Control por computador

Manual de la Práctica 2: Análisis de sistemas discretos

Jorge Pomares Baeza
Fracisco Andrés Candelas Herías
Grupo de **I**nnovación **E**ducativa en **A**utomática

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Introducción

En la práctica 1 se ha obtenido la respuesta de un sistema digital ante distintos valores de las constantes de un controlador PID. La respuesta de un sistema viene dada por la ubicación de los polos de la función de transferencia en bucle cerrado en el plano z. De esta manera, estudiando la localización de dichos polos en el sistema controlado es posible determinar si un sistema es o no estable.

En esta práctica se va a analizar no solo la respuesta temporal de un sistema, sino también su régimen permanente.

Objetivos

- Analizar la respuesta temporal de un sistema de segundo orden.
- Describir la relación entre la respuesta de un sistema de segundo orden discreto y el correspondiente continuo.
- Repasar los principales conceptos relativos a la estabilidad de un sistema discreto.
- Determinar el error en régimen permanente de un sistema de segundo orden discreto.

1. Funciones de transferencia

En la práctica 2 se estudió la respuesta de un motor de corriente continua, cuyo esquema se ha representado en la Figura 1, frente a la utilización de distintos controladores PID. Según se obtuvo en dicha práctica, la función de transferencia en el dominio z es la que se muestra a continuación (periodo de muestreo 0,01):

$$G(s)=\frac{7{,}55086\cdot 10^{-2}}{s\cdot\left(0{,}010854\cdot s+5{,}6933\cdot 10^{-3}\right)}\Rightarrow G(z)=\frac{0.0003472z+0.0003466}{z^2-1.995z+0.9948}$$

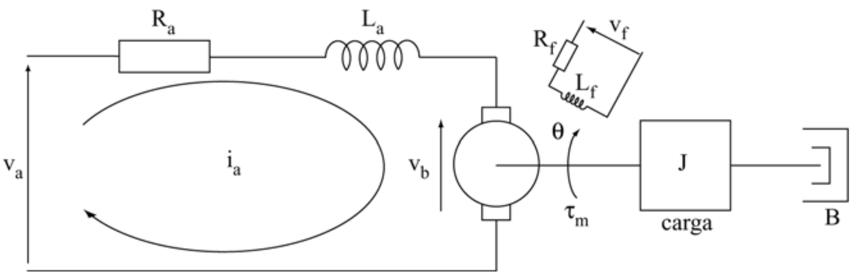

***Figura 1**. Esquema de un motor controlado por inducido.*

El diagrama de bloques del sistema con regulador será el siguiente:

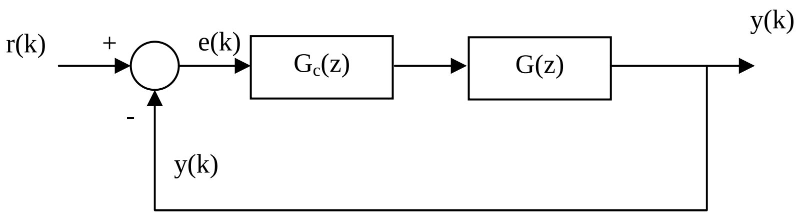

***Figura 2**. Sistema controlado con realimentación unitaria.*

Recordemos que la función de transferencia de tiempo continuo para un controlador PID es:

$$G_C(s) = K_P + s \cdot K_D + K_I / s$$

existen varios métodos para la conversión de funciones de transferencia del plano s al plano z . La función c2d de Matlab no puede aplicarse en este caso ya que no se puede obtener la función de transferencia del filtro PID de este modo porque la función de transferencia discreta tendría más ceros que polos, lo cual no es realizable. En su lugar usaremos la transformación bilineal, definida de la siguiente manera:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Por lo que podemos derivar el controlador PID discreto con el mapeo por la transformación bilineal. De la misma manera, el comando c2dm de Matlab puede emplearse para convertir el compensador PID de tiempo continuo al compensador PID discreto usando el método "tustin". El método "tustin" emplea la aproximación bilineal para la conversión a tiempo discreto de la derivada. Para aplicar la conversión pueden emplearse el siguiente comando:

```
[dencz,numcz]=c2dm([1 0],[Kd Kp Ki],Ts,'tustin');
```

Note que el numerador y el denominador en el comando c2dm se invirtieron. La razón es porque función de transferencia PID no es propia. Matlab no permite esto. Intercambiando el numerador y el denominador el comando c2dm puede ser engañado para devolver la respuesta correcta.

Considerando numz y denz el numerador y el denominador de la función de transferencia discreta de la planga, G(z), la función de transferencia en bucle abierto puede obtenerse multiplicando G(z) por la función de transferencia discreta del controlador $G_c(z)$.

```
numaz = conv(numz,numcz)
denaz = conv(denz,dencz)
```

Finalmente, la función de transferencia en bucle cerrado puede obtenerse empleando el comando cloop o feedback:

```
[numaz_cl,denaz_cl] = cloop(numaz,denaz);
```

Cuestión 1. Considerando únicamente una ganancia proporcional unitaria (es decir PID con K_p=1, K_i=0 y K_d=0, por lo tanto, $G_c(z)$ = 1), obtener los polos y ceros de la función de transferencia discreta en bucle cerrado, $G_{bc}(z)$, y representarlos en el plano z. (El valor de los polos y ceros pueden obtenerse respectivamente con las funciones pole y zero de Matlab y la función pzmap representa dichos polos en el plano z). ¿Qué se puede afirmar en cuanto a la estabilidad a partir de la anterior representación?.

La respuesta temporal de un sistema de segundo orden viene dada por una serie de parámetros:

- ω_n. Frecuencia natural no amortiguada. Mide la rapidez del sistema.
- ω_d. Frecuencia natural amortiguada. Al igual que el anterior parámetro, mide la rapidez del sistema.
- ξ. Coeficiente de amortiguamiento. Mide la estabilidad relativa. Este parámetro proporciona información acerca de la estabilidad del sistema. Cuando $0 < \xi < 1$, los polos del sistema en bucle cerrado, son complejos conjugados y quedan dentro del círculo unidad (por lo tanto, el sistema es estable). Se dice entonces que el sistema está subamortiguado, y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si $\xi = 1$, se dice que el sistema está críticamente amortiguado. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a $\xi > 1$. La respuesta transitoria de sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no oscila. Si $\xi = 0$ la respuesta transitoria no se extingue. Por lo tanto, a menor valor de ξ más oscilante será su comportamiento.
- σ. Factor de decrecimiento. Mide lo rápido que se acaba el transitorio.

Se puede obtener el valor de estos parámetros a partir de la localización de los polos y ceros y las siguientes relaciones:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = e^{-T\sigma}$$

$$\underline{|z} = arctg\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = T\omega_d$$

$$\frac{\sigma}{\omega_d} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\sigma}{\xi}$$

Cuestión 2. Obtener el valor de los parámetros ω_n, ω_d, ξ y σ para la función de transferencia, $G_{bc}(z)$. ¿Qué se puede afirmar en cuanto a la estabilidad observando el valor de ξ?

A partir de los anteriores parámetros es posible obtener los tiempos que definen el comportamiento del régimen temporal de un sistema de segundo orden:

- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$.
- Tiempo de establecimiento: $t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$
- Sobreoscilación: $M_p = e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} \cdot 100$

Cuestión 3. Calcular el tiempo de pico, de establecimiento y la sobreoscilación para el sistema $G_{bc}(z)$ en bucle cerrado. A continuación obtener la salida real del sistema haciendo uso del programa desarrollado en la práctica 1 y comprobar que los tiempos calculados teóricamente se corresponden con los observados en la práctica.

Considerando $G_c(z) = 1$ se tiene el siguiente sistema digital:

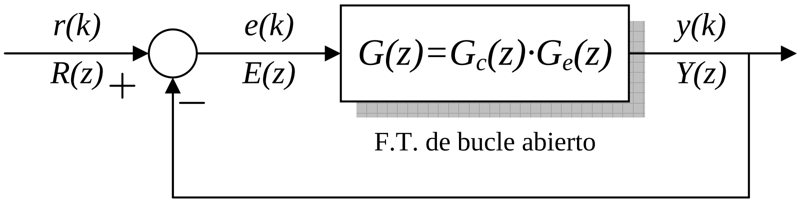

Figura 3. *Sistema digital con realimentación unitaria.*

Se define el error del sistema como la diferencia:

$$E(z)= R(z)-Y(z)$$

La transformada *E(z)* se puede determinar como:

$$E(z)= R(z)-Y(z)= R(z)- G(z)\, E(z)$$
$$E(z)+ G(z)\, E(z) = R(z)$$
$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

Si el sistema es estable, la salida quedará acotada, y el error también. Entonces el error se puede calcular por el teorema del valor final:

$$e_\infty=\lim_{k\to\infty}e(k)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)E(z)$$
$$e_\infty=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$
$$R(z)=\begin{cases}\text{Secuencia escalón} & Z\left[\{1,1,1,1,\ldots\}\right]=\dfrac{1}{1\text{-}z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}\\ \text{Secuencia rampa} & Z\left[\{0,T,2T,3T,\ldots\}\right]=\dfrac{T\cdot z}{\left(z-1\right)^2}\end{cases}$$

Cuestión 4. Calcular el error en régimen permanente en posición (entrada escalón) y velocidad (entrada en rampa) del sistema digital.