UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA DE OBRAS PÚBLICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Augusto Beléndez Vázquez

Alicante, 1987

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Augusto Beléndez Vázquez

Alicante, 1987

- Ecuaciones Diferenciales: Preliminares.
- Ecuaciones Diferenciales Lineales.
- Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales con coeficientes constantes

ECUACIONES DIFERENCIALES: PRELIMINARES.

1. Definiciones y notación.

Una ecuación diferencial es una relación funcional en la cual aparecen funciones, derivadas de las funciones y variables independientes.

Si hay una sola variable independiente, las derivadas son derivadas ordinarias y la ecuación se denomina ecuación diferencial ordinaria:

$$f(y^{(n)}, \ldots, y', y, x) = 0$$

Si hay dos o más variables independientes, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación se llama ecuación diferencial en derivadas parciales:

número de variables	número de funciones	Tipo
1	1	Ecuación diferencial ordinaria
1	>1	Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
>1	1	Ecuación diferencial en derivadas parciales.
>1	>1	Sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Orden de una ecuación diferencial.

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

Por ejemplo,

$$y^{(n)} + x = 0 \qquad : \text{ orden } n$$

$$(y')^n + x = 0 \qquad : \text{ orden } 1$$

Grado de una ecuación diferencial.

El **grado** de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas es el grado de la derivada de mayor orden que interviene en ella.

Por ejemplo,

$$y^{(n)} + x = 0 \qquad : \text{ grado } 1$$

$$(y')^n + x = 0 \qquad : \text{ grado } n$$

Solución de una ecuación diferencial

Se llama **solución** de una ecuación diferencial a aquella función tal que, ella y sus sucesivas derivadas, satisfacen la ecuación diferencial.

Cuando se obtiene la solución, se tienen n constantes arbitrarias, si la ecuación es de orden n,

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

y esta es la **solución general**. Para conocer los valores de las n constantes se necesitan saber n

condiciones iniciales, y así se obtiene una **solución particular**

$$y = y(x)$$

Así pues, resolver una ecuación diferencial de orden n es hallar una relación entre las variables conteniendo n constantes arbitrarias independientes, que, junto con las derivadas obtenidas de ella, satisfaga la ecuación diferencial.

Las condiciones que ha de cumplir una ecuación diferencial para poder ser resuelta se dan en los **teoremas de existencia**.

Por ejemplo, una ecuación de la forma

$$y' = f(x,y) \qquad \text{(ecuación en forma normal)}$$

en la que:

a) $f(x,y)$ es continua y uniforme en una región R de puntos (x,y),

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en todos los puntos de R,

admite infinitas soluciones

$$g(x,y,C) = 0$$

(siendo C una constante arbitraria), tales que por cada punto de R pasa una y sólo una curva de la familia $g(x,y,C) = 0$.

2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.

La estructura general de las ecuaciones diferenciales de primer orden es:

$$F(y', y, x) = 0$$

Se pueden considerar:

(1) Ecuaciones diferenciales separables.
(2) Ecuaciones diferenciales homogéneas.
(3) Ecuaciones diferenciales reducibles a separables u homogéneas.
(4) Ecuaciones diferenciales exactas.
(5) Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas.
(6) Ecuaciones diferenciales lineales.
(7) Ecuación diferencial de Bernuilli.
(8) Ecuación diferencial de Ricatti.
(9) Ecuación diferencial de Clairaut.

3. Ecuaciones diferenciales separables.

La ecuación diferencial de primer orden

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\, dy = 0$$

se puede escribir en forma normal como:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$$

Decimos que la ecuación diferencial es separable cuando las variables están separadas, es decir,

$$f_1(x)\cdot g_2(y)\, dx + f_2(x)\cdot g_1(y)\, dy = 0$$

o bien,
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = 0$$

Finalmente,
$$A(x)\cdot dx + B(y)\,dy = 0$$

y en forma normal:
$$y' = F(x)\cdot G(y)$$

La solución se obtiene integrando:

$$\int A(x)\cdot dx + \int B(y)\cdot dy = C$$

siendo C una constante. De la forma normal:

$$\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)\cdot dx + C$$

Por ejemplo,
$$(x-1)^2\,y\,dx + x^2(y+1)\,dy = 0$$
que se puede escribir,
$$\frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx + \frac{(y+1)}{y}\,dy = 0$$

donde las variables están separadas.

4. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una función $f(x,y)$ se llama homogénea de grado n si:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Por ejemplo:

$$f(x,y) = x^3 + x^2 y + y^3$$

es homogénea de grado 3.

Si una función es homogénea de grado cero, para $t = 1/x$:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Una ecuación diferencial de primer orden

$$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$$

se denomina homogénea cuando las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas y del mismo grado. Y si se escribe en forma normal,

$$y' = f(x,y)$$

f es una función homogénea de grado cero:

$$y' = f(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Una ecuación diferencial homogénea se puede reducir a una ecuación diferencial separable mediante el cambio de función

$$v = \frac{y}{x}$$

Pues entonces, $y = vx$

y derivando respecto a la variable x,

$$y' = v'x + v$$

con lo que la ecuación homogénea

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

queda,

$$v'x + v = F(v)$$

que es una ecuación separable

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

integrando,

$$\int \frac{dv}{F(v)-v} = \int \frac{dx}{x} + C_1 = \ln x + C_1$$

se obtiene $x = x(v)$, de ahí $v = v(x)$, y finalmente $y = x\,v(x)$.

También se puede hacer el cambio de función:

$$u = \frac{x}{y}$$

5. Ecuaciones diferenciales reducibles a separables u homogéneas.

Consideremos una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

Si $c=c'=0$, se trata de una ecuación diferencial homogénea.

Tenemos dos rectas en el plano (x,y):

$$\left.\begin{aligned} ax+by+c&=0 \\ a'x+b'y+c'&=0 \end{aligned}\right\}$$

y pueden suceder dos cosas:

- que las dos rectas se corten:

$$\frac{b}{a} \neq \frac{b'}{a'}$$

- que las dos rectas sean paralelas:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r$$

Veamos estos dos casos por separado:

(1) Las dos rectas se cortan: Sea (α,β) el punto de intersección, entonces:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha+b\beta+c&=0 \\ a'\alpha+b'\beta+c'&=0 \end{aligned}\right\}$$

Se hace el cambio de variable:

$$\left.\begin{aligned} x&=X+\alpha \\ y&=Y+\beta \end{aligned}\right\}$$

entonces:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + a\alpha + bY + b\beta + c}{a'X + a'\alpha + b'Y + b'\beta + c'}\right) =$$

$$= f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$

Con lo que la ecuación diferencial se ha convertido en una ecuación homogénea:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$$

cuya solución es,

$$Y = Y(X)$$

y de ésta se obtiene:

$$y = y(x).$$

(2) Las dos rectas son paralelas: Entonces:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = r$$

se puede escribir la ecuación diferencial como:

$$y' = f\left(\frac{r(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

Se hace un cambio de función:

$$Y = a'x + b'y$$

luego:

$$\frac{dY}{dx} = a' + b'y'$$

y queda:

$$\frac{1}{b'}\left(\frac{dY}{dx} - a'\right) = y' = f\left(\frac{rY + c}{Y + c'}\right)$$

y esta ecuación es separable. Se obtiene

$$Y = Y(x)$$

y deshaciendo en cambio:

$$y = y(x).$$

■ Por ejemplo,

$$y' = \frac{y + x}{x}$$

es una ecuación homogénea. Se hace:

$$v = \frac{y}{x}$$

luego:

$$y = vx, \qquad y' = v'x + v$$

y queda:

$$v'x + v = v + 1$$

de donde:

$$v'x = 1$$

cuya solución es:

$$x\frac{dv}{dx} = 1$$

$$dv = \frac{dx}{x} \rightarrow v = \ln x + A \rightarrow x = Ce^{v} = Ce^{y/x}$$

6. Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de primer orden

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta sii

$$\exists\, U(x,y) \;/\; dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

La solución de la ecuación es:

$$U(x,y) = C$$

Como debe ser:

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

se tendrá que cumplir:

$$P(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

Veamos cuales son las condiciones que deben satisfacer las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ para que exista la función $U(x,y)$.

Está claro que:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}$$

Si $U(x,y)$ satisface el teorema de las derivadas cruzadas, "La condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta, es que:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\text{"}.$$

Veamos como calcular la función $u(x,y)$, para ello partimos de las relaciones:

$$(1) \qquad P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$(2) \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

De (1):

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$$

integrando respecto de x:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\cdot dx + \varphi(y)$$

Sustituyendo en (2):

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

entonces:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

y finalmente,

$$\varphi(y) = \int \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot dy + C_1$$

7. Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas.

Partimos de la ecuación diferencial de primer orden

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

y vemos que no es exacta.

Puede ser que exista una función $\mu(x,y)$ de modo que la ecuación diferencial:

$$\mu(x,y)\cdot P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\cdot Q(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta. Si esto sucede, a $\mu(x,y)$ se le da el nombre de factor integrante.

Como la ecuación diferencial es ahora exacta:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

es decir,

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

y reagrupando,

$$\mu_y P - \mu_x Q = \mu\,(Q_x - P_y)$$

que es la ecuación diferencial del factor integrante.

Vamos a obtener soluciones en algunos casos particulares:

(1) $\mu = \mu(x)$

Entonces:

$$-\frac{d\mu(x)}{dx}\, Q(x,y) = \mu(x)\,(Q_x - P_y)$$

de donde,

$$\frac{1}{\mu(x)}\,\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(x)$$

es decir, se debe cumplir que:

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(x)$$

y entonces:

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \varphi(x)\cdot dx$$

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x)\cdot dx$$

de donde:

$$\underline{\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\cdot dx}}$$

(2) $\mu = \mu(y)$

Entonces:

$$\frac{d\mu(y)}{dy} P(x,y) = \mu(y)(Q_x - P_y)$$

de donde:

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(y)}{dy} = \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)} = \psi(y)$$

es decir, se debe cumplir:

$$\frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{Q(x,y)} = \psi(y)$$

y entonces:

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \psi(y) \cdot dy$$

$$\ln \mu(y) = \int \psi(y) \cdot dy$$

de donde:

$$\underline{\mu(y) = e^{\int \psi(y) \cdot dy}}$$

(3) $\mu = \mu_1(x) \cdot \mu_1(y)$

Entonces,

$$\mu_1(x) \cdot \mu_2'(y) P - \mu_1'(x) \cdot \mu_2(y) Q = \mu_1(x)\, \mu_2(y)\, (Q_x - P_y)$$

de donde :

$$\frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)} Q - \frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(y)} P = -Q_x + P_y$$

luego :

$$-Q_x + P_y = Q \cdot f(x) - P \cdot g(y)$$

donde hemos llamado :

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mu_1'(x)}{\mu_1(x)} \\ g(y) &= \frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(y)} \end{aligned}\right\}$$

y el factor integrante es :

$$\underline{\mu(x,y) = e^{\int f(x) \cdot dx + \int g(y) \cdot dy}}$$

(4) $\mu = \mu(x \cdot y)$

Llamamos:

$$z = x \cdot y$$

$$\mu'(z) = \frac{d\mu(z)}{dz}$$

con lo cual:

$$\left. \begin{aligned} \mu_y &= \mu' \cdot x \\ \mu_x &= \mu' \cdot y \end{aligned} \right\}$$

con lo que nos queda:

$$\mu'(z)\,[xP - yQ] = \mu(z)\,[Q_x - P_y]$$

luego:

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$$

es decir,

$$\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \varphi(z)$$

y el factor integrante es:

$$\mu(z) \equiv \mu(x,y) = e^{\int \varphi(z)\,dz}$$

■ Si se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} P &= y \cdot f(x \cdot y) \\ Q &= x \cdot g(x \cdot y) \end{aligned} \right\} \text{ entonces: } \underline{\mu(x,y) = \frac{1}{xP - yQ}}$$

(5) $\mu = \mu(x^2+y^2)$

Hacemos :

$$z = x^2 + y^2 \quad ; \quad \mu' = \frac{d\mu}{dz}$$

Entonces :

$$\mu_y = 2y \cdot \mu'$$

$$\mu_x = 2x \cdot \mu'$$

de donde :

$$2y \cdot \mu' P - 2x \cdot \mu' Q = \mu (Q_x - P_y)$$

es decir,

$$2\mu' (yP - xQ) = \mu (Q_x - P_y)$$

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{1}{2} \frac{Q_x - P_y}{yP - xQ} = \varphi(z)$$

y el factor integrante es :

$$\underline{\mu(z) \equiv \mu(x,y) = e^{\int \varphi(z) \cdot dz}}$$

8. Ecuaciones diferenciales lineales.

Una ecuación diferencial lineal es una ecuación diferencial de la forma:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = Q(x)$$

Si consideramos el caso de una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + a(x) y = Q(x)$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} + a(x) y = Q(x)$$

Si el segundo miembro de la ecuación diferencial lineal es nulo, la ecuación se denomina homogénea o reducida,

$$y' + a(x) \cdot y = 0$$

y la ecuación es separable, pues en este caso,

$$\frac{dy}{dx} = -a(x) \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x) \cdot dx$$

$$\ln y = -\int a(x) \cdot dx + k$$

de donde:

$$y = C \cdot e^{-\int a(x) \cdot dx}$$

Para la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + a(x)y = Q(x)$$

el factor integrante es $e^{\int a(x)dx}$, ya que:

$$y'\, e^{\int a(x)\cdot dx} + a(x)\cdot y\cdot e^{\int a(x)\cdot dx} = Q(x)\cdot e^{\int a(x)\cdot dx}$$

donde vemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int a(x)\cdot dx}\right) = Q(x)\cdot e^{\int a(x)\cdot dx}$$

de donde:

$$y\cdot e^{\int a(x)\cdot dx} = \int Q(x)\cdot e^{\int a(x)\cdot dx}\cdot dx + C_1$$

y despejando $y(x)$:

$$y(x) = e^{-\int a(x)\cdot dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int a(x)\cdot dx}\cdot dx + C_1\right]$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$y'x + y = x\cdot \operatorname{sen} x$$

es lineal de primer orden y su solución es:

$$y(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[\int \operatorname{sen} x\cdot e^{\int \frac{dx}{x}}\cdot dx + C_1\right]$$

es decir,

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C_1\right)$$

9. Ecuación de Bernuilli

Una ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \qquad n \neq 0,1$$

se llama ecuación de Bernuilli. Se puede escribir,

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = y^n\,Q(x), \qquad n \neq 0,1$$

o bien,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{-n+1}P(x) = Q(x)$$

Se transforma en una ecuación diferencial lineal de primer orden mediante el cambio de función:

$$z = y^{1-n}$$

es decir,

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\cdot y'$$

de donde:

$$y' = \frac{1}{1-n}\,z'\cdot y^n$$

con lo que la ecuación diferencial se escribe:

$$\frac{1}{1-n}\,y^n\cdot z' + P(x)\,y = Q(x)\cdot y^n$$

dividiendo por y^n:

$$\frac{1}{1-n}\,z' + P(x)\,y^{1-n} = Q(x)$$

es decir,

$$\frac{1}{1-n}\,z' + P(x)\cdot z = Q(x)$$

que es una ecuación lineal.

10. Ecuación de Ricatti.

La ecuación de Ricatti es una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$y' = A(x) + B(x)\cdot y + C(x)\cdot y^2$$

para resolver esta ecuación diferencial hace falta conocer una solución particular, y_p.

Se hace el cambio de función:

$$y = y_p + \frac{1}{u}$$

luego:

$$y' = y'_p - \frac{u'}{u^2}$$

entonces:

$$y'_p - \frac{u'}{u^2} = A(x) + B(x)\left(y_p + \frac{1}{u}\right) + C(x)\left(y_p^2 + \frac{2y_p}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$$

y, teniendo en cuenta que y_p es una solución particular de la ecuación diferencial, queda:

$$-\frac{u'}{u^2} = B(x)\frac{1}{u} + C(x)\left(\frac{2y_p}{u} + \frac{1}{u^2}\right)$$

multiplicando por $-u^2$ en ambos miembros:

$$u' = -B(x)u - C(x)(2uy_p + 1)$$

es decir,

$$u' + B(x)u + C(x)(2y_p u + 1) = 0$$

$$u' + \left(B(x) + 2C(x)y_p\right)u = -C(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

11. Ecuación de Clairaut

La ecuación diferencial de la forma:

$$y = y'x + f(y')$$

se denomina ecuación de Clairaut.

Si llamamos:

$$p = y'$$

queda:

$$y = p \cdot x + f(p)$$

Su primitiva es:

$$y = Cx + f(C)$$

y se obtiene sencillamente sustituyendo p por C en la ecuación dada.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Reducción del orden de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial lineal es una ecuación diferencial de la forma:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + a_2(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = Q(x)$$

■ Se puede reducir el orden de la ecuación diferencial cuando:

(1) No hay dependencia en la variable independiente:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y) = 0$$

Se hace el cambio:

$$y' = p$$

con lo que queda:

$$f(p^{(n-1)}, p^{(n-2)}, \ldots, p, y) = 0$$

Se obtiene p en función de y:

$$p = p(y) = \frac{dy}{dx}$$

y como $p = y'$:

$$\frac{dy}{p(y)} = dx$$

e integrando:

$$\int \frac{dy}{p(y)} = x + C$$

(2) No hay dependencia en la función:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'; x) = 0$$

Se hace el cambio:

$$y' = p$$

con lo que queda:

$$f(p^{(n-1)}, p^{(n-2)}, \dots, p; x) = 0$$

Se obtiene p en función de x:

$$p = p(x) = \frac{dy}{dx}$$

de donde:

$$\int p(x)\,dx = \int dy = y + C$$

Así por ejemplo, $\quad x y''' + y'' = 1$

hacemos:

$$p = y''$$

y queda:

$$x p' + p = 1$$

es decir,

$$p' + \frac{1}{x} p = \frac{1}{x}$$

que tiene por factor integrante $\quad e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$

es decir,

$$x p' + p = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x p) = 1$$

$$x p = x + C$$

y poniendo:

$$p = q' = y''$$

$$x q' = x + C$$

de donde:

$$x \frac{dq}{dx} = x + C$$

$$\frac{dq}{dx} = 1 + \frac{C}{x}$$

con lo cual:

$$q = \int \left(1 + \frac{C}{x}\right) dx = x + C \ln x + B$$

y finalmente:

$$q = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = x + C \ln x + B$$

$$y = \int (x + C \ln x + B)\, dx$$

de donde:

$$y = \frac{x^2}{2} + C x (\ln x - 1) + B x + A$$

2. Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal tiene la forma:

$$Ly = Q(x)$$

donde L es un operador diferencial lineal:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

La ecuación escrita de la forma

$$Ly = Q(x)$$

con $Q(x) \neq 0$, recibe el nombre de ecuación lineal completa. Si $Q(x)=0$,

$$Ly = 0$$

la ecuación recibe el nombre de ecuación reducida u homogénea.

PROPIEDAD

Si $\{y_i\}$, $i=1,\ldots,k$, son soluciones de la ecuación homogénea, $Ly=0$, es decir, $L\{y_i\}=0$, entonces,

$$L\left\{\sum_i c_i y_i\right\} = 0 \qquad , \; c_i = \text{ctes}.$$

ya que por ser lineal:

$$L\left\{\sum_i c_i y_i\right\} = \sum_i c_i \, L\{y_i\} = 0$$

FUNCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Se dice que un conjunto de n funciones es linealmente independiente, $\{y_i\}$, $i=1,\dots,n$, si:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x) = 0$$

implica que $c_i = 0$, $i=1,\dots,n$.

WROSKIANO

Se llama Wroskiano de un conjunto de funciones $\{y_i\}$, $i=1,\dots,n$, al determinante:

$$W(x) \equiv W\{y_1,\dots,y_n\} \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

TEOREMA DEL WROSKIANO

La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de funciones $y_1,\dots,y_n$ sea linealmente independientes es que su wroskiano sea distinto de cero, para todo valor de x.

$$W(y_1,\dots,y_n) \neq 0,\ \forall x \iff \{y_1,\dots,y_n\} \text{ son L.I.}$$

■ Si $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, ..., $y=y_n(x)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación $Ly=0$, entonces

$$y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

es la primitiva de $Ly=0$.

Si $y_p = R(x)$ es una solución particular, llamada también "integral particular", de $Ly = Q(x)$, entonces:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + R(x)$$

es la primitiva de $Ly = Q(x)$.

Así pues, para resolver la ecuación

$$Ly = Q(x)$$

se hace lo siguiente:

(1) $Ly_H = 0$: $y_H = y_H(x, C_1, \ldots, C_n)$

(2) $Ly_p = Q(x)$: $y_p = y_p(x)$

(3) $y_G = y_H(x, C_1, \ldots, C_n) + y_p(x)$

ya que:

$$L\{y_G\} = L\{y_H + y_p\} = \underbrace{L\{y_H\}}_{=0} + L\{y_p\} = Q(x)$$

3. Ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes

La ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes tiene la forma:

$$Ly = 0$$

donde:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n$$

donde a_i, $i = 1, \ldots, n$, son constantes.

La solución es de la forma:

$$y = e^{\lambda x}$$

Sustituyendo en $Ly=0$:

$$L[e^{\lambda x}] = \left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n\right) \cdot e^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) e^{\lambda x} =$$

$$= P(\lambda) e^{\lambda x}$$

donde $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la ecuación diferencial. Se debe cumplir:

$$Ly = 0$$

luego:

$$P(\lambda) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

de donde,

$$P(\lambda) = 0$$

que recibe el nombre de ecuación característica y sus soluciones son las raíces de la ecuación diferencial.

Se tienen varios casos:

(1) Las raíces de la ecuación característica $P(\lambda)=0$ son simples:

$$P(\lambda_i) = 0, \quad \lambda_i: \text{simples} \quad i = 1, \dots, n$$

entonces la solución de la ecuación homogénea, y_H, es:

$$y_H = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}$$

(2) La ecuación característica, $P(\lambda)=0$, tiene alguna raíz múltiple:

Supongamos que λ_1 es de multiplicidad m, entonces:

$$\left.\frac{d^k}{d\lambda^k} P(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_1} = 0 \qquad , \quad k=0,1,\ldots,m-1$$

si se deriva $L[e^{\lambda x}] = P(\lambda)e^{\lambda x}$:

$$\left.\frac{d^k}{d\lambda^k} L[e^{\lambda x}]\right|_{\lambda=\lambda_1} = \left.\frac{d^k}{d\lambda^k}[P(\lambda)e^{\lambda x}]\right|_{\lambda=\lambda_1} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \left.\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[\frac{d^i}{d\lambda^i} P(\lambda)\right]\left[\frac{d^{k-i}}{d\lambda^{k-i}} e^{\lambda x}\right]\right|_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

Fórmula de Leibniz

luego, como: $$\left.\frac{d^k}{d\lambda^k} L[e^{\lambda x}]\right|_{\lambda=\lambda_1} = L\left.\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} e^{\lambda x}\right]\right|_{\lambda=\lambda_1} = 0$$

$$k=0,1,\ldots,m-1$$

es decir, se obtiene:

$$L[e^{\lambda_1 x}] = L[xe^{\lambda_1 x}] = \ldots = L[x^{m-1}e^{\lambda_1 x}] = 0$$

esto significa que si λ_1 es de multiplicidad m, se cumple:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{\lambda_1 x} +$$
$$+ C_m e^{\lambda_2 x} + C_{m+1} e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

■ Para raíces múltiples o simples, la solución y_H es:

$$y_H = Q_{m-1}(x)\, e^{\lambda_1 x} + R_{l-1}(x)\, e^{\lambda_2 x} + \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} m:\ \text{multiplicidad de } \lambda_1 \\ l:\ \text{multiplicidad de } \lambda_2 \\ \text{-------------} \end{array}\right\}$$

Todo esto es válido tanto para raíces reales como para complejas. Si se sabe que $\lambda = \alpha + i\beta$ es solución de $P(\lambda)=0$, también lo es $\lambda = \alpha - i\beta$ (λ de multiplicidad 1), luego:

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

es solución de $P(\lambda)=0$. Entonces, por la fórmula de Euler:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} =$$

$$= e^{\alpha x}\left[\underbrace{(C_1+C_2)}_{A}\cos\beta x + i\underbrace{(C_1-C_2)}_{B}\operatorname{sen}\beta x\right] =$$

$$= e^{\alpha x}\left(A\cdot\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x\right)$$

Si λ es de multiplicidad m:

$$y = e^{\alpha x}\left(A_{m-1}(x)\cos\beta x + B_{m-1}(x)\operatorname{sen}\beta x\right)$$

4. Solución particular de la ecuación completa

Se desea obtener una y_p que cumpla:

$$L y_p = Q(x)$$

Para obtener la solución particular hay dos métodos:

(1) Método de inspección

$Q(x)$	Raíces de $P(\lambda)$	Forma de y_p
$P_m(x)$	$\lambda=0$: no sea raíz	$\tilde{P}_m(x)$
	$\lambda=0$: sea una raíz de mult. s	$x^s \tilde{P}_m(x)$
$e^{\alpha x} P_m(x)$	$\lambda=\alpha$: no sea raíz	$e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$
	$\lambda=\alpha$: sea una raíz de mult. s	$x^s e^{\alpha x} \tilde{P}_m(x)$
$e^{\alpha x} P_m(x) \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\beta x \\ \cos\beta x \end{Bmatrix}$	$\lambda=\alpha \pm i\beta$ no son raíces	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(x)\operatorname{sen}\beta x + \tilde{Q}_m(x)\cos\beta x]$
	$\lambda=\alpha \pm i\beta$ son raíces de mult. s	$x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(x)\operatorname{sen}\beta x + \tilde{Q}_m(x)\cos\beta x]$

(2) Método de variación de constantes

La ecuación es:

$$L y_p = Q(x)$$

suponemos que:

$$L y_H = 0$$

donde:

$$y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

Entonces se elige y_p de forma que:

$$y_p = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$$

Se van calculando las derivadas sucesivas:

$$y_p' = C_1(x) y_1'(x) + C_1'(x) y_1(x) + \ldots$$

y se impone la condición:

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0$$

$$y_p'' = C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x) + \ldots + C_n(x) y_n''(x)$$

donde se ha impuesto:

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x) = 0$$

Cuando se llega a la $(n-1)$:

$$y_p^{(n-1)} = C_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x) y_n^{(n-1)}(x)$$

quedarán:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ &C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ &\qquad\vdots \\ &C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Entonces:

$$y_p^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \dots + C_n(x)y_n^{(n)} +$$

$$+ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}$$

con lo que:

$$Ly_p = C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = Q(x) \quad (**)$$

ya que:

soluciones de la homogénea

$$Ly_p = C_1(x)L[\cancel{y_1}] + C_2 L[\cancel{y_2}] + \dots + C_n(x)L[\cancel{y_n}] +$$

$$+ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}$$

Las incógnitas de $(*)$ y $(**)$ son las $C_i'(x)$ con lo que:

$$C_i(x) = \int C_i'(x)\,dx$$

■ En el caso particular en que las raíces de la ecuación homogénea son todas distintas

$$Ly = Q(x)$$

$$y_H = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

$$y_p = c_1(x) e^{\lambda_1 x} + c_2(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n(x) e^{\lambda_n x}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}
c_1' e^{\lambda_1 x} + c_2' e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n' e^{\lambda_n x} = 0 \\
c_1' \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + c_2' \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n' \lambda_n e^{\lambda_n x} = 0 \\
c_1' \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + c_2' \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n' \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} = 0 \\
-------------------- \\
c_1' \lambda_1^{n-2} e^{\lambda_1 x} + c_2' \lambda_2^{n-2} e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n' \lambda_n^{n-2} e^{\lambda_n x} = 0 \\
c_1' \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} + c_2' \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n' \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} = Q(x)
\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por la regla de Crámer:

$$c_1' e^{\lambda_1 x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ Q(x) & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{Q(x)}{P'(\lambda_1)}$$

Determinantes de Vandermonde

En general:

$$c_i'(x)\,e^{\lambda_i x} = \frac{Q(x)}{P'(\lambda_i)}$$

entonces:

$$c_i'(x) = \frac{1}{P'(\lambda_i)}\, e^{-\lambda_i x}\, Q(x)\, dx$$

$$c_i(x) = \frac{1}{P'(\lambda_i)} \int e^{-\lambda_i x}\, Q(x)\, dx$$

Con lo que la solución particular es:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\lambda_i x}}{P'(\lambda_i)} \int e^{-\lambda_i x}\, Q(x)\, dx$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Supongamos que se tiene:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x)$$

Esta ecuación es equivalente a un sistema de n ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} \qquad\quad y' = y_1 \\ (y'') \quad y_1' = y_2 \\ (y''') \quad y_2' = y_3 \\ \qquad\quad \vdots \\ (y^{(n)}) \quad y_{n-1}' = -a_1 y_{n-1} - \ldots - a_{n-1} y_1 - a_n y - Q(x) \end{cases}$$

Podemos referirnos, sin perder ninguna generalidad, al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El sistema general será de la forma :

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n + b_2(x) \\ &\text{-----------------------} \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + b_n(x) \end{aligned}\right\}$$

Se definen los vectores $\vec{Y}(x)$, $\vec{B}(x)$ y la matriz numérica A mediante :

$$\vec{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales se puede escribir :

$$\vec{Y}'(x) = A\vec{Y}(x) + \vec{B}(x)$$

El sistema homogéneo será :

$$\vec{Y}_H'(x) = A\vec{Y}(x)$$

Cuya solución es :

$$\vec{Y}_H(x) = \vec{Y}_0 e^{\lambda x}$$

entonces :

$$\lambda \vec{Y}_0 e^{\lambda x} = A \vec{Y}_0 e^{\lambda x}$$

con lo que queda una ecuación de valores propios:

$$A\vec{Y}_0 = \lambda \vec{Y}_0$$

$\vec{Y}_0$ son los vectores propios de A y λ sus valores propios. Si las raíces son simples:

$$\vec{Y}_H = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \vec{Y}_0^{(i)} e^{\lambda_i x}$$

Si fuera una raíz múltiple, de multiplicidad m, se ensaya una solución de la forma:

$$\vec{Y} = [\vec{Y}_0^0 + \vec{Y}_0^1 x + \vec{Y}_0^2 x^2 + \ldots \vec{Y}_0^{m-1} x^{m-1}] e^{\lambda x}$$

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= 2y_3 \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema homogéneo. En forma matricial:

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se buscan los autovalores de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

Los autovalores son :

$$\lambda_1 = 1 \text{ (doble)}$$
$$\lambda_2 = 2 \text{ (simple)}$$

La ecuación para los vectores propios es :

$\underline{\lambda_1 = 1 \text{ (doble)}}$: Hay que buscar una solución de la forma :

$$\vec{Y} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x \right] e^x$$

derivando :

$$\vec{Y}' = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x \right] e^x + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} e^x =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + (1+x) \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right] e^x$$

entonces:

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + (1+x) \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right] \cancel{e^x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} x \right] \cancel{e^x}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 - c_1 \\ b_1 + c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} a_2 + 2b_2 - c_2 \\ b_2 + c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$$

Igualando:

$$a_1 + a_2 = a_1 + 2b_1 - c_1 \longrightarrow a_2 = 2b_1 - c_1$$

$$b_1 + b_2 = b_1 + c_1 \longrightarrow b_2 = c_1$$

$$c_1 + c_2 = 2c_1 \longrightarrow c_1 = c_2$$

$$a_2 = a_2 + 2b_2 - c_2 \longrightarrow c_2 = 2b_2$$

$$b_2 = b_2 + c_2 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$c_2 = 2c_2 \longrightarrow c_2 = 0$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = 2b_1 \\ c_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Por lo que se puede poner, para $\lambda_1 = 1$ (doble)

$$\vec{Y} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \right] e^x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + b_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x$$

$\underline{\lambda_2 = 2 \text{ (simple)}}$: La ecuación para los vectores propios es :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -a+2b-c&=0 \\ -b+c&=0 \end{aligned} \right\} \quad a=b=c$$

luego, para $\lambda_2 = 2$ (simple) :

$$\vec{Y} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

La solución general es :

$$\vec{Y}_H = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x} + b_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x}$$

es decir,

$$\left\{ \begin{aligned} y_1 &= a e^{2x} + a_1 e^{x} + 2x b_1 e^{x} \\ y_2 &= a e^{2x} + b_1 x e^{x} \\ y_3 &= a e^{2x} \end{aligned} \right.$$

- Para obtener una solución particular del sistema completo se utiliza el método de variación de constantes. Para resolver:

$$\vec{Y}_p' = A\vec{Y}_p + \vec{B}$$

ya se tiene resuelto:

$$\vec{Y}_H' = A\vec{Y}_H$$

$$\vec{Y}_H = C_1\vec{Y}_1 + C_2\vec{Y}_2 + \dots + C_n\vec{Y}_n$$

sustituimos las C_i por funciones:

$$\vec{Y}_p = C_1(x)\vec{Y}_1 + \dots + C_n(x)\vec{Y}_n$$

entonces:

$$C_1(x)\vec{Y}_1' + \dots + C_n(x)\vec{Y}_n' + C_1'(x)\vec{Y}_1 + \dots + C_n'(x)\vec{Y}_n =$$

$$= A\left[C_1(x)\vec{Y}_1 + \dots + C_n(x)\vec{Y}_n\right] + \vec{B}$$

y como:

$$\vec{Y}_i' = A\vec{Y}_i$$

queda:

$$C_1'(x)\vec{Y}_1 + \dots + C_n'(x)\vec{Y}_n = \vec{B}$$

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 + e^{6x} \\ y_2' &= -4y_1 + 8y_2 + 6x\, e^{6x} \end{aligned}\right\}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{6x} \\ 6x e^{6x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y}' = \bar{A}\,\vec{Y} + \vec{B}$$

La solución del sistema homogéneo es:

$$\vec{Y}_H = a_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ -4x \end{pmatrix} e^{6x} + b_1 \begin{pmatrix} x \\ 1+2x \end{pmatrix} e^{6x}$$

Entonces:

$$a_1'(x) \begin{pmatrix} 1-2x \\ -4x \end{pmatrix} e^{6x} + b_1'(x) \begin{pmatrix} x \\ 1+2x \end{pmatrix} e^{6x} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 6x \end{pmatrix} e^{6x}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} (1-2x)a_1'(x) + x\, b_1'(x) &= 1 \\ -4x\, a_1'(x) + (1+2x)\, b_1'(x) &= 6x \end{aligned}\right\}$$

de donde:

$$a_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 6x & 1+2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-2x & x \\ -4x & 1+2x \end{vmatrix}} = 1 + 2x - 6x^2$$

$$b_1' = \frac{\begin{vmatrix} 1-2x & 1 \\ -4x & 6x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-2x & x \\ -4x & 1+2x \end{vmatrix}} = 10x + 12x^2$$

Integrando :

$$\left. \begin{aligned} a_1(x) &= x + x^2 - 2x^3 \\ b_1(x) &= 5x^2 + 4x^3 \end{aligned} \right\}$$

y sustituyendo en $\vec{y}_p$:

$$\vec{Y}_p = \begin{pmatrix} x^3 - x^2 + x \\ 5x^2 + 4x^3 \end{pmatrix} e^{6x}$$

Por tanto, la solución general es :

$$\vec{Y}_G = \vec{Y}_H + \vec{Y}_p =$$

$$= a_1 \begin{pmatrix} 1-2x \\ -4x \end{pmatrix} e^{6x} + b_1 \begin{pmatrix} x \\ 1+2x \end{pmatrix} e^{6x} + \begin{pmatrix} x - x^2 + x^3 \\ 5x^2 + 4x^3 \end{pmatrix} e^{6x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Augusto Beléndez Vázquez

Alicante, 1987