Control por Computador

Manual de la Práctica 5:
Diseño de un controlador digital

Jorge Pomares Baeza
Francisco Andrés Candelas Herías
Grupo de **I**nnovación **E**ducativa en **A**utomática

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Introducción

En esta práctica se desarrollan los principales conceptos de control digital. En concreto se va a mostrar como puede hacerse uso de la información proporcionada por el lugar de las raíces para poder determinar cual será la respuesta de un sistema en bucle cerrado a partir de la localización de polos y ceros del sistema en bucle abierto. Para familiarizarse con el diseño utilizando el lugar de las raíces se determinarán los comandos básicos que dispone MATLAB para diseño de reguladores digitales.

Objetivos

- Practicar las técnicas de diseño de reguladores digitales descritas en clases de teoría.
- Utilización del lugar de las raíces discreto como herramienta matemática básica para el diseño de reguladores.
- Aprender los comandos fundamentales de MATLAB para control digital.

1. Estabilidad y respuesta temporal

La evolución de un sistema dinámico suele describirse haciendo uso de los descriptores dinámicos. Estos hacen referencia a la caracterización de la evolución temporal de la señal de salida ante determinadas señales de excitación en la entrada. A partir de la figura 1, que muestra la evolución temporal de la respuesta de un sistema frente a una entrada tipo escalón, se pueden definir los siguientes parámetros que la caracterizan:

- El tiempo de subida, t_r, se define como el tiempo que tarda la señal de salida del sistema en subir desde el 10% hasta el 90% del valor final. Este parámetro proporciona información acerca de la velocidad del sistema, es decir, de lo rápido que responde ante una entrada.
- El tiempo de pico, t_p, es el tiempo que tarda la señal de salida del sistema en alcanzar el pico máximo de su sobreoscilación.
- El pico de sobreoscilación, M_p, expresa cuánto se eleva la evolución temporal de la señal de salida del sistema respecto al valor final. Es por lo tanto la amplitud del primer pico y se suele medir en porcentaje respecto al valor final.
- Se define el tiempo de establecimiento, t_s, como el tiempo que tarda la señal de salida del sistema en entrar en la banda de 5 por ciento alrededor del valor final, y ya no vuelve a salir de ella.

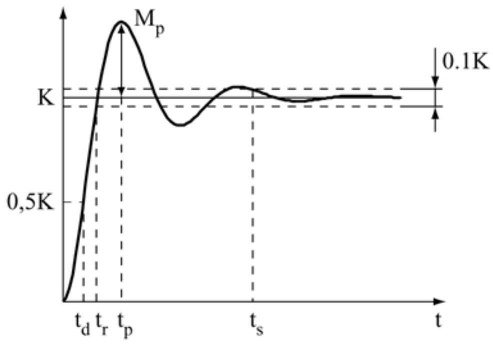

Figura 1. *Descriptores dinámicos de la respuesta de un sistema.*

Se dice que un sistema es estable cuando para una entrada acotada se obtiene, transcurrido un determinado tiempo, una salida también acotada. Para sistemas continuos se obtienen ciertos comportamientos a partir de diferentes localizaciones de los polos en el plano s. Así, un sistema es inestable cuando un polo está localizado en la parte derecha del eje imaginario. En el caso de sistemas discretos, se puede analizar los comportamientos del sistema para diferentes localizaciones de los polos en el plano z. Las características en el plano z pueden ser relacionadas con las del plano s utilizando la siguiente expresión:

$$z = e^{sT}$$

- T = periodo de muestreo (seg/muestra).
- s = Localización en el plano s.
- z = Localización en el plano z.

A continuación se va a considerar un sistema de segundo orden cuya función de transferencia característica se puede expresar de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

donde:

- ξ = coeficiente de amortiguamiento
- ω_n = frecuencia natural (rad/seg).

La figura siguiente muestra una correspondencia de líneas de constante coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural desde el plano s al plano z utilizando la expresión anterior:

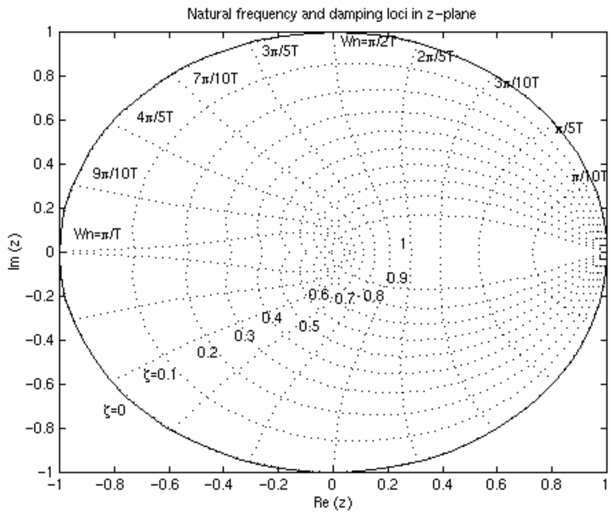

Figura 2. *Líneas con coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural constante.*

En el plano z, el límite de estabilidad no es el eje imaginario, sino el círculo unidad |z|=1. El sistema es estable cuando todos los polos están localizados dentro del círculo unidad.

Para analizar la respuesta temporal a partir de la localización de los polos en el plano z, pueden utilizarse las siguientes ecuaciones empleadas en sistemas continuos:

$$M_p = e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_s = \frac{\pi}{\xi \cdot \omega_n}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \frac{\ln(\mathrm{M_p})}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\mathrm{M_p}))^2}}$$

donde:

- ξ = coeficiente de amortiguamiento
- ω_n = frecuencia natural (rad/seg). La frecuencia natural en el plano z tiene como unidades rad/muestra, pero cuando se utilizan las ecuaciones mostradas anteriormente, debe tener como unidades rad/seg.
- T_s = Tiempo de establecimiento
- T_p = Tiempo de pico.
- M_p = Pico de sobreoscilación

Supóngase que se dispone de la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0{,}15z + 0{,}3}$$

A continuación ejecutando los siguientes comandos se obtiene la siguiente gráfica con las líneas de constante coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural, en la que se observa la ubicación de los polos.

```
numDz = 1;
denDz = [1 -0.15 0.3];
sys = tf(numDz,denDz,1/20);
pzmap(sys)
axis([-1 1 -1 1])
zgrid
```

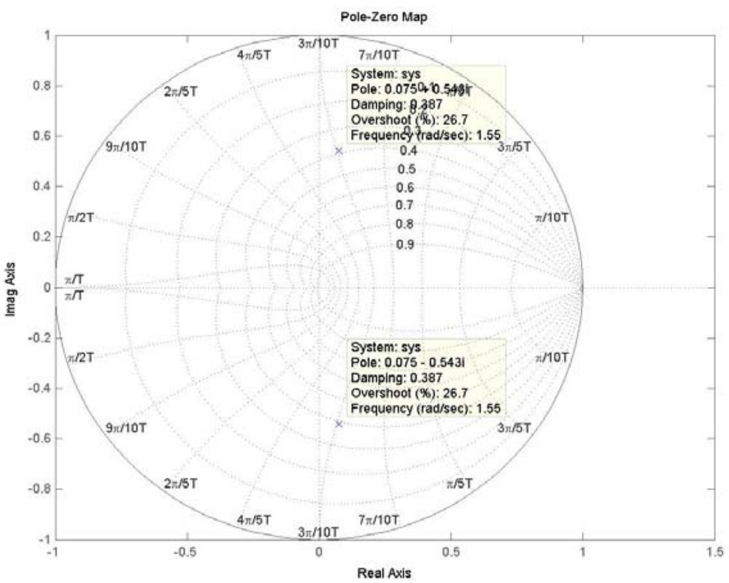

Figura 3. *Ubicación de los polos en el sistema de ejemplo.*

Una primera afirmación que se puede obtener a partir de la gráfica de la figura 3 es que el sistema es estable, ya que los polos se encuentran localizados dentro del círculo unidad. A partir de esta gráfica se puede observar que los polos están localizados aproximadamente a la frecuencia natural de 3π/10T (rad/muestra) y el coeficiente de amortiguamiento es 0,387. Asumiendo que se dispone de un periodo de muestreo de 1/20 segundos (lo que supone ω_n = 18,85 rad/seg) y utilizando las ecuaciones mostradas anteriormente, se puede determinar que el sistema debería tener un tiempo de pico de 0,18 segundos, un tiempo de establecimiento de 0,43 segundos y un pico de sobreoscilación de 26,7% (0,26 mas que el régimen permanente). A continuación se va a obtener la respuesta al escalón añadiendo al programa anterior los siguientes comandos:

```
sys = tf(numDz,denDz,1/20);
step(sys,2);
```

Ejecutando estos comandos se obtiene la siguiente respuesta del sistema ante entrada escalón:

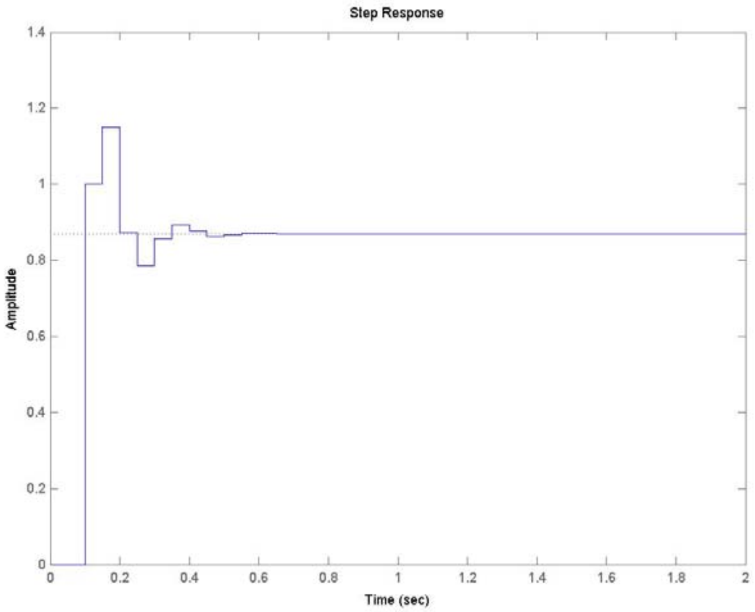

Figura 4. *Respuesta del sistema ante entrada escalón.*

Como se puede observar en la gráfica anterior, el tiempo de subida, el tiempo de establecimiento y el pico de sobreoscilación es el esperado. Esto muestra como se puede utilizar la localización de los polos y las tres ecuaciones anteriores para analizar la respuesta de un sistema.

2. Lugar de las raíces discreto

El lugar de las raíces es el lugar de los puntos correspondientes a las posibles raíces de la ecuación característica que pueden encontrarse para los diferentes valores de la ganancia K (desde cero al infinito). La ecuación característica con una realimentación unitaria es la siguiente:

$$1 + KG_C(z)G(z) = 0$$

donde $G_C(z)$ es el regulador implementado en el controlador digital y G(z) es la función de transferencia de la planta en el plano *z*.

Los mecanismos de dibujo del lugar de las raíces son exactamente los mismos en el plano z que en el plano s. Para el lugar de las raíces continuo se utiliza en MATLAB la función `sgrid` para encontrar la región del lugar de las raíces que obtiene una ganancia aceptable. Para el lugar de las raíces discreto se utilizará la función `zgrid` que tiene las mismas características que `sgrid`. El comando `zgrid` dibuja las líneas de constante coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural.

Supóngase que se dispone de la siguiente función de transferencia discreta:

$$G(z) = \frac{z - 0{,}2}{z^2 - 1{,}15z + 0{,}5}$$

y los requerimientos son un coeficiente de amortiguamiento mayor que 0,6, y una frecuencia natural mayor que 0,4 rad/muestra. Los siguientes comandos dibujan el lugar de las raíces con las líneas de constante coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural.

```
numDz = [1 -0.2];
denDz = [1 -1.15 0.5];
sys = tf(numDz,denDz,-1);

rlocus(sys)
axis([-1 1 -1 1])

zgrid
```

Tras ejecutar los anteriores comandos se obtiene el siguiente lugar de las raíces:

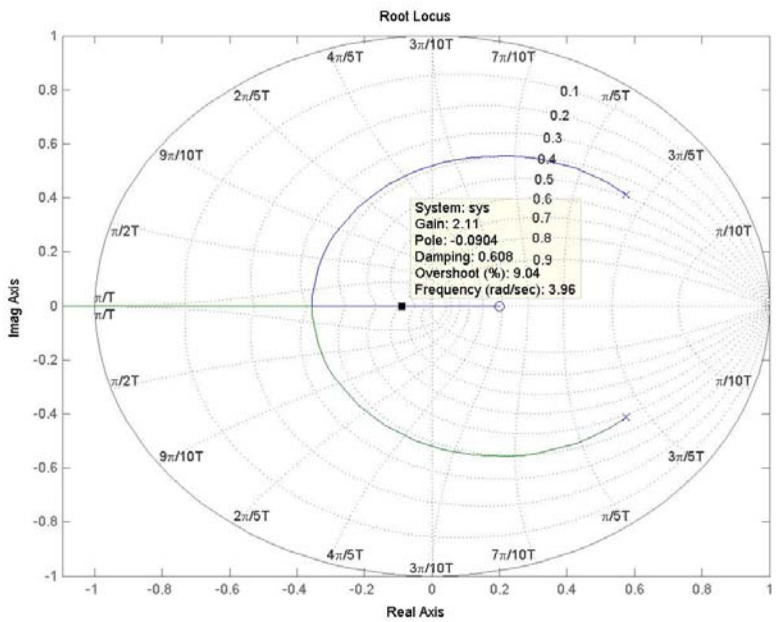

Figura 5. *Lugar de las raíces del sistema de ejemplo.*

A partir de este gráfico se puede determinar que el sistema es estable para cierto rango de valores de K debido a que sus polos están localizados en el círculo unidad. También se observan las líneas discontinuas con constante coeficiente de amortiguamiento y frecuencia natural para ese rango. Por lo tanto, una ganancia elegida en una de las regiones que localizan las raíces en la región deseada debería permitir obtener la respuesta que satisfaga los requerimientos. Para determinar una ganancia válida bastaría con pulsar con el ratón en el lugar de las raíces obtenido.

3. Diseño empleando el lugar de las raíces para el control digital en posición de un motor de corriente continua

Se va a diseñar un controlador utilizando el lugar de las raíces. Se puede obtener un modelo digital de un motor de corriente continua realizando la conversión a partir del modelo analógico de dicho motor como se describirá a continuación. La función de transferencia en bucle abierto para control en posición de un motor de corriente continua es la que se muestra a continuación:

$$G(s) = \frac{\vartheta(s)}{V(s)} = \frac{K}{s\left((Js+b)(Ls+R)+K^2\right)}$$

donde:

- resistencia eléctrica (R) = 3 ohm
- inductancia eléctrica (L) = 2.7E-6 H
- constante de fuerza electromotriz (K=K_e=K_t) = 0.0274 Nm/Amp
- momento de inercia del rotor (J) = 3.3E-6 kg*m^2/s^2
- damping ratio del sistema mecánico (b) = 4.5077E-6 Nms
- entrada (V): fuente de voltaje
- salida : velocidad de rotación

Los requerimientos del diseño son:

- Tiempo de establecimiento: Menor a 0.04 segundos.
- Sobreoscilación: Menor al 15%
- Error de posición en régimen permanente: 0

3.1 Conversión de continuo a discreto

El primer paso en el diseño de un sistema discreto es convertir una función de transferencia continua a discreta.

Cuestión 1. Utilizar MATLAB para convertir la función de transferencia anterior $\frac{\vartheta(s)}{V(s)}$ a discreta haciendo uso del comando c2d. Considerar el periodo de muestreo igual a 1/40 del tiempo de establecimiento. Una vez obtenida la función de transferencia digital, emplear el siguiente comando para obtener una representación de dicha función:

```
[numd,dend] = tfdata(motor_digital,'v')
```

Como se puede observar, tanto el numerador como el denominador de la función de transferencia discreta obtenida tienen una raiz extra en z=0. Para cancelar el polo y el cero extra y evitar problemas numéricos en MATLAB puede ejecutarse el siguiente código:

```
numd = numd(2:3);
dend = dend(1:3);
motor_d = tf(numd,dend,Ts)
```

Cuestión 2. Obtener la función de transferencia discreta, G(z), resultante.

A continuación se pretende mostrar la respuesta en bucle cerrado cuando no se dispone de ningún controlador. Primero, se debe cerrar el bucle de la función de transferencia haciendo uso del comando feedback. Obteniendo una configuración como la mostrada en la siguiente figura:

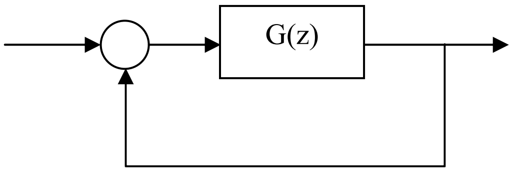

Figura 6. *Diagrama de bloques del sistema original en bucle cerrado.*

Después de cerrar el bucle vamos a observar la respuesta ante una entrada escalón haciendo uso de los comandos step y stairs. El comando step proporciona el vector de señales discretas de pulsos y el comando stairs conecta estas señales discretas. Para ello se puede añadir las siguientes instrucciones a las implementadas anteriormente:

```
sys_cl = feedback(motor_d,1);
[x1,t] = step(sys_cl,.5);
stairs(t,x1)
xlabel('Tiempo (segundos)')
ylabel('Posicion (rad)')
title('Respuesta original ante una entrada escalon')
```

Se debería obtener la siguiente respuesta:

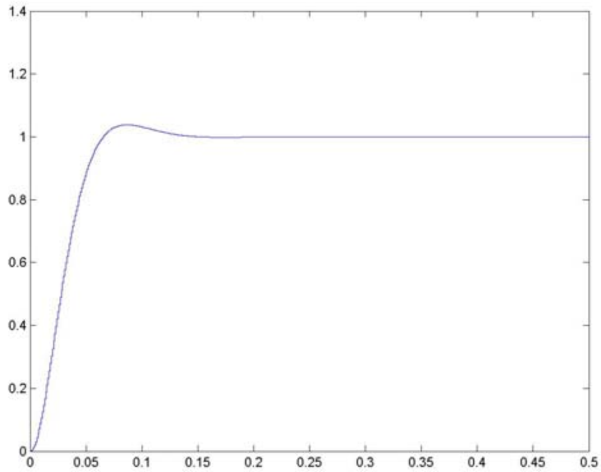

Figura 7. *Respuesta del sistema original ante entrada escalón.*

3.2 Diseño utilizando el lugar de las raíces

La principal idea del diseño utilizando el lugar de las raíces es obtener la respuesta en bucle cerrado a partir del lugar de las raíces en bucle abierto. Añadiendo ceros y polos en el sistema original, el lugar de las raíces puede ser modificado, obteniendo una nueva respuesta en bucle cerrado. Primero vamos a observar el lugar de las raíces del sistema original. Para ello ejecutar los siguientes comandos:

```
rlocus(motor_d)
title('Lugar de las raíces del sistema original')
zgrid(0,0)
axis([-2,2,-2,2])
```

Como resultado de la ejecución de los anteriores comandos se obtiene la siguiente respuesta:

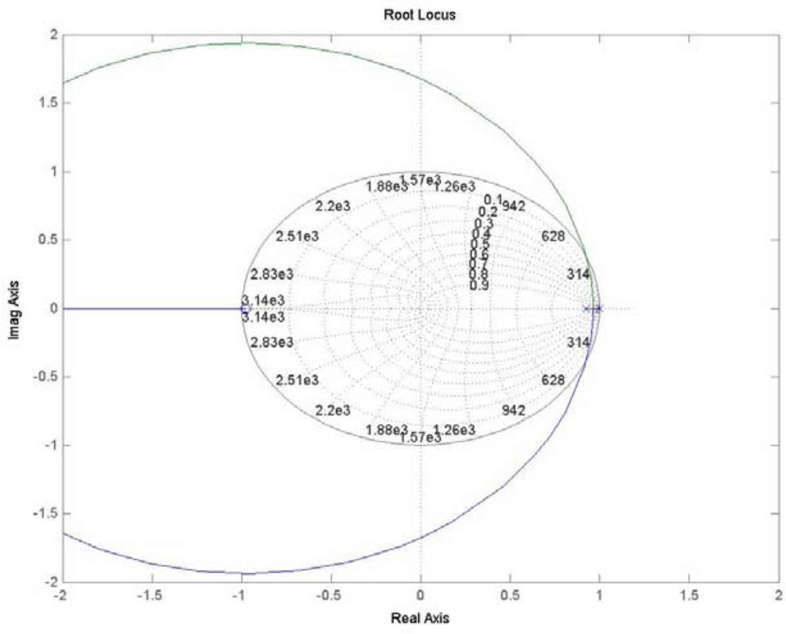

Figura 8. *Lugar de las raíces del sistema original.*

Para obtener un error nulo en régimen permanente en la respuesta en bucle cerrado del sistema, debemos añadir un control integral. En continuo el control integral es 1/s. Si se utiliza la aproximación s = 1/(z-1) para la correspondencia entre el plano s y el plano z, deberá añadirse un polo en 1 en el lugar de las raíces. Después de añadir el polo extra en 1, el lugar de las raíces tendrá tres polos cerca de 1. Consecuentemente, la respuesta en bucle cerrado se volverá más inestable. Por lo tanto, deberemos añadir un cero cerca de 1, dentro del círculo unidad para atenuar el efecto de un polo. Se añadirá un cero en z = 0,95. A continuación añadir los siguientes comandos:

```
numi = [1 -0.95];
deni = [1 -1];
```

```
icontr = tf(numi,deni,Ts);
```

El comando zgrid puede ser utilizado para encontrar la región deseada (que satisface los requerimientos) en el lugar de las raíces discreto.

El diagrama de bloques resultante tras introducir el control integral es el que se observa en la siguiente figura:

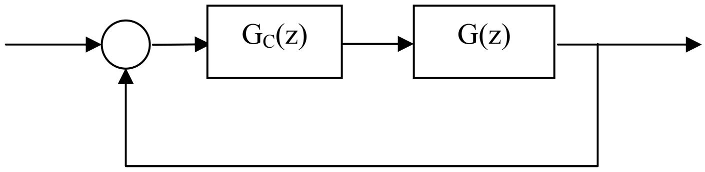

Figura 9. *Diagrama de bloques del sistema con control integral.*

Cuestión 3. Resolver las siguientes cuestiones:

1. Obtener el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural que cumple las especificaciones de diseño.
2. Obtener el lugar de las raíces del sistema una vez aplicada la acción de control integral.
3. En cuanto a la estabilidad del sistema, qué se puede afirmar tras observar el lugar de las raíces anterior.

Independientemente de la estabilidad del sistema, el lugar de las raíces debería estar en la región donde la línea del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural se cruzan de manera que se cumplan los requerimientos. A continuación se va a observar como se puede modificar el lugar de las raíces incluyendo nuevos polos y ceros en la función de transferencia.

Cuestión 4.

- Obtener la función de transferencia resultante de añadir dos polos adicionales en -0,98 y 0,5 y dos ceros en 0,8 a la función de transferencia en bucle abierto anterior previamente regulada con control integral.
- Representar el lugar de las raíces resultante.
- Determinar una ganancia, K_C, en la que se cumplan los requerimientos de diseño.
- Obtener la respuesta en bucle cerrado del sistema con la ganancia seleccionada y comprobar que se cumplen las especificaciones de diseño.
