Sistema discreto

Secuencia de valores de entrada → Algoritmo (Ecuación en diferencias) → Secuencia de valores de salida

Definición de secuencia de valores

$$f : Z \to A \qquad A \subset R$$

Z: conjunto de enteros: índices de la secuencia

A: Subconjunto de valores reales: valores de la secuencia

Ejemplos de secuencias de valores

Secuencia finita: x(k)={3,4,12,5} $x_0=3$, $x_1=4$, $x_2=12$, $x_3=5$

Secuencia infinita por la derecha: $x(k)=\{2,3,4,...\} \quad x(k)=\begin{cases} 0 & k<0 \\ \text{k+1} & k \geq 0 \end{cases}$

$x_0=2$, $x_1=3$, $x_2=4$…

Secuencia infinita por la izquierda: $x(k)=\{...,3,2,\underset{0}{1},0,-1\} \quad x(k)=\begin{cases} -k+1 & k \leq 2 \\ 0 & k>2 \end{cases}$

… $x_{-2}=3$, $x_{-1}=2$, $x_0=1$, $x_1=0$, $x_2=-1$

Definición de secuencia retrasada o adelantada respecto a otra

y(k) está retrasada n posiciones respecto a u(k) si:

y(k)=u(k-n) ($y_k=u_{k-n}$)

y(k) está adelantada n posiciones respecto a u(k) si:

y(k)=u(k+n) ($y_k=u_{k+n}$)

Ejemplos:

u(k)={3,2,1,3,5…} y(k)=u(k-2)={0,0,3,2,1,3,5…}

u(k)={1,2,3,4…} y(k)=u(k+2)=$\left\{1,2,\underset{0}{3},4\right\}$

Operaciones con secuencias

$x(k) = u(k) + y(k)$ $(x_k = u_k + y_k)$ $x(k) = m \cdot y(k)$ $(x_k = m \cdot y_k)$

Secuencias usadas comúnmente como entradas de prueba

Secuencia escalón de amplitud unidad: $1(k) = \{1,1,1,1,\dots\}$

Secuencia impulso de amplitud unidad: $\delta(k) = \{1,0,0,0,\dots\}$

Toda secuencia se puede expresar como suma de secuencias impulso

$$u(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \cdot \delta(k-n)$$

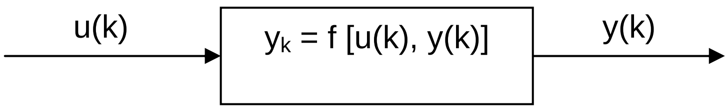
Ejemplo:

$u(k)=\{2,4,8\}= 2\cdot\{1,0,0,0,\dots\} + 4\cdot\{0,1,0,0,\dots\} + 8\cdot\{0,0,1,0,\dots\} = 2\cdot\delta(k) + 4\cdot\delta(k-1) + 8\cdot\delta(k-2)$

Definición de secuencia acotada:

$$x(k),\ \ x_k \in R \ \text{ está acotada si } \ \exists c \,/\, |x_k| \le c \,\forall k \in Z$$

Clasificación de los sistemas discretos



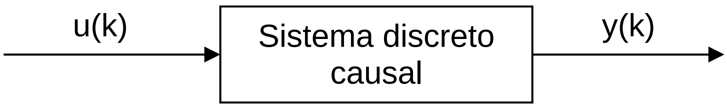
Estáticos: $y_k = f(u_k)$

Dinámicos no causales: $y_k = f(\cdots y_{k-1}, y_{k-2}, y_k, y_{k+1}, y_{k+2} \cdots, \ \cdots u_{k-2}, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, u_{k+2} \cdots)$

Dinámicos causales: $y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2} \cdots, \ \ u_k, u_{k-1}, u_{k-2} \cdots)$

Dinámicos causales lineales: $y_k = a_1\cdot y_{k-1} + a_2\cdot y_{k-2} + \cdots + b_0\cdot u_k + b_1\cdot u_{k-1} + b_2\cdot u_{k-2} + \cdots$

Secuencia ponderación



Si $u(k) = \delta(k) = \{1,0,0,0,\ldots\} \rightarrow y(k) = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\} = g(k)$ (g_k=0 para k<0)

g(k) es la secuencia ponderación

Propiedad de convolución

$$y(k) = u(k) * g(k) \Leftrightarrow y_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot g_{k-n}$$

$$y(k) = g(k) * u(k) \Leftrightarrow y_k = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot u_{k-n}$$

Definición de la Transformada Z:

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot z^{-k} \quad \text{con } z = a + bi \in C$$

Propiedades de la Transformada Z:

Linealidad

$$\left.\begin{array}{l} Z\{x(k) + y(k)\} = Z\{x(k)\} + Z\{y(k)\} \\ Z\{a \cdot x(k)\} = a \cdot Z\{x(k)\} \end{array}\right\} Z\{a \cdot x(k) + b \cdot y(k)\} = a \cdot Z\{x(k)\} + b \cdot Z\{y(k)\}$$

Desplazamiento

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow Z\{\cdot x(k-a)\} = z^{-a} X(z)$$

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow Z\{x(k+1)\} = z \cdot X(z) - z \cdot x_0$$
$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow Z\{x(k+2)\} = z \cdot Z\{x(k+1)\} - z \cdot x_1 = z^2 \cdot X(z) - z^2 \cdot x_0 - z \cdot x_1$$

Producto por una exponencial

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow Z\left\{a^k \cdot x(k)\right\} = X(a^{-1} \cdot z) = X(z/a)$$

Traslación compleja

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow Z\left\{e^{-a \cdot k} \cdot x(k)\right\} = X(e^a \cdot z)$$

Teorema del valor inicial

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow x_0 = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Teorema del valor final

$$Z\{x(k)\} = X(z) \rightarrow x_\infty = \lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1}\left[\left(1 - z^{-1}\right) X(z)\right] = \lim_{z \to 1}\left[\frac{z-1}{z} X(z)\right]$$