# ELEMENTOS ÓPTICOS HOLOGRÁFICOS: TEORÍA DIFRACCIONAL

# **Teoría difraccional**

- Análisis de elementos ópticos holográficos utilizando la Teoría de la difracción: Aspectos teóricos y experimentales.
- Imagen difraccional de un punto (PSF): Criterio utilizado para el estudio de la calidad de imagen.
- Hologramas por transmisión en los que el objeto es una fuente puntual: lentes holográficas.
- Distribución de intensidades en un plano imagen : Figura de difracción.
- Distribución de irradiancia a lo largo de un eje: Irradiancia axial.
- Existen aberraciones: Teoría difraccional de aberraciones.
- En ausencia de aberraciones y con pupila circular: Figura de Airy.
- Aumento de aberraciones: Deformación de la figura de difracción.
- El medio de registro no influye (salvo en una posible apodización).

# Parámetros geométricos



# Aberración de fase,

- Fase del frente de onda imagen deseado: <sub>i</sub>(x,y)
- Fase del frente de onda imagen: 'i(x,y)
- Aberración de fase: (x,y) = i(x,y) i(x,y)

$$(x,y) = c(x,y) - i(x,y) \pm [o(x,y) - r(x,y)]$$

Ondas esféricas:

$$q(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{2}{q} r_q(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$$(x,y) = \frac{2}{c} \left\{ r_{c}(x,y) - r_{i}(x,y) \pm \mu[r_{0}(x,y) - r_{r}(x,y)] \right\}$$

$$\mu = c/r$$

# Punto imagen gaussiano



$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{K_c} \pm \mu \left( \frac{1}{K_o} - \frac{1}{K_z} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{K_c} \pm \mu (2ex a_c + 2ex a_z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = 2ex a_c \pm \mu (2ex a_c + 2ex a_z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = 2ex f_c \pm \mu (2ex f_c + 2ex f_z)$$

$$\mu = e^{f_c} r$$

# Irradiancia en un punto del espacio

$$I(x_i, y_i, z_i) = \frac{P}{\frac{2}{c} R_i^2 S} \bigg|_{S} A(x, y) \exp \left[i (x, y; x_i, y_i, z_i)\right] dx dy \bigg|^2$$





Normalizando al máximo de la PSF en ausencia de aberraciones:

$$(\mathbf{0},\mathbf{0};\mathbf{x}_g,\mathbf{y}_g,\mathbf{z}_g)=\mathbf{0}$$

$$I(x_g, y_g, z_g) = \frac{P}{\frac{2}{c} R_g^2 S} \bigg|_{S} A(x, y) dx dy \bigg|^2$$



$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_{0'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_0' & -m_0' l_0' & l_0' \\ 0 & -1 & m_0' \\ -l_0' & -m_0' n_0' & n_0' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$l_0' = \frac{x_0'}{R_0'} \qquad m_0' = \frac{y_0'}{R_0'} \qquad n_0' = \sqrt{1 - l_0^2 - m_0^2}$$

$$= (1 - m_0^2)^{-1/2}$$

# Irradiancia en el plano X'Y' (con z' fijo)

$$I(x',y') = \frac{\left| \begin{array}{c} A(x,y) \exp \left[i \quad (x,y;x',y')\right] dx dy \right|^2}{\left| \begin{array}{c} A(x,y) dx dy \right|^2 \end{array}\right|^2}$$

Es posible desarrollar una *teoría difraccional de aberraciones* en elementos ópticos holográficos.

#### En ausencia de aberraciones:

- En el punto gaussiano se tiene **I(0,0) = 1**.
- Si la pupila de salida es circular se obtiene la figura de difracción
- de Airy.



# Irradiancia axial

 Intensidad existente a lo largo de la línea que une el centro de la pupila de salida del EOH con el punto imagen gaussiano:

$$\mathbf{x'} = \mathbf{y'} = \mathbf{0}$$

Normalizando al valor en el punto gaussiano en ausencia de aberraciones (Razón de Strehl):

$$I(z') = \frac{\left| \begin{array}{c} A(x,y) \exp \left[i \quad (x,y;0,0,z')\right] dx dy \right|^2}{\left| \begin{array}{c} A(x,y) dx dy \right|^2} \right|^2}$$

En ausencia de aberraciones, con pupila circular de radio a y con A(x,y) = 1, la irradiancia axial es una función 'sinc'.

# Cálculo numérico

Distribución de amplitudes en el plano imagen X'Y': (x,y) (r, )

$$U(x',y') = \frac{1}{B} \int_{0}^{a} A(r, ) \exp [i (r, ; x',y')] r dr d$$

$$B = \frac{a \ 2}{0 \ 0} A(r, ) r \ dr \ d$$

 $r = a \sqrt{u}$ 

= 2 V

• Cambio de variables: (r, ) (u,v)

Distribución de amplitudes en el plano imagen X'Y'.

$$U(x',y') = \frac{1}{B'} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A(u,v) \exp \left[ i \quad (u,v;x',y') \right] du dv$$

$$B' = \int_{0}^{1} A(u, v) du dv$$

Subdominios  $S_{ik}$  de radio variable y sector angular constante:

 $U(x',y') = \frac{1}{B'} \int_{j=1}^{J} K A(u,v) \exp [i \quad (u,v;x',y')] du dv$ 

$$B' = \int_{j=1}^{J} K A(u,v) du dv$$
$$j = 1 k = 1 S_{jk}$$

Aproximaciones en cada subdominio S<sub>jk</sub>:

$$A(u,v) = A(u_i,v_k)$$

$$(u,v) \qquad (u_{j},v_{k}) + (u - u_{j}) - (u_{j},v_{k}) + (v - v_{k}) - (u_{j},v_{k})$$

• Puntos en los que se evalúan la amplitud A y la fase :

$$u_j = j - \frac{1}{2} \quad u \qquad \qquad v_k = k - \frac{1}{2} \quad v$$

$$u = \frac{1}{J} \qquad \qquad v = \frac{1}{K}$$

$$U(x',y') = \frac{1}{B'} \int_{j=1}^{J} \int_{k=1}^{K} A(u_j,v_k) \exp[i (u_j,v_k;x',y')]$$

sinc  $\frac{1}{2J}$   $\frac{1}{u}$   $(u_j, v_k; x', y')$  sinc  $\frac{1}{2K}$   $\frac{1}{v}$   $(u_j, v_k; x', y')$ 

$$B' = \int_{j=1}^{J} K A(u_j, v_k)$$

 $I(x',y') = |U(x',y')|^2$ 

#### METODOS NUMERICOS

<u>Método I</u>  $U(x', y') = \frac{1}{B} \iint_{S} A(x, y) \exp[i\Delta(x, y; x', y')] dx dy$ 

 $U(x', y') = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \iint_{S_{jk}} A(x, y) \exp[i \Delta(x, y; x', y')] dx dy$ 

$$x_{j} = -R + (j - \frac{1}{2}) \Delta x$$
  $y_{k} = -R + (k - \frac{1}{2}) \Delta y$   $x_{j}^{2} + y_{k}^{2} < R^{2}$ 

$$U(x', y') = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} A(x_j, y_k) \exp[i\Delta(x_j, y_k; x', y')] \quad B = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} A(x_j, y_k)$$

# ANALISIS ESTADISTICO

$$m_{rs} = \frac{\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} (x_{p}^{r})^{r} (y_{q}^{r})^{s} I(x_{p}^{r} y_{q}^{r})}{\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} I(x_{p}^{r} y_{q}^{r})}$$

$$a_{rs} = \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} (x_{p})^{r} (y_{q})^{s} I (x_{p}' y_{q}')$$

 $m_{\rm H} = \frac{a_{\rm H}}{a_{\rm O}}$ 

$$M_{rs} = \frac{\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} (x_{p}^{+} - \langle x' \rangle)^{r} (y_{q}^{+} - \langle y' \rangle)^{s} I(x_{p}^{+} y_{q}^{+})}{\sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} I(x_{p}^{+} y_{q}^{+})}$$

$$\sigma_{\rm x} = \sqrt{M_{\rm 20}} \qquad \qquad \sigma_{\rm y} = \sqrt{M_{\rm 02}}$$

$$S_{30} = \frac{M_{30}}{\sqrt{M_{20}^3}}$$
  $S_{03} = \frac{M_{03}}{\sqrt{M_{02}^3}}$ 

$$S_{40} = \frac{M_{40}}{\sqrt{M_{20}^3}}$$
  $S_{04} = \frac{M_{04}}{\sqrt{M_{02}^3}}$ 

#### **EJEMPLO NUMERICO**



D = 4 cm

















# Evaluación de la calidad en sistemas ópticos



- Irradiancia axial máxima implica que la varianza debe ser mínima.
- El punto de irradiancia axial máxima recibe el nombre de foco de difracción y, para pequeñas aberraciones, sólo hay uno.

En este caso se elige el mejor plano imagen como aquél que tiene la irradiancia axial máxima y, por tanto, la varianza mínima: El mejor plano imagen contiene al foco de difracción

¿Qué sucede si las aberraciones son mayores?

Situación frecuente en los EOHs

**Pueden existir varios focos de difracción** (con idéntica irradiancia axial máxima)



#### EOH en eje con aberración esférica y desenfoque

# Entropía y calidad de imagen

- El concepto de entropía puede utilizarse para localizar regiones en las que su valor es extremal: Tienen interés desde el punto de vista óptico.
- La entropía aumenta conforme las aberraciones se incrementan.
- Existe un valor mínimo de la entropía correspondiente al plano gaussiano en ausencia de aberraciones.
- Utilización de una función entropía para determinar la posición del plano de mejor imagen en elementos ópticos holográficos.
- Esta función es de gran utilidad, en particular cuando hay más de un foco de difracción.
- Se utiliza una función entropía similar a la considerada en Teoría de la Información.



### Función densidad de probabilidad, P

$$P(x'_{j}, y'_{k}; z') = \frac{I(x'_{j}, y'_{k}; z')}{\int K} I(x'_{m}, y'_{n}; z')$$
$$m = 1 \quad n = 1$$

- Región finita de área S en el plano imagen.
- La región S' se divide en  $N = J \times K$  celdas idénticas.
- $(x'_{j}, y'_{k})$  se toma en el centro geométrico de cada celda.



# Función entropía, H

$$H(z') = - \sum_{\substack{j=1 \ k=1}}^{J} P(x'_j, y'_k; z') \ln [P(x'_j, y'_k; z')]$$



#### **PROPIEDADES DE LA ENTROPÍA:**



- H es mínima y su valor es H = 0 cuando todas las probabilidades son cero menos una que vale la unidad (la imagen es un punto).
- Para un número de celdas N, la entropía H es máxima y de valor H = ln N cuando todas las probabilidades son iguales (haz colimado): P = 1/N
- Cualquier cambio que tienda a equalizar la distribución de probabilidad da lugar a un incremento de la entropía.
- Cuanto más "desordenada" sea la distribución de intensidades, mayor será su entropía.
- La entropía puede interpretarse como una medida de la manera en que la energía está repartida en el histograma de una distribución de intensidad en cada plano imagen.
- Estamos interesados en obtener aquellos planos imagen de entropía mínima.



#### EOH en eje con aberración esférica y desenfoque



#### **GEOMETRÍA DE REGISTRO**



#### GEOMETRÍA DE RECONSTRUCCIÓN



#### **CÁLCULO:** > Distribución de intensidades en planos imagen

Entropía a lo largo del eje Z

**PLANO IMAGEN (S'):** 0.05 mm x 0.05 mm N = 51 x 51 celdas

**MÁXIMA ENTROPÍA:**  $H_{máx} = \ln N = \ln 2601 = 7.86$ 

H<sub>mín</sub> ➡ plano imagen gaussiano sin aberraciones









Augusto BELÉNDEZ VÁZQUEZ, Elementos Ópticos Holográficos: Teoría Difraccional. Depto. Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal. Universidad de Alicante (1999).





#### FUNCIÓN DE TRANSMISIÓN DE LA MODULACIÓN (MTF)

$$MTF(x, y) = \frac{M_{imagen}(x, y)}{M_{objeto}(x, y)}$$

• *M* es la **modulación** y es una medida de la visibilidad o contraste:

$$M = \frac{I_{máx} - I_{mín}}{I_{máx} + I_{mín}}$$



La MTF es función de las frecuencias espaciales:

$$x = \frac{x}{c^{Z}}$$
  $y = \frac{y}{c^{Z}}$ 

Frecuencia de corte del sistema (para D = 8 cm: 158 líneas/mm)

$$c = \frac{D}{2 c z}$$

- La MTF es una medida de la reducción en contraste de la imagen respecto al objeto en función de las frecuencias espaciales.
- La *MTF* es el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de la *PSF*.
- Las aberraciones ensanchan la *PSF*, dando lugar a una *MTF* más estrecha.
- Los valores máximos de la MTF corresponden al sistema óptico sin aberraciones y limitado, por tanto, sólo por difracción.



İ

#### EOH fuera de eje con astigmatismo



#### **DISPOSITIVO EXPERIMENTAL (REGISTRO)**





- Láser He-Ne de 40 mW (r = 633 nm)
- Relación de haces 1: 1
- Exposición:  $E = 40 \ \mu J/cm^2$
- *D* = 1.045 cm
- Emulsión fotográfica Agfa-Gevaert 8E75HD

#### • PROCESADO:

1. Revelador PAACM	20°C	4 minutos
2. Baño de paro		1 minuto
3. Blanqueo R-10	20°C	1 minuto
4. Lavado en agua corriente		1 minuto
5. Secado		

• Rendimiento en difracción ~70%

#### **DISPOSITIVO EXPERIMENTAL (RECONSTRUCCIÓN)**







- Cámara CCD de resolución 768 x 494 pixels conectada a un ordenador con una tarjeta digitalizadora Data Translation DT 3851
- Tamaño de cada pixel: 8.6 x 8.4 µm<sup>2</sup> (horizontal/vertical)
- Imagen digitalizada con el paquete de software GLOBAL LAB image
- 22 imágenes capturadas sobre 2.2 cm del eje óptico de la lente
- Región considerada en cada plano imagen: 438.6 µm x 428.4 µm  $N = 51 \times 51 \text{ celdas}$











**EXPERIMENTALES** 



TEÓRICAS



#### TEÓRICAS

#### EXPERIMENTALES

#### Imagen primaria





#### Círculo de mínima confusión





Imagen secundaria





a Señal, Universidad de Alicante (1999)

# TEÓRICAS **EXPERIMENTALES** Imagen primaria Círculo de mínima confusión Imagen secundaria

# **RESUMEN**

Se ha aplicado la teoría de la difracción a elementos ópticos holográficos con aberraciones, realizando un estudio teórico y experimental de diversos parámetros:

> Distribución de intensidades en un plano imagen.

Irradiancia axial.

Se ha utilizado una función entropía asociada a la distribución de intensidades de cada plano imagen: Esta entropía está relacionada con el grado de desorden en que se distribuye la energía luminosa en dicho plano.

La función entropía ha demostrado su validez como función de mérito para el estudio y la evaluación de la calidad de imagen en sistemas holográficos, y se ha utilizado en la obtención del mejor plano imagen en EOHs.

Se pueden obtener **experimentalmente** las distribuciones de intensidad y las irradiancias axiales, y la entropía a partir de estos datos experimentales, con una buena coincidencia entre los resultados teóricos y experimentales.

- En trabajos recientes se ha comparado esta función entropía con otras funciones de mérito utilizadas en la bibliografía:
  - > Varianza de la aberración de onda
  - ≻ Varianza de la PSF
  - Pietraszkiewicz

Se ha demostrado que la entropía no sólo es comparable con estas últimas, sino que presenta ventajas: Posibilidad de poder medirse experimentalmente.

Se ha utilizado la función entropía para evaluar la influencia de la reconstrucción con **luz cuasimonocromática**, de anchura de banda pequeña. Situación es de gran interés en sistemas de interconexión óptica.

La generalización al caso de amplitudes *A* (*x*,*y*) no uniformes es inmediata: **Apodización.** 

Apodización debida a que el rendimiento en difracción no es uniforme sobre la pupila de salida del elemento (respuesta en frecuencias del material de registro, no uniformidad de la exposición y ecuación de Kogelnik).

- La **medida experimental** de la irradiancia axial permite obtener información sobre las aberraciones de un sistema óptico: Tipo de aberración y su valor.
- La función entropía puede utilizarse en otras áreas de investigación:
  - La medida del campo modal de una fibra óptica, parámetro fundamental cuando se desea ensamblar dos fibras ópticas.
  - Estudio de lentes multifocales, pues permitiría encontrar teórica y experimentalmente la posición de los distintos focos del sistema.