

Señal continua

Señal muestreada

T: periodo de muestreo

$$T = \frac{1}{f_m} = (\text{s}) \quad f_m = \frac{1}{T} = (\text{Hz})$$

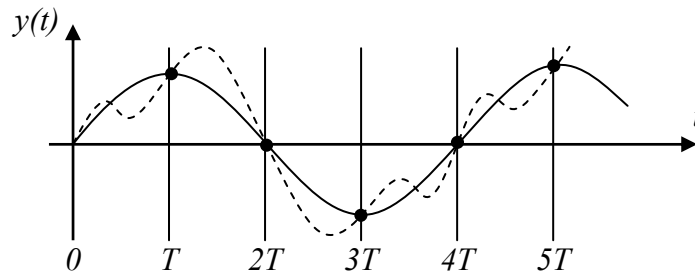
$$x(k) = \{0, 3, 2.7, 2.2, 2.7, \dots\}$$

Secuencia digital

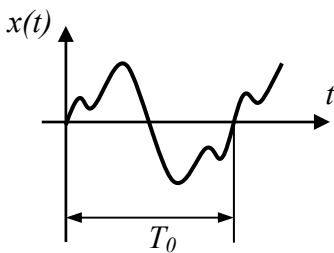
$$x_k = \text{Redondear}(x^*(k \cdot T))$$

$$\omega_m = 2 \cdot \pi \cdot f_m = \frac{2 \cdot \pi}{T} = (\text{rad} / \text{s})$$

Muestreo DE una señal continua



Efecto de un periodo de muestreo (T) inadecuado



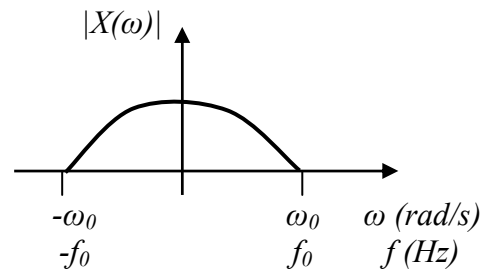
Frecuencia de x(t):

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

Representación temporal de una señal periodica

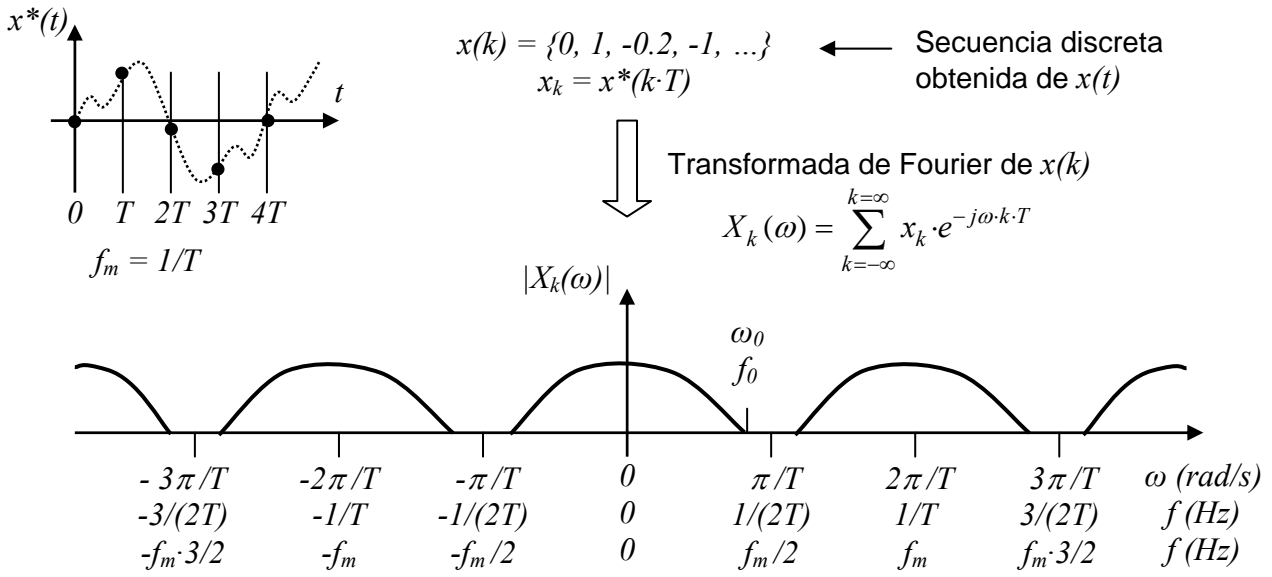
Transformada de Fourier de x(t):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$



Representación frecuencial de una señal periódica (banda limitada)

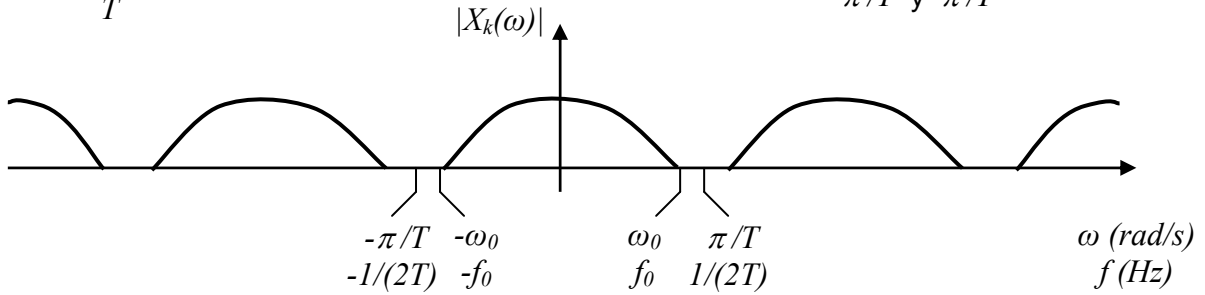
Transformada de Fourier de una señal continua x(t)



Transformada de Fourier de la secuencia discreta $x(k)$

T suficientemente pequeño:
 $\frac{\pi}{T} > \omega_0 \rightarrow \frac{1}{T} > 2f_0 \rightarrow f_m > 2f_0$

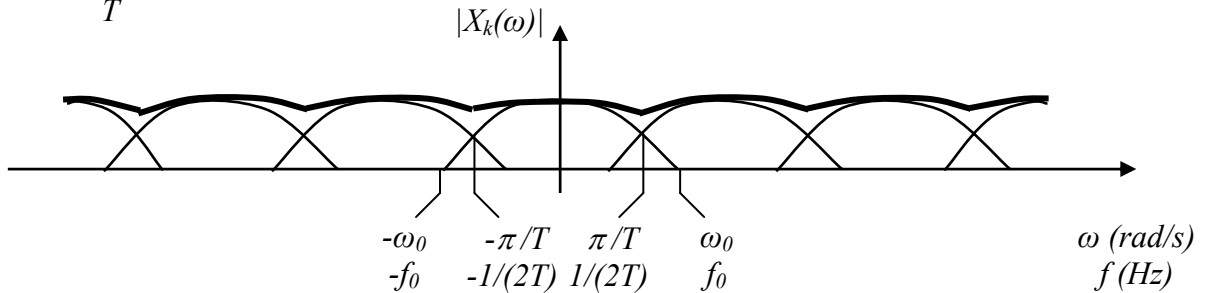
Se pueden extraer $|X(\omega)|$ y $x(t)$
 filtrando las componentes entre
 $-\pi/T$ y π/T



Transformada de Fourier de la secuencia discreta $x(k)$ con T suficientemente pequeño

T demasiado grande:
 $\frac{\pi}{T} < \omega_0 \rightarrow \frac{1}{T} < 2f_0 \rightarrow f_m < 2f_0$

Se produce *aliasing*
 No se pueden extraer $|X(\omega)|$ ni $x(t)$

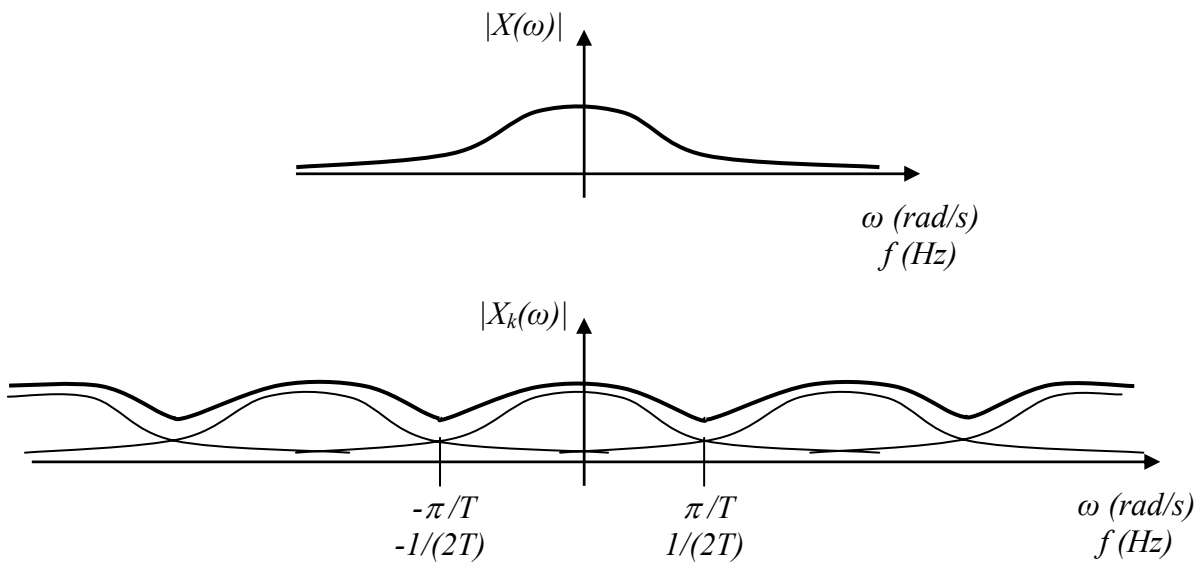


Transformada de Fourier de la secuencia discreta $x(k)$ con T demasiado grande

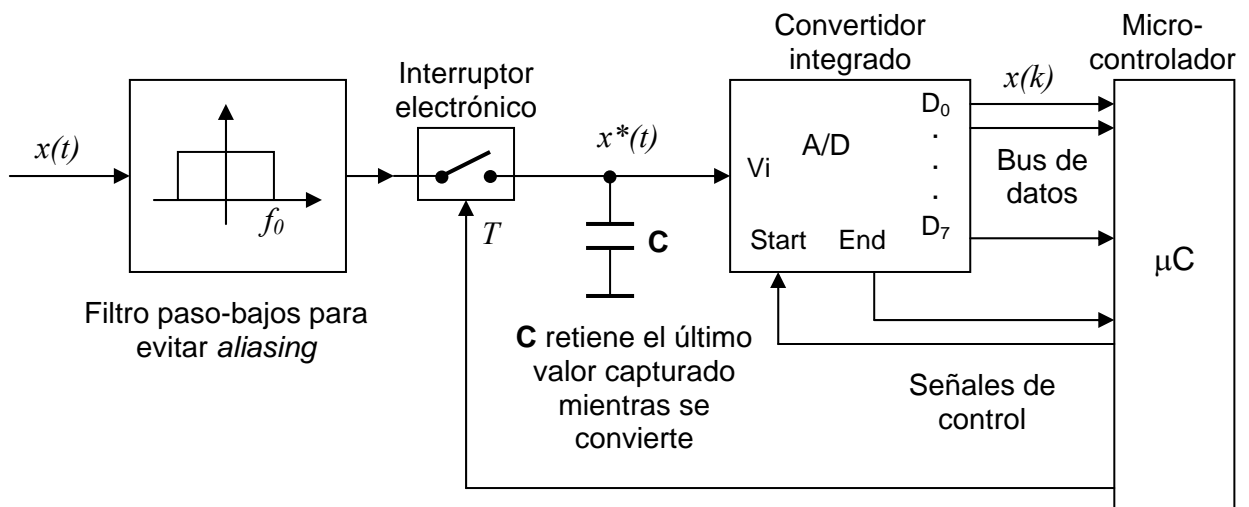
Para que el proceso de muestreo no suponga una pérdida considerable de información, y se pueda reconstruir la señal continua original a partir de la secuencia discreta de muestras, es necesario que:

$$\frac{\pi}{T} \geq \omega_0 \quad \text{o} \quad f_m = \frac{1}{T} \geq 2f_0$$

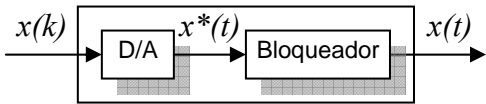
Teorema del muestreo



Caso de una señal que no es de banda limitada



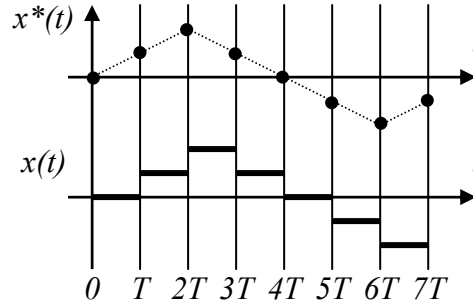
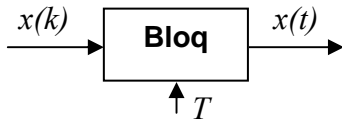
Esquema de un circuito de muestreo y conversión A/D típico



$x(k) = \{0, 1, 2, 1, 0, -1, -2, -1, 0, \dots\}$

Secuencia digital

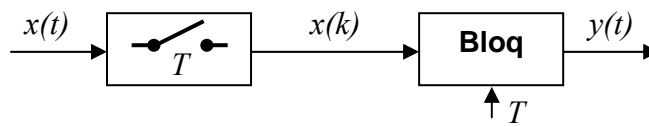
$x^*(kT) = x_k$



Señal intermedia

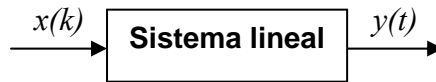
Señal reconstruida

Reconstrucción de una señal a partir de una secuencia



$y(t)$ será parecida a $x(t)$ si se cumple el teorema de muestreo al obtener $x(k)$ y el bloqueador es el adecuado

Reconstrucción de una señal continua muestreada



Respuesta temporal a una secuencia impulso en la entrada:

$$x(k) = \delta(k) = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

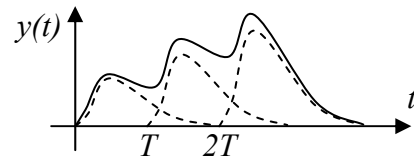
La entrada se puede expresar como:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \delta(k - n)$$

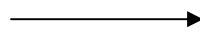
La salida se puede calcular como:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot h(t - nT)$$

$$x(k) = \{1, 2, 3\}$$

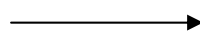


$$x_0 \cdot \delta(k) = 1 \cdot \delta(k)$$



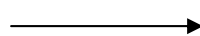
$$x_0 \cdot h(t) = 1 \cdot h(t)$$

$$x_1 \cdot \delta(k) = 2 \cdot \delta(k)$$



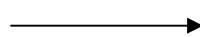
$$x_1 \cdot h(t) = 2 \cdot h(t)$$

$$x_2 \cdot \delta(k) = 3 \cdot \delta(k)$$



$$x_2 \cdot h(t) = 3 \cdot h(t)$$

$$x(k) = 1 \cdot \delta(k) + 2 \cdot \delta(k-1) + 3 \cdot \delta(k-2)$$



$$y(t) = 1 \cdot h(t) + 2 \cdot h(t-T) + 3 \cdot h(t-2T)$$

Modelado matemático de un sistema híbrido (I): respuesta a una secuencia impulso

Si se calculan las transformadas de Fourier de las señales:

Entonces:

$$Y(\omega) = \text{T.F.}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X_k(\omega)$$

$$H(\omega) = \text{T.F.}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

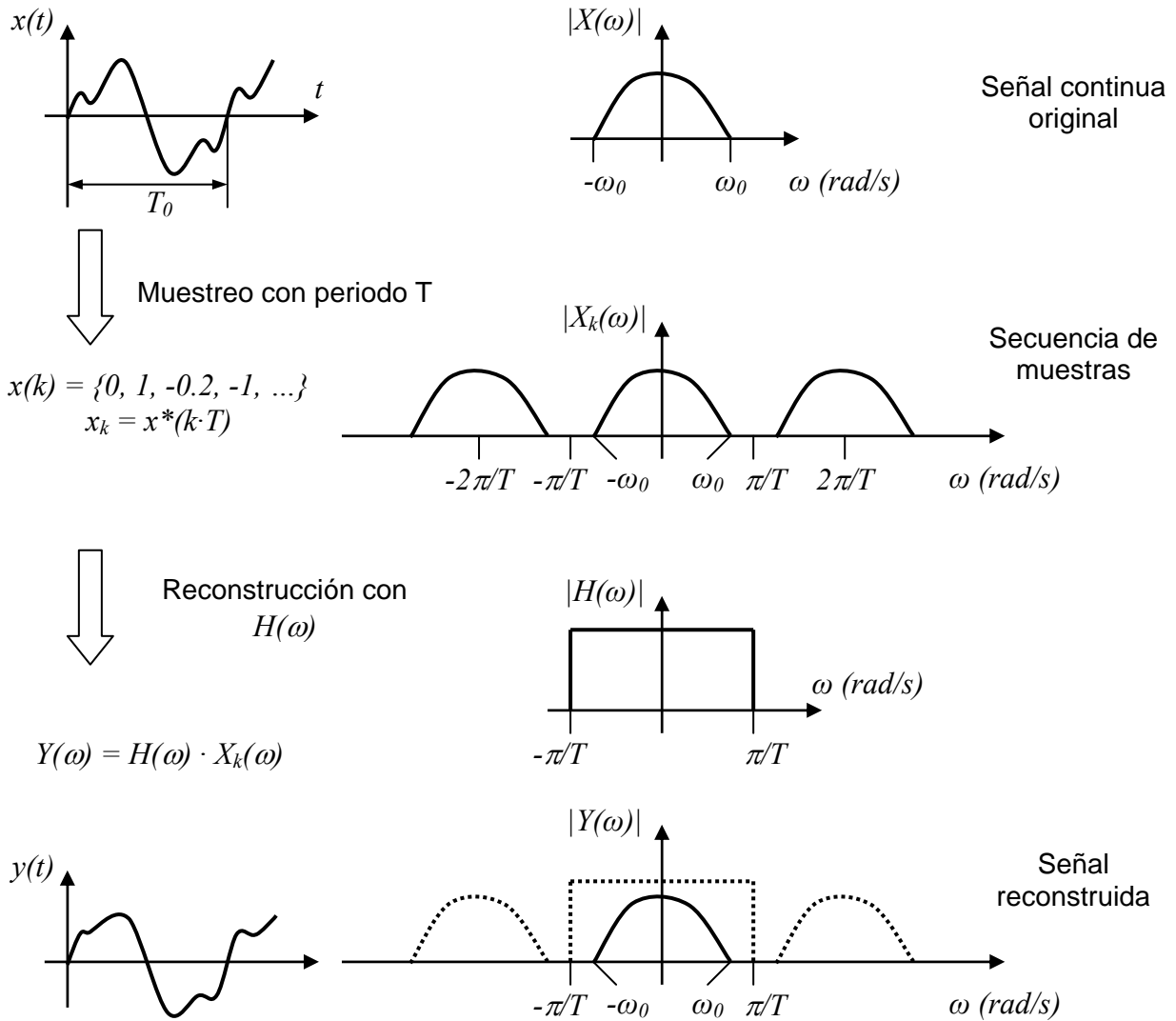
$H(\omega)$ es la función transferencia en frecuencia, o respuesta en frecuencia de un sistema

$$X_k(\omega) = \text{T.F.}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot h(t - nT) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (y(t)) e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot h(t - nT) \right) e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (y(t)) e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot h(t - nT) \right) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (t - nT)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot nT} dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot nT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t - nT) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (t - nT)} dt \rightarrow \\ &\rightarrow Y(\omega) = X_k(\omega) \cdot H(\omega) \end{aligned}$$

Modelado matemático de un sistema híbrido (II): función transferencia en frecuencia



Proceso de reconstrucción con un bloqueador ideal

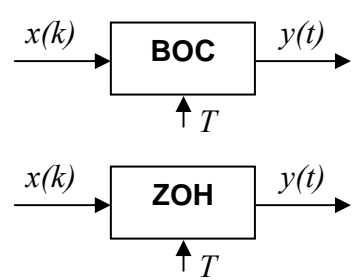
$$h(t) = T.F.^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{\text{sen } \omega_0 \cdot t}{\omega_0 \cdot t}$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot h(t - n \cdot T) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \frac{\text{sen } \omega_0 \cdot (t - n \cdot T)}{\omega_0 \cdot (t - n \cdot T)}$$

Para calcular un valor de $y(t)$ en cualquier instante t , hacen falta todos los valores de $x(k)$: $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \rightarrow$ No es causal

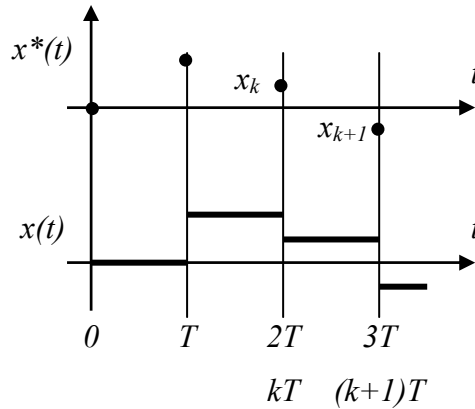
El bloqueador ideal no se puede llevar a la práctica

Función transferencia del un bloqueador ideal



$y(t) = x^*(k \cdot T) = x_k$
 para $k \cdot T \leq t < (k+1) \cdot T$

$x(k) = \{0, 2, 1, -1, \dots\}$

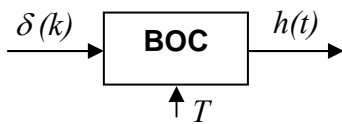


Secuencia digital

Señal intermedia generada con los valores de una secuencia

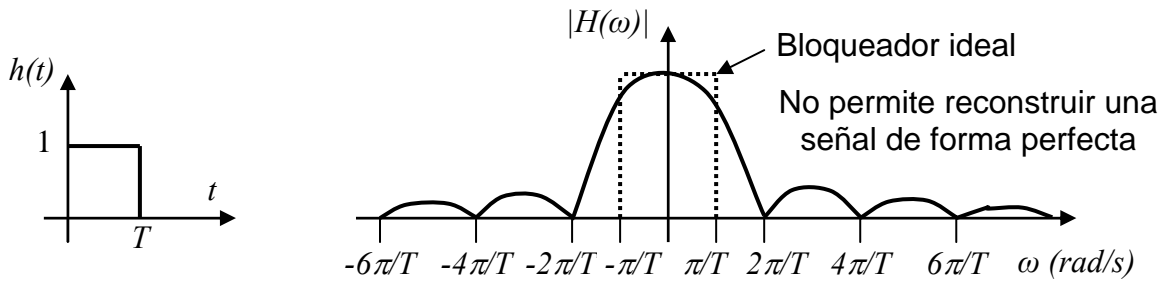
Señal reconstruida

Funcionamiento del bloqueador de orden cero

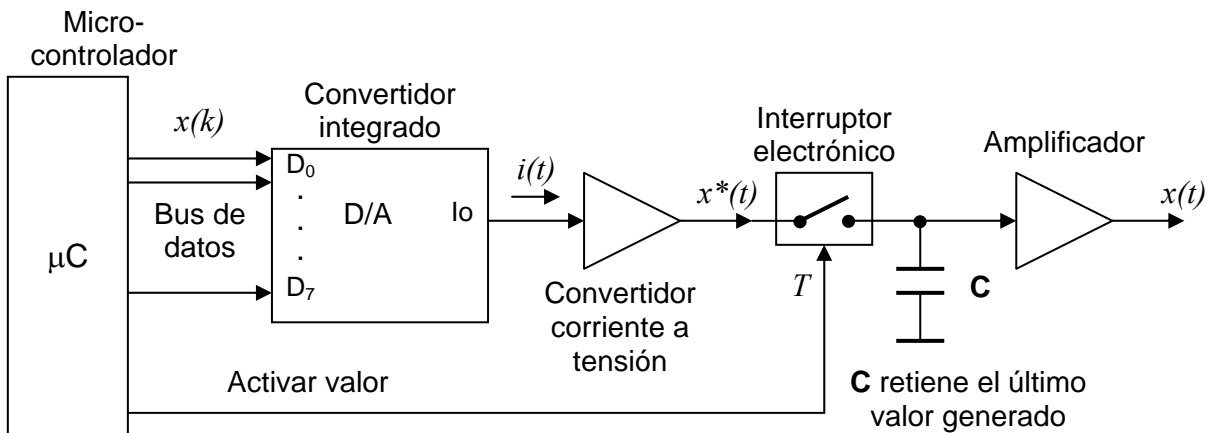


Si $x(k) = \delta(k) = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \rightarrow y(t) = h(t)$

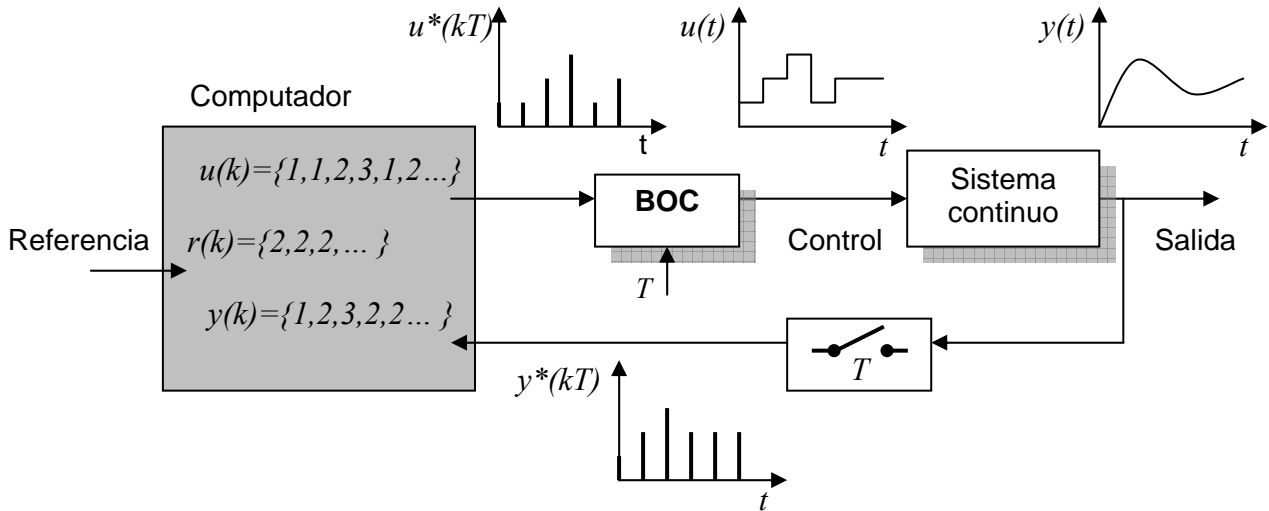
$H(\omega) = \text{T.F.}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \frac{1 - e^{-j \cdot \omega \cdot T}}{j \cdot \omega}$



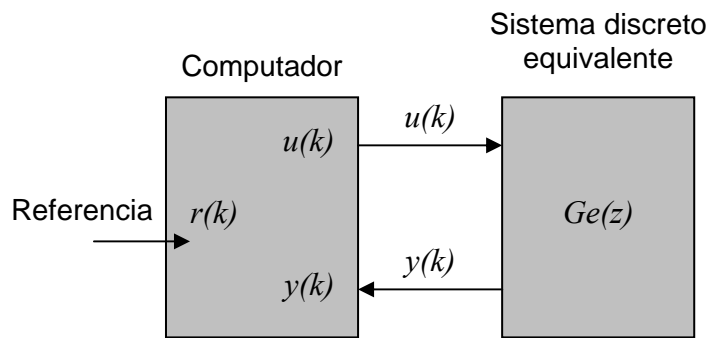
Función transferencia en frecuencia del bloqueador de orden cero



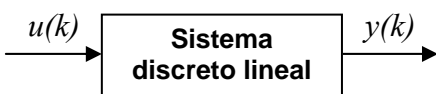
Esquema de un circuito de conversión D/A típico con bloqueador de orden cero



Sistema simple de control digital



Modelo matemático del sistema de control digital



Definición: Si $u(k) = \delta(k)$ entonces $y(k) = g(k)$

Utilidad:
$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot g(k-n) \quad (g(k-n) = 0 \quad n > k)$$

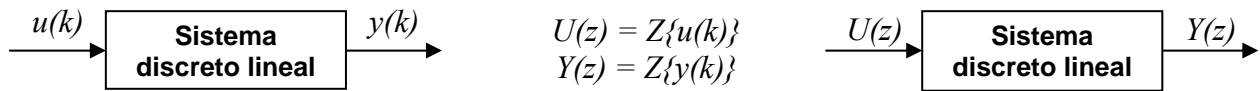


Definición: Si $u^*(kT) = \delta(kT)$ entonces $y^*(kT) = g(kT)$

Utilidad:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \cdot g(kT - nT) \quad (g((k-n) \cdot T) = 0 \quad n > k)$$

Concepto de la secuencia ponderación extendido a secuencias de muestras



$$U(z) = Z\{u(k)\}$$

$$Y(z) = Z\{y(k)\}$$

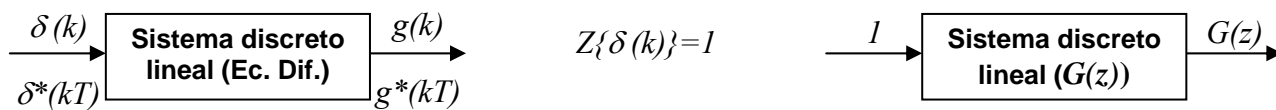
Ecuación en diferencias:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$Y(z)\{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}\} = U(z)\{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}\}$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} U(z) = G(z) \cdot U(z)$$

Obtención de una función transferencia G(z)



$$Z\{\delta(k)\} = 1$$

$$G(z) = Z\{g(k)\} = Z\{g^*(kT)\}$$

Otra forma de definir la función transferencia G(z)

$$x(t) \Leftrightarrow x(k)$$

Muestreo cada T segundos

$$x_k = x(k \cdot T)$$

Transformada de Fourier

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ (rad/s)}$$

Transformada de Laplace

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$s = a + bj \in C$$

Transformada discreta de Fourier

$$X_k(\omega) = F\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot k \cdot T}$$

Transformada discreta de Laplace

$$X_k(s) = L\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot e^{-s \cdot k \cdot T}$$

$$z = e^{j \cdot \omega \cdot T}$$

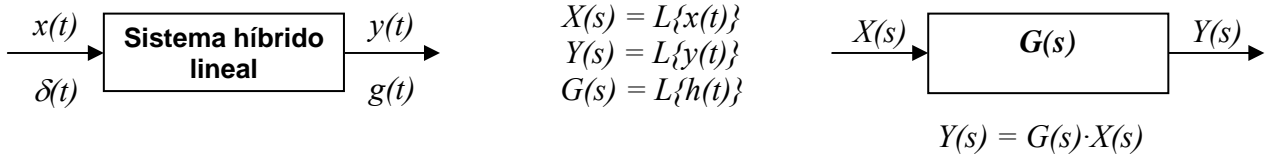
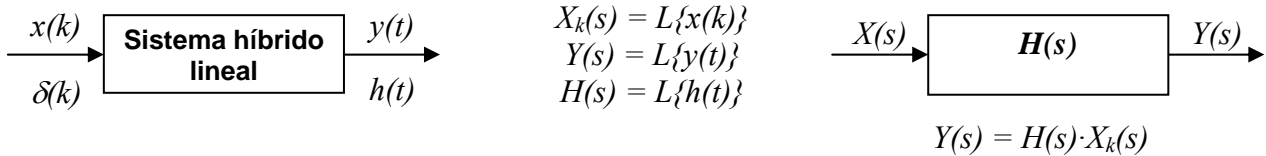
Transformada Z

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-k}$$

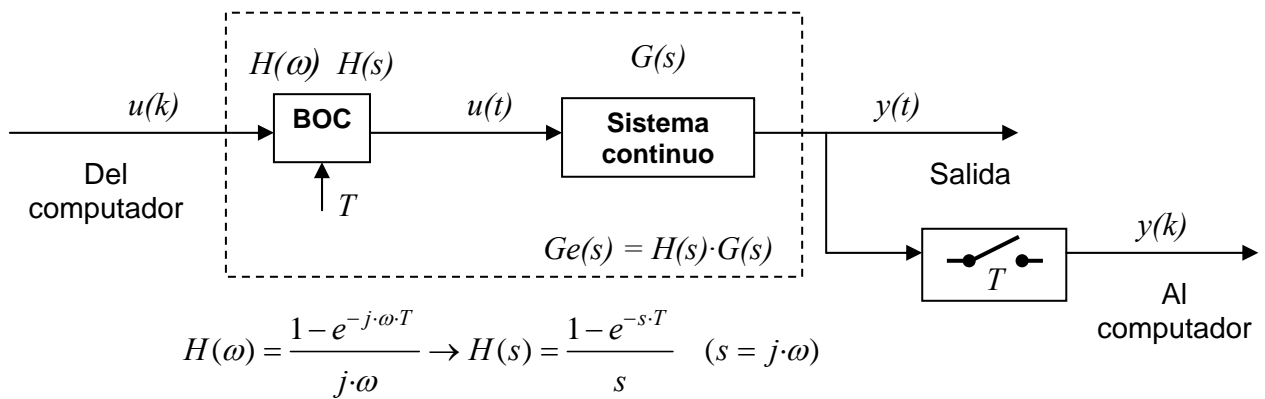
$$z = a + bj \in C$$

$$z = e^{s \cdot T}$$

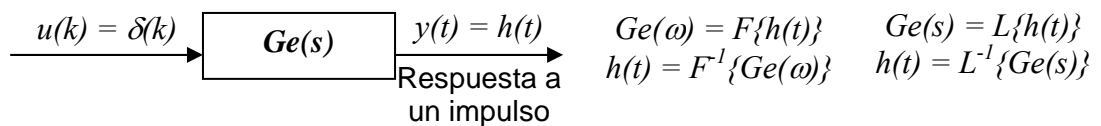
Relaciones entre las distintas transformadas



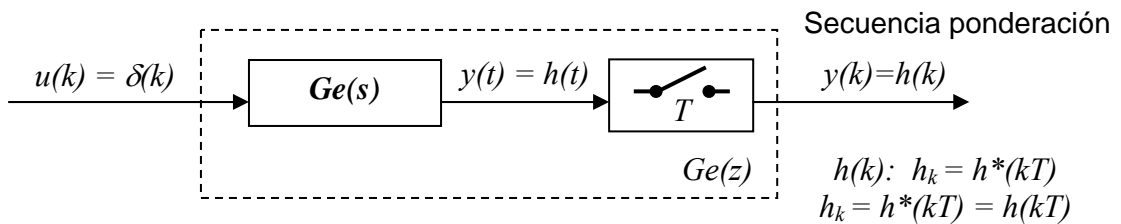
Modelo matemático de un sistema híbrido o continuo con la transformada de Laplace



De la relación entre la respuesta a un impulso de un sistema híbrido y su función transferencia:



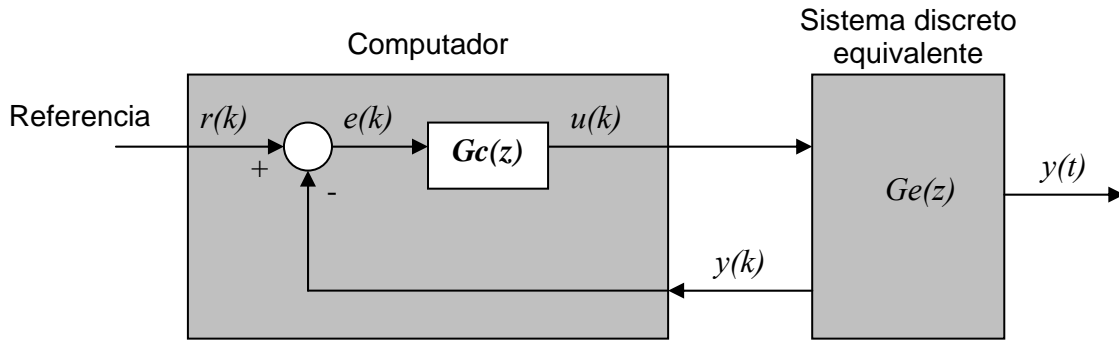
De la relación entre secuencia ponderación y función transferencia en z:



$$Ge(z) = Z\{h(k)\} = Z\{h^*(kT)\} = Z\{h(kT)\} = Z\{L^{-1}\{Ge(s)\}\} = Z\{L^{-1}\{H(s) \cdot G(s)\}\}$$

$$Ge(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right\} \right\}$$

Proceso para el modelado matemático del sistema de control digital



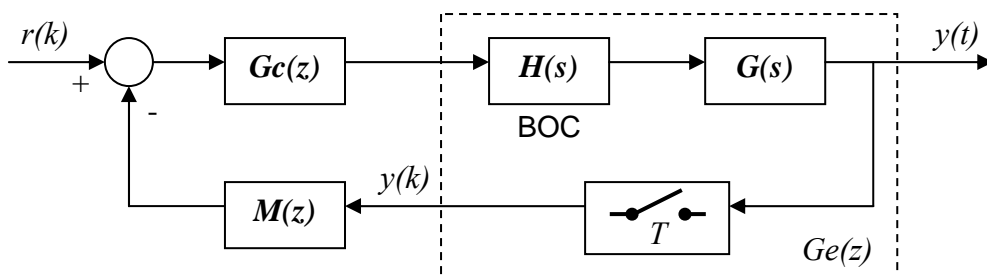
$$R(z) = Z\{r(k)\} \quad E(z) = Z\{e(k)\} \quad Y(z) = Z\{y(k)\}$$

$$\left. \begin{aligned} E(z) &= R(z) - Y(z) \\ Y(z) &= E(z) \cdot G_c(z) \cdot G_e(z) \end{aligned} \right\} \rightarrow E(z) = R(z) - E(z) \cdot G_c(z) \cdot G_e(z) \rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)}$$

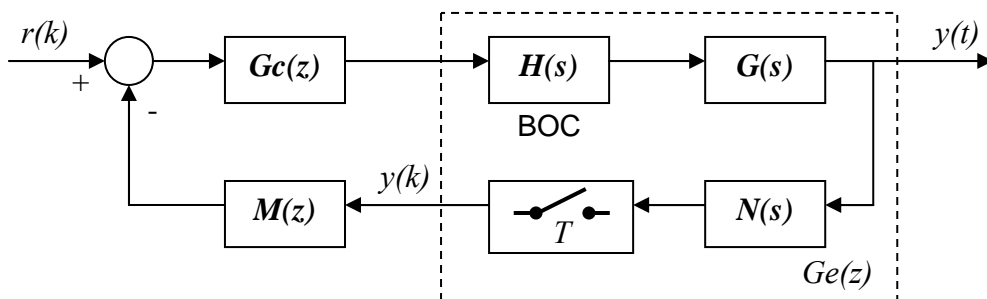
$$Y(z) = \frac{R(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)} \cdot G_c(z)G_e(z) = \frac{G_c(z)G_e(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)} R(z)$$

$$G_{bc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_e(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)}$$

Modelo matemático discreto del sistema de control digital al completo



$$G_{bc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_e(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)M(z)}$$



$$G_{ee}(z) = Z\{L^{-1}\{H(s)G(s)N(s)\}\} \rightarrow G_{bc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{ee}(z)}{1 + G_c(z)G_e(z)M(z)}$$

Otros casos que consideran la función transferencia del sensor (M(z) y N(s))