(k,r,d,Depsi,Vi);
25 Ein = gmres(AG,Ei);
26 rangex = linspace(-1000,1000,400);
27 rangey = rangex;
28 dlmwrite('xf.txt', rangex);
29
30 Esca = zeros(1,length(rangey));
31 Einc = Esca;
32 ix = 0;
33 for xp = rangex
34     ix = ix+1;
35     iy=0;
36     yp=0;
37     %     iy=iy+1;
38     % punto de evaluacion
39     z_obs=1000; %Distancia a lo largo del eje z de los puntos de ...

```

```
    observacion
40   r_E = [xp yp z_obs];
41   %[r_E(1) r_E(2) r_E(3)] = [xp yp z_obs];
42   AGs = interaction_AGsscalar(k, r_E, r, d, Depsi, Vi);
43   Ein;
44   E = AGs*Ein;
45   kr = dot([k k k], r_E, 2);
46   expikr = exp(i.*kr);
47   E1 = E0*expikr;
48
49   Esca(ix) = E;
50   Einc(ix) = E1;
51   end
52
53   I=Esca.*conj(Esca);
54   dlmwrite('Isxf.txt', Esca.^2./Einc.^2)
55   hold on
56   plot(rangex, I./max(max(I)), 'r')
```

Referencias

- [1] Kahnert, F Michael: *Numerical methods in electromagnetic scattering theory*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 79:775–824, 2003.
- [2] Martin, Olivier JF y Nicolas B Piller: *Electromagnetic scattering in polarizable backgrounds*. Physical Review E, 58(3):3909–3915, 1998.
- [3] Taleb, I, Cristian Neipp, Francisco Javier Martínez Guardiola, Mariela L Alvarez, Eva María Calzado Estepa, Andrés Márquez, Jorge Francés, Sergi Gallego, Augusto Beléndez y cols.: *Fresnel-Kirchhoff Integral Method Comparison with Scattering Theory for the Study of Volume Dielectric Bodies*. 3rd International Conference on Optics, Photonics and Lasers (OPAL), 2020.
- [4] Yaghjian, Arthur D: *Electric dyadic Green's functions in the source region*. Proceedings of the IEEE, 68(2):248–263, 1980.
- [5] Epelde García, Markel: *Bessel functions and equations of mathematical physics*. Trabajos Académicos-Facultad de Ciencia y Tecnología Recolecta, 2016.
- [6] Huang, Jing: *Green Function*. En Uzunov, Dimo I. (editor): *Perturbation Theory*, capítulo 3. IntechOpen, Rijeka, 2017.
- [7] Bohren, Craig F y Donald R Huffman: *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [8] Huang, Jing, Jianquan Yao, Degang Xu y Runhua Li: *Green function method for the time domain simulation of pulse propagation*. Appl. Opt., 53(16):3533–3539, Jun 2014.
- [9] Doicu, Adrian, Thomas Wriedt y Yuri A Eremin: *Light scattering by systems of particles: null-field method with discrete sources: theory and programs*, volumen 124. Springer, 2006.
- [10] Frezza, Fabrizio, Fabio Mangini y Nicola Tedeschi: *Introduction to electromagnetic scattering: tutorial*. JOSA A, 35(1):163–173, 2018.
- [11] Paknys, Robert: *Applied frequency-domain electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2016.