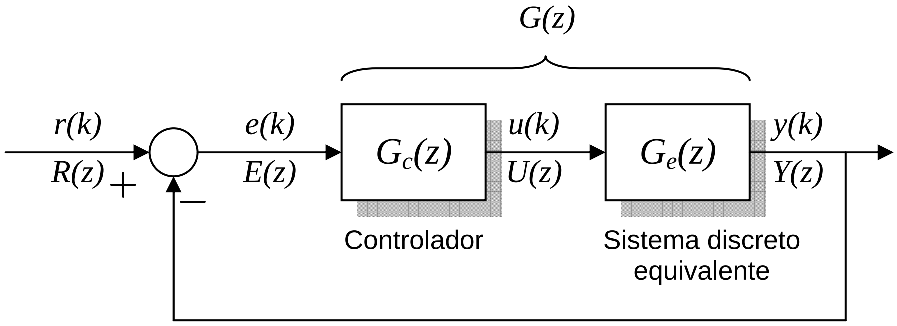


Sistema de control digital en bucle cerrado

$$G(z) = K\frac{(z+c_1)(z+c_2)\ldots(z+c_m)}{(z+1)^n(z+p_1)(z+p_2)\ldots(z+p_n)} = K\cdot G^{'}(z)$$

$$G_{bc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

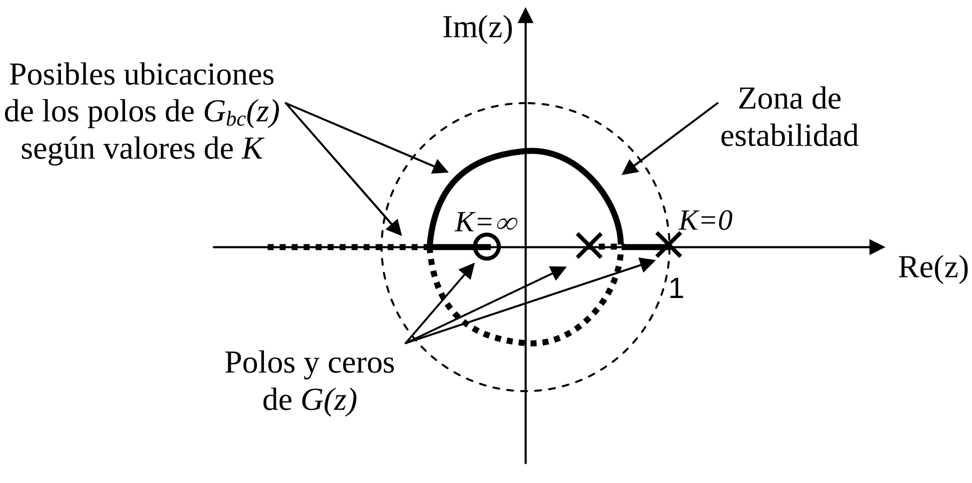
Ecuación característica que da los polos en bucle cerrado:

$$1+G(z)=0 \rightarrow 1+K\cdot G^{'}(z)=0$$

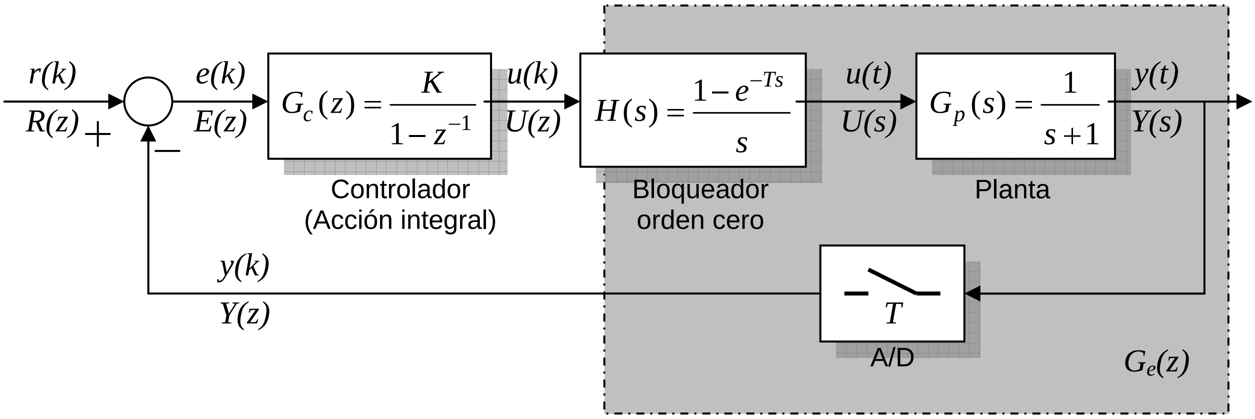
Cieterios del Lugar de las Raíces con K>0:

$$1+K\cdot G^{'}(z)=0\begin{cases}\text{Criterio del módulo} & \left|K\cdot G^{'}(z)\right| = \left|-1\right| \quad \rightarrow \quad \left|K\cdot G^{'}(z)\right| = 1 \\ \text{Criterio del argumento} & \underline{\left|K\cdot G^{'}(z)\right.} = \underline{\left|-1\right.} = \underset{n=0,1,2\ldots}{(2n+1)\pi} \quad \rightarrow \quad \underline{\left|K\cdot G^{'}(z)\right.} = \pi\end{cases}$$

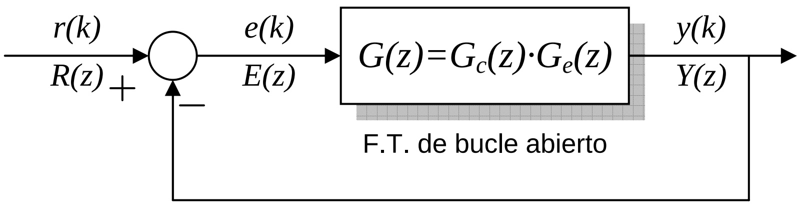
Ecuaciones del Lugar de las Raíces



Ejemplo de un Lugar de las Raíces



Ejemplo de sistema de control digital



$$G_e(z) = Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}\right\} = \left(1-z^{-1}\right)Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}\right\}$$

$$G(z) = G_c(z)\cdot G_e(z) = \frac{K}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = \frac{K\cdot z}{z-1}\cdot\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$G_{bc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K\cdot z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})+K\cdot z(1-e^{-T})}$$

Sistema digital simplificado equivalente

$$G(z) = K\,\frac{0.3935z}{(z-1)(z-0,6065)}\left\{\begin{array}{ll}\text{Cero en} & \text{z=0}\\ \text{Polo en} & \text{z=1}\\ \text{Polo en} & \text{z=0,6065}\end{array}\right\}$$

$$1+K\,\frac{0.3935z}{(z-1)(z-0,06065)} = 0$$

Función de transferencia en bucle abierto y ecuación característica para T=0,5seg

1. El lugar de las raíces para bucle cerrado tiene tantas ramas como polos la función transferencia de bucle abierto **G(z)**.
2. Las ramas comienzan en los polos de **G(z)**, lo que corresponde a valores de **K=0**, y acaban en los ceros de **G(z)**, que corresponde a valores de **K=∞**. Si hay **m** ceros y **n** polos con n>m, entonces hay **n-m** ramas que tienden a infinito (ceros en infinito).
3. En el eje real, solo pertenecen a las ramas del lugar de las raíces los puntos que tienen un número impar de cero más polos de **G(z)** a su derecha.
4. Se puede determinar las asíntotas que siguen las ramas que van a infinito como rectas que parten del punto **C** y tienen ángulo **θi**:

$$C = \frac{\sum \text{polos de } G(z) - \sum \text{ceros de } G(z)}{\text{n-m}}$$

$$\theta i = \frac{(2i+1)\pi}{n-m} \quad \text{con} \;\; i = 0,1,2 \ldots n-m-1$$

5. Los puntos de separación o confluencia de las ramas con el eje real se pueden determinar despejando **K** de la ecuación característica, calculando su derivada respecto a **z**, y buscando las raíces de ecuación resultante:

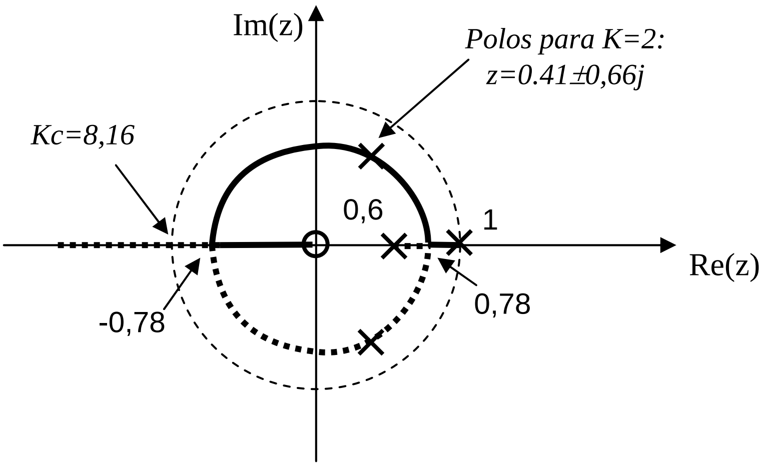
$$1 + KG'(z) = 0 \rightarrow K = \frac{-1}{G'(z)}$$

$$\frac{dK}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)} = 0 \rightarrow \text{valores de z para los qye K es positiva}$$

6. A partir de la ecuación característica también se puede calcular el valor de **K** correspondiente a un punto **z**.

$$1 + KG'(z) = 0 \rightarrow K = \frac{-1}{G'(z)}$$

Algunas reglas básicas para dibujar el Lugar de las Raíces

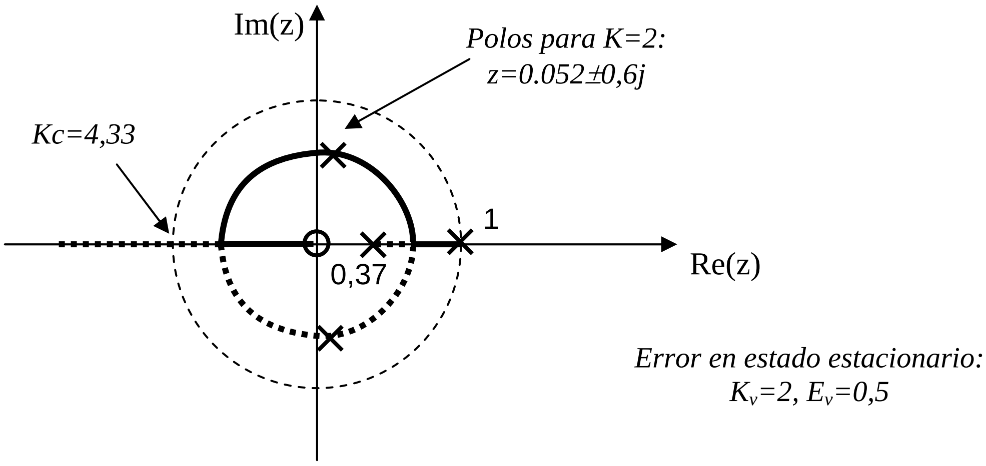


Lugar de las Raíces del ejemplo para T=0,5seg

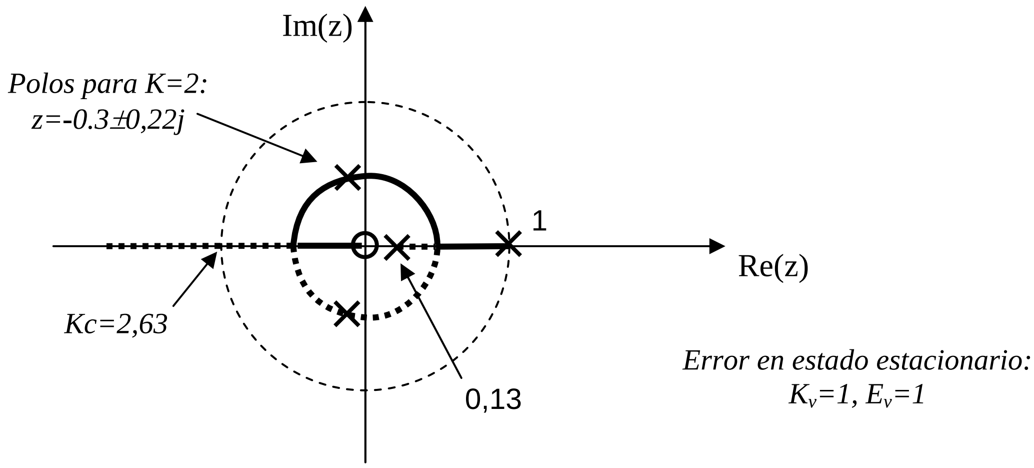
$$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2\cdot 0.3935z}{(z-1)(z-0,6065)} = 2$$

$$e_v = \frac{T}{K_v} = \frac{0.5}{2} = 0,25$$

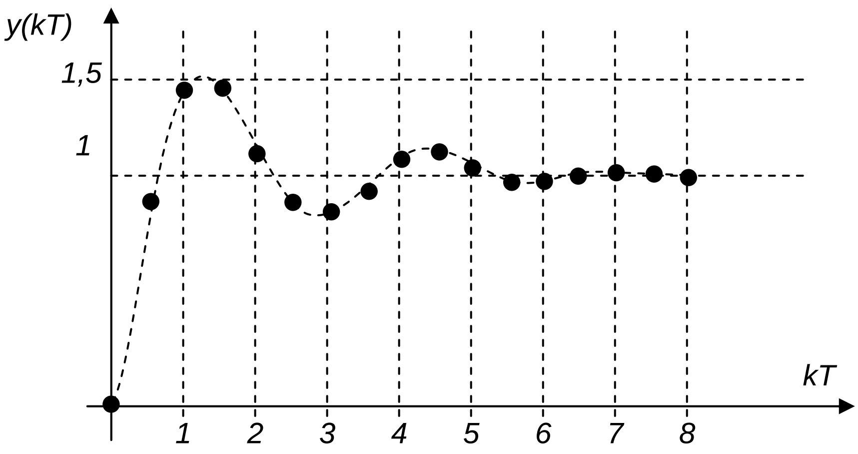
Error de en régimen estacionario ante una entrada en rampa para T=0,5seg y K=2



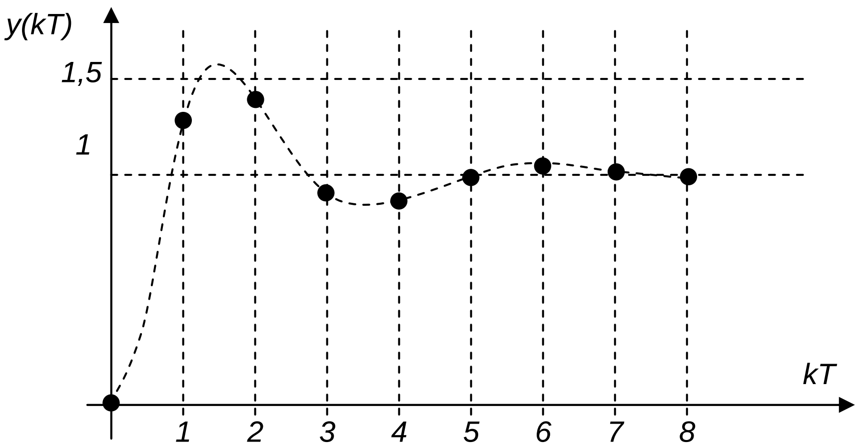
Resultados del ejemplo para T=1seg y K=2



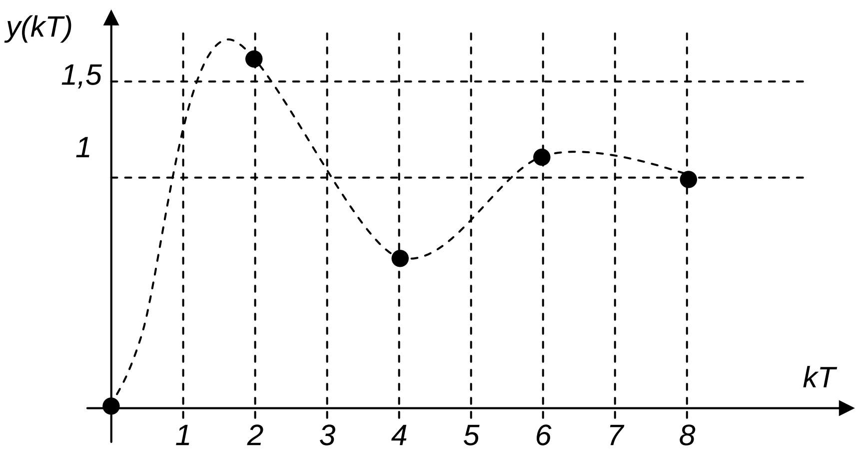
Resultados del ejemplo para T=2seg y K=2



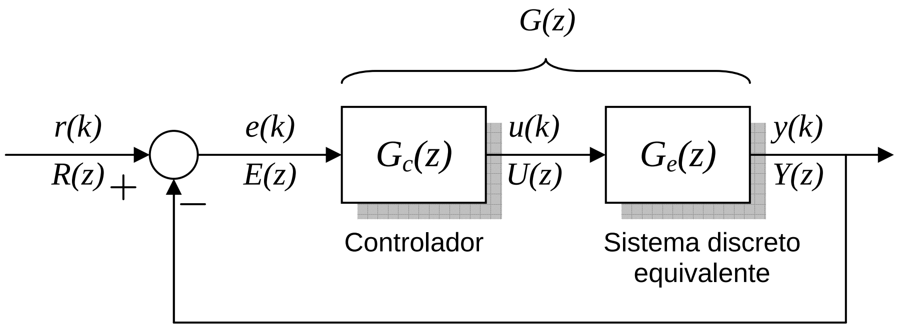
Repuesta temporal a un escalón para T=0,5seg y K=2



Repuesta temporal a un escalón para T=1seg y K=2

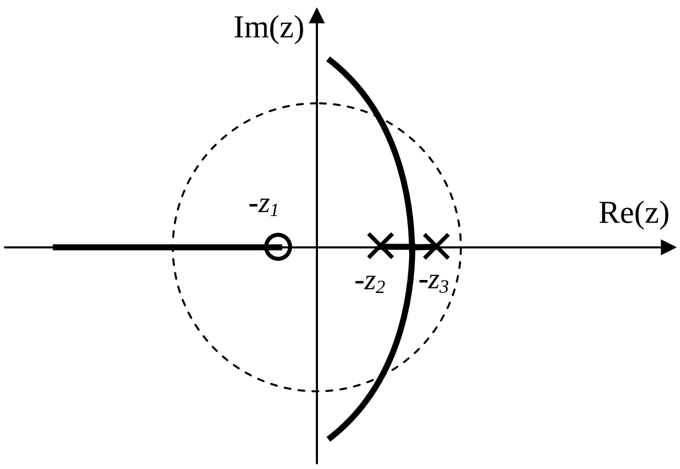


Repuesta temporal a un escalón para T=2seg y K=2

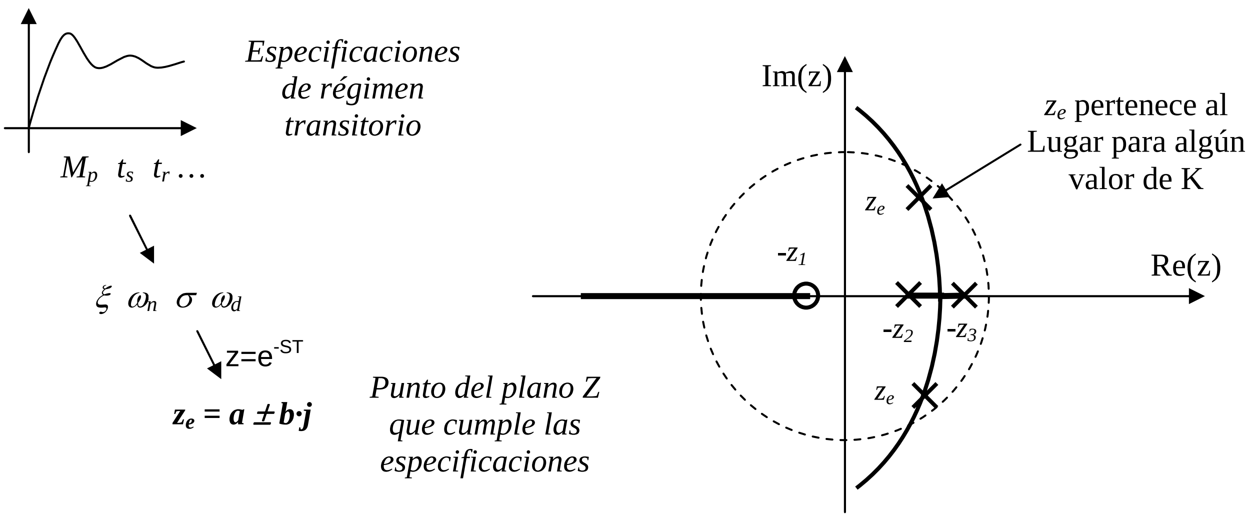


$$G_e(z) = \frac{z + z_1}{(z + z_2)(z + z_3)}$$

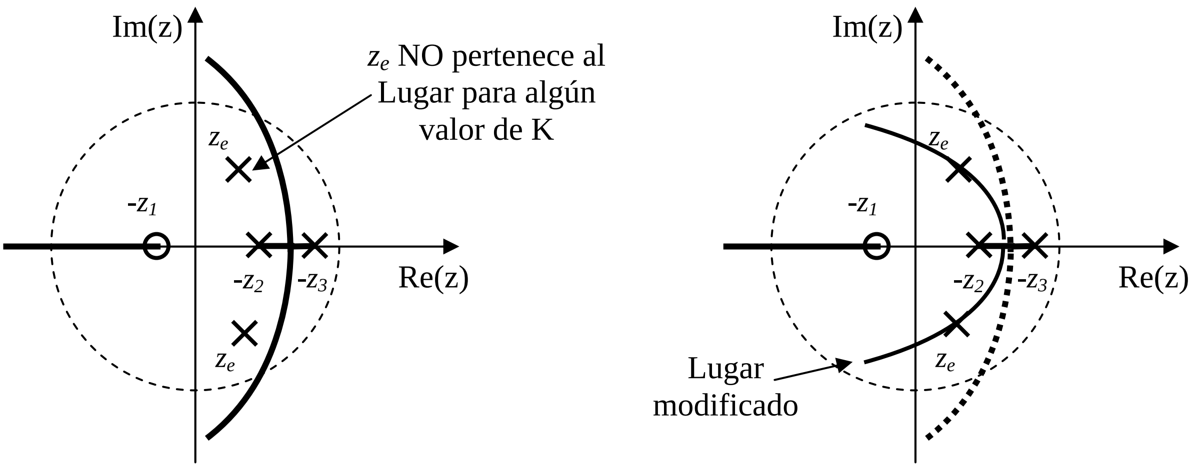
Ejemplo de sistema de control digital



Lugar de las Raíces tomando $G_c(z)$ = K (Controlador P)



Si el punto dado por las especificaciones de régimen transitorio pertenece al Lugar de las Raíces basta con un controlador P y ajuste del valor de K.

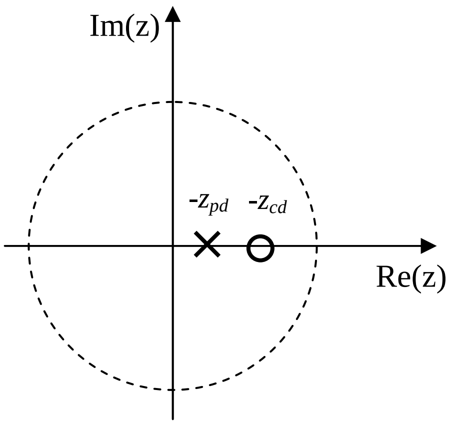


Si el punto dado por las especificaciones de régimen transitorio no pertenece al Lugar de las Raíces hay que modificar el Lugar utilizando un controlador PD

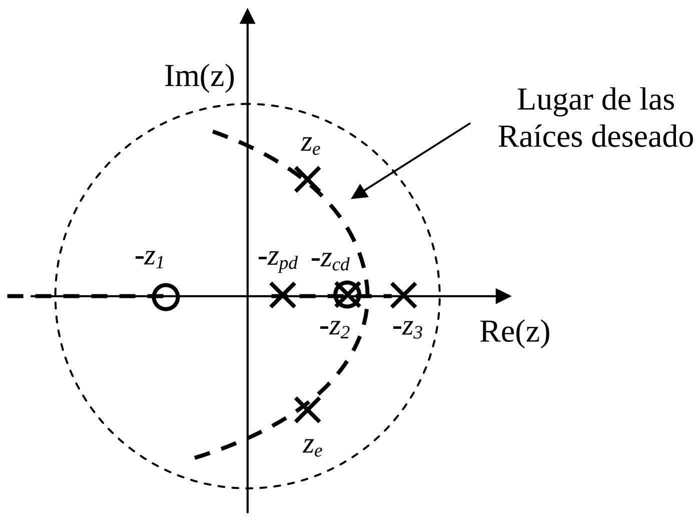
$$G_c(z) = K_d \frac{z + z_{cd}}{z + z_{pd}}$$

$$-z_{cd} > -z_{pd}$$

$$z_{cd} < z_{pd}$$



Controlador discreto PD



Ubicación del cero del controlador PD por cancelación de un polo de Ge(z)

Del criterio del argumento se obtiene el ángulo que debe aportar el controlador en z_e:

$$\left.\begin{array}{l} 1+G(z)=0 \rightarrow \angle G(z)=\pi=180° \\ G(z)=G_c(z)\cdot G_e(z) \end{array}\right\} \rightarrow \angle G_c(z)\cdot G_e(z)=180° \rightarrow \angle G_c(z)+\angle G_e(z)=180°$$

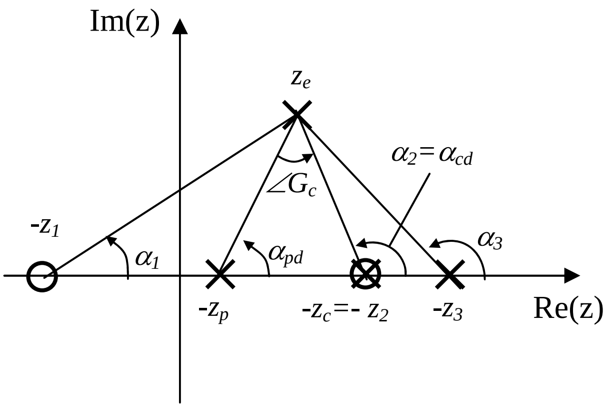
$$\angle G_c(z_e) = 180^o - \angle G_e(z_e)$$

Para calcular el ángulo del polo de $G_c(z)$ a partir del ángulo del cero:

$$G_c(z)=K\frac{z+z_{cd}}{z+z_{pd}} \rightarrow \angle G_c(z)=\angle(z+z_{cd})-\angle(z+z_{pd})$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{cd}=\angle(z_e+z_{cd}) \\ \alpha_{pd}=\angle(z_e+z_{pd}) \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_{pd} = \alpha_{cd} - \angle G_c(z_e)$$

Para la ubicación del polo del PD se aplica el criterio del argumento a z_e



$$Ge(z_e)=\frac{z_e+z_1}{(z_e+z_2)(z_e+z3)}$$

$$\angle Ge(z_e)=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$$

$$\alpha_1=\angle(z_e+z_1)=\arctan\frac{\mathrm{Im}(z_e)}{\mathrm{Re}(z_e)+(-z_1)}$$

$$\alpha_2=\angle(z_e+z_2)=180°-\arctan\frac{\mathrm{Im}(z_e)}{(-z_2)-\mathrm{Re}(z_e)}$$

$$\alpha_3=\angle(z_e+z_3)=180°-\arctan\frac{\mathrm{Im}(z_e)}{(-z_3)-\mathrm{Re}(z_e)}$$

$$\alpha_{pd}=\alpha_{cd}-\angle Gc(z_e)=\alpha_2-\angle Gc(z_e)$$

$$\tan\alpha_{pd}=\frac{\mathrm{Im}(z_e)}{\mathrm{Re}(z_e)-(-z_{pd})} \rightarrow z_{pd}$$

Ejemplo de cálculo de los ángulos y del polo del controlador PD

$$|G(z)|=1 \rightarrow |G_c(z)G_e(z)|=1 \rightarrow \left|K_d\frac{z+z_{cd}}{z+z_{pd}}G_e(z)\right|=1$$

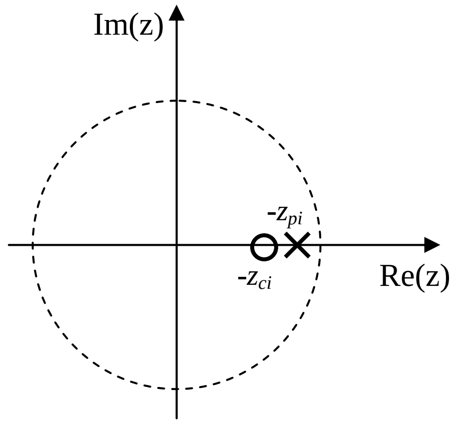
$$\text{En } z_e: \ K_d=\left|\frac{z_e+z_{pd}}{z_e+z_{cd}}\frac{1}{G_e(z_e)}\right|=\left|\frac{z_e+z_{pd}}{z_e+z_{cd}}\frac{(z_e+z_2)(z_e+z_3)}{z_e+z_1}\right|=\frac{|z_e+z_{pd}|}{|z_e+z_{cd}|}\frac{|z_e+z_2||z_e+z_3|}{|z_e+z_1|}$$

La ganancia K_d del controlador PD se calcula con el criterio del módulo aplicado a z_e

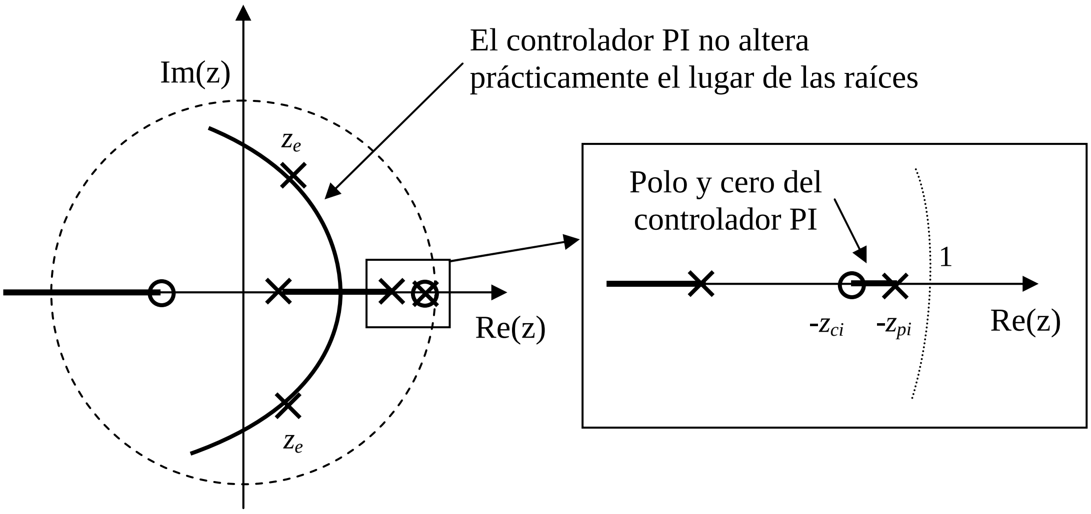
$$G_{ci}(z) = \frac{z + z_{ci}}{z + z_{pi}}$$

$$-z_{ci} < -zp_i$$

$$z_{ci} > z_{pi}$$



Controlador discreto PI



Ubicación Del cero y el polo del controlador PI: próximos al valor 1 del eje real

Constante de error y error sin el controlador PI (se podría aplicar también al error de posición):

$$K_v = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot G(z) < K_{ve} \rightarrow e_v = \frac{T}{K_v} > e_{ve} \quad \text{(no cumple especificación de error)}$$

Ganancia que aporta el controlador PI en régimen estacionario:

$$Ki = \lim_{z \to 1} \frac{z + z_{ci}}{z + z_{pi}} = \frac{1 + z_{ci}}{1 + z_{pi}}$$

Cálculo de los valores del cero y el polo del controlador PI :

$$K_{ve} = K_i \cdot K_v \rightarrow K_i = \frac{K_{ve}}{K_v} \rightarrow \frac{1 + z_{ci}}{1 + z_{pi}} = \frac{K_{ve}}{K_v} \rightarrow z_{ci} = \frac{K_{ve}}{K_v}\left(1 + z_{pi}\right) - 1 \quad \text{con } -z_{pi} \text{ próximo a 1}$$

Aplicación del controlador PI. Aumenta el valor de la constante de error en régimen estacionario para lograr un error e_{ve} dado por las especificaciones (sin alterar K) cuando el sistema no lo cumple por si sólo o después de incluir un controlador PD